VORLESUNGEN

ÜBER

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

HERAUSGEGEBEN VON

MORITZ CANTOR

UNTER MITWIRKUNG DER HERREN
V. BOBYNIN, A. v. BRAUNMÜHL, F. CAJORI, S. GÜNTHER, V. KOMMERELL,
G. LORIA, E. NETTO, G. VIVANTI, C. R. WALLNER

VIERTER BAND.

VON 1759 BIS 1799.

MIT 100 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

Vorwort.

Wäre es nicht landläufige Übung, einem neu erscheinenden Bande einige, wenn auch nur kurze, ankündigende Worte vorauszuschicken, so würde ich am liebsten von jedem Vorworte Abstand nehmen. Fehlt mir doch die dem Verfasser innewohnende Berechtigung, den der Öffentlichkeit übergebenen Band als mir angehörend zu bezeichnen. Die Herren Günther, Cajori, Netto, Bobynin, v. Braunmühl, Kommerell, Loria, Vivanti, Wallner als Verfasser der Abschnitte XIX bis XXVII haben viel stärkere Beiträge als der Verfasser des kurzen XXVIII. Abschnittes geliefert und könnten beanspruchen, ihre Arbeit einzuführen. Wenn mir gleichwohl von Anfang an überlassen blieb, ein Gesamtvorwort zu schreiben, so betrachte ich mich dazu als mit einer dreifachen Legitimation versehen, 1. als Verfasser der drei ersten Bände, 2. als Mittelsperson der Bearbeiter dieses IV. Bandes, 3. als der den Jahren nach Älteste unter den an der Entstehung des Bandes beteiligten Persönlichkeiten.

Unser IV. Band wird der Art seiner Fertigstellung entsprechend unzweifelhaft wesentlich von den ihm vorhergegangenen Bänden abweichen. Die Einheitlichkeit wird ihm fehlen, dagegen wird man den einzelnen Abschnitten zu ihrem Vorteile anmerken, daß deren Verfasser ihre ganze Geistesarbeit auf ein eng umgrenztes Gebiet beschränken durften. Möge der freundliche Leser diesem letzteren Vorzuge zu Liebe den ersteren verhältnismäßig geringeren Mangel entschuldigen.

Heidelberg, März 1908.

Moritz Cantor.

Inhaltsverzeichnis.

ABSCHNITT XIX

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

VON

S. GÜNTHER

Geschichte der Mathematik in selbständigen Werken, monographischen Arbeiten und Biographien; Wörterbücher; Ausgaben, Bearbeitungen und Wiederherstellungen von Klassikern.

Man hat das XVIII. Jahrhundert nicht selten das „philosophische" genannt, wogegen dem XIX. das Verdienst zuerkannt werden sollte, das „historische" zu sein. Diese Gegenüberstellung ist gewiß nicht ganz unberechtigt, allein in den zwischen 1760 und 1800 gelegenen vier Jahrzehnten nimmt doch auch schon das geschichtliche Interesse merklich zu, und nicht allein im Bereiche der im engeren Sinne hier in Betracht kommenden Disziplinen ist dieser Fortschritt wahrzunehmen, sondern auf allen Gebieten menschlichen Wissens macht sich die gleiche Erscheinung geltend. So hat denn auch das Studium der Geschichte der exakten Wissenschaften einen namhaften Aufschwung genommen, wie die folgenden Zeilen dies im einzelnen erhärten werden.

Als ein wesentlich unterstützendes Moment darf wohl das bezeichnet werden, daß sich in dem uns jetzt beschäftigenden Zeitraume die Gelegenheiten zu Veröffentlichungen stetig mehren und verbessern. Wenn die bis dahin verfaßten Werke über Geschichte der Mathematik und Astronomie noch gar viel zu wünschen übrig ließen, so daß auch da eben — von Weidler[1]) und Montucla[2]) abgesehen — meist nur ganz schwache Anfänge vorhanden waren, so mag ein sehr bestimmender Grund für diese Unvollkommenheit in dem Umstande erkannt werden, daß es noch fast ganz an Spezialarbeiten mangelte, jeder Autor also fast allein auf sich selbst und seine eigenen Hilfsmittel angewiesen war. Anders wurde dies, als einerseits die Veröffentlichungen der gelehrten Gesellschaften, andererseits die vorher noch so seltenen Zeitschriften in immer steigender Zahl rührigen Schriftstellern sich zur Verfügung stellten. Und gerade hier ist in der zweiten Hälfte unseres laufenden Jahrhunderts, zumal von 1780 an, sehr viel geleistet worden.

---

[1]) Vgl. diese Vorlesungen III², S. 497. [2]) Ebenda III², S. 500 ff.

Eine vortreffliche Zusammenstellung der mathematischen Zeitschriftenliteratur, dieses letztere Wort im allerweitesten Sinne genommen, verdankt man Rogg[1]), obwohl dieselbe, bei allem vom Verfasser aufgewendeten Fleiße, noch immer nicht als ganz vollständig betrachtet werden kann[2]). Diese Liste führt für unsere vier Dezennien periodische Herausgabe gelehrter Arbeiten von folgenden Korporationen an: Amsterdam, Basel, Berlin, Bologna, Boston, Breslau, Brüssel, Calcutta („Asiatic Researches“), Cortona (in Toscana), Danzig, Dessau, Dijon, Dublin, Düsseldorf, Edinburgh, Erfurt, Genf, Göttingen, Halle a. S., Harlem, Kopenhagen, Leipzig, Lissabon, London, Madrid, Mainz, Manchester, Mannheim, Middelburg (in den Niederlanden), Modena, München, Nancy, Neapel, Padua, Paris, St. Petersburg, Prag, Philadelphia, Rotterdam, Siena, Stockholm, Turin, Upsala, Wien, Zürich. Von gar mancher dieser Städte wäre der Name mehrmals zu nennen; so kommen z. B. von Berlin die Akademie der Wissenschaften und die „Naturforschenden Freunde“ als Herausgeber in Betracht. Vergleicht man das Verzeichnis mit demjenigen, welches sich für die erste Jahrhunderthälfte oder gar für noch frühere Zeiten herstellen ließe, so gewinnt man erst eine wirkliche Einsicht in die gewaltige Zunahme der gelehrten Produktion, welche mit den Anfängen des gewöhnlich als Aufklärungszeitalter gekennzeichneten Zeitabschnittes eingesetzt hat.

Von Zeitschriften im eigentlichen Wortsinne besaß vorher Deutschland nur die „Acta Eruditorum“, die ja auch eine reiche Fundgrube für den Historiker darstellen, und in Frankreich besaß das „Journal des Savants“ in den hundertundsiebenundzwanzig Jahren seines Bestehens (1665—1792) einen begründeten Ruf. Fachzeitschriften für die Mathematik und die zu ihr in Beziehung stehenden Wissenszweige gab es außer für die allerelementarsten Gebiete überhaupt noch nicht. Das Verdienst, eine solche geschaffen zu haben, kommt dem Leipziger Professor Karl Friedrich Hindenburg (1741—1808), dem Be-

[1]) Handbuch der mathematischen Literatur vom Anfange der Buchdruckerkunst bis zum Schlusse des Jahres 1830, 1. Abteilung, Tübingen 1830, S. 282 ff.
[2]) Es fehlen u. a. die beiden Publikationen der Universität Erlangen („Erlanger Gelehrte Anzeigen“; „Fränkische Sammlungen von Anmerkungen aus der Naturlehre, Arzeneygelahrtheit und Ökonomie“), sowie das inhaltreiche „Journal de Trevoux“ (kleine Stadt nördlich von Lyon). Auch Florenz ist in gewissem Sinne zu nennen, denn dort blühte längere Zeit die in der Geschichte der experimentellen Befragung der Natur einflußreich gewordene „Versuchsakademie“. Vgl. hierzu G. Targioni-Tozzettis (1712—1783) vierbändiges Werk (Notizie degli aggrandimenti delle scienze fisiche, accaduti in Toscana nel corso di anni sessanta nel secolo XVII, Florenz 1780). Ferner sind noch die Memorie dell'Accademia Virgiliana von Mantua und die Memorie della Società Italiana delle scienze von Verona zu bemerken.

gründer der kombinatorischen Analysis, zu. Derselbe gab zusammen mit dem Astronomen Johann Bernoulli[1]) von 1786—1788 das „Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik" heraus, nachdem er zuvor zusammen mit anderen Redakteuren, nämlich dem Physiker Christlieb Benedikt Funck (1736—1786) und dem Kameralisten Nathanael Gottfried Leske (1751—1786) bei der Herausgabe einer von 1781—1785 in Gang erhaltenen Vierteljahrsschrift von verwandtem Charakter, bei dem „Leipziger Magazin für Naturkunde, Mathematik und Astronomie" beteiligt gewesen war. Für sich allein leitete Hindenburg sodann von 1795 bis 1800 das „Archiv für die reine und angewandte Mathematik" (11 Hefte), ein Organ von reichem und vielseitigem Inhalte, an dem auch die Geschichtsforschung, wie dieses Kapitel noch zeigen wird, nicht achtlos vorübergehen darf.

Selbstverständlich darf diese auch nicht übersehen, was die der Physik und Astronomie gewidmeten Zeitschriften enthalten. Für erstere ist als Bahnbrecher anzusehen der Abbé François Rozier (1734—1793), der in Paris die „Observations et Mémoires sur la physique, l'histoire naturelle et les arts" ins Leben rief[2]) und sie von 1773—1793 im Rufe eines geachteten Fachblattes zu erhalten wußte. Nach seinem Tode ging die Schriftleitung über in die Hände der beiden Naturforscher Henri Marie Ducrotay de Blainville (1778—1850) und Jean Claude Delamétherie (1743—1817); letzterer hatte auch früher bereits Rozier seine Unterstützung geliehen, während in den Jahren 1779—1785 der Abbé Jean André Mongez[3]) (1751—1788) als Mitherausgeber tätig gewesen war. Der Titel wurde in „Journal de physique" umgewandelt, und als solches dauerte es von An II (1793) bis zum Jahre 1828. Die Entstehung eines deutschen Konkurrenzorganes, welches jedoch die physikalische Tendenz noch etwas schärfer betonte, fällt erst in die letzte Zeit des uns hier beschäftigenden Zeitraumes. Im Jahre 1799 nämlich begannen unter der Ägide des damals in Halle angestellten und 1811 nach Leipzig berufenen Professors Ludwig Wilhelm Gilbert (1769—1824) die „Annalen der Physik" zu erscheinen, welche als Fortsetzung zweier noch nicht zu gleicher Bedeutung gelangten Unternehmungen des Chemikers Karl Friedrich Adolf Gren (1760 bis

[1]) Der dritte Träger dieses Namens in der berühmten Mathematikerfamilie (diese Vorlesungen III[2], S. 325). [2]) Die beiden ersten Jahrgänge (1771—1773) führen eine etwas abweichende Bezeichnung, nämlich diese: „Introduction aux observations sur la physique et l'histoire naturelle". [3]) Mongez war wissenschaftlicher Begleiter der unglücklichen Expedition des Kapitäns Jean-François De la Peyrouse, welche 1785 Frankreich verließ und niemals wiederkehrte, weil die beiden Schiffe an einer pazifischen Koralleninsel scheiterten und fast spurlos untergingen.

1798) zu treten bestimmt waren („Journal der Physik“, 1790—1794; „Neues Journal der Physik“, 1795—1798). Gilbert hatte eine glückliche Hand und brachte die „Annalen“ bald zu fröhlichem Gedeihen, so daß sie seinen Tod überdauerten und bis zum heutigen Tage, dank den glänzenden Namen Poggendorff, W. und E. Wiedemann, ihre Führerstellung, nicht bloß für die Grenzen des Vaterlandes, sich bewahrt haben. Als eine dritte wertvolle Sammlung zeitgenössischer Arbeiten hat zu gelten Lodovico Gasparo Brugnatellis (1761 bis 1818) in seinem Wohnorte Pavia veröffentlichte „Biblioteca fisica d'Europa“ (1788—1791), an welche sich das „Giornale fisico-medico“ anschloß; auch dieses hat nachher seinen Namen mehrfach gewechselt. Gasparo Brugnatelli, Brunacci und Configliacchi unterstützten den Vater des Erstgenannten bei der Herausgabe, und erst 1827 endigte die ganze Zeitschriftenserie.

Den deutschen und auswärtigen Vertretern der Sternkunde stellte zuerst der Berliner Astronom Johann Elert Bode (1747—1826) ein Organ für gelegentliche Veröffentlichungen zur Verfügung, indem er seinen Ephemeriden („Astronomisches Jahrbuch für die Jahre 1776—1829“, Berlin 1774—1826; dazu vier Supplementbände) noch einen für Aufsätze und Mitteilungen aller Art bestimmten Anhang beifügte. Wichtiger unter dem hier in Betracht kommenden Gesichtspunkte wurden die Zeitschriften Franz Xaver v. Zachs (1754 bis 1832), welche reich an geschichtlichen Originalabhandlungen und Berichten sind. Auf die kurzlebigen, in Verbindung mit Bertuch in Weimar herausgegebenen „Geographischen Ephemeriden“ (1798—1799) folgte die noch jetzt unentbehrliche, in Gotha gedruckte „Monatliche Korrespondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde“ (1800 bis 1813). Deren spätere Fortsetzung fällt nicht mehr in den Rahmen dieses Kapitels.

Gar manche ihn näher berührende Notiz findet der die literarische Tätigkeit jener Tage Verfolgende auch in periodischen Schriften von mehr allgemeinem, teilweise auch populärem Gepräge, für die sich besonders der aus England herübergekommene Name „Magazin“ eingebürgert hatte. Es gab eine ganze Reihe von Wochen- und Monatsschriften mit diesem Namen („Bremisches Magazin“, mit Fortsetzung von 1760—1766 reichend; „Göttingisches Magazin“ von Lichtenberg und Georg Forster, seit 1780; „Hamburger Magazin“, mit Fortsetzung von 1745—1784; „Stralsundisches Magazin“, 1767—1776). Der berühmte Physiker Georg Christoph Lichtenberg (1744 bis 1799) ließ nachmals das „Magazin für das Neueste aus der Physik und Naturgeschichte“ (Gotha 1784—1799) erscheinen, welches unter der Redaktion des früheren Mitarbeiters Johann Heinrich Voigt

(1751—1823) als „Magazin für den neuesten Zustand der Naturkunde in Rücksicht auf die dazu gehörigen Hilfswissenschaften" (1799—1806) neu auflebte. Nur ganz kurz hielt sich des in Göttingen dozierenden Chemikers Johann Friedrich Gmelin (1748—1804) „Journal der Naturwissenschaften" (Göttingen 1797—1798). Zwei nicht ganz wertlose Sammelwerke sind die folgenden: „Physikalische Bibliothek", Rostock-Wismar 1754—1761; „Monatliche Beiträge zur Naturkunde", Berlin 1752—1765; beide herausgegeben von dem Wismarer Rektor Johann Daniel Denso (1708—1795). Auch einzelne Gelehrte suchten ab und zu dem bestehenden Bedürfnis, vor die Öffentlichkeit treten zu können, durch Veranstaltung von Sammelschriften entgegenzukommen. So gibt es zwei Veröffentlichungen des bayerischen Akademikers Franz v. P. Schrank („Abhandlungen einer Privatgesellschaft von Naturforschern und Ökonomen in Oberteutschland", München 1792; „Sammlung naturhistorischer und physikalischer Aufsätze", Nürnberg 1796). Eine populärwissenschaftliche, zu ihrer Zeit sehr geachtete Zeitschrift hatte ihren Sitz in Holland („Allgemeener Konst- en Letter-Bode", 1788—1818). Von englischen Organen, die zugleich die Wissenschaft fördern und Wissen in weitere Kreise zu tragen bestimmt waren, seien „The Lady's Diary" und „The Penny Cyclopaedia" namhaft gemacht. Über den Einfluß, den die zahlreichen italienischen Literaturjournale auch auf den Entwicklungsgang der exakten Wissenschaften während des XVIII. Jahrhunderts ausübten, verbreitet sich sehr anregend G. Loria (Il „Giornale de' Letterati d'Italia" di Venezia e la „Raccolta Calogerà come fonti per la storia delle matematiche nel secolo XVIII, Cantor-Festschrift, 1899, S. 241 ff.).

Die Möglichkeit, Studienfrüchte viel leichter als früher einem großen Publikum vorlegen zu können, kommt naturgemäß darin zum Ausdruck, daß kleinere Veröffentlichungen häufiger, dickleibige Bücher seltener zu werden anfangen. Auch die Geschichte der mathematischen Wissenschaften muß sich der in den Verhältnissen begründeten Regel unterordnen. Es sind nur verhältnismäßig wenige neue Werke, die uns in den vier Jahrzehnten zwischen 1760 und 1800 entgegentreten, und man kann nicht behaupten, daß das, was geliefert ward, allen Ansprüchen vollkommen entsprach. Es läuft viel Mittelgut mit unter, wenn auch in manchen Fällen, wie sich gleich zeigen wird, die objektiver gewordene Anschauung der neuesten Zeit manches allzu herbe Urteil der Vergangenheit wenigstens einigermaßen richtigstellen mußte.

Wir haben hier vor allem das einzige selbständige Werk aus der Feder eines deutschen Schriftstellers im Auge, welches in das hier zur Besprechuug stehende Intervall gehört. Es stammt her von dem

bekannten, schon im dritten Bande mehrfach genannten Abraham Gotthelf Kaestner[1]), entstand aber leider erst, und zwar in der äußerlich sehr stattlichen Gestalt von vier Bänden[2]), in dem letzten Lebensabschnitte des bereits in das hohe Greisenalter eingetretenen, außerordentlich produktiven Gelehrten. Man begnügte sich späterhin nur zu leicht bei dem absprechenden Urteile eines allerdings durch scharfen kritischen Geist ausgezeichneten Historikers[3]), welches für diesen besonderen Fall völlig einem die ganze Tätigkeit des Mannes treffenden Sarkasmus des Princeps Mathematicorum zu entsprechen schien[4]). „Von einem Eingehen in die Wissenschaft", heißt es da, „ist fast nirgends die Rede. Das Einzige, was man aus dem Buche lernen kann, ist einige Bücherkenntnis. Aber auch hierin scheint den Verfasser mehr der Zufall, als irgend ein bestimmter Plan geleitet zu haben. Mit einem Worte, das Buch ist alles mögliche, nur keine Geschichte der Mathematik." Da heutzutage weit weniger mehr als früher Veranlassung dazu gegeben ist, von dem Werke nähere Einsicht zu nehmen, und da es wohl keine große Zahl von Fachmännern gibt, die sich das Zeugnis geben können, eine solche Einsicht wenigstens angestrebt zu haben, so möchte eine etwas eingehendere Würdigung des „sonderbaren Buches" gerade an dieser Stelle am Platze erscheinen.

Im XIX. Jahrhundert sind zumal auf einem nahe verwandten Gebiete verschiedene geschichtliche Gesamtdarstellungen ans Licht getreten, von denen man sagen kann, sie stellten das biographische Moment allzusehr in den Vordergrund; manche „Geschichte der

---

[1]) Über die Persönlichkeit des Mannes ist das Notwendige schon früher beigebracht worden (diese Vorlesungen III², S. 576). Eine gerechtere Würdigung derselben greift immer mehr Platz. Recht dankenswerte Beiträge zu einer solchen bietet auch die für die mathematische Hochschulgeschichte überhaupt viel Interessantes enthaltende Göttinger Dissertation von C. H. Müller (Studien zur Geschichte der Mathematik; insbesondere des mathematischen Unterrichtes, an der Universität Göttingen im XVIII. Jahrhundert, Leipzig 1904, S. 60ff.). Auch früher einmal ist ein darauf abzielender Versuch zu verzeichnen (Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Leipz. 1876, Kap. I, Anhang). [2]) Kaestner, Geschichte der Mathematik, Göttingen, 1. Band 1796, 2. Band 1797, 3. Band 1799, 4. Band 1800 (erschienen im Todesjahre des Autors). [3]) G. H. F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen, Berlin 1842, S. 24ff. [4]) Gauß, der Kaestner noch selbst gekannt hat, dessen Vorlesungen aber begreiflicherweise keinen Geschmack abgewinnen konnte, soll einmal geäußert haben, derselbe habe immer Geist und Witz an den Tag gelegt, wenn er von irgendwelchen anderen Sachen redete; ganz hätten ihn diese seine Eigenschaften auch dann nicht verlassen, wenn er von Mathematik im allgemeinen sprach; nur bei seinen eigentlich mathematischen Arbeiten hätten ihn jene völlig im Stiche gelassen.

Physik" ist in Wirklichkeit eine „Geschichte der Physiker". Nicht das biographische, wohl aber das bibliographische Element überwuchert nur allerdings bei Kaestner die Entwicklungsgeschichte in einem auch für die billigste Beurteilung tadelnswerten Maße. Allein da doch nun einmal, seltene Ausnahmen abgerechnet, die geistige Arbeit eines Zeitalters in seinen Preßerzeugnissen ihren natürlichen Ausdruck findet, so ist das Übel doch nicht so sehr groß, und wer es einmal über sich gewonnen hat, den senilen Stil des Verfassers, seine Neigung zu oft sehr unangebrachten Scherzen, das Hereinziehen fremdartigster Dinge als gegebene Tatsachen hinzunehmen, der kann — und hier liegt für uns ein bewußter Gegensatz im Verhältnis zu der oben verlautbarten Geringschätzung vor — aus den vier Bänden doch sehr viel Nützliches lernen. Die zahlreichen Buchauszüge sind teilweise verständnisvoll gearbeitet und bringen dem modernen Leser durch Einkleidung älterer Methoden in das neuzeitliche Gewand das Wesen der ersteren doch oft weit näher, als dies für den Fernerstehenden auch beim eifrigsten Studium der Originale erreichbar ist. Und wer sich die Mühe gibt, die Spreu vom Weizen zu sondern, der findet manches wertvolle Korn, dessen Besitz ihn für die aufgewandte Mühe entschädigen mag.

Der erste Band geht aus von den Anfängen der Positionsarithmetik und sucht deren Ausbildung durch Hervorhebung wichtiger Etappen, durchaus nicht immer ungeschickt, ins richtige Licht zu stellen; eine kurze Geschichte der Algebra reiht sich an. Die Lehrbücher und Bearbeitungen, welche der Bearbeitung unterstellt werden, erschöpfen zwar nicht die Fülle des vorhandenen Stoffes, geben aber doch ein ganz gutes Bild von der Literatur des XVI. Jahrhunderts, und zumal die etwas umständliche Schilderung der Werke von Christoph Rudolf, Stifel und Cardano orientiert über deren reichen, angesichts der Seltenheit dieser Werke den meisten unzugänglichen Inhalt. Der Anhang „Gelehrter Tand von Zahlen" wird jedem modernen Leser unschmackhaft sein, entbehrt aber keineswegs einer gewissen kulturgeschichtlichen Bedeutung. Die „Geschichte der theoretischen Elementargeometrie" sucht möglichst viele Nachrichten über Klassikerausgaben und Übersetzungen, auch solche in die arabische Sprache, zusammenzustellen; daß Kaestner nicht gar so unkritisch war, beweisen seine Bemerkungen über die angebliche „Katoptrik" Euklids. Dem dritten Paragraphen[1]) wird kein Bibliophile das Lob einer genauen und verständigen Buchcharakteristik streitig machen, und auch

[1]) Kaestner I, S. 289ff. „Die erste gedruckte Ausgabe von Euklids Elementen".

sachlich ist manche Einschaltung gar nicht wertlos, wie etwa die Prüfung der Parallelentheorie des Naṣîr Eddin[1]). Mit den Quadraturversuchen des Nikolaus Cusanus befaßt sich Kaestner[2]) weit gründlicher, als irgend sonst ein früherer oder späterer Geometer vor der zweiten Hälfte des XIX. Jahrhunderts. Auch die „Geschichte der Trigonometrie" wird noch in der Jetztzeit von Historikern nicht ungerne zu Rate gezogen, weil sie in ihren Mitteilungen über die seltenen Folianten und Quartanten eines Rheticus, Pitiscus, Broscius u. a. treu und zuverlässig ist, so daß man über die abstruse Form leichter hinwegsieht. Ebenso ist der Abriß der Geschichte der Feldmeßkunst nicht arm an brauchbaren Einzelheiten.

An der Spitze des zweiten Bandes steht die Geschichte der Perspektive, und ihr folgt die „Geschichte der geometrischen Analysis und höheren Geometrie", in welch letzterer die Notizen aus Commandino, Werner und Maurolico einen etwas höheren Standpunkt einnehmen. Wenn auch eine Übersicht über die „Mathematica Collectio" des Pappus strenge genommen nicht an diese Stelle gehört, so mußte sie[3]) doch damals, da die antike Mathematik noch zu den recht wenig bekannten Dingen gehörte, einen erwünschten Bestandteil des Werkes bilden. Auch über die Urgeschichte der Lehre von asymptotischen Gebilden erfährt man Wissenswertes[4]). Die Geschichte der Mechanik legt zu viel Gewicht auf Nebensachen, z. B. die Maschinenkunde, die doch nur sehr bedingt hierher gehört, und dasselbe darf von der auf Optik bezüglichen Abteilung ausgesagt werden. Dagegen darf der Geschichte der älteren Astronomie wiederum das Lob sorgfältigen Eingehens auf bibliographische Seltenheiten — Nonius, Gemma Frisius, Reinhold und ganz besonders Tycho Brahe — nicht abgesprochen werden, und auch für die Anregungen, welche der reinen Mathematik aus der Himmelskunde zuflossen, fällt mancherlei ab. Wer jemals die wissenschaftlichen Bewegungen des Zeitalters, welches durch die Namen Coppernicus und Tycho gekennzeichnet ist, im Zusammenhange zu durchforschen unternommen hat, wird nicht anstehen, einzuräumen[5]), daß ihm die Kaestnersche Materialiensammlung für seinen Zweck von entschiedenem Nutzen gewesen sei.

Der noch jetzt brauchbarste Band ist ohne Zweifel der dritte, der in der Hauptsache das XVII. Jahrhundert, d. h. dessen erste Hälfte, abhandelt; über das Jahr 1650 wird nur insofern hinausgegangen, als

---

[1]) Kaestner I, S. 374 ff.; vgl. diese Vorlesungen I², S. 734. [2]) Ebenda I, S. 400 ff.; vgl. diese Vorlesungen II², S. 192 ff. [3]) Ebenda II, S. 82 ff. [4]) Ebenda II, S. 94 ff.; vgl. diese Vorlesungen II², S. 571. [5]) Es sei namentlich auf die Behandlung Maestlins (Kaestner II, S. 446 ff.) hingewiesen.

die Publizierung älterer Schriften nach jenem Termine noch stattgefunden hat. Die Darstellung der Kreisrechnung in ihrer interessantesten, einen Ludolf, Metius, Adrianus Romanus aufweisenden Periode[1]), die ins einzelne gehende Beschreibung der zu Raritäten gewordenen Napierschen Logarithmenwerke[2]), die freilich selber oft etwas ausschweifende Schilderung des ebenso genialen wie wunderlichen Faulhaber[3]), der vorher niemals geführte Nachweis[4]), daß sich bei Gregorius a Sto. Vincentio bereits die Quadratur der Hyperbel im Keime erkennen lasse, und eine Reihe anderer Paragraphen sichern dem Bande eine auch bei Anlegung eines strengeren Maßstabes nicht verschwindende Bedeutung. An der behaglich breiten Auslassung über Visierkunst und Proportionalzirkel nimmt vielleicht ein Leser, der sich von jenen Lieblingsobjekten der Vergangenheit keine Vorstellung machen kann, einigen Anstoß; wer aber weiß, welche Rolle diese geometrischen Anwendungen in damaliger Zeit spielten, und daß ein Kepler, ein Galilei ihnen ihre vollste Beachtung schenkten, der wird nichts dawider haben, hier ganz bequem in eine Literaturgattung eingeführt zu werden, deren Bestandteile er sich sonst mühsam zusammenzusuchen genötigt wäre. Daß Kaestner sich dann gelegentlich verleiten läßt, auch von weniger bedeutenden Produkten, wie z. B. von den auf einem ziemlich niedrigen Niveau stehenden technischen Skizzen des Ingenieurs Furttenbach[5]), sehr ausgiebig Bericht zu erstatten, muß man mit in Kauf nehmen.

Wiederum der angewandten Mathematik gehört der vierte Band. Hier bilden für Mechanik, Optik und Astronomie die beiden Dioskuren des beginnenden XVI. Jahrhunderts recht eigentlich die Mittelpunkte, und vornehmlich ist es Kepler, den der Verfasser gründlich durchgearbeitet hat. Daß er sich in ziemlich gleichgültige Episoden in der Lebensgeschichte seines Helden mehr als nötig vertieft, mag man mit seiner berechtigten Vorliebe für den in der Geschichte der Menschheit so einzigartig dastehenden Mann entschuldigen. Auch die durch die Bekanntmachung der „drei Keplerschen Gesetze" entfesselte Bewegung, deren Signatur die Polemik zwischen den Anhängern des coppernicanischen und des tychonischen Weltsystemes darstellt, hat keine üble Kennzeichnung erfahren, so daß neuere Schriftsteller, welche sich

---

[1]) Kaestner III, S. 50ff. [2]) Ebenda III, S. 70ff.; vgl. diese Vorlesungen II², S. 730ff. [3]) Ebenda III, S. 111ff. [4]) Ebenda III, S. 245. Vgl. diese Vorlesungen II², S. 896. [5]) Ebenda III, S. 419ff. Wohl nirgendwo sonst machen sich die Zerfahrenheit, der Mangel an Rücksicht auf die wirklich interessanten Fragen und die Redseligkeit des Alters unangenehmer geltend, weil von allen Furttenbachschen „Erfindungen" höchstens die Anstellung ballistischer Versuche über das platte Alltagsleben hinausgeht.

diese Phase des Erkenntnisfortschrittes zum Studienobjekte ausersahen, ohne Kaestner in Verlegenheit gekommen sein würden[1]). Alles in allem wagen wir zu behaupten: Auch dieser Band, von einem gebrechlichen Manne im einundachtzigsten Jahre seines Lebens mit letzter Kraft niedergeschrieben, leistet dem Geschichtschreiber, der sich über gewisse Punkte der großen Sturm- und Drangbewegung im Zeitalter eines Cartesius, Galilei, Kepler zuverlässig unterrichten will, sehr nützliche Dienste, und wenn auch der deutsche Mathematiker fraglos nicht auf der Höhe eines Montucla stand, so muß man sich doch hüten, an seinem Gedächtnis ein Unrecht zu begehen und über der abstoßenden Außenseite das, was am Inhalt nutzbar und lobenswert ist, ganz zu vernachlässigen. Diese kleine Ehrenrettung glaubte ein Späterer, der seit mehr denn vierzig Jahren sich gar häufig Rats aus dem vermeintlichen Sammelsurium erholt hat, dem oft verkannten Literator Kaestner schuldig zu sein.

In Deutschland wurde von zusammenfassenden Schriften im übrigen nichts mehr hervorgebracht, wenigstens wenn wir nur die reine Mathematik ins Auge fassen. Höchstens die „Enzyklopädie" von Rosenthal[2]) könnte noch der Vollständigkeit halber genannt werden, und einem damals beliebten Lehrbuche[3]) ist ein kurzer historischer Abriß beigegeben. Ein Schriftchen von Hollenberg[4]) ist ziemlich bedeutungslos und scheint auch nur ganz wenig bekannt geworden zu sein[5]). Die Inauguraldissertation[6]) des bekannten Physikers Gilbert (s. S. 5) weist der Geschichte von vornherein nur einen sekundären Platz an.

Dagegen soll nicht verschwiegen werden, daß für den geschichtlich arbeitenden Mathematiker sich auch mancherlei aus den deutschen Schriften über Geschichte der Physik und Astronomie entnehmen läßt. Die erstere wurde im fraglichen Zeitraum mit einem Werke[7]) be-

[1]) Vgl. Günther, Die Kompromißweltsysteme des XVI., XVII. und XVIII. Jahrhunderts, Annales Internationales d'Histoire (Congrès de Paris 1900), Paris 1901, S. 121 ff. [2]) G. E. Rosenthal, Enzyklopädie aller mathematischen Wissenschaften, Gotha 1794—1797. [3]) B. F. Moennich, Lehrbuch der Mathematik, Berlin-Stralsund 1781—1784. Dieses Schaltkapitel, über welches Nesselmann (a. a. O., S. 23ff.) nicht ganz ungünstig urteilt, führt den Titel: Kurze Geschichte der Mathematik nach der Ordnung der Hauptstücke im Lehrbuche. [4]) Hollenberg, Nachrichten von dem Leben und den Erfindungen der Mathematiker, Münster i. W. 1788. [5]) Außer bei Nesselmann (a. a. O., S. 24) fanden wir es nirgendwo angeführt. [6]) L. W. Gilbert, De natura, constitutione et historia matheseos primae vel universalis seu metaphysices mathematicae commentatio I et II, Halle a. S. 1794—1795. Vgl. dazu L. Choulant, Versuch über Ludwig Wilhelm Gilberts Leben und Wirken, Ann. d. Phys., LXXVI (1824, S. 463ff.). Danach soll Gilbert gewisse Aufstellungen seiner Erstlingsschrift ausdrücklich wieder zurückgenommen haben. [7]) J. C. Fischer, Geschichte der Naturlehre, Göttingen 1800—1808.

reichert, dem hohe Verdienstlichkeit nicht abgesprochen werden darf, und welches man auch heute noch mit Vorteil zu Rate ziehen kann, weil es durchweg einen bequemen und sicheren Zugang zu den Quellen eröffnet. Steht Fischer auch für seine Person noch auf einem etwas beschränkten Standpunkte, wie ihm denn z. B. Huygens' Begründung des Brechungsgesetzes aus der mathematisch eingekleideten Vibrationstheorie des Lichtes gar nicht einleuchten will[1]), so hat er sich doch redliche Mühe gegeben, in jedem Falle den verschiedenartigsten Anschauungen gerecht zu werden. Sein Werk überragt weit dasjenige des minder exakten Murhard (1779—1853)[2]), das denn auch, und zwar ohne ersichtlichen Grund, ein Torso geblieben ist. Eine eigenartige Schöpfung ist eine anonyme Geschichte der Sternkunde[3]), welche bis zum Ende des XVII. Jahrhunderts reicht und manch brauchbare Nachricht enthält. Auch die deutsche Bearbeitung[4]) einer älteren Schrift von Cassini[5]) darf hier nicht vergessen werden; sehr ungleichmäßig gearbeitet, so daß mancher Zeitabschnitt gar nicht zu seinem Rechte gelangt, verbreitet sie sich, zumal in den Zusätzen des Herausgebers, über viele wissenswerte Dinge, die anderwärts mehr in den Hintergrund treten und die hier sachkundige Erörterung finden.

Frankreich sah am Schlusse der uns hier beschäftigenden Periode das grundlegende Werk von Montucla[6]) in neuer, sehr vermehrter Auflage erscheinen, deren Umfang sich auf vier Bände gesteigert hatte; die beiden letzten hatte der Astronom Lalande bearbeitet, ohne doch, wie an diesem Orte bereits ausgeführt ward[7]), die von dem Begründer selbst hergestellten Teile zu erreichen. In Montuclas Fußtapfen ist, teilweise allerdings nicht stets mit gleichem Glück, später Ch. Bossut (1730—1814) eingetreten, dessen Werk freilich erst dem XIX. Jahrhundert angehört und hier keiner Erwähnung teilhaftig werden könnte, wenn nicht ein Vorläufer desselben, Bossuts Discours

---

[1]) J. C. Fischer, Geschichte der Naturlehre II, Göttingen 1802, S. 47.
[2]) F. W. A. Murhard, Geschichte der Physik, 1. Band, Göttingen 1798—1799.
[3]) Geschichte der Astronomie von den ältesten bis auf gegenwärtige Zeiten in zwey Bänden, I, Chemnitz 1792. Als Verfasser zeichnet unter der Vorrede ein gewisser C. G. F., der sich hauptsächlich an Weidler (Historia Astronomiae, Wittenberg 1741) gehalten hat. Die äußerst zahlreichen Druckfehler stören den Leser in hohem Maße. [4]) J. L. Rost, Astronomisches Handbuch, neu herausgegeben von G. F. Kordenbusch, I, Nürnberg 1771, S. 1—120. Die Übersetzung hatte schon früher J. P. v. Wurzelbau besorgt; Kordenbusch nahm sie, die nicht in den Druck gelangt war, in die von ihm besorgte Neuauflage des Rostschen Handbuches auf und bereicherte sie mit Anmerkungen, die auf eine gute Sachkenntnis schließen lassen. [5]) Dom. Cassini, De l'origine et du progrès de l'astronomie et de son usage dans la géographie et dans la navigation, Paris 1709 (Recueil d'observations faites . . . par Messieurs de l'Académie Royale des sciences). [6]) Diese Vorlesungen III[2], S. 500 ff. [7]) Ebenda S. 501.

préliminaire 1784 in der Encyclopédie méthodique erschienen wäre[1]). Der gleichen Zeit etwa gehört Condorcet, Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain an, welche zahlreiche Auflagen erlebt hat. Eine ganz schwache Leistung war die „Entwicklungsgeschichte des menschlichen Geistes" von Al. Savérien[2]) (1750—1805); Nesselmann sagt[3]) von ihr, es sei unbegreiflich, daß noch acht Jahre nach dem Erscheinen der Montuclaschen Schöpfung „eine solche Mißgeburt" habe das Licht der Welt erblicken können. Der Vollständigkeit halber mag auch noch der geschichtliche Abriß in E. M. J. Lemoine D'Essoies' (1751—1816) Lehrbuche[4]) namhaft gemacht werden. Anerkennenswertes haben die Franzosen auf geschichtlich-astronomischem Gebiete zutage gefördert. Den zeitgeschichtlichen Essay[5]) von Al. G. Pingré (1711—1796) würde man nur ungerne missen, und die zahlreichen Schriften[6]) des vielseitigen, auf dem revolutionären Schafotte gefallenen J. S. Bailly (1736—1793) sind, wenn auch die Vorliebe ihres Verfassers für kühne Geschichtskon-

---

[1]) Lediglich dieser Umstand veranlaßt uns hier dazu, einige einschlägige Nachrichten einzuflechten. Von Bossuts Werke gibt es eine Doppelausgabe (Essai sur l'histoire générale des mathématiques, Paris 1802; Histoire générale des mathématiques, ebenda 1810). Nach der ersten Auflage sind die deutsche und die englische Übersetzung gearbeitet; erstere lieferte Reimer (Hamburg 1804), letztere Churchill — nicht Bonnycastle, wie man gemeiniglich liest — (London 1803). Nun zitiert aber Rogg (S. 174 des S. 4 von uns erwähnten Werkes) auch einen italienischen Bossut (Quadro dei progressi delle matematiche, tradotto dal Francese, Mailand 1793). Nach Nesselmanns Vermutung (a. a. O., S. 28) wäre das wahrscheinlich eine Übertragung des der Geschichte gewidmeten Abschnittes in Bossuts großem Kompendium (Cours de Mathématiques, Paris 1782). [2]) Savérien, Histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences exactes et dans les arts qui en dependent, savoir, l'arithmétique, l'algèbre, la géometrie, l'astronomie, la gnomonique, la chronologie, la navigation, l'optique, la méchanique, l'hydraulique, l'acoustique et la mousique, la géographie, l'architecture, avec un abrégé de la vie des auteurs les plus célèbres dans ces sciences, Paris 1766. [3]) Nesselmann, a. a. O., S. 20. [4]) Lemoine-D'Essoies, Traité élémentaire des mathématiques, Paris 1778. [5]) Pingré, Projet d'une histoire de l'astronomie du XVII[e] siècle, Paris 1756. Als an der Grenzscheide der hier zu behandelnden Periode stehend mag dieses Buch hier ebenso eine Stelle finden, wie das nur zum Teile hierher gehörige, von Scheibel (s. u.) gelobte von A. Y. Goguet (De l'origine des lois, des arts et des sciences, et de leurs progrès chez les anciens peuples. Paris 1758). Das letztere ist von Hamberger (Jena 1760—1772) ins Deutsche übertragen worden. Estèves Plagiat an Weidler (s. S. 3) (Histoire générale et particulière de l'astronomie, Paris 1755) wird durch diese Notiz vielleicht schon zu sehr geehrt. [6]) Bailly, Histoire de l'astronomie ancienne depuis son origine jusqu'à l'établissement de l'école d'Alexandrie, Paris 1775; Histoire de l'astronomie moderne depuis la fondation de l'école d'Alexandrie jusqu'à l'époche de 1781, ebenda 1779—1782; Lettres sur l'origine des sciences et sur celles des peuples de l'Asie, ebenda 1777.

struktionen manche Störung mit sich bringt, doch für ihre Zeit von großem Werte gewesen. Insbesondere die Monographie über die indische Astronomie[1]) bietet auch für die reine Mathematik verschiedene Anhaltspunkte.

Von anderen Ländern ist, soweit es sich um Schriften von mehr allgemeinem Gepräge handelt, nur noch England in Betracht zu ziehen. Es hat in G. Costard (1710?—1782) einen tüchtigen Historiker der Astronomie besessen, von dem wir noch weiter unten wiederholt zu sprechen haben werden, und der auch mit einem größeren Werke[2]) seine Spezialuntersuchungen beschloß. Dasselbe scheint keiner großen Verbreitung teilhaftig geworden zu sein; selbst Rud. Wolf kennt es nur von Hörensagen[3]). Man hat es da nicht mit einer geschichtlichen Darstellung im gewöhnlichen Wortsinne zu tun, sondern man würde seinem Inhalte nur dann gerecht werden, wenn man es als „Lehrbuch der Sternkunde auf geschichtlicher Grundlage" bezeichnete. Der Gebrauch des Globus steht im Vordergrunde, und auf mathematische Fragen wird nur gelegentlich eingegangen.

Den historischen Arbeiten haben sich, als eine notwendige Ergänzung, die bibliographischen anzureihen. Obenan steht hier das umfassende und verlässige Repertorium[4]) von J. E. Scheibel (1736 bis 1809), welches, sobald älteres Schrifttum zu berücksichtigen ist, noch jetzt einen unentbehrlichen Ratgeber abgibt. Recht brauchbar ist auch des uns schon bekannten Murhard (s. S. 13) „Bibliothek"[5]), der eine sehr geschickt gemachte Bibliographie einer physikalischen Spezialdisziplin[6]) vorangegangen war. Die Astronomie hat in dem bücherliebenden und bücherkundigen J. J. F. De Lalande (1732 bis 1807) einen Mann gefunden, der ihr ein literarisches Hilfsmittel von hoher Brauchbarkeit zu liefern am besten geeignet war. Gehört dasselbe auch bereits dem neuen Jahrhundert an[7]), so schließt es doch die Geschichte der beiden letzten Jahrzehnte des vorhergehenden in sich und durfte folglich an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben.

Enzyklopädien und Wörterbücher sind für unsere Zeitspanne nur

---

[1]) Bailly, Histoire de l'astronomie indienne et orientale, Paris 1787. [2]) Costard, The History of Astronomy with Application to Geography, History, and Chronology, London 1767.. [3]) R. Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877, S. 785. [4]) Scheibel, Einleitung zur mathematischen Bücherkenntnis, 19 Teile, Breslau 1769—1798. [5]) Murhard, Bibliotheca mathematica oder Literatur der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1797—1805. [6]) Murhard, Versuch einer historisch-chronologischen Bibliographie des Magnetismus, Kassel 1797. [7]) Lalande, Bibliographie astronomique, avec l'histoire de l'astronomie depuis 1781 jusqu'en 1802, Paris 1803. Auch Lalandes großes, vierbändiges Handbuch (Paris 1777—1781) ist reich an der Geschichte seiner Wissenschaft dienendem Stoffe.

in geringerer Anzahl anzuführen. An der Spitze stehen Diderots Encyclopédie und die später herausgekommene Encyclopédie méthodique. Das Sammelwerk[1]) des polyhistorisch veranlagten, doch aber mehr auf volkswirtschaftlichem als auf exaktwissenschaftlichem Arbeitsfelde originellen J. G. Büsch (1728—1800) erhebt keine höheren Ansprüche. Sehr hoch dagegen stand von Anfang an das Klügelsche Wörterbuch, dessen hohe Wertschätzung seitens der Fachmänner sich klar in dem Umstande offenbart, daß es noch bis tief ins XIX. Jahrhundert hinein fortgesetzt ward. Wir würden seiner — und noch weniger der Fortsetzungen von C. B. Mollweide und J. A. Grunert — nicht zu gedenken verpflichtet sein, weil erst im Jahre 1803 die Veröffentlichung begann, wenn man es nicht mit einigem Rechte als Konsequenz eines anderen, etwas älteren Werkes ansehen dürfte, welches Klügel im Bunde mit C. G. D. Müller und J. A. Renner herausgab[2]), und welches auch in seinen Einzelbestandteilen verbreitet wurde. Das „Gehlersche Physikalische Wörterbuch"[3]) war ebenso für Deutschland ein literarisches Ereignis[4]). Von französischen Autoren hat J. Lacombe (1724—1811) sich auf diesem Gebiete eifrig betätigt[5]). Auch Großbritannien lieferte einige Beiträge zu dieser Literaturgattung. So ließ A. Rees[6]) (1793 bis 1825) die ältere Sammlung von Chambers[7]) neu aufleben. In zwei starken Bänden ließ Ch. Hutton (1737—1823) ein mathematisch-physikalisches Lexikon[8]) erscheinen; und eben derselbe hat auch für die mathematischen Unterhaltungsschriften durch Herausgabe der wohl bedeutendsten Probe[9]) dieser — in neuester Zeit durch E. Lucas,

---

[1]) Büsch, Enzyklopädie d. histor., philosoph. und mathem. Wissensch., Hamburg 1775. [2]) Enzyklopädie oder zusammenhängender Vortrag d. gemeinnützigsten Kenntnisse, Berlin 1782—1784. [3]) Gehler, Physikalisches Wörterbuch, Leipzig 1787—1795. [4]) Davon, daß dieses Nachschlagewerk seinen Zweck erfüllte, legt am besten die Neubearbeitung Zeugnis ab, welche bedeutend später von Brandes, Muncke, Horner, L. Gmelin, C. H. Pfaff und J. J. v. Littrow unternommen ward (Leipzig 1825—1844) und nunmehr statt der fünf Bände des Originals (darunter ein Supplementband) deren zwanzig in Anspruch nahm. [5]) Lacombe, Dictionnaire encyclopédique des amusants des sciences mathématiques et physiques, Paris 1792. Poggendorff (Biogr.-Liter. Handwörterb. I, Sp. 1339) sagt von ihm, es umfasse die auf ein ähnlich beschaffenes Ziel gerichteten Werke von Macquer, Nollet, Ozanam, Guyot, Decremps und Pinetti. Als Nachtrag zum Kapitel der „mathematischen Ergötzungen" (diese Vorlesungen II², S. 768ff.; III², S. 103) finde noch ein anderes Erzeugnis Lacombes hier einen Platz: Dictionnaire des jeux mathématiques, Paris 1799. [6]) Rees, Chambers' Cyclopaedia, new Edition, London 1781—1786. In einer weiteren Auflage, die von 1802 an herauskam, sind diese vier Bände auf dreißig angewachsen. [7]) Diese Vorlesungen III², S. 510. [8]) Hutton, A Mathematical and Philosophical Dictionary, London 1795—1796. „Natural Philosophy" ist nach englischem Sprachgebrauche gleichbedeutend mit Physik. [9]) Hutton, Recreations in Mathematics and Natural Philosophy, London 1803.

Schubert, Ahrens u. a. zu neuem Leben erweckten — Art von Seitenzweig der exakten Disziplinen Sorge getragen.

Wir wenden uns nun denjenigen Arbeiten zu, welche sich in der Zeit zwischen 1760 und 1800 mit Einzelfragen aus dem Bereiche der mathematischen Wissenschaften beschäftigen. An die Spitze wollen wir diejenigen stellen, deren Gegenstand selbst wieder ein historischer ist, und es versteht sich von selbst, daß hier auch das biographische Moment, dessen Wertschätzung in der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts eine immer ausgesprochenere wird, Beachtung finden muß. Den Reigen mag L. Dutens (1730—1812) eröffnen, der sich in drei starken Bänden[1]) bemühte, dem Altertum die Kenntnis so ziemlich aller gewichtigeren Erfindungen und Entdeckungen der Folgezeit zuzuschreiben, der aber — ähnlich wie Bailly (s. S. 14) — diesem seinem Streben die Regeln der Kritik ganz und gar zum Opfer brachte[2]). Immerhin ein geistvoller Versuch, wie er von dem ersten Herausgeber[3]) der Werke des großen Leibniz nicht anders zu erwarten war. Die Schrift steht ziemlich vereinzelt da, wogegen an Lebensbeschreibungen und Elogien durchaus kein Mangel ist. Ob die Übersicht, die wir darüber im folgenden geben, eine vollständige ist, bleibe dahingestellt; wichtigere Arbeiten dürften wohl kaum außer acht geblieben sein.

Bleiben wir vorerst bei Deutschland stehen, so fällt uns zuerst R. E. Raspes (1736?—1794) Vorschlag[4]) zu einer Herausgabe der Leibnizschen Werke ins Auge, der freilich einstweilen keine Folgen hatte. Äußerst eifrig auf diesem für den Historiker immer reizvollen Gebiete erwies sich Kaestner, dem die Gedenkreden auf drei hochverdiente Lehrer der Göttinger Hochschule zu danken sind[5]). Das Jahr 1783 brachte aus der Feder deutsch schreibender Gelehrter drei hierher gehörige Arbeiten, von denen zwei nur als Nekrologe zu gelten haben[6]), wogegen die dritte[7]) sich als ein tief greifendes, auf eigene Studien sich stützendes biographisches Denkmal für den Märtyrer

[1]) Dutens, Recherches sur l'origine des découvertes attribuées aux modernes, Paris 1766, 1776, 1812. [2]) Wir lesen darüber bei Poggendorff (Geschichte der Physik, Leipzig 1879, S. 11): „Wohl zu merken ist indeß, daß, während Dutens in dem Nachweise bekannter Thatsachen bei den Alten so überaus glücklich erscheint, er doch nicht eine einzige neue, zu seiner Zeit noch unbekannte bei ihnen aufzufinden weiß, wie wenn die Alten genau so viel gewußt hätten und nicht mehr, als die neueren Physiker im Jahre 1766." [3]) J. H. G. Leibnitii Opera omnia, ed. Dutens, Genf 1769. [4]) Raspe, Programma de edendis Leibnitii Operibus philosophicis et mathematicis, Nova Acta Eruditorum Lipsiensia, 1762, S. 196 ff. [5]) Kaestner, Elogium Tob. Mayeri, Göttingen 1762: Elogium Albr. Ludov. Fr. Meisteri, ebenda 1789; Elogium G. Ch. Lichtenbergi, ebenda 1799. [6]) Al. David, Das Leben Newtons, Prag 1783; N. v. Fuß, L'éloge de L. Euler, St. Petersburg 1783. [7]) C. J. Jagemann, Geschichte des Lebens und der Schriften von Galilaeo Galilaei, Weimar 1783.

der neueren Naturforschung zu erkennen gibt[1]). Der wissenschaftliche Nachruf war damals in erster Linie Sache der Franzosen, deren anerkanntes Geschick, gemeinverständlich und zugleich elegant zu schreiben, sich besonders geltend machte, wenn es darauf ankam, mit verhältnismäßig wenigen Worten viel zu sagen.

Besonders ragte unter ihnen hervor der Marquis M. J. A. N. C. De Condorcet (1743—1794), selbst ein Analytiker von Ruf, den aber sein Verdienst so wenig wie Lavoisier und Bailly vor dem revolutionären Fallbeile schützen konnte, dem er nur durch Selbstmord sich entzog. In einer stattlichen Reihe von Bänden[2]) hat er die Taten und Schicksale der älteren Akademiker verewigt, unter denen nach damaliger Lage der Dinge Mathematiker, Physiker und Astronomen besonders zahlreich sind. Von Lalande haben wir eine Lobrede[3]) auf seinen unglücklichen Kollegen Bailly. Eine reich fließende Quelle biographischer Nachweisungen liegt ferner in der jedem Bande der Pariser Denkschriften beigegebenen „Histoire" vor; eine lange Reihe von Namen, die unten aufgezählt werden[4]),

---

[1]) Durch Jagemann, der sich natürlich vorwiegend die damals energischer einsetzende Forschung Italiens zunutze machte, wo Viviani das Andenken seines großen Lehrers von den Schlacken der Verdächtigung zu reinigen suchte, wurde auf deutschem Boden das Studium des Lebens und der Werke Galileis erst begründet. Man bemerkt bei ihm (K. v. Gebler, Galileo Galilei und die Römische Kurie, I, Stuttgart 1876, S. 293) schon eine viel tiefere Einsicht in die wahren Triebfedern des Inquisitionsprozesses, als bei viel späteren Schriftstellern. Doch konnte er noch nicht verwerten das erst ein Dezennium später herausgekommene, an Originalmitteilungen reiche, posthume Werk des Senators G. C. De Nelli (1661—1725). In ihm (Vita e commercio di Galileo Galilei, Lausanne 1793) wurde zuerst der unerschöpfliche Briefwechsel, den uns jetzt A. Favaros glänzende Nationalausgabe vollkommen zugänglich gemacht hat, in seiner großen Tragweite erkannt. [2]) Condorcet, Éloge des académiciens français morts depuis 1666 jusqu'en 1699, Paris 1773; Éloge des académiciens morts depuis 1771—1790 (erst nach des Verfassers Tode erschienen), Paris 1799. [3]) Lalande, Éloge de J. S. Bailly, Paris 1768. [4]) Histoire de l'Académie Royale des Sciences (avec les Mémoires de Mathématique et de Physique). — 1760, S. 259—276. Éloge de M. De Maupertuis (diese Vorlesungen III², S. 774). — 1765, S. 144—159. Éloge de M. Clairaut (a. a. O., III², S. 778). — 1768, S. 144—154. Éloge de M. Camus (1699—1768; bekannt als Kenner der theoretischen Nautik und als einer der Teilnehmer an der lappländischen Gradmessung). — 1768, S. 155—166. Éloge de M. Deparcieux (a. a. O., III², S. 638). — 1771, S. 89—104. Éloge sur M. De Mairan (a. a. O., III², S. 628 ff.). — 1771, S. 105—130. Éloge de M. Fontaine (a. a. O., III², S. 587). — 1771, S. 143—157. Éloge de M. Pitot (a. a. O., III², S. 445 ff.). — 1779, S. 54—70. Éloge de M. le Comte D'Arcy (1725—1779; Astronom und Ballistiker, aber auch der reinen Mathematik nicht fremd). — 1782, Éloge de M. D. Bernoulli (a. a. O., III², S. 631). — 1783, Éloge de M. L. Euler (a. a. O., III², S. 549 ff.). — 1783, Éloge de M. Bézout (1730—1783; Begründer unserer heutigen Lehre von den Determinanten). — 1783, Éloge de M. D'Alembert (a. a. O., III², S. 510). — 1783,

tritt uns entgegen, und zwar nicht nur in aphoristischer, sondern zum Teile in recht ausführlicher Schilderung von sachkundiger Seite. Verdienstliche Beiträge zu dieser in jenen Jahren sehr geschätzten Literaturgattung lieferten ferner auch Italiener. Halten wir uns an die chronologische Reihenfolge, so stoßen wir auf Artikel über Rampinelli[1]), Cavalieri[2]) — dem der gelehrte Frisi[3]) auch eine eigene Abhandlung[4]) widmete — und G. Rocca (1607—1656)[5]). Mehrere lesenswerte Erinnerungsreden haben auch in die Veröffentlichungen der Akademie von St. Petersburg Aufnahme gefunden[6]). Großbritannien ist, soweit die wissenschaftliche Biographie in Frage kommt, nur durch ein einziges größeres Stück in unserer Periode vertreten, dem aber großer Wert zukommt; es ist ein Essay[7]) über den ebenso

Éloge de M. Wargentin (1717—1783; bekannter schwedischer Astronom). — 1786, Éloge de M. l'Abbé De Gua (a. a. O., III[2], S. 576ff.).

[1]) Elogio del R. P. Ramiro Rampinelli Bresciano etc., Giornale de' Letterati, Tomo per gli anni 1758 e 1759, S. 87ff. (Rom 1760). Rampinelli, der folgeweise in Bologna, Mailand und Pavia Mathematik lehrte, wurde berühmter, als durch eigene Schriften, durch seine Schülerin Gaetana Agnesi (diese Vorlesungen III[2], S. 822ff.). [2]) Frisi, Elogio del B. Cavalieri, Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia, XIV, S. 191ff. (Modena 1778); Aggiunte all' Elogio del Cavalieri, ebenda, XV, S. 280ff. (Modena 1778); Risposta a un' Elogio di Bonaventura Cavalieri, ebenda, XXIII, S. 116ff. (Modena 1781). [3]) P. Frisi (diese Vorlesungen III[2], S. 822) wurde als Schriftsteller über astronomische, mechanische und meteorologische Probleme sehr geschätzt, hat jedoch in der zweiten Hälfte seines Lebens auch mathematische Fragen behandelt. [4]) Dieselbe erschien 1778 in Mailand; ihre Überarbeitung ging, wie wir sahen, in die vielgelesene Zeitschrift über. Lobreden auf Galilei und auf Newton sind gleichfalls zu nennen. Von Frisis geachteter Stellung zeugt eine auf ihn verfaßte Gedächtnisschrift: Memorie appartenenti alla vita ed agli studî del Sig. Paolo Frisi etc., Mailand 1787. [5]) Lettere d'Uomini Illustri nel secolo XVII a Giannantonio Rocca, filosofo e matematico Reggiano etc., Nuovo Giornale etc., XXXII, S. 1ff.; XXXIII, S. 1ff.; XXXIV, S. 1ff.; XXXVI, S. 1ff. (Modena 1785, 1786, 1786, 1786). [6]) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae. Historia ad annum 1783, N. Fuß, Éloge de M. Léonard Euler, S. 159ff. (vgl. S. 17); Historia ad annum 1784, Précis de la vie de M. Lexell, S. 16ff.; Historia ad annum 1789, S. 23ff., Précis de la vie de M. Jacques Bernoulli. A. J. Lexell (1740—1784) hat sich durch zahlreiche trigonometrische und andere Arbeiten, z. B. durch den nach ihm benannten Satz der Sphärik ein dauerndes Denkmal gesetzt; Jakob Bernoulli II (1759 bis 1789) ist der zeitlich letzte Sproß der berühmten Baseler Mathematikerfamilie. [7]) W. Minto, Dav. Stewart's, Earl of Buchan, Account of the Life, Writings and Inventions of John Napier of Merchiston, Edinburgh 1788. Die Geschichte der Mathematik scheint von David Stewart nichts weiter zu wissen, während seine Namensvettern John (gest. 1766) und Matthew (1717—1785) wohl bekannt sind; vom letzteren (diese Vorlesungen III[2], S. 541ff.) handelt ausführlich sein Landsmann John Playfair (1748—1819) (Account of M. Stewart, Transact. of the Royal Society of Edinburgh, I, 1 (1788), S. 57ff.).

genialen wie abstrusen Lord Napier, über dessen eigenartige Auffassung der Logarithmen in diesem Werk[1]) eingehend berichtet worden ist.

In gewissem Sinne darf hierher wohl auch gerechnet werden: die Herausgabe nachgelassener Schriften hervorragender Zeitgenossen. Das „historische Jahrhundert“ hat es nicht an sich fehlen lassen, auch nach der uns hier angehenden Seite hin sich seines Namens würdig zu erweisen, denn daß derartige Sammlungen unter Umständen dem späteren Erforscher der geschichtlichen Zusammenhänge noch bedeutsamere Dienste leisten können, als bloße Berichterstattung, wird nicht bezweifelt werden können. Der Physiker Lichtenberg brachte einen Teil der von einem berühmten Göttinger Amtsgenossen hinterlassenen Abhandlungen an das Licht[2]). Ebenfalls in Göttingen erschienen unter der Obsorge von Wrisberg die großenteils noch ungedruckten Arbeiten[3]) des polyhistorisch veranlagten Arztes J. G. Brendel (1712 bis 1758), die auch in mathematischer Beziehung gar nicht belanglos sind[4]). Endlich wollen wir auch noch kurz die mathematische Übersetzungstätigkeit registrieren, die wir in Michelsen[5]) und Bulgaris[6]) verkörpert finden.

Nunmehr sollen uns die geschichtlichen Untersuchungen über die mathematische Entwicklung in einzelnen Ländern noch kurz beschäftigen. Das Land Baden hat sich der Meteorologe J. L. Boeckmann (1741—1802) für eine solche Darstellung[7]) ausersehen; man wird sich nicht wundern, daß darin die Dinge, welche man ehemals als angewandte Mathematik zusammenzufassen liebte, weitaus überwiegen. Aus etwas früherer Zeit liegt F. J. Bucks (1722—1786) ganz brauchbare Charakteristik der hier in Frage kommenden Mathematiker Altpreußens vor[8]). Viele Daten, die sonst schwer zu erlangen sind, vereinigte St. Wydra (1741—1804) in seiner Geschichte der Schicksale, welche

[1]) Diese Vorlesungen II², S. 730ff. [2]) Tob. Mayeri opera inedita, ed. G. Ch. Lichtenberg, Göttingen 1774. [3]) Joh. Gottfr. Brendelii opera mathematici et medici argumenti ed. H. A. Wrisberg, Göttingen 1769—1775. [4]) Betreffs der Verwendung, welcher ein von Brendel in die Wissenschaft eingeführtes Prinzip fähig ist, vgl. Günther, Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie, eine vergleichende Untersuchung, Leipzig 1882. [5]) Man hat von J. A. C. Michelsen (diese Vorlesungen III², S. 700, S. 749) deutsche Ausgaben Eulerscher Werke (Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Berlin 1788—1792; Differentialrechnung, ebenda 1790—1793; Theorie der Gleichungen nach Euler und Lagrange, ebenda 1793). [6]) Eugenios Bulgaris, dessen Personalverhältnisse anscheinend im Dunklen geblieben sind, übertrug in seine griechische Muttersprache u. a. Segners „Elementa arithmeticae et geometriae“ (Leipzig 1793) und Schriften des Engländers Whiston (diese Vorlesungen III², S. 377, 394). [7]) J. L. Boeckmann, Beiträge zur Geschichte der Mathematik und Naturkunde in Baden, Karlsruhe 1787. [8]) Buck, Leben der verstorbenen preußischen Mathematiker, Königsberg i. Pr. 1764.

die mathematischen Disziplinen in den Ländern der tschechischen Sprachgemeinschaft erfahren haben[1]). Von M. Barbieri wurde eine analoge Schrift über das Königreich Neapel verfaßt[2]), und mit dieser können wir sachlich zusammennehmen die vorzügliche Behandlung, welche G. Piazzi der sizilianischen Astronomie zuteil werden ließ[3]). Wenn auch nicht in erster Reihe, so ist doch auch hier wohl am besten unterzubringen ein Aufsatz von Johann Bernoulli[4]), der schon durch seinen Titel[5]) verrät, daß die Zusammenstellung interessanter zeitgeschichtlicher Notizen hauptsächlich beabsichtigt war; in größerem Stile enthält solche das astronomische Handbuch[6]) ebendesselben Gelehrten.

Dieser Zeitraum ist auch aus dem Grunde bemerkenswert, weil in ihn der erste Versuch fällt, sich über das Wesen der nach und nach durch Forschungsreisende und Missionare bekannter gewordenen indischen Mathematik zu orientieren. Der Schotte Playfair (s. S. 19) hat sich der schwierigen Aufgabe mit Glück unterzogen[7]); für den Anfang konnte sein redliches Bestreben als ein sehr erfolgreiches gelten. Der anerkanntermaßen wertvollste Bestandteil des Geschichtswerkes von A. Arneth[8]) geht der Anregung nach auf Playfairs Vorarbeit[9]) zurück.

---

[1]) Wydra, Historia matheseos in Bohemia et Moravia cultae, Prag 1778; eine Art Anhang dazu ist: Vita Josephi Stepling, ebenda 1779. [2]) Barbieri, Notizie istoriche dei matematici e filosofi del regno di Napoli, Neapel 1778. [3]) Piazzi, Della specola astronomica de' regj studj di Palermo, Palermo 1792 bis 1794, II, Einleitung. Eine sehr ins einzelne gehende Analyse des die Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft auf der Insel darstellenden Abschnittes hat v. Zach gegeben (Hindenburgs Archiv der reinen und angew. Mathematik II, S. 357 ff.). [4]) Dieser Enkel des großen Johann Bernoulli (diese Vorlesungen III[2], S. 325) (1744—1807) hatte sich wesentlich der Astronomie zugewendet, wenngleich er auch mathematische Fragen ohne Rücksicht auf Anwendung gerne in den Kreis seiner Beschäftigung zog. [5]) Bernoulli, Anecdotes pour servir à l'histoire des mathématiques, Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, 1799—1800 (erschienen 1803), S. 32 ff. [6]) Im ganzen können vier Schriften Bernoullis als für die Geschichte der Astronomie in der zweiten Hälfte des XVIII. Jahrhunderts bemerkenswert bezeichnet werden, nämlich die folgenden: Recueil pour les Astronomes, Berlin 1772—1776; Liste des Astronomes connus actuellement, ebenda 1776; Nouvelles litéraires de divers pays, avec des supplemens pour la liste et le nécrologe des Astronomes, ebenda 1776—1777; Lettres écrites pendant le cours d'un voyage par l'Allemagne etc., ebenda 1777 bis 1779. [7]) Playfair, Remarks on the Astronomy of the Brahmins, Transact. of the Royal Society of Edinburgh, II, Abteil. 2; Observations on the Trigonometrical Tables of the Brahmins, ebenda, II, Abteil. 4. [8]) Arneth, Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Entwicklung des menschlichen Geistes, Stuttgart 1852, S. 140 ff. [9]) Die Veröffentlichungen H. Th. Colebrookes (1765—1837) über altindische Mathematik und Astronomie, die weit über Playfair hinausgehen, gehören bereits dem XIX. Jahrhundert an.

Jene von früher her erinnerlichen, etwas sonderbaren Geistesprodukte, welche sich mit einer — schwer definierbaren — biblischen Mathematik zu schaffen machen, fehlen auch dem Intervalle 1760 bis 1800 nicht gänzlich. Ein Däne A. N. Aasheim (1749—1800) hat die Nutzbarkeit der Größenlehre für die Exegese der Heiligen Schrift darzutun versucht[1]. Vor allem aber war J. E. B. Wiedeburg (1733 bis 1789) ein eifriger Bearbeiter dieses Grenzgebietes zwischen Theologie und Mathematik, auf dem er sich übrigens ganz und gar im Geiste des herrschend gewordenen Rationalismus bewegte. Sein Buch[2], welches unvollendet blieb, gibt eine achtungswerte Probe von der Gelehrsamkeit des Verfassers, dessen Vater schon für diese „Mathematica sacra" Neigung an den Tag gelegt hatte[3]. Auch kleinere Arbeiten dieses Charakters würden sich bei fleißigem Suchen vielleicht noch zahlreicher auffinden lassen, als dies in unserer Note[4] zum Ausdrucke kommt.

Die elementare Arithmetik, Algebra und Zahlenlehre der Vergangenheit fangen in diesen Jahren, da doch auch die philologisch-antiquarische Forschung sich immer kräftiger zu rühren und vervollkommnete Hilfsmittel der Untersuchung zur Verfügung zu stellen beginnt, mehr und mehr die Gelehrten zu beschäftigen an. Den Lehrbüchern werden, wie dies vor allem A. G. Kaestners (s. S. 8) mit Recht viel gebrauchtes, mehrbändiges Kompendium[5] in zahllosen

---

[1] Aasheim, De usu matheseos in explicandis phaenomenis in codice sacro, Kopenhagen 1767. [2] Wiedeburg, Natur- und Größenlehre in ihrer Anwendung zur Rechtfertigung der heiligen Schrift, I, Nürnberg 1782. [3] Diese Vorlesungen III², S. 523—524. [4] Vielleicht ist es gestattet, der einschlägigen kurzen Darlegung am vorerwähnten Orte einige Ergänzungen nachfolgen zu lassen. Besonderer Beachtung hatte sich die Gestalt des „ehernen Meeres" zu erfreuen (I. Buch der Könige, VII, 23). Schon im XVII. Jahrhundert bildete dieses Sakralaltertum den Gegenstand gelehrter Streitigkeiten, an denen sich sogar der geniale Philosoph B. Spinoza beteiligte (Tractatus theologico-politicus, Hamburg 1670, S. 22). Aus dem laufenden Jahrhundert sind drei hierauf bezügliche Abhandlungen namhaft zu machen: Nicolai Clausing, De symmetria maris aenei, Wittenberg 1717; L. C. Sturm, Mare aeneum, Nürnberg 1710; Scheibel, Von der Gestalt des ehernen Meeres, Leipziger Magaz. f. Math. etc., 1787, S. 477 ff. Die Frage, ob die alten orientalischen Völker sich mit der rohen Annäherung $\pi = 3$ (diese Vorlesungen I², S. 100 ff.) beholfen hätten, stand in diesem Falle im Vordergrunde. [5] Angesichts der wirklich hohen Bedeutung dieser Reihe stufenweise aufsteigender Lehrbücher, welche den Studierenden von den allerersten Anfängen bis hinauf zu den höchsten Problemen zu führen bestimmt waren und welche in der Didaktik des XVIII. Jahrhunderts die bis dahin fast des Monopoles der Alleinherrschaft sich erfreuenden Werke C. v. Wolfs ablösten, gehört hierher ein kurzer bibliographischer Exkurs auf Kaestners Unternehmen. Es sind zusammen zehn Oktavbändchen: Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie und Perspektive, Göttingen 1758, 5. Aufl. ebenda

wertvollen Notizen ersehen läßt, geschichtliche Daten nicht bloß als gelehrter Ballast, sondern als eine willkommene Unterstützung zur Anregung und Vertiefung des Unterrichtes beigegeben. Mitunter fügt sich dem theoretischen Lehrgange — ähnlich, wie wir dies (s. S. 12—13) bei Bossut und Moennich kennen gelernt haben — auch bei solchen Leitfäden, die nur ein engeres Stoffgebiet umfassen, ein zusammenfassender Überblick über die Geschichte der Disziplin an. So machte es J. G. Praendel[1] (1759—1816) bei seiner für die kurbayerischen Pagen und Kadetten geschriebenen Algebra.

Ein tiefgelehrtes, ja bahnbrechendes Werk über die Urgeschichte eben dieses Zweiges der Mathematik förderte der in Parma als Hochschullehrer tätige P. Cossali (1748—1815) zutage[2]. Es mache, so meint der zum Lobe nicht allzu geneigte Nesselmann[3], für die zwischen 1200 und 1589, zwischen Fibonacci und Bombelli liegende Periode jede andere Geschichte der Algebra überflüssig und wisse die leitenden Gedanken der Männer, welche sich um die Fortbildung der Buchstabenrechnung und um die Auflösung der Gleichungen bemüht haben, ihrem ganzen Wesen nach zu erschließen, ohne deshalb die antike und arabische Wissenschaft zu vernachlässigen; höchstens könne man ihm vorwerfen, daß es die früher angewandten Methoden etwas zu sehr modernisiere. Und M. Cantor rühmt ebenso[4] Cossalis Geschicklichkeit in der Klarlegung der verschlungenen Wege, die Cardano und Ferrari bei der Behandlung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade betreten haben. Steht diese glänzende Leistung also auch etwas vereinzelt da, so nimmt doch mit ihr das Jahrhundert, dem sie noch angehört, einen im hohen Maße befriedigenden Ausgang.

Zur Geschichte der elementaren Rechenkunst lieferte der unermüdliche Kaestner einen Beitrag[5], indem er bewies, daß die be-

---

1792, 6. Aufl. (posthum) 1800; Fortsetzung der höheren Rechenkunst, Geometrische Abhandlungen I, 1789; Geometrische Abhandlungen II, 1791; Anfangsgründe der angew. Mathematik in zwei Abteilungen (I, 1759, 3. Aufl. 1781, II, ebenso); Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen, 1759, 3. Aufl. 1794; Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen, 1761, 3. Aufl. 1798; Anfangsgründe der höheren Mechanik, 1765, 2. Aufl. 1793; Anfangsgründe der Hydrodynamik, 1769, 2. Aufl. 1797; Weitere Ausführung der mathematischen Geographie, 1795. Aus diesen sämtlichen Büchern kann der Historiker der exakten Wissenschaften, wenn er zu suchen versteht, sehr viel lernen; nur gilt in der Hauptsache das Nämliche, was oben (s. S. 12) über das große Geschichtswerk gesagt worden ist.

[1]) Praendel, Algebra nebst ihrer literärischen Geschichte, München 1795. [2]) Cossali, Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa, dell' Algebra, Storia critica di nuove disquisizioni analitiche e metafisiche arricchita, Parma 1797—1799. [3]) Nesselmann, a. a. O., S. 25ff. [4]) Diese Vorlesungen II[2], S. 503; S. 509. [5]) Kaestner, Die Kettenregel vor Graumann, Hindenburgs Arch. d. reinen und angew. Mathem., 2. Band (1796—1797), S. 334ff.

kannte Kettenregel, die zur gegenseitigen Umwandlung von Maßen, Gewichten, Münzen usw. mit Vorteil angewandt wird, nicht — wie man durchweg glaubte — von einem Hamburger Rechenmeister Graumann, sondern aus Holland oder Frankreich stamme. Daß sie noch vor J. van Dam, bis zu dem sie Kaestner zurückverfolgt hatte, schon eine gewisse Rolle spielte, zeigte gleich nachher der früher (s. S. 12) zitierte Rosenthal[1]); in Wahrheit ist ihr Alter ein weit ehrwürdigeres[2]). Dem eratosthenischen Siebe gewidmet ist eine Abhandlung[3]) von S. Horsley (1733—1806). Die Anfänge der Logarithmenlehre suchte Gehler (s. S. 16) in historische Beleuchtung zu rücken[4]). Auch die Frage nach der Existenz der Logarithmen negativer Zahlen, die über ein Halbjahrhundert lang vielfach erörtert worden war[5]), fand eine zusammenfassende Bearbeitung[6]). Als Bestrebung, sich in die Denkweise vergangener Zeiten zu versetzen, soll auch eine Spekulation über die Cardanische Regel, d. h. über den bei deren Auffindung vollzogenen gedanklichen Prozeß, ihre Stelle finden; F. Masères (1731—1824), der sich so in einer „Divination" versuchte[7]), hat auch sonst Sinn für geschichtlich-mathematische Studien an den Tag gelegt[8]), z. B. in einer Monographie über Jak. Bernoullis wissenschaftliche Begründung der Permutationslehre und in seinem Logarithmenwerke. Wegen eines kurzen Schaltkapitels über das Aufkommen der negativen Größen, als einer mit der positiven gleichberechtigten Zahlform, wollen wir auch eine im übrigen andere Zwecke

---

[1]) Rosenthal, Die Kettenregel vor Jan van Dam, Hindenburgs Arch. d. reinen u. angew. Mathem., 3. Band (1799), S. 81 ff. [2]) Man kann (diese Vorlesungen II², S. 15 ff.) den Kettensatz bis auf das XII. Jahrhundert zurückführen; Lionardo Pisano kennt dieses Auskunftsmittel, wennschon nicht ganz in der uns jetzt geläufigen Form, als „figura cata". Auch er ist jedoch nicht Erfinder, sondern gibt, wie häufig, arabische Errungenschaften wieder. Späterhin begegnet man jenem wieder (diese Vorlesungen II², S. 233, 399) bei J. Widmann von Eger und bei Chr. Rudolff. Höchstens die übliche Manier, die zusammengehörigen Zahlen durch einen Vertikalstrich voneinander zu trennen, also eine bloß äußerliche Veranschaulichung der Rechnungsprozedur, kann man somit als das Eigentum einer späteren Zeit in Anspruch nehmen, und sowohl Kaestner als auch Rosenthal haben die Erfindung viel zu spät angesetzt. [3]) Horsley, The Sieve of Eratosthenes, Philosophical Transactions, LXII (1772), S. 327 ff. [4]) Gehler, Dissertatio historiae logarithmorum naturalium primordia sistens, Leipzig 1776. [5]) B. F. Thibaut, Dissertatio historiam controversiae circa numerorum negativorum et impossibilium logarithmos sistens, Göttingen 1797. [6]) Vgl. diese Vorlesungen III², S. 367 ff., 722 ff. [7]) Masères, A Conjecture concerning the Method by which Cardan's Rule for resolution of the Cubic Equation $x^3 + qx = r$ ... were probable discovered by Scipio Ferreus, Phil. Transact., 70. Band (1780), S. 221 ff. [8]) Masères, James' Bernoulli's Doctrine of Permutation etc., London 1795; Scriptores logarithmici or a Collection of several curious Tracts on the Nature and Construction of Logarithms, 6 Bände, London 1791—1807.

verfolgende Abhandlung[1]) W. Greenfields anführen. Zur Geschichte der unbestimmten Analytik gehört, daß kein geringerer als G. E. Lessing, der allerdings auch sonst sich für das Wissen und Können der Antike interessierte und z. B. nach Spuren praktischer Dioptrik bei Griechen und Römern suchte, jenes seitdem viel besprochene arithmetische Epigramm dem Staube der Vergessenheit entriß[2]), welches den späteren Mathematikern als „Problema bovinum" bekannt geworden ist[3]). Die Auflösung, welche der von Lessing zu Hilfe gerufene, von fachmännischer Seite aber noch gar nicht gewürdigte C. Leiste von der Aufgabe gab, war nach dem Urteile Nesselmanns[4]) eine ganz befriedigende.

Als K. F. Hindenburg (1741—1808) die kombinatorische Analysis geschaffen hatte, deren Wert viele Zeitgenossen ebenso zu übertreiben, wie manche Epigonen herabzusetzen beeifert waren, ging er selbst darauf aus, festzustellen, welche Anklänge an sein neues System sich schon bei einzelnen älteren Analytikern vorfanden[5]). Es war ihm möglich, zu erweisen, daß zumal bei der Ermittlung der Näherungswerte eines Kettenbruches D. Bernoulli und Lambert dem, was man nachmals „kombinatorische Involution" genannt hat, ziemlich nahe gekommen waren[6]). Auch in dem von Hindenburg veranstalteten Sammelwerke[7]) stößt, wer sich mit der Vorgeschichte des zwar ephemeren, aber darum doch keineswegs wirkungslos wieder verschwundenen Wissenszweiges[8]) beschäftigen will, auf viele für ihn sehr brauchbare Einzelheiten.

---

[1]) Greenfield, On the Use of Negative Quantities in the Solution of Problems by Algebraic Equations, Transact. of the R. Soc. of Edinburgh, II, 1 (1788), S. 131 ff. [2]) Lessing, Zur Geschichte der Literatur, I, Berlin 1773, S. 421 ff. [3]) Was über das dem Archimedes fälschlich zugeschriebene Rätsel geschrieben ward, haben, zusammen mit eigenen Untersuchungen, zusammengestellt Krummbiegel und Amthor (Zeitschr. f. Math. u. Phys., Hist.-lit. Abt., 25. Band [1880], S. 121 ff., 153 ff.). Vgl. auch diese Vorlesungen I[2], S. 297. [4]) Nesselmann, a. a. O., S. 482. [5]) Hindenburg, Mehrere große Mathematiker sind der Erfindung der kombinatorischen Involutionen ganz nahe gewesen, Arch. d. reinen u. angew. Mathem., I (1795—1796), S. 319 ff. [6]) Genauer kann diese Sache, die zugleich für die Vorgeschichte der kombinatorischen und der modernen niederen Analysis in Betracht kommt, verfolgt werden bei Günther (Darstellung der Näherungswerte von Kettenbrüchen in independenter Form, I, Erlangen 1873, S. 1 ff.). [7]) Hindenburg, Sammlung kombinatorisch-analytischer Abhandlungen, Leipzig 1800. Vorgearbeitet hatte der Leipziger Mathematiker einer Geschichte der von ihm eingeleiteten Neuerung bereits durch eine frühere Veröffentlichung (Kritisches Verzeichnis aller die kombinatorische Analysis betreffenden Schriften, Archiv etc., I, S. 357 ff.). [8]) Dankt man eben diesem Werke doch die systematischen Anfänge des Rechnens mit Determinanten (Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie, Erlangen 1877, S. 14 ff.).

Auch für die Geschichte der höheren Analysis hat der in Rede stehende Zeitraum einige Früchte getragen. Indessen wird vom Standpunkte der Gegenwart aus nur noch Murhards Charakteristik[1]) des ersten halben Jahrhunderts der Variationsrechnung höher gewertet werden können. Kaestners zunächst theoretische Beleuchtungen des Infinitesimalbegriffes[2]) berücksichtigen, wie bei ihm selbstverständlich, auch das geschichtliche Element. Die Entstehungsgeschichte des höheren Kalkuls hat mehrere Bearbeiter gefunden, von denen zwei, J. W. Christiani[3]) und L. H. Tobiesen[4]) (1771—1839), eben auch von Kaestner, nach dessen eigener Aussage[5]), zu diesem Thema hingeleitet waren; er selbst führt seine Auffassung des Prioritätsstreites ziemlich umständlich bei dieser Gelegenheit aus und entscheidet sich dahin, Leibniz und Newton wären als vollkommen gleichberechtigt anzuerkennen[6]). J. J. Meyer andererseits tritt uns als Kämpe des deutschen Bewerbers entgegen[7]). Christianis Dissertation war eine Beantwortung der 1782 von der Universität Göttingen gestellten Preisfrage, inwieweit die Rechnung des Unendlichen ihre Wurzeln im Altertum habe, und dementsprechend ging der Autor hauptsächlich darauf aus, die großen Geometer des Altertums auf Andeutungen im gedachten Sinne zu prüfen. Anhangsweise mag auch hier der Tatsache Erwähnung getan werden, daß De L'Hôpitals Lehrbuch, das — ob ganz selbständig oder mit starken Entlehnungen aus Joh. Bernoulli I entstanden[8]) — jedenfalls der Einbürgerung der neuen Methoden mächtigen Vorschub geleistet hatte, zweimal Kommentatoren gefunden hat[9]).

[1]) Murhard, Specimen historiae atque principiorum calculi quem vocant variationum sistens, Göttingen 1796. [2]) Die einschlägigen Abhandlungen enthält ein Sammelband: Dissertationes mathematicae et physicae, Altenburg 1771. Dort finden sich: De vera infiniti notione, S. 35 ff.; De lege continui in natura, S. 142 ff. [3]) Christiani, Commentatio, qua explicantur fundamenta calculi, quem ab infinito nominamus, et ostenditur, quomodo iis, quae tradiderunt Euclides, Archimedes, Apollonius Pergaeus, innitatur calculus infiniti, Göttingen 1792 (auch in deutscher Sprache herausgekommen). Dem schloß sich an: Disputatio inauguralis exhibens supplementa ad commentationem de fundamentis calculi, quem ab infinito nominamus, Kiel 1793. [4]) Tobiesen, Principia atque historia inventionis calculi differentialis et integralis nec non methodi fluxionum, Göttingen 1793. [5]) Kaestner, Anfangsgr. d. Anal. unendl. Größen, S. 59. [6]) Ebenda, S. 49. „Das billige Urteil ist! Jeder sey auf seine Methode für sich gekommen, zulänglich war hiebey Nachdenken über das Verfahren vorhergehender Mathematiker. So urteilt auch Eduard Waring Meditationes analyticae, Cambridge 1785; man s. meine Rezension Gött. gel. Anz. 1786, S. 700." [7]) Meyer, De fluxione fluxa sive de Leibnitio primo calculi infinitesimalis inventore, Stettin 1778. Im gleichen Geiste ist selbstredend die nachstehend bezeichnete Schrift gehalten: Leibnitii elogium, ebenda 1777. [8]) Diese Vorlesungen III[2], S. 244 ff. [9]) A. H. Paulian, Commentaire sur l'Analyse des infiniment petits de l'Hôpital,

Indem wir zur Geometrie übergehen, dürfen wir wohl mit einer an der Grenzscheide stehenden Schrift von Z. Nordmark[1]) den Anfang machen, welche, ähnlich wie Christianis Arbeit (s. o.), Beziehungen zwischen sonst und jetzt aufzudecken sich vorgesetzt hat. Die Geschichte der Elementargeometrie hat zunächst Akt zu nehmen von jenen literarischen Erscheinungen, welche sich mit der Kritik der Parallelentheorie befassen. Denn anders als auf historischem Wege konnte da nicht vorgegangen werden, und so ist im Laufe der Jahre eine gar nicht unbeträchtliche Literatur über dieses anscheinend so wenig ausgedehnte Gebiet erwachsen. Zeitlich steht an der Spitze Derer, die sich ihm zuwandten, G. S. Klügel (s. S. 16), dessen Schrift[2]) wiederum Kaestners Rate[3]) ihre Entstehung zu danken hatte. Nicht weniger als 28 Versuche, das elfte euklidische Axiom als beweisbedürftig und beweisfähig hinzustellen, wurden gewürdigt und ausnahmslos als unzureichend erkannt. Etwas später hat dann C. F. M. M. Castillon[4]) die Begründung der Planimetrie auf den von Euklid aufgestellten, zweifelhaften Grundsatz auf das eingehendste untersucht[5]). Zur Stereometrie ist nur weniges zu bemerken. Kaestner, dessen Berechnung fremder Hohlmaße[6]) des antiquarischen Interesses nicht entbehrt, hat als der erste die Flächenbestimmung des Kugeldreieckes in ihren geschichtlichen Phasen studiert[7]) und dabei auch betont, wie man nach und nach, vom ebenen Winkel ausgehend, auch den Begriff des körperlichen Winkels sich klar zu machen lernte; er lehrte uns da auch den Polen Broscius[8]) als einen selbständigen Denker kennen. Die Beschaffenheit sowohl wie die Herstellung der ägyptischen Pyramiden[9]) besprach der Göttinger Mathematiker A. L. F. Meister (1724—1788), dem wir noch öfter als einem auf seinem

---

Nimes 1768; L. Lefèvre-Gineau, L'Hôpital, Analyse des infiniment petits avec des notes, Paris 1781. Das zuerst 1696 gedruckte Werk war nach des Autors (1661—1704) frühem Tode noch dreimal (1715, 1720, 1768) wieder aufgelegt worden.

[1]) Nordmark, De scriptis veterum analyticis dissertatio, Upsala 1776. [2]) Klügel, Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, Göttingen 1763. [3]) Kaestner, Anfangsgründe der Arithmetik und Geometrie, Vorrede zur ersten Auflage. [4]) Diese Vorlesungen III[2], S. 508 ff. [5]) Castillon, Premier mémoire sur les parallèles d'Euclide, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1792, S. 233 ff.; Second mémoire sur les parallèles d'Euclide, ebenda, 1793, S. 171 ff. [6]) Kaestner, Bestimmung des ägyptischen Kornmaßes, Deutsche Schriften d. K. Soz. d. Wissensch. zu Göttingen, I (1771), S. 142 ff. Zunächst handelt es sich um ein Modell, welches C. Niebuhr aus Ägypten von seiner großen Orientreise mit zurückgebracht hatte. [7]) Kaestner, Geometrische Abhandlungen II, S. 415 ff. [8]) Diese Vorlesungen II, S. 651. [9]) Meister, De pyramidum Aegyptiacarum fabrica et fine, Novi Comment. Gotting., V (1775), S. 192 ff.

eigenen Wege wandelnden Schriftsteller begegnen werden. Die Elementargeometrie als Ganzes ist endlich Kaestner dafür verpflichtet, daß er die „Geometrie“ Gerberts, dieses merkwürdige Denkmal altersgrauen Mittelalters[1]), einem größeren Leserkreise zugänglich gemacht und in ihrer historischen Bedeutung festzulegen getrachtet hat[2]), mag ihn auch die damals noch allgemein vermißte Erkenntnis des Wesens einer längst vergangenen Zeit nicht zu ganz triftigem Urteile haben kommen lassen. Die Trigonometrie verzeichnet J. Bernoullis III. (s. S. 21) Bemerkungen[3]) über die großen Tafelwerke des XVI. Jahrhunderts. J. M. Matsko (1721—1796) war auf die Richtigstellung anderweiter Angaben über den ersten Gebrauch der sogenannten Prosthaphaeresis bedacht[4]). Und vor allem verdient ehrende Erwähnung C. F. v. Pfleiderer (1736—1821), dessen Aufsätze[5]) höchste Vertrautheit mit den Originalschriften bekunden.

Die höhere Geometrie kommt für uns in Betracht mit einer Abhandlung[6]) des schwedischen Mathematikers D. Melanderhjelm (1726—1810) über Newtons Quadrierungsmethode und mit einer noch jetzt recht häufig zitierten Dissertation[7]) von N. Th. Reimer (1772—1832), welch letzterer sich nachher eine selbständige Schrift über den gleichen Gegenstand[8]), das Delische Problem[9]), anschloß[10]).

---

[1]) Diese Vorlesungen I[2], S. 809 ff. [2]) Kaestner, Geometrische Abhandlgn. I, S. 1 ff. [3]) J. Bernoulli, Analyse de l'Opus Palatinum de Rheticus et du Thesaurus Mathematicus de Pitiscus, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1788, S. 10 ff. [4]) Mätsko, Programma, quo prosthaphaeresis inventori suo Chr. Rottmanno vindicatur, Rinteln 1781. Vgl. dazu Kaestner (Gesch. d. Math. I, S. 566; II, S. 374) und A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, Leipzig 1900, S. 185 ff.), wo die Auffindung dieses für die logarithmenlose Zeit so wichtigen Rechnungsvorteiles ausführlich behandelt wird. [5]) v. Pfleiderer, Geschichte der ersten Einführung der trigonometrischen Linien, Tübingen 1785, 1790. Aus dieser Einleitung heraus entstand jenes wertvolle Werk (Ebene Trigonometrie mit Anwendungen und Beiträgen zur Geschichte derselben, Tübingen 1802), welches zwar, wenn das strenge chronologische Ausmaß zur Anwendung gelangt, nicht mehr in den Rahmen dieses vierten Bandes gehört, als reife Frucht jener Erstlingsschriften aber doch nicht ungenannt bleiben kann. Es wird von maßgebender Seite (diese Vorlesungen II[2], S. 182) betont, daß es „allzu selten zu Rate gezogen“ werde; in diesem Worte mag die Entschuldigung der Überschreitung der Zeitgrenze gesucht werden. [6]) Melanderhjelm, Isaaci Newtoni tractatus de quadratura curvarum ... illustratus. Stockholm 1762. [7]) Reimer, Dissertatio exhibens specimen libelli tractantis historiam problematis de cubi duplicatione, Göttingen 1796. [8]) Über die Frage, mit welchem Rechte die Würfelverdoppelung den bekannten Beinamen erhielt, verbreitet sich v. Wilamowitz-Moellendorff (Ein Weihgeschenk des Eratosthenes, Gött. Gel. Nachrichten, 1894, Nr. 1). [9]) Diese Vorlesungen I[2], S. 198 ff. [10]) Reimer, Historia problematis de cubi duplicatione, Göttingen 1798. Nur als Plagiat davon kann gelten: Biering, Historia problematis cubi duplicandi. Kopenhagen

Mit Umsicht und mit erfolgreichem Streben nach Vollständigkeit hat Reimer so ziemlich alles zusammengebracht, was sich auf die angenäherte Darstellung von $\sqrt{2}$ mittels mechanischer Hilfsmittel oder mittels Kurvenkonstruktion bezieht. Einen recht brauchbaren Beitrag zur Geschichte der krummen Linien bietet auch eine Preisschrift[1]) von J. H. M. Poppe (1776—1854), welche allerdings nur die Verwertung dieser Gebilde für praktische Zwecke sich zum Ziele gesetzt hat, dabei aber natürlich doch nicht umhin kann, auch der Wissenschaft als solcher ziemlich umfassend Rechnung zu tragen. Eine musterhafte Lösung der Aufgabe, mit modernen Hilfsmitteln in den schwer verständlichen Sinn des Gedankenganges eines älteren Schriftstellers einzudringen, stellt sich uns dar in v. Pfleiderers[2]) Erläuterung der von Kepler in der „Stereometria doliorum" (diese Vorlesungen II, S. 750 ff., S. 774 ff.) vorgenommenen, verwickelten Kubaturen.

Nicht wenige und teilweise auch bedeutende Arbeiten brachte unser Zeitraum auf dem Felde der Geschichte der Mechanik, der theoretischen sowohl wie nicht minder der praktischen. Es ist bekannt, daß J. L. Lagrange (1736—1813) jedem Kapitel seines Hauptwerkes „Mécanique analytique" (1. Aufl., Paris 1788), aber auch jeder seiner Abhandlungen geschichtliche Einleitungen voranschickte, die zu dem Besten gehören, was hierin geleistet worden ist. Obwohl A. Bürja (1752—1816) nicht bloß diese Disziplin, sondern auch die reine Mathematik im Auge hatte, als er das Mathematische bei Aristoteles einer kritischen Besprechung unterzog[3]), so spielt doch bei ihm die Mechanik, die immerhin auf den Stagiriten als den ersten Systematiker des Altertums zurückgeht, die Hauptrolle[4]). Von des Göttinger Naturphilosophen S. C. Hollmann (1696—1787) Versuche über die Massenanziehung[5]) wollen wir nur im Vorübergehen sprechen; weit mehr leisteten für die selbst nach 100 Jahren noch nicht zum Gemeingute der Gelehrtenwelt gewordenen klassischen Werke Newtons und deren Verbreitung der

1844. Dagegen ist es bei der Seltenheit der erstgenannten Schrift erfreulich, daß O. Terquem einen alles Notwendige enthaltenden Auszug aus ihr in die von ihm herausgegebene Zeitschrift (Bulletin de bibliogr. et d'hist. des mathématiques, II, S. 20 ff.) aufgenommen hat.

[1]) Poppe, Geschichte der Anwendung der Kreis- und anderen krummen Linien in den mechanischen Künsten und in der Baukunst bis auf Descartes, Göttingen 1800. [2]) v. Pfleiderer, Kepleri methodus solida quaedam sua dimetiendi illustrata etc. Tübingen 1795. [3]) Bürja, Sur les connaissances mathématiques d'Aristote, I, II, Mém. de l'Acad. de Berlin, 1790—1791, S. 257 ff., 266 ff. [4]) Diese Vorlesungen I[2], S. 240 ff. Vgl. auch Poselger-Rühlmann, Aristoteles' Mechanische Probleme, Hannover 1881. [5]) Hollmann, De attractionis historia, Comm. Soc. Gott., 1795, S. 271 ff.

Böhme Tessanek[1]) (1728—1788) und der Engländer W. Emerson[2]) (1701—1782). Die zum öfteren bestrittene Begründung der Lehre von der Bewegung flüssiger Körper, wie sie Joh. Bernoulli I[3]) gegeben hatte, suchte gegen die Angreifer Kaestner[4]) zu verteidigen. Gewisse Maschinerien der Vorzeit auf Grund einer nicht immer durchsichtigen Beschreibung ihrer Wirkungsweise nach aufzuklären, ließ sich Meister (s. S. 27) angelegen sein[5]), der auch, wohl als der erste, die von Porta[6]) nur ungenügend abgehandelte Technik der Alten, den Wasserdampf als Triebkraft auszunutzen, eingehender Prüfung würdigte.[7]) Im Anschlusse an eine ältere französische Publikation[8]) beschäftigte sich J. E. Silberschlag[9]) (1721—1791) mit der antiken Artilleriemechanik. Auch wollen wir nicht darauf verzichten, des uns schon bekannten Poppe Studien über die Geschichte der Uhren[10]) als einen guten Ratgeber für diesen Teil der maschinellen Praxis mit aufzunehmen. Auch die deutsche Bearbeitung eines französischen Werkes über die Uhren[11]) ist wegen historischer Nachweisungen schätzbar.

Die antike Optik nennt wiederum Meister[12]) als Objekt einer seiner gelehrten Untersuchungen; indessen kommen hauptsächlich die Perspektive und deren künstlerische Anwendung hier zur Geltung. In dem selbst heute noch lesenswerten Werke von J. Priestley[13]) (1733 bis 1804), welches Klügel (s. S. 16) mit voller Sachkunde bearbeitete[14]), wird auch Altertum und Mittelalter nicht vernachlässigt,

---

[1]) Tessanek, Philosophiae naturalis principia mathematica auctore Isaaco Newton illustrata commentationibus, I, II, Prag 1780, 1785. [2]) Emerson, A short Comment to Sir J. Newton's Principia, London 1770. Vgl. auch C. L. Schübler, Newtons Scharfsinn, vor allem dessen Sagacität in der Analysis, Leipzig 1794. [3]) Bernoulli, Hydraulica, Opera omnia, IV, Lausanne 1742, Nr. 186. [4]) Kaestner, Pro Jo. Bernoulli contra Dn. D'Alembert objectiones, Novi Comm. Gott., I (1771), S. 45ff.; Anfangsgr. d. Hydrodynamik, S. 465ff. [5]) Meister, Dissertatio de torculario Catonis . . ., Göttingen 1768; De veterum hydraulo, Novi Comm. Gott., II (1775), S. 152ff. Die erstgenannte Vorrichtung ist eine Weinpresse (Kelter), die andere ein Wasserhebewerk. [6]) Porta, Pneumaticorum libri III, Neapel 1601. [7]) Meister, De Heronis fonte educendis ex puteo aquis adhibito . . ., Novi Comm. Gott., IV (1774), S. 169ff. [8]) Opera veterum mathematicorum, Paris 1693. [9]) Silberschlag, Sur les trois principales machines de guerre des anciens, savoir la Catapulte, la Baliste et l'Onagre, Berlin 1760. [10]) Poppe, Geschichte der Entstehung und der Fortschritte der theoretischen und praktischen Uhrmacherkunst, Leipzig 1797. [11]) J. Alexandre, Traité des horloges, Paris 1734; deutsch von C. Ph. Berger, Lemgo 1758. [12]) Meister, De optica veterum pictorum, sculptorum, architectorum sapientia . . . pars prior, Novi Comm. Gott., V (1775), S. 141ff.; pars posterior, ebenda, VI (1776), S. 129ff. [13]) Priestley, History and present State of Discovery relating to Vision, Light and Colours, London 1772. [14]) Klügel, Geschichte und gegenwärtiger Zustand der Optik, nach d. Englischen Priestleys bearbeitet, Leipzig 1776.

und insonderheit findet die Geschichte des Regenbogens, welche Scheibel (s. S. 15) mit neuen Wahrnehmungen bereichert hatte[1]), eine ausgiebige Berücksichtigung. Über den archimedischen Brennspiegel hat Dutens[2]) (s. S. 17) eine besondere Abhandlung geschrieben.

Von der alten Astronomie handelt F. Meinert (1757—1828) in einer Monographie[3]), die auffällig wenig in das Publikum gedrungen zu sein scheint. Sehr wertvolle Aufschlüsse über geschichtliche Dinge finden sich in dem berühmten gemeinverständlichen Werke des großen P. S. Laplace; die erste Auflage desselben gehört noch dem XVIII. Jahrhundert an[4]). Gegen einige astronomisch-chronologische Noten von Costard (s. S. 15), welche in den „Phil. Transact." der vierziger und fünfziger Jahre stehen und von einer Schrift[5]) über die Meteorsteinfallprognose[6]) des Anaxagoras gefolgt wurden, nahm J. Bernoulli III Stellung[7]). Zur kometarischen Astronomie der Vergangenheit äußerte sich Ch. Burney[8]) (1726—1814), zur arabischen Astrognosie F. W. V. Lach[9]) (1772—1796), der sich hauptsächlich auf eine unlängst ans Licht getretene Beschreibung[10]) einer künstlichen Himmelskugel mit arabischen Schriftzeichen stützte. Auch die antike Gnomonik hat sich in H. G. Martini[11]) einen Liebhaber erworben, den jedoch J. F. van Beek-Calcoen[12]) weit überragte.

Das ganze Mittelalter hatte, nachdem bereits die Griechen diese

---

[1]) Scheibel, De J. Fleischeri Vratislaviensis in doctrinam de iride meritis, Breslau 1762. [2]) Dutens, Du miroir ardent d'Archimède, I, Paris 1775, II, ebenda 1778. [3]) Meinert, Über die Geschichte der älteren Astronomie, Halle a. S. 1785. Wir fanden das Buch nur ein einziges Mal zitiert, und zwar bei R. Wolf (Gesch. d. Astron.) S. 785. [4]) Laplace, Exposition du système du monde, Paris 1796. [5]) Costard, Use of Astronomy in Chronology and History, Oxford 1764; eine Schrift, deren Tendenz sehr zu billigen ist, da in der Tat die alte Geschichte gar oft einzig und allein durch Nachberechnung gesicherter astronomischer Vorkommnisse zu einer gewissen Festigkeit ihrer Ergebnisse durchdringen kann; das Hauptbeispiel ist allerdings nicht gerade glücklich gewählt. [6]) Vgl. hierzu R. Wolf, a. a. O., S. 187; J. H. Maedler, Geschichte der Himmelskunde von der ältesten bis auf die gegenwärtige Zeit, I, Braunschweig 1873, S. 37. [7]) Bernoulli, Examen des remarques de M. Costard sur les éclipses d'Ibn-Jounes, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1784, S. 293 ff. [8]) Burney, An Essay towards the History of Comets, London 1769. [9]) Lach, Anleitung zur Kenntnis der Sternnamen mit Erläuterungen aus der arabischen Sprache und Sternkunde, Leipzig 1796. [10]) Globus coelestis cufico-arabicus Veliterni Musei Borgiani a. S. Assemano illustratus, Padua 1790. J. S. Assemani (1687—1768) hatte wahrscheinlich diesen Globus erworben; sein Neffe Simon (1752—1821) lieferte die genannte Monographie. Vgl. auch Fiorini-Günther, Erd- und Himmelsgloben, ihre Geschichte und Konstruktion, Leipzig 1895, S. 15 ff. [11]) Martini, Abhandlung von den Sonnenuhren der Alten, Leipzig 1777. [12]) van Beek-Calcoen, Tractatus de gnomonica veterum, Utrecht 1797.

Anschauung vertreten, die Musik als eine mathematische Wissenschaft betrachtet[1]), da durch Boethius und Cassiodorius das „Quadruvium" als Kanon menschlichen Wissens zu beherrschender Stellung erhoben worden war[2]). So möchten wir denn auch an den wertvollen Quellenwerken[3]) Burneys und Forkels (s. o.) über Geschichte der Musik bei dieser Veranlassung nicht schweigend vorübergehen.

Damit ist dann ein wichtiger Teil unserer Aufgabe zum Abschlusse gelangt, und es verbleibt uns dem Programme gemäß noch die Besprechung aller derjenigen literarischen Erzeugnisse, welche sich mit dem unmittelbaren Studium der antiken Schriftwerke zu schaffen machen. Dieselben können übersetzt, erläutert oder im gereinigten Texte der Urschrift neu herausgegeben werden; dazu tritt aber im gegenwärtigen Zeitraum weit entschiedener denn früher eine vierte Form gelehrter Arbeit, der Wiederherstellungsversuch. Sind uns doch leider so viele griechische Schriften — für die römischen trifft das aus nahe liegenden Gründen weit weniger zu — nur in Bruchstücken oder gar nur im nackten Titel erhalten geblieben; da war der Anreiz gegeben, den Inhalt auf Grund der freilich oft nur sehr unsicheren Andeutungen zu erraten, welche man von da und dort verstreut in der Literatur antraf. Die gewaltige Entfaltung des philologisch-archäologischen Wissens in dieser durch die Namen Lessing, Winckelmann, F. A. Wolf, G. Hermann gekennzeichneten Epoche mußte solchen Bestrebungen sehr zu statten kommen. Wir werden nachstehend den vorhin aufgestellten Normen folgen: Übersetzung, Kommentar, Textausgabe mit oder ohne solchen und Rekonstruktion sollen nacheinander an die Reihe kommen. Auffallen kann einigermaßen, daß fast einzig und allein das klassische Dreigestirn Euklid, Archimedes, Apollonius die für die Antike begeisterten Mathematiker beschäftigt. Von ihnen abgesehen, ist es anscheinend allein der Byzantiner Anthemius, der gelegentlich einiger Beachtung gewürdigt wird[4]).

Halten wir uns zuerst an die Übertragungen in unsere deutsche Sprache, so können wir ein paar recht gelungene, heute noch ebenso-

---

[1]) Diese eigentümliche Erweiterung der Mathematik, von welcher sich die Neuzeit sehr mit Recht losgesagt hat, die aber von jedem, der den wissenschaftlichen Betrieb des Mittelalters erkunden will, wohl zu berücksichtigen ist, suchte in diesem Sinne zu skizzieren Günther (Geschichte des mathematischen Unterrichtes im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525, Berlin 1887, S. 110ff.). [2]) Diese Vorlesungen I[2], S. 529ff. [3]) Burney, General History of Music from the earliest Ages to the present Period, London 1777—1789; J. N. Forkel, Allgemeine Geschichte der Musik, Leipzig 1788—1801. [4]) Dupuy, Fragment d'un ouvrage grec d'Anthemius, Paris 1777. Übersetzung und Erläuterungen sind beigegeben. Vgl. diese Vorlesungen I[2], S. 468 und Gilbert, Annalen der Physik, LIII, S. 248ff., sowie auch Poggendorff, Gesch. d. Phys., S. 22, 527.

gut wie damals verwendbare Leistungen vorführen. J. F. Lorenz (1738—1807) gab zwei deutsche Euklidübersetzungen heraus; zuerst nur einen Teil[1]), nachher aber das vollständige Werk[2]). Geschätzter Kompendiograph, wußte er den Ausdruck wo nicht elegant, so doch klar und deutlich zu wählen. Die ersten sechs Bücher der „Elemente", welche nach lange gehegter Ansicht sozusagen den eisernen Bestand des in das Studium der Mathematik eintretenden Jünglings darstellten, verdeutschte auch J. K. F. Hauff[3]) (1766—1846). Erfreulich war, daß unser Volk auch die „Data"[4]) in bequemer Form zugänglich gemacht erhielt. Allerdings hatte J. C. Schwab (1743—1821), der sich dieses Verdienst erwarb, nicht den Urtext vor sich, sondern er hielt sich[5]) an die englische Bearbeitung des R. Simson[6]). Daß er von der starren Beibehaltung der griechischen Ausdrucksweise, wie sie der britische Geometer für nötig erachtet hatte, sich frei machte und mit den Proportionen so operierte, wie es uns nun einmal geläufig ist, wird man nur billigen können. Doch ist zu bemerken, daß Schwab nicht sowohl dem Eindringen in die Eigenart des griechisch-geometrischen Geistes entgegenkommen, sondern mehr nur ein praktisches Hilfsbuch für die geometrische Analysis liefern wollte[7]). Ein für den Elementarunterricht besonders nützliches Werk des Archimedes wurde von K. F. Hauber[8]) (1775—1851) deutsch wiedergegeben. Einen englischen Euklid besorgte J. Bonnycastle[9]) (?— 1821), eine in der gleichen Sprache gehaltene Ausgabe der archimedischen „Sandrechnung" G. Anderson[10]) (1760—1796).

Eine sehr gute, vollständige Ausgabe der „στοιχεῖα" rührt von dem Wittenberger Professor G. F. Baermann[11]) (1717—1769) her[12]). Die italienischen Gelehrten betätigten in dieser Zeit einen ganz

[1]) Lorenz, Euclids sechs erste Bücher . . . aus dem Griechischen, Halle a. S. 1773. [2]) Ders., Euclids Elemente, fünfzehn Bücher aus dem Griechischen, ebenda 1781. [3]) Hauff, Euclidis Elementa, I—VI, aus dem Griechischen, Marburg i. H. 1797. Später folgten (ebenda 1807) auch das elfte und zwölfte Buch (d. h. die Grundlehren der Stereometrie). [4]) Diese Vorlesungen I^2, S. 268ff. [5]) Euklids Data, verbessert und vermehrt von Robert Simson, aus dem Englischen übersetzt, und mit einer Sammlung geometrischer, nach der Analytischen Methode der Alten aufgelöster Probleme begleitet von J. C. Schwab, Stuttgart 1780. [6]) Diese Vorlesungen III^2, S. 509. [7]) Die Vorrede des Schwabschen Werkchens läßt diese Absicht in vollster Deutlichkeit erkennen. [8]) Hauber, Archimeds zwei Bücher über Kugel und Cylinder . . ., Tübingen 1798. [9]) Bonnycastle, Euclids Elements of Geometry, London 1789. [10]) Anderson, The Arenarius of Archimedes, translated, London 1784. [11]) Baermann, Elementorum Euclidis libri XV, Leipzig 1743. [12]) Es ist nicht ohne Interesse, Kaestners Urteil über diese Edition kennen zu lernen. Nachdem er diejenige Barrows (Cambridge 1675, Osnabrück 1676) gerühmt, fährt er fort (Anfangsgr. d. Arithm. u. Geom., S. 445ff.): „Da Barrows Ausgabe in Deutschland doch nicht so häufig

besonderen Eifer in Herausgabe und Übersetzung, doch sind ihre Werke außerhalb ihres Landes nur zum kleineren Teile einigermaßen bekannt geworden. Wir bescheiden uns damit, in einer Note[1]) nach Riccardis mustergültiger Zusammenstellung[2]) die Namen der Bearbeiter und die Erscheinungszeiten anzugeben. Hingegen ist von Archimedes nur eine einzige Ausgabe namhaft zu machen, diejenige von G. Torelli[3]) (1721—1781). Über sie berichtet Poggendorff[4]): „Torelli hinterließ handschriftlich Archimedes' Werke, griechisch und lateinisch, mit einem Zusatz von sich De conoidibus et sphaeroi-

zu haben ist, so verdient als Handausgabe G. F. Baermanns gebraucht zu werden ... Daß Baermann ein Schüler von Ernesti war, empfiehlt sie auch wegen kritischer Richtigkeit." Der hier genannte Leipziger Philologe (1707—1781) besaß auch volles Verständnis für guten mathematischen Schulunterricht, wie sein viel gebrauchter Lehrbegriff beweist (Initia doctrinae solidioris: pars prima, arithmeticam, geometriam, psychologiam et ontologiam complectens, Leipzig 1734), der noch 1783 einer siebenten Auflage sich erfreuen durfte. Kaestner erinnert (a. a. O., S. 446) auch an die wenig bekannte Euklid-Ausgabe von J. J. Hench (Philosophia Mathematica complectens methodum cogitandi ex Euclide restitutam ..., Leipzig 1756), welche auch die ersten sechs Bücher enthält, dieselben jedoch nicht sowohl deshalb aufgenommen hat, um die geometrische Unterweisung zu fördern, sondern vielmehr zu dem Zwecke, daß der Lernende sich an diesen Musterbeispielen formalen Denkens in Logik und Metaphysik übe.

[1]) Riccardi, a. a. O. II, S. 44 ff. [2]) Es sind die folgenden Ausgaben und Übersetzungen vorhanden: O. Cametti (1760), L. Ximenes (1762), O. Cametti (1762), G. Accetta (1763), E. Ventretti (1766), O. Cametti (1767), G. A. Ferrari (1767), G. Grandi (1767—1768), V. Caravelli (1770), O. Cametti (1772), G. F. Marquis De Fagnani (1773), F. Ventretti (1775), G. Grandi (1780), A. N. Silicani (1782), J. Calisti (1785), A. Tamberlicchi (1789), D. Paccanaro (1791), F. Ventretti (1792), F. Domenichi (1793), J. Calisti (1797). Auch ein posthumes Werk des letzten Galilei-Schülers V. Viviani liegt vor (1796). Unter diesen Schriftstellern sind nur einige, die sich auch sonst in der Geschichte der Mathematik einen Platz gesichert haben. Was zuerst G. Grandi (diese Vorlesungen III[2], S. 365 ff.) anlangt, so hat man es ebenfalls bloß mit einem Stück seines literarischen Nachlasses zu tun. Cametti (? — 1789) schrieb über Hydrodynamik; Ximenes (1716—1786) war ein geachteter Astronom; von Caravelli (1724—1800) besitzt man noch eine einigermaßen hierher gehörige Schrift (Theoremata Archimedis de dimensione circuli, sphaera et cylindro, faciliori methodo demonstrata, Neapel 1750). Der Marquis Fagnani, Sohn eines weit berühmteren Vaters, war gleichfalls ein tüchtiger Forscher, von dem man langezeit gar keine biographischen Daten zur Verfügung hatte (Poggendorff, Biogr.-liter. Handwörterbuch, I, Sp. 715). Erst Fürst B. Boncompagni brachte hier, wie in so vielen anderen Dingen, die Aufhellung (Memorie concernenti il Marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, Bull. d'istoria e di bibl. delle scienze mat. e fis., III [1870], S. 10 ff.). Nunmehr kennt man angenähert die Lebenszeit (1715—1797) von Marquis Gianfrancesco di Fagnano (oder Fagnani), Archidiakonus in Sinigaglia. [3]) Archimedis quae supersunt omnia, cum Eutocii Ascalonitae commentariis, ex recensione Jos. Torelli, Oxford 1792. [4]) Poggendorff, a. a. O. II, Sp. 1117.

dibus, welches Manuskript von der Universität zu Oxford gekauft und daselbst unter Aufsicht von A. Robertson gedruckt wurde." Einer der besten Sachverständigen, E. Nizze, stellt[1]) der Tätigkeit Torellis ein sehr, derjenigen des eigentlichen Herausgebers dagegen ein minder günstiges Zeugnis aus. Immerhin war bis Heiberg (1880), also fast hundert Jahre lang, wie auch von Poggendorff[2]) bestätigt wird, dieser oxonianische Archimedes der beste, über den man verfügte, auf den jedermann, der das Original zu verwenden gehalten war, zurückgreifen mußte.

Als Kommentator des Euklid hat sich v. Pfleiderer ausgezeichnet, der in einer ganzen Anzahl von Schriften[3]) die von ihm bei dem großen Systematiker wahrgenommenen Dunkelheiten aufzuhellen bestrebt war. Alle diese Arbeiten verfolgen neben dem geschichtlichen auch einen ausgesprochen pädagogischen Zweck, der am bestimmtesten in der Bearbeitung des fünften Buches, deren soeben Erwähnung geschah, zutage tritt.

Während die „Kegelschnitte", das Hauptwerk des Pergäers, in unserem Zeitabschnitte nicht näher betrachtet wurden, richtete sich mehrseitiges Augenmerk auf dessen übrige, nur in ganz fragmentarischem Zustande zu uns herabgelangte Schriften[4]). Dem Traktate „Von den Neigungen" galten diejenigen von S. Horsley[5]) (s. S. 24) und R. Burrow[6]) (1747—1792); aus den uns gebliebenen Andeutungen suchten die Schrift „Vom bestimmten Schnitt" wieder aufzubauen W. Wales[7]) (1734—1798) und R. Simson[8]). Auch P. Giannieri versuchte in seinen Opuscula mathematica (Parma 1773) als Op. III

[1]) Nizze, Archimedes' von Syrakus sämtliche Werke übersetzt und erklärt, Stralsund 1824, Vorrede. [2]) Poggendorff, a. a. O. II, Sp. 56. [3]) v. Pfleiderer, Expositio et dilucidatio libri V elementorum Euclidis pars I, Tübingen 1782, pars II, ebenda 1790; Scholia in librum II elementorum Euclidis, pars I, ebenda 1797, pars II, ebenda 1798, pars III, ebenda 1799; Scholia in librum VI elementorum Euclidis, pars I, ebenda 1800, pars II, ebenda 1801, pars III, ebenda 1802. Dazu gehört ein Exkurs über die euklidische Proportionenlehre (Hindenburgs Arch., II [1798], S. 257 ff., S. 440 ff.). Erwähnenswert sind noch folgende Schriften Pfeiderers: De dimensione circuli P. I (Tübingen 1787), P. II (Tübingen 1790), Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes ex solis Libri V. Elementorum definitionibus et propositionibus deductae (Tübingen 1798). [4]) Vgl. diese Vorlesungen I[2], S. 327 ff.; H. G. Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896, S. 212 ff. [5]) Horsley, Apollonii Pergaei inclinationum libri duo, London 1770. [6]) Burrow, Restitution of the Geometrical Treatise of Apollonius Pergaeus on Inclination, London 1779. [7]) Wales, The two Books of Apollonius concerning Determinate Sections, London 1772. [8]) Bei Lebzeiten ließ Simson (diese Vorlesungen III[2], S. 509) nichts hierüber erscheinen. „Im Jahre 1776 ließ Graf Stanhope" — 1753—1816 — „nachfolgende von Simson

eine Wiederherstellung des Buches des Apollonius vom bestimmten Schnitt. Noch am ersten dürfte die schwierige Restitutionsarbeit geglückt sein bei der Abhandlung „Über die Berührungen", der gegenüber die Divinationstätigkeit am meisten festen Boden unter den Füßen fühlen mochte. J. Lawson und J. G. Camerer (1763—1847), deren Verdienst es ist, hier vorangegangen zu sein[1]), dürfte deshalb ihrem Ziele vielleicht am nächsten gekommen sein.

Die Porismen des Euklides, über deren wahre Natur auch jetzt noch die Akten nicht als gänzlich geschlossen gelten können[2]), haben von jeher die Aufmerksamkeit der mit der Geometrie der Alten vertrauten Mathematiker auf sich gezogen. A. Girard, P. Fermat u. a. wagten sich daran, auf wenige schwache Spuren hin das verschüttete Gebäude wieder auszugraben[3]). In die Fußtapfen des letztgenannten trat jener jüngere Marquis G. Fagnani[4]), der uns weiter oben als Kenner des Euklides bereits begegnet ist.

Unsere Übersicht hatte in gebotener Kürze von einer stattlichen Reihe literarischer Arbeiten Notiz zu nehmen, welche mittelbar oder unmittelbar der Geschichte der exakten Wissenschaften Dienste zu leisten bestimmt waren. Die vier Jahrzehnte, auf die sich die Nachforschung zu beschränken hatte, lassen eine erfreuliche Fortentwicklung des schon früher erwachten Geistes gerade auch auf diesem an sich spröderen Gebiete erkennen.

---

hinterlassene Aufsätze drucken: 1) Apollonius Determinate Section; 2) A Treatise on Porisms; 3) A Tract on Logarithms; 4) On the Limits of Quantities and Ratios; 5) Some Geometrical Problems" (Poggendorff, a. a. O. II, Sp. 938).

[1]) Camerer, Apollonii De tactionibus quae supersunt, ac maxime lemmata Pappi in hos libros graece nunc primum edita a codicibus msсptis, cum Vietae librorum Apollonii restitutione, adjectis observationibus, computationibus, ac problematis Apolloniani historia, Gotha-Amsterdam 1795 (die Jahresangabe bei Poggendorff [a. a. O. II, Sp. 6] ist nicht richtig). Nach eigener Aussage war für Camerer von großem Werte eine Schrift des sonst recht wenig bekannten Engländers Lawson: The two Books of Apollonius Pergaeus, concerning Tangencies etc., London 1771. Bezugnehmend auf Vieta, Ghetaldi, Fermat und Th. Simpson kleidete Lawson die Hauptaufgabe folgendermaßen ein: Wenn von Punkten, Geraden und Kreisen irgend zwei in der nämlichen Ebene gegeben sind, so soll man den geometrischen Ort des Kreises angeben, der durch beide Punkte geht oder durch einen dieser Punkte geht und eine der übrigen Linien berührt oder endlich je zwei der genannten Linien berührt. [2]) Diese Vorlesungen I², S. 264, 267, 392, 423, Chasles-Sohncke, Geschichte der Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden, Halle a. S. 1839, Note III. [3]) Diese Vorlesungen II², S. 656 ff. [4]) J. F. De Fagnano, Porismata Euclidea, immo Fermatiana, demonstrata, Acta Eruditorum, 1762, S. 481 ff.

ABSCHNITT XX

ARITHMETIK · GLEICHUNGSLEHRE ZAHLENTHEORIE

VON

F. CAJORI

Arithmetik.

Die zweite Hälfte des 18. Jahrhunderts war für Frankreich eine Zeit der Aufklärung, in welcher kühne Schriftsteller neue Ideen entfalteten. Die französische Revolution zerstörte die Feudalinstitute des Mittelalters in allen Gebieten der weltlichen Einrichtungen. Die Wissenschaften und das Schulwesen wurden von diesen welthistorischen Ereignissen tief beeinflußt. Die Schriften von Rousseau und Condillac, von den Enzyklopädisten und von Condorcet brachten neue Gedanken, nicht nur über philosophische Sachen im allgemeinen, sondern auch über die Erziehung und Mathematik im einzelnen. Ihr Einfluß auf den Elementarunterricht in der Mathematik wurde gegen das Ende des Jahrhunderts überwiegend. Diese Zeit weist in Frankreich neue Rechenbücher auf, deren Autoren sich auch mit der höheren Mathematik beschäftigten. Dennoch finden wir, daß hier, wie auch in anderen Ländern, veraltete Rechenbücher noch großen Absatz fanden. Das bekannteste unter den letzteren war L'Arithmétique du S[r] Barrême .. augmentée .. de plus de 190 pages. par N. Barrême, Paris 1764, Rouen 1779. Die erste Auflage von François Barrême erschien 1677. Nicolas Barrême war „ein Nachkomme des Autors", wie wir aus der Auflage von 1713 entnehmen, welcher den Umfang dieses populären Werkes verdoppelte und deshalb erwähnt zu werden verdient.

Ein zweites Werk dieser Art war L'Arithmétique en sa perfection .. par F. Le Gendre, arithméticien. Die erste Auflage erschien in Paris 1646, eine zehnte 1691. Während des 18. Jahrhunderts wurden wenigstens sieben gedruckt. Eine erschien zu Paris 1774, eine andere zu Limoges 1781. Eine Vergleichung der Ausgabe von Lons le Saulnier 1812 mit denjenigen von 1774 und 1705 zeigt, daß die drei sich nur im Anhang voneinander unterscheiden und daß der Hauptteil während mehr als 100 Jahren ohne nennenswerte Abänderungen beharrte. Ein solches Beharren beim Alten in diesen und anderen Schulbüchern wirft ein düsteres Licht auf die Schulverhältnisse damaliger Zeit.

Weder in Barrême noch in F. Le Gendre findet man Dezimalbrüche; dieselben wurden, soweit wir ermitteln können, in praktischen französischen Rechenbüchern der Zeit beinahe ganz vernachlässigt. Nur gegen Ende des Jahrhunderts, als das metrische System Aufnahme fand, wurden Dezimalbrüche auch in Werken für Geschäftsleute eingeführt. Citoyen Blavier veröffentlichte 1798 in Paris ein Barrême décimal[1]) und die späteren Ausgaben von F. Le Gendres Büchlein enthalten einen Anhang über Dezimalbrüche.

Ein Werk, welches in den höheren Schulen in Frankreich, und durch Übersetzungen auch in anderen Ländern, während der zweiten Hälfte des Jahrhunderts weite Verbreitung erhielt, waren die 1741 in Paris gedruckten Leçons élémentaires de mathématiques des Astronomen Nicolas Louis de La Caille[2]) (1713–1762). Der erste Teil enthält eine kurzgefaßte, theoretische Arithmetik. Eine verbesserte und erweiterte Ausgabe des La Cailleschen Werkes wurde 1770 zu Paris von Abbé Marie, Professor der Mathematik an dem collége Mazarin, veranstaltet.

Unter den neu verfaßten arithmetischen Werken dieser Zeit sind diejenigen der bedeutenden Mathematiker Bézout, Bossut und Lacroix hervorzuheben. Étienne Bézout (1730—1783) wurde 1763 zum „examinateur des gardes de la marine“ ernannt. Man hat von ihm zwei mathematische Schulbücher, Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, Paris 1764 bis 1769, und Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie, Paris 1770—1772, die in mehreren Auflagen erschienen und weite Verbreitung fanden. Der arithmetische Teil letzteren Werkes ist demjenigen des ersten, mit Ausnahme einiger ausgelassener Paragraphen, Wort für Wort gleich. Er wurde auch separat gedruckt. Auf das kaufmännische Rechnen legt Bézout wenig Nachdruck; er gibt sich viel Mühe, die theoretischen Teile klar zu machen, ohne den Schüler durch schwerverständliche Beweise abzuschrecken.

Charles Bossut (1730—1814) verfaßte einen Cours complet de mathématiques, dessen erster Teil, ein Traité élémentaire d'arithmétique, 1772 erschien. Er enthält eine Vorrede über die Grundideen der Arithmetik und der Algebra. Diese Arithmetik ist in gedrängtem Stile geschrieben und enthält nur weniges über Geschäftsrechnung. Daher fand es auch nur geringe Verbreitung.

Während in französischen Werken über das praktische Rechnen

---

[1]) A. De Morgan, Arithmetical Books, London 1847, p. 75. [2]) Vgl. „Intorno ad un' opera dell' Abate Nicolò Luigi de La-Caille“ in B. Boncompagnis Bullettino, Tomo V, Roma 1872, p. 278—298.

Dezimalbrüche vernachlässigt oder ganz weggelassen werden, erhalten sie in Kompendien der Mathematik gehörige Beachtung. So gibt sich Lemoine in seinem Traité élémentaire de mathématiques pures, Paris 1790 (3^e éd. 1797), Mühe dieselben gleich von Anfang aufzunehmen und die Grundoperationen für ganze Zahlen und Dezimalbrüche nebeneinander zu entwickeln. Edmé Marie Joseph Lemoine (d'Essoies) (1751—1816) war vor der Revolution Advokat, Lehrer des jungen Adels und Professor der Mathematik und Physik. Das obige Elementarwerk war für Schüler bestimmt, die Bézouts Werke zu umfassend fanden.

Weitreichenden Einfluß auf das Studium aller mathematischen Fächer hatte Sylvestre François Lacroix (1765—1843), welcher großen Anteil an der Organisation der öffentlichen Erziehung und an der Vorbereitung passender Schulbücher hatte. Im Jahre 1797 erschien zu Paris sein Traité d'arithmétique, welcher für den Gebrauch in der école centrale bestimmt war.

Gegen Ende des Jahrhunderts erschienen einige Arbeiten, welche neue Gedanken philosophischer Natur über arithmetische Operationen und die Sprache der Arithmetik und Algebra enthielten. Der erste uns bekannte Versuch, neue Grundoperationen einzuführen, ist von dem Marquis Fortia (1756—1843). Mit den Einschränkungen der gewöhnlichen Arithmetik nicht zufrieden, sucht er in seinem Traité d'arithmétique[1]), Avignon 1781, den Operationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division eine unendliche Anzahl höherer Operationen anzuschließen. Die sukzessive Multiplikation einer Zahl mit sich selbst nennt er puissanciation. Soll die Summe von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 gefunden werden, nennt er 1 den multiplicande, 8 den multiplicateur, die Summe das produit, mit dem Wort second hinzugefügt, um die multiplication seconde von der gewöhnlichen zu unterscheiden. Die multiplication seconde gibt hier das produit 36. Dasjenige von 3 mit 8 gibt 108 ($= 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24$). Ein Beispiel einer puissanciation seconde hat man in der Auffindung des Produkts der Zahlen 2, 4, 8, 16, 32, 64, welches sich als das Produkt der ersten und letzten Zahl, puissancié durch die Hälfte der Anzahl von Zahlen, ergibt. Wenn in einer arithmetischen Progression $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (a + (n - 1)d)$ nicht nur $a = d$, sondern auch $a = n$ ist, gelangt man zur multiplication troisième. Das produit troisième, von 5 mit $2 = 5 + (5 + 10 + 15 + 20 + 25) = 80$, von 5 mit $3 = 5 + (5 + 10 + 15 + 20 + 25) + (5 + 10 + \cdots + 50)$

[1]) Uns liegt die zweite Auflage von 1790 vor.

= 5 + 75 + 275 = 355 = 5 + produit second von 5 mit 5 + produit second von 5 mit 10.

Man könne so fortfahren zu Operationen noch höherer Grade. Jede derselben habe ihre umgekehrte Operation. Fortia definiert nun eine numération seconde, worin die Einheit complexe und continue ist, complexe, weil sie aus Teilen bestehe, und continue, weil die Anzahl dieser Teile unendlich sei. Mit sich selbst multipliziert gebe die Einheit die Zahl 2; 2 mit 1 multipliziert gebe 3 usw. Wenn die Einheit der nombres continus 2 ist, dann ist der nombre continu 2 gleich 4 und der nombre continu 3 gleich 8. Die einfachste Operation der numération seconde ist die Multiplikation, welche der Addition in der gewöhnlichen Numeration entspricht. Sollen die nombres continus 481 und 1321 miteinander multipliziert werden, so ist das Resultat 1802. Ähnliches für die Division. 3421 : 2212 = 1209. Besteht die Einheit der nombres continus aus 3 gewöhnlichen Einheiten, dann ist der nombre continu 2 = 9, der nombre continu 3 = 27 usw. Wird nun 2 puissancié durch 3, so erhält man den nombre continu 6 = 729. In diese numération seconde könne man auch puissances secondes usw. einführen. Fortia gibt dann weitere Auseinandersetzungen von nombres continus, deren Einheit 2 ist, und von höheren Numerationen. Es gelingt ihm aber nicht, dem Leser die Vorzüge seiner neuen Operationen, deren Formeln er der gewöhnlichen Algebra entlehnt, und seiner neuen Sprache überzeugend darzulegen.

Eine Schrift über Arithmetik und Algebra, welche ein Versuch einer Philosophie dieser Wissenschaften ist, wurde von Étienne Bonnot de Condillac (1715—1780) verfaßt. De Condillac war ein scharfsinniger Philosoph, ein Freund von Rousseau und Diderot. Durch ihn fand der Sensualismus des englischen Freidenkers John Locke Eingang in Frankreich und, über diesen hinausgehend, weitere Ausbildung. Alle Theorien von angeborenen Ideen verwerfend, nahm Condillac nur die Wahrnehmungen der fünf Sinne für Wahrheit an. Er erklärte die Funktionen des Denkens als Arten des Empfindens, die durch Übung vervollkommnet werden, und führte alle Verstandestätigkeit auf das Sprachvermögen zurück. Ohne Wörter könnte man keine abstrakten Ideen haben. Uns interessiert sein La Langue des Calculs, à Paris, An VI (1798), welches achtzehn Jahre nach seinem Tode veröffentlicht wurde. Seine metaphysischen Lehren sollten hier auf Arithmetik und Algebra Licht werfen. „Un, deux, trois usw., dies sind also die abstrakten Ideen der Zahlen; denn diese Wörter stellen die Zahlen dar als auf alles anwendbar und als auf nichts angewandt.... Wenn zum Beispiel, nachdem wir

un doigt, un caillou, un arbre gesagt haben, wir un sagen, ohne etwas hinzuzufügen, haben wir in diesem Worte un die abstrakte Einheit. Wenn Sie glauben, daß abstrakte Ideen etwas anderes als Namen seien, bitte sagen Sie, wenn Sie können, was ist dieses andere?"[1]) „Sprachen sind nicht Sammlungen zufällig aufgenommener Ausdrücke.... Wenn der Gebrauch jedes Wortes eine Konvention voraussetzt, setzt diese Konvention eine Ursache für die Annahme jedes Wortes und eine Analogie voraus, die das Gesetz angibt, ohne welches es unmöglich wäre dasselbe wahrzunehmen und welches keine absolut willkürliche Wahl zuläßt."[2]) In der Sprache des Rechnens zeigt sich die Analogie klar. Das Zählen lernt man mit Hilfe der Finger. Man zählt bis 10, nimmt dann 10 als höhere Einheit an, fährt dann fort bis 100 usw. „Wenn wir uns aber nicht verirren wollen, müssen wir die Zahlenreihen durch Namen bezeichnen, weshalb die Namen im Rechnen so notwendig sind wie die Finger selbst."[3]) Das Numerationssystem, welches uns die Natur darbietet, zeigt uns jedesmal wie eine Zahl zusammengesetzt ist. Unsere Sprachen haben aber die Analogie nicht befolgt. „Zum Beispiel, wir sagen, soixante et douze; die Finger sagen aber sept dix plus deux, ein Ausdruck, den wir vorziehen, um der Analogie der von der Natur gegebenen Sprache zu folgen."[4]) Condillac betrachtet die Operationsarten in Arithmetik und Algebra im Lichte seiner Theorie von den Analogien. Er findet, daß die Algebra nichts anderes als eine Sprache sei[5]). Diese Ansicht hatte schon früher Clairaut in seinen Élémens d'Algèbre 1746 geäußert, und auch S. F. Lacroix stimmt[6]) derselben bei. Condillac behauptet, daß die Erfindungsmethode nichts anderes als die Analogie selbst sei[7]).

Wie das besprochene Werk die letzte (unvollendete) Arbeit Condillacs war, so ist das Büchlein Moyens d'apprendre à compter surement et avec facilité, par Condorcet, à Paris, 1799[8]), die letzte Schrift dieses berühmten Philosophen und Mathematikers. Es wurde in den letzten Tagen seines Lebens geschrieben, als er, in den Sturz der Girondisten verflochten, in der Nähe von Paris eine Zeitlang umherirrte, bis er erkannt und verhaftet wurde. Condillacs philosophische Studien trugen dazu bei, die Lehrmethode in neue Bahnen zu leiten. Das Büchlein von Condorcet erzielte Ähnliches durch eine klare, unkonventionelle Erklärung unseres Numerationssystems und

---

[1]) Condillac, La Langue des Calculs, 1798, p. 50. [2]) Ebenda, S. 1. [3]) Ebenda, S. 11. [4]) Ebenda, S. 18. [5]) Ebenda, S. 47. [6]) S. F. Lacroix, Essais sur L'Enseignement en Général et sur celui des Mathématiques en particulier, à Paris, An XIV, 1805, p. 285. [7]) Condillac, p. 232. [8]) Zweite Auflage erschien 1800.

der vier Rechnungsarten. De Morgan[1]) beschreibt das kleine Werk als „eine der einfachsten Erklärungen der elementarsten Arithmetik, die je erschienen ist". Das Werkchen besteht aus zwei Teilen. Der erste ist in leicht verständlicher Sprache für Kinder geschrieben. Der zweite Teil enthält philosophische und pädagogische Anweisungen für Lehrer. Manche seiner Ideen stimmen mit denen Condillacs überein. Für vingt setzt er duante und, um die Analogie nicht zu brechen, führt er die alten Bezeichnungen septante, octante und nonante ein. Eine englische Übersetzung des Büchleins wurde 1813 von Elias Johnston in Edinburgh veröffentlicht. Eine dritte englische Ausgabe erschien dort 1816.

Das Studium der praktischen Rechenkunst sollte sich nach und nach durch die Einführung des metrischen Systems bedeutend vereinfachen. Als um die Zeit des Ausbruchs der französischen Revolution der Drang nach Neuerungen in allen Richtungen immer stärker wurde, machte man 1788 den Vorschlag, auch die Gewichts- und Maßsysteme einer radikalen Umformung zu unterwerfen. Viele Städte Frankreichs hatten durch ihre Deputierten um ein gemeinsames Maß für das ganze Land gebeten. In der Sitzung der Pariser Akademie vom 14. April 1790 schlug Brisson vor, ein neues System auf eine natürliche Länge zu gründen, die immer wieder leicht aufgefunden werden könne[2]). Nach einem Antrage von Talleyrand legte die Nationalversammlung am 8. Mai 1790 dem französischen Könige die Bitte vor, den König von England einzuladen, bei der allgemeinen Maßreform mitzuwirken und Kommissare zu ernennen, die in Gemeinschaft mit den französischen die Reform durchführen sollten. Die Nationalversammlung beauftragte zugleich die Pariser Akademie, die französischen Kommissare zu wählen und die Länge des Sekundenpendels unter dem 45. Breitengrade als natürliche Grundlage des Maßsystems anzunehmen. Die Idee eines natürlichen Grundmaßes soll sich zuerst in einem Werke Gabriel Moutons des Jahres 1670 finden[3]).

Durch die Mitwirkung Englands hofften die Franzosen zu erzielen, daß ein neues System in anderen Ländern bessere Aufnahme finden würde. Diese großen kosmopolitischen Ideen sollten aber nicht so bald ausländischen Beifall finden. England lehnte, wahrscheinlich wegen der Hilfe, welche Frankreich den amerikanischen Kolonien in ihrem Freiheitskampfe geleistet hatte, das gemeinsame Vorgehen ab.

[1]) De Morgan, op. cit. S. 82. [2]) F. Rosenberger, Geschichte der Physik, Dritter Teil, Braunschweig 1887, S. 94. [3]) Gabriel Mouton, Observationes diametrorum solis et lunae apparentium etc., Lugd. 1670. V. Delambre, Base du système métrique décimal I, 11 und Rudolf Wolf, Geschichte der Astronomie, München 1877, S. 623.

Frankreich mußte allein an die Arbeit. Die französische Akademie unternahm es zwei Hauptfragen zu entscheiden: 1) Welche numerische Skale sollte als Verhältnis sukzessiver Ober- und Untereinheiten dienen, 2) welche unveränderliche Größe aus der Natur sollte als Einheit gewählt werden. Über die erste Frage stattete die folgende Kommission am 27. Oktober 1790 Bericht ab: Borda, Lagrange, Lavoisier, Tillet und Condorcet[1]). Für die Untersuchung der zweiten Frage ernannte die Akademie als Kommissionsmitglieder Borda, Lagrange, Laplace, Monge und Condorcet[2]).

Was numerische Skalen anbelangt, hatten Schriftsteller seit Leibniz öfters dem Binär-System Aufmerksamkeit geschenkt. In der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts findet man in vielen Rechenbüchern kurze Besprechungen desselben. Georg Friedrich Brander schrieb zu Augsburg 1767 (2. Aufl. 1775) eine Arithmetica binaria. Nicht selten findet man auch Angaben über das von Erhard Weigel (Bd. III, S. 39, 40) hochgeschätzte tetrabasische System. Das Duodezimalsystem hatte auch seine Anhänger, wie zum Beispiel Comte de Buffon, der dasselbe in seinem Essai d'Arithmétique morale[3]) (um 1760 geschrieben) bespricht.

Die französische Kommission hatte natürlich mit Veränderungen des Zahlensystems nichts zu tun. Selbst die französische Revolution vermochte das dezimale Zahlensystems nicht umzustürzen. Wohl aber mußte die Skale für das neue Maßsystem erwogen werden. Obschon die dezimale Einteilung leicht den Sieg davontrug, weil dieselbe dem Numerationssystem zugrunde liegt, scheinen die Mitglieder der Kommission darüber nicht ganz in Einklang gewesen zu sein. Es ist wohlbekannt, daß Lagrange einer der eifrigsten Verteidiger der reinen Dezimaleinteilung war. „Er wollte“, sagt Delambre[4]), „das Dezimalsystem in seiner ganzen Reinheit haben; er konnte es Borda nicht verzeihen, daß dieser die Gefälligkeit gehabt hatte, Viertelmeter machen zu lassen. Er legte auf den Einwand, daß die Basis des Dezimalsystems so wenige Theiler habe, keinen Werth. Er bedauerte beinahe, daß sie keine Primzahl sey, wie 11, weil dann nothwendig alle Brüche einerley Nenner bekommen hätten. Man kann Dieses, wenn man will, für eine Übertreibung halten, die wohl dem besten Kopfe im Eifer des Streits be-

---

[1]) Hist. de l'Acad. pour 1788, Hist. p. 1—6. Vgl. G. Bigourdan, Le Système métrique des poids et mesures, Paris 1901, p. 17. [2]) G. Bigourdan op. cit., p. 17. [3]) Buffon, Suppl. à l'Hist. nat. 4, Paris 1777, p. 116.
[4]) „Nachricht von Lagranges Leben und Schriften“ in J. L. Lagranges Math. Werke, deutsch herausgegeben von A. L. Crelle, 1. Bd., S. XLIX.

gegnet; aber er führte die Zahl 11 nur an, um die Zahl 12 abzuwehren, welche die kühneren Neuerer statt der 10 einführen wollten, die überall die Basis des Zahlensystems ist." Lagranges Vorliebe für die Zahl 10 und ihre Potenzen zeigte sich schon in Berlin, als er J. C. Schulze mitteilte, „daß es villeicht noch besser gethan seyn würde, wenn man, statt die trigonomischen Linien und ihre Logarithmen für Grade, Minuten und Secunden zu geben, dieselben in Graden und deren tausendste Theile nach Gellibrand Trigonometria Britannica an. 1633 berechnet lieferte".[1])

Die Kommission für die Wahl einer Längeneinheit stattete am 19. März 1791 ihren Bericht ab. Sie entschied nicht für das von der Nationalversammlung vorgeschlagene Sekundenpendel als Einheit, sondern schlug vor, einem 1790 gemachten Vorschlage des Ingenieur-Geographen Bonne folgend[2]), den zehnmillionsten Teil des Erdquadranten als Urmaß zu wählen. Die Pendellänge wurde verworfen, weil sie von zwei ungleichartigen Elementen, der Schwere und der Zeit, abhänge. Eine dritte Einheit, der Quadrant des Erdäquators, wurde von der Kommission auch besprochen, wurde aber wegen der Schwierigkeit der Messung in unwirtlichen Gegenden von Afrika und Amerika unpassend gefunden.

Am 30. März 1791 wurde von der Nationalversammlung der zehnmillionste Teil des Erdmeridians als Maßeinheit festgesetzt. Méchain und Delambre begannen sogleich die hierzu nötige Gradmessung zwischen Dünkirchen und Montjouy (nicht weit von Barcelona).[3]) Die Arbeit wurde 1792 durch Aufhebung der Akademie eingestellt, aber bald wieder durch Ernennung einer neuen Kommission, bestehend aus Laplace, Lagrange, Berthollet, Borda, Brisson, Coulomb, Delambre, Hauy, Méchain, Monge, Prony und Vandermonde, fortgesetzt. Die Urmaße würden angefertigt und 1799 dem Archiv der Republik einverleibt[4]). Das Meter war nun gleich 3 Fuß 11,296 par. Linien, oder etwas kürzer als der 1795 vorläufig angenommene Wert von 3 Fuß 11,44 par. Linien.

Um das neue System auch anderen Völkern annehmbar zu machen, wählte man für die Ober- und Unterabteilungen Namen, die nicht der französischen, sondern den neutralen griechischen und lateinischen Sprachen angehören.

Von großem Interesse sind die Elementarvorträge, welche 1795

---

[1]) Johann Carl Schulzes Neue und Erweiterte Sammlung Logarithmischer . . . Tabellen, I. Bd., Berlin 1778, Vorrede. [2]) Rosenberger, op. cit. S. 94. [3]) G. Bigourdan, op. cit. p. 109—155. [4]) Rosenberger, op. cit. S. 94.

auf der École normale in Paris von Lagrange und Laplace[1]) gehalten wurden. Die fünf Vorlesungen von Lagrange behandeln nur die Arithmetik und Algebra; Laplace berührt auch die Geometrie. Beim Nachlesen dieser Vorträge kann man leicht verstehen, wie die jüngeren Zuhörer auf der École normale denselben nicht immer folgen konnten, während Männer, wie S. F. Lacroix, der damals schon selbst als Lehrer berühmt war, denselben mit Begeisterung zuhörten. Schon in der ersten Vorlesung erklärt Lagrange die Kettenbrüche. Nachdem er im zweiten Vortrag die arithmetischen Operationen auseinandergesetzt, schreitet er in den übrigen zur Lösung der Gleichungen dritten und vierten Grades und der numerischen Gleichungen, und zur Verwendung der Kurven bei der Lösung der Probleme vor. Der Name „arithmetische Proportion" scheint ihm sehr ungeeignet, weil der Begriff der Proportion durch den Sprachgebrauch nur für geometrische Proportionen paßt. Man könnte Zahlen wie. 3, 5, 7, 9 äquidifferent nennen, ein Ausdruck, den Lacroix in seine Arithmetik und Algebra aufnahm.

Die Ideen von Rousseau, Condillac, Condorcet und Lagrange fanden Ausdruck in der Arithmétique d'Émile, Paris 1795 (2. Aufl. 1802) des Schweizers Isaac Emmanuel Louis Develey[2]) (1764—1839). Er war aus Bretonnière bei Payerne gebürtig, studierte in Genf und war später Professor der Mathematik auf der Akademie zu Lausanne. Das obgenannte Werk enthielt sorgfältige Erklärungen der Grundprinzipien und das metrische System. Es wurde 1799 von der französischen Regierung in die Liste von Elementarwerken für den Schulgebrauch gesetzt. In der zweiten Auflage verweist es auf Schriften von Lagrange, Condillac und Condorcet. Das Werk enthält keine Aufgaben zur Übung.

In Italien sind für die Periode 1759—1799 keine nennenswerten Fortschritte in der Methode des Rechenunterrichts aufzuzeichnen. In kaufmännischen Werken wird nach gegebenen Regeln operiert. Die besten Erklärungen der Arithmetik findet man in den Kompendien der Mathematik von Odoardo Gherli[3]) und De la Caille. Wie früher angegeben, erschienen die Leçons élémentaires de mathématiques von De la Caille 1741 zu Paris. Mehrere Übersetzungen dieser Arbeit wurden in Italien veröffentlicht. Im Jahre 1772 wurde

---

[1]) Journal de l'école polytechnique, tome II, Paris 1812, p. 173—278 (Lagrange), p. 1—172 (Laplace). [2]) L. Isely, Histoire des sciences mathématiques dans la Suisse Française, Neuchâtel 1901, p. 174. [3]) Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure del Padre Odoardo Gherli, Domenicano, professore di Teologia Dogmatica nell' Università di Modena. Resi pubblici da Domenico Pollera, Tomo I, Modena 1770.

zu Venedig eine lateinische Ausgabe dieser Lectiones „ad quintam editionem Parisinam denuo exactae a C. S. e S. J." (= Carolo Scherffer, S. J.) herausgegeben. Ausgaben in italienischer Sprache erschienen in Neapel 1761 und 1776[1]), in Venedig 1775 und 1796 als eine Bearbeitung von Ruggero Giuseppe Boscovich, in Florenz 1781, 1782, 1787, 1791, 1796 und noch später. Selten hat ein ausländisches Werk größere Gunst genossen als La Caille in Italien.

Daß Spanien und Portugal in engerem intellektuellen Verkehr mit Italien und anderen Ländern als mit Frankreich standen, ersieht man aus der Mathematik. Zum Beispiel im Lesen der Zahlen findet die französische Definition der billion und trillion keine Gunst. Nur gegen Ende des Jahrhunderts findet man Spuren französischen Einflusses. Ich habe nur einen spanischen[2]) und einen portugiesischen[3]) Schriftsteller vorgefunden, welche im Zahlenlesen die dreizifferigen Perioden wählen.

Das im 18. Jahrhundert hervorragendste unter den älteren spanischen Rechenbüchern ist die Aritmetica practica y especulative von Juan Perez de Moya, einem Mathematiker des 16. Jahrhunderts. Die 13. und 14. Auflage dieses Werkes erschienen zu Madrid 1776 und 1784. Die 13. Auflage ist mit der zu Salamanca 1562 herausgegebenen Wort für Wort identisch. Das Werk ist ein Beispiel der langen Lebensdauer, welche manche arithmetische Schriften genossen haben.

Unter den neueren Rechenbüchern ist die Arismética para negociantes von Don Benito Bails, Madrid 1790, nennenswert. Don Bails wurde 1743 zu Barcelona geboren, war Lehrer der Mathematik an der Akademie von San Fernando und Mitglied der Akademie der Wissenschaften und Künste zu Barcelona. Sein bedeutendstes mathematisches Werk sind die Principios de matematica, deren zweite Auflage 1788 zu Madrid erschien. Seine Werke scheinen in Mexiko Eingang gefunden zu haben, denn 1839 wurden in der Stadt Mexiko die Principios de arismética von D. Benito Bails gedruckt. Bails war auch als Komponist bekannt.

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts findet man in Portugal größere mathematische Tätigkeit als in Spanien. Im Jahre 1772 wurde an der Universität in Coimbra durch die Tätigkeit von José Monteiro da Roche (1735—1819) und José Anastacio da Cunha (1744 bis 1787 ?) neues Leben in den mathematischen Unterricht gebracht[4]).

---

[1]) Bullettino Boncompagni, Tomo V, Roma 1872, p. 278—293.
[2]) Juan Gerard, Tratado completo de aritmética, Madrid 1798. [3]) José Anastacio da Cunha, Principios Mathematicos, Lisboa 1790. [4]) R. Guimarães, Les mathématiques en Portugal au XIX[e] siècle. Coimbre 1900.

Ersterer gab sich mehr mit Astronomie ab, übersetzte aber aus dem Französischen mathematische Werke von Bézout und mechanische Schriften von Bossut und Marie. Da Cunha lehrte an der Universität bis 1778, zu welcher Zeit er wegen Anklagen des Inquisitionstribunals die Universität verlassen und zwei Jahre im Gefängnis zubringen mußte. Er wurde dann Direktor des collegio de São Lucas und schrieb seine Principios mathematicos, Lisboa 1790, deren letzte Druckseiten er am Abend vor seinem Tode korrigierte[1]). Demnach wäre er 1790 gestorben. Eine französische Übersetzung wurde von seinem Schüler, J. M. D'Abren, zu Bordeaux 1811 herausgegeben. Dieses Werk von nur 302 Seiten enthält in sehr gedrängter Form Arithmetik, Geometrie, Algebra und Infinitesimalrechnung. Überall sucht der Verfasser strenge Beweise einzuführen. Seine Erklärungen enthalten öfters neue und frische Ideen.

Ein Schüler von Da Cunha und Monteiro da Roche, namens José Maria D'Antas Pereira, veröffentlichte zu Lissabon 1798 ein Curso de estudos para uso do commercio, e da Fazenda. Das Werk ist eine „arithmetica universal" im Newtonschen Sinne, welches Rechenkunst und Algebra lehrt. Hauptsächlich von französischen Werken beeinflußt, hat Pereira ein ganz verdienstvolles Buch verfaßt. Während Da Cunha eine Billion als 10^9 definierte, nimmt Pereira dafür den in Portugal damals gebräuchlichen Wert 10^{12} an.

In Dänemark und in Norwegen, letzteres damals eine dänische Provinz, fand das 1680 in Kopenhagen veröffentlichte Rechenbuch von S. Mathissen, Compendium arithmeticum eller Wegviser hvor ved mand paa korteste og netteste maade kand ledsages til Regnekonstens rette brug, großen Beifall. Während des 18. Jahrhunderts folgten mehrere Ausgaben davon[2]).

Ein verdienstvolleres Werk wurde von Ole Andersen Borreby zu Kopenhagen 1765 unter dem Titel Mathesis puerilis eller Dansk skole mathematik herausgegeben. Nur der erste Teil wurde veröffentlicht, woraus man schließen darf, daß die im Buche enthaltenen neuen Ansichten geringen Anklang fanden. Der Autor widerspricht den alten mechanischen Lehrmethoden, macht an die Denkkraft der Schüler einigen Anspruch und sucht das Prinzip der Anschauung zur Anerkennung zu bringen. Sein Buch enthält aber keine Aufgabensammlung[3]).

Unter den älteren Rechenbüchern, welche in Holland zu dieser

[1]) Edinburgh Review, Vol. 20, 1812, p. 425; auch Frères-Hoefer, Nouv. Biogr. Générale. [2]) S. A. Christensen, Matematikens Udvikling i Danmark og Norge i det XVIII Aarhundrede, Odense 1895, S. 14—16. [3]) Ebenda, S. 30, 31.

Zeit weite Verbreitung fanden, war De vernieuwde Cyfferinge von Willem Bartjens[1]) (1584—1645), vermehrt und verbessert von Jan van Dam und von „weiteren Mängeln gereinigt“ durch Klaas Bosch. Wir haben Ausgaben dieses Büchleins von 1771, 1779, 1792, 1794 angetroffen. Es werden darin das Übersichdividieren und andere alte Operations- und Lehrmethoden angegeben.

Von neuen Werken verdienen besonders hervorgehoben zu werden die Eerste Beginzelen der Reeken-Kunde, Rotterdam 1769, 1782, 1790, und die Institution du calcul numérique et littéral, Haag 1770, von Jean Jacques Blassière (1736—1791), dem zu Haag geborenen Mathematiker und Schüler von Johann Frederich Hennert, dem Autor der Elementa matheseos purae, Trajecti ad Rhenum 1766—68.

Es war das Ziel Blassières, die Theorie und Praktik der Arithmetik zu vereinigen. Sein letztgenanntes Werk ist eine Universalarithmetik, deren zweiter Teil ganz der Algebra gewidmet ist. Die Proportionenlehre wird sorgfältig entwickelt. Der Hauptsatz, daß das Produkt des ersten und letzten Gliedes demjenigen der zwei mittleren Glieder gleich sei, wird so bewiesen: In $A:B=C:D$ ist bewiesen, daß man homologe Glieder mit der gleichen Zahl multiplizieren darf, wodurch man $A \times B:B=C \times B:D$, und dann $A \times B:A \times B=C \times B:A \times D$ erhält. Da nun die zwei ersten Glieder einander gleich sind, müssen es die zwei letzten auch sein. Die Regeldetri und Gesellschaftsregel werden auf die Proportionenlehre gegründet und nach dem Reesschen Mechanismus gelehrt. Der Reessche Ansatz hat also im Lande seiner Geburt auch Freunde gefunden.

Im Reekenboek vor de Nederlandsche Jeugd, Leyden 1794, von Henri Aenéae (1743—1812) wird die „Ketting-Regel“ auseinandergesetzt. Aeneae war ein Friesländer von Geburt, studierte auf der Universität Leyden und war 1795 Mitglied der internationalen Kommission für die Reform der Maß- und Gewichtssysteme.

Daß unter holländischen Lehrern bedeutendes Interesse für die Mathematik herrschte, ersieht man aus der Tatsache, daß in Holland das erste Journal der Elementar-Mathematik veröffentlicht wurde. Die Maandelykse mathematische Liefhebbery wurde von 1754 bis 1765 von Jakob Oostwoud (einem Lehrer zu Oost-Zaandam, in der Nähe von Amsterdam) zu Purmerend herausgegeben und von

[1]) B. Boncompagni, Bullettino, Tomo 14, Roma 1881, p. 533. Man findet eine „Bibliographie Neerlandaise Historico-Scientifique“ im Bullettino, Tomo 14, p. 523—630; Tomo 15, p. 225—312, 355—440; Tomo 16, p. 393—444, 687—718.

Louis Schut bis 1769 fortgesetzt. Im ganzen erschienen 17 Bände, die hauptsächlich der Algebra gewidmet sind. Mathematische Aufgaben werden gestellt und aufgelöst. Diese Aufgaben wurden später in drei Serien herausgegeben[1]). Es war auch Jakob Oostwoud, welcher in den Niederlanden Interesse für die 1690 gegründete Hamburger Mathematische Gesellschaft erweckte. Von 1766—1790 traten viele holländische Lehrer dieser Gesellschaft bei. Die Auflösung dieser Beziehungen ist hauptsächlich der Gründung der Mathematischen Gesellschaft in Amsterdam 1778 zuzuschreiben. Den Anstoß hierzu gab Arnoldus Bastian Strabbe (1740—1805), ein Lehrer und Staatseichmeister in Amsterdam[2]), welcher seit 1775 Mitglied der Hamburger Gesellschaft war.

Wie schon früher (Bd. III², S. 513) hervorgehoben, hatten während unserer Zeitperiode die Philanthropen in Deutschland einen großen Einfluß auf das Schulwesen. Von den Schriften Rousseaus stark beeinflußt, wirkte Basedow in Dessau unermüdlich an der Verbesserung der deutschen Erziehung. Zu seiner Zeit wird es üblicher, Rechenbücher herauszugeben, die nicht allein für den Kaufmann, sondern hauptsächlich für die Schulen bestimmt sind und die Schärfung des Verstandes bezwecken. Im Jahre 1763 erschien Basedows Überzeugende Methode der auf das bürgerliche Leben angewandten Arithmetik zum Vergnügen der Nachdenkenden und zur Beförderung des guten Unterrichts in den Schulen, und 1774 sein Werk Bewiesene Grundsätze der reinen Mathematik (Leipzig), dessen erster Band der Zahlenkunst und Algebra gewidmet ist.

Um die beweisende Lehrart zu betonen, suchte er den Kettensatz und die Reessche Regel, welche zur einfachen Beweisführung für Elementarschulen nicht angelegt waren, durch eine neue Regel zu ersetzen. So entstand die „Basedowsche Regel". Wir benutzen diese Gelegenheit, zu bemerken, daß die Reessche Regel (Bd. III², S. 519, 520) in Deutschland, besonders im südlichen Teil, günstig aufgenommen wurde. Joseph Tanzer glaubte, „daß die Reessche Rechnung die größte Erfindung der gemeinen Arithmetik sey"[3]). Allgemeinen Beifall genoß aber weder diese Regel, noch der Kettensatz. J. F. Lorenz, Professor an der Schule des Stifts und Klosters

---

[1]) Festschr. herausgeg. v. d. Mathem. Gesellschaft in Hamburg, Erster Teil, Hamburg 1890, S. 79, 80. [2]) Ebenda, S. 48, 81, 82. Vgl. D. Bierens de Haan, Bouwstoffen voor de geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen in de Nederlanden, 1878, S. 63—81. [3]) Joseph Tanzer, Mathematisches Lehrbuch zum Gebrauche der churfürstlichen Lyceen, Erster Teil, München 1780, S. 142.

Berge, drückt sich folgendermaßen darüber aus[1]): „Die gemeinen Rechenmeister pflegen überhaupt auch alle Proportionen, deren Lehre gar nicht ihre Sache ist, nach Ähnlichkeit ihres Kettensatzes, mittelst einer mechanischen Manier zu behandeln, welche unter dem Namen der Reesschen Regel nur gar zu bekannt und gemein ist.“ J. G. Prändel[2]) bemerkt, daß die Reessche Regel „auch wirklich in Deutschland eine geraume Zeit bei Geringköpfen viel Aufsehens machte“. In Holland wurde sie wenig gebraucht; in Frankreich und England haben wir sie nicht angetroffen.

Die Basedowsche Regel erforderte einiges Nachdenken. Wenn[3]) 1200 Mann 2400 Zentner Mehl in 4 Monaten verzehren, wieviel Mann kommen mit 4000 Zentner 3 Monate aus? Nach dem Basedowschen Verfahren schreibe man

1200 Mann	2400 Zentner	4 Monate
? „	4000 „	3 „

und entscheide, ob die Glieder der zweiten Zeile zu Multiplikatoren oder Divisoren werden. Es folgt das Schema:

?	1200
2400	4000
3	4

Unger hebt hervor, daß diese Regel den Übergang zu dem im 19. Jahrhundert beliebten Bruchsatz bildet.

Um die beweisende Rechenkunst zu fördern, gibt Johann Tessanek in einer Betrachtung über die arithmetische Regel zweyer falschen Sätze[4]) algebraische Beweise für diese allgemein ohne Demonstration angeführte Regel, und hebt hervor, daß die Methode auf Aufgaben höherer Grade unanwendbar sei.

Dem Mißbrauch, die Erfindung des größten gemeinschaftlichen Maßes zweier ganzen Zahlen in Lehrbüchern ohne allen Beweis anzuführen, hat Karsten durch einen kurzen und bündigen Beweis abzuhelfen gesucht[5]), während J. Pasquich einen zweiten Beweis lieferte[6]).

Die Philanthropen Christian Trapp (1745—1818) und Gottlieb Busse (1756—1835) betonten die Anschauung im Rechenunter-

[1]) Johann Friedrich Lorenz, Grundriß d. rein. u. angew. Mathematik, Erster Teil, Helmstädt 1798, S. 111. [2]) Johann Georg Prändels Arithmetik nebst einer kleinen Globuslehre, München 1795, S. 236. [3]) F. Unger, Die Methodik der Praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung, Leipzig 1888, S. 171. [4]) Abhandlungen einer Privatgesellschaft in Böhmen, 1. Bd., Prag 1775, S. 125—140. [5]) Lehrb. d. ges. Math., 1. Teil. [6]) Leipziger Magazin f. reine u. angew. Math., 1. Stück, 1787, S. 97—103.

richt so nachdrücklich, daß man sie als Vorläufer der Pestalozzischen Periode ansehen darf. Trapp sagt in seinem Versuch einer Pädagogik[1]), 1780: „Addieren und Subtrahieren kann man schon kleine Kinder an Nüssen usw. lehren, ohne daß sie Zahlen kennen; bis auf einen gewissen Grad auch Multiplizieren und Dividieren". In Busses Gemeinverständliches Rechenbuch für Schulen, 1786, und seiner Anleitung zum Gebrauche meines Rechenbuchs, 1786, werden qualitätslose Anschauungsmittel (Punkte, Striche) den sinnenreizenden Gegenständen (Nüsse, Äpfel) vorgezogen. Künsteleien und das Streben nach einer Universalregel, wie die Reessche, hält er für unerlaubt. Unger[2]) nennt Busse den geschicktesten Rechenmethodiker des 18. Jahrhunderts. Von weitreichendem Einfluß auf die Reform des Dorfschulwesens war Eberhard Freiherr von Rochow (1734—1805), der in seiner berühmten Schule in Rekahn die Zahlenkunst als eine Verstandesübung lehrte, sowie Peter Villaume (1746—1806), der nicht nur die Anschauung betonte, sondern auch die Beschränkung des Lehrstoffes und die Einführung des Kopfrechnens forderte[3]). Das Kopfrechnen wurde unter anderen auch von Friedrich Köhler in seiner Anweisung zum Kopfrechnen, 1797, empfohlen.

Von der alten Darstellungsweise verschieden waren auch die Versuche in Socratischen Gesprächen über die wichtigsten Gegenstände der Arithmetik von Johann Andreas Christian Michelsen, Berlin, Erster Band 1784, Zweyter Band 1785, Dritter Band 1786. Michelsen (1749—1797) war Professor der Mathematik und Physik am Vereinigten Berlinischen und Kölnischen Gymnasium, hatte großen Erfolg als Lehrer und beförderte die Wissenschaft durch die Übersetzung einiger Eulerschen Werke. Seine Socratischen Gespräche sind weitläufig, zeigen aber einen großen Fortschritt gegenüber von bloßen Regelsammlungen, die in unserer Periode noch vielfachen Absatz fanden. Michelsen führt hier und dort algebraische Symbole und algebraische Auseinandersetzungen ein. Diesen Versuch, für ältere Schüler die Arithmetik und Algebra miteinander zu verschmelzen, findet man in mehreren deutschen Anleitungen zur Mathematik, und derselbe darf gewiß als ein Fortschritt in der Methodik bezeichnet werden. Die Lehre von den Verhältnissen und der Regeldetri in der gemeinen praktischen Arithmetik hält er „nicht nur für überflüssig, sondern auch für zweckwidrig", weil man durch die

---

[1]) Wir zitieren nach E. Jänicke und G. Schurig Geschichte des Unterrichts in den math. Lehrfächern in der Volksschule, Gotha 1888, S. 44.

[2]) Unger, op. cit. S. 166, 167. [3]) E. Jänicke und G. Schurig, op. cit. S. 51.

welsche Praktik ohne sie fertig werden kann, und weil sie nur durch Umwege zum Ziele führt. Während Michelsen die Verhältnislehre für den Elementarunterricht abschaffen möchte, sucht Johann Georg Büsch in seinem Versuch einer Mathematik zum Nuzzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens, Hamburg 1773 (dritte Auflage 1790, vierte 1798) neue Definitionen einzuführen. „Die Art, wie Zahlen und Größen auseinander entstehen, ist ihr Verhältnis.“ Es gibt zwei Arten. „Die erste Art, wenn aus einer Zahl durch Hinzusetzung oder Wegnehmung einer andern Zahl eine neue Zahl entsteht, ist das Arithmetische Verhältnis“; „Die zweite Art, wenn eine Zahl durch wiederholte Zusammensetzung einer andern oder eines Teils derselben entsteht, ist das Geometrische Verhältnis.“ Aus der Lehre von den Verhältnissen könne man die Bruchrechnung lichtvoll erläutern. Seine früheste Schrift darüber, so erzählt er im Jahre 1798, sei eine Probeschrift des Jahres 1756, er kenne aber kein Rechenbuch, in welchem seine Verhältnislehre ganz angenommen und daraus die Bruchrechnung und die Regeldetri hergeleitet wären[1]). Büsch (1728—1800) wurde 1756 Lehrer der Mathematik am Hamburger Gymnasium und bekleidete diese Stelle 44 Jahre lang bis zu seinem Tode. Er errichtete eine Handelsakademie in Hamburg und zeichnete sich durch gemeinnütziges Wirken und unermüdliche schriftstellerische Tätigkeit aus. Unter den begeisterten Jünglingen, deren Studien er in die rechten Bahnen zu lenken wußte, war der Astronom J. E. Bode.

Wir werden die Entwicklung methodischer Ideen für den Rechenunterricht in Deutschland nicht weiter verfolgen, bemerken aber, daß gegen Ende des Jahrhunderts in dieser Hinsicht hier größere Tätigkeit herrschte als in anderen Ländern[2]).

Büsch wurde im Jahre 1790, bei Gelegenheit der 100jährigen Jubelfeier der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg (Bd. II, S. 799), zum Ehrenmitglied dieser Gesellschaft ernannt[3]). Seit 1751 war Johann Reimer (1731—1803) Mitglied der obigen Gesellschaft, dessen schriftstellerische Tätigkeit wir kurz erwähnen. Bis 1783 erhielt jeder Eintretende einen Beinamen, und Reimer hieß „der Recreirende“. In den Jahren 1767—1769 gab Reimer eine Wochenschrift Der gemeinnützige mathematische Liebhaber heraus.

---

[1]) Büsch, Mathematik zum Nutzen usw., 4. Aufl., 1798, S. 29, 30.

[2]) Weitere Auskunft über den Rechenunterricht in Deutschland findet man in den oben angeführten Werken von Unger und Jänicke und Schurig, sowie in M. Sterner, Geschichte der Rechenkunst, München und Leipzig 1891.

[3]) Festschr. herausg. v. d. Math. Gesellsch. in Hamburg a. i. 200jährigen Jubelfestes 1890, Leipzig 1890, S. 50.

Diese hing mit der Gesellschaft nicht weiter zusammen, als daß der Herausgeber ihr angehörte und daß andere Mitglieder sich anfangs für die Schrift interessierten. Reimer begründet das Aufhören der Wochenschrift im Jahre 1769 mit dem mangelnden Interesse vieler Mitglieder. Diese Wochenschrift ist unseres Wissens die zweite elementar-mathematische Zeitschrift in der Welt. Nur Oostwouds Monatsschrift war früher erschienen.

Die Wochenschrift war teils in deutscher, teils in holländischer Sprache abgefaßt und enthielt Aufgaben und deren Auflösungen. Diese waren durchweg sehr elementar, und meistens der Algebra, aber auch der rechnenden Geometrie sowie der Astronomie entnommen. Äußerst wenige waren originell. Die meisten sind aus Paul Halckes Sinnenconfect (Bd. III[2], S. 412) abgeschrieben. Anderes ist ähnlichen Werken entliehen.

Die Hamburger Gesellschaft hatte mehr auswärtige Mitglieder als einheimische. Im Jahre 1760 gab es neben 5 einheimischen 20 auswärtige Mitglieder. Im Jahre 1790 war die Zahl der auswärtigen auf 32 gewachsen, welche von Regensburg bis Stockholm und von Prag bis Amsterdam zerstreut waren. Von diesen waren 23 Holländer. Nach 1790 nahm letztere Zahl schnell ab, was einerseits den damaligen Kriegsunruhen und andererseits der 1778 erfolgten Gründung der Mathematischen Gesellschaft in Amsterdam zuzuschreiben ist[1]).

Die Arithmetik des Leontius Philippovisth Magnitzky (1669—1739) war beinahe das einzige Rechenbuch, welches während der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts in russischen Schulen gebraucht wurde[2]). Es erschien 1703 und enthielt auch einiges über Algebra und Geometrie. Während der Blütezeit des Regelrechnens geschrieben, machte es keine Ansprüche an die Denkkraft der Schüler. In der zweiten Hälfte des Jahrhunderts wurde es allmählich von anderen Werken verdrängt. In der ersten Hälfte war das Gymnasium der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg der einzige Ort, wo neue Ideen über den Rechenunterricht aufblühten. Dort wurde 1740 die Adodouroffsche Übersetzung des ersten Teiles von Leonhard Eulers Einleitung zur Rechen-Kunst, zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschaften in Saint-Petersburg (erster Teil 1738; zweiter Teil

---

[1]) Festschr., S. 47, 48. [2]) V. V. Bobynin, „L'Enseignement mathématique en Russie" in L'Enseignement Mathématique (C. A. Laisant et H. Fehr, Directeurs), 1ère année, 1889, p. 81. Unsere Angaben über die Rechenkunst und Algebra in Rußland sind dieser Arbeit und der Russkaia Fiziko-Matematicheskaia Bibliografiia, sostavil V. V. Bobynin 1886—1900 entnommen.

1740) herausgegeben und im Gymnasium studiert. Der zweite Teil dieses Werkes, von Vasilii Kouznetzoff übersetzt, erschien 1760. Es war Eulers Absicht, alles recht deutlich zu erklären und zu beweisen. Obschon der mathematische Unterricht auf dem St. Petersburger Gymnasium unter der Lehrtätigkeit von Georg Wolfgang Krafft (1701—1754) und Vasilii Evdokimovich Adodouroff (1709 bis 1778) eine durchgreifende Erneuerung erfuhr, erwirkte derselbe doch nur geringen Einfluß auf andere Schulen Rußlands.

Ein anderes Werk, welches die alten dogmatischen Methoden durch eine beweisende Lehrart zu ersetzen suchte, war die 1752 erschienene Algebra von dem Ingenieur Kapitän-Lieutenant Nicolas Mouravief (1721—1770). Es war das erste Werk in russischer Sprache ganz diesem Fache gewidmet. Dann erschien ein Buch, welches der alle Beweise vermeidenden Darstellung folgte und viel größeren Beifall als das Mouraviefsche Werk genoß. Dies war die Universelle Arithmetik von Nicolas Kourganof (1725—1796), Professor der Mathematik und Navigation am Korps der adeligen Marinekadetten. In dieser Schule verdrängte dieses Werk die alte Arithmetik von Magnitzky.

Während der zweiten Hälfte des Jahrhunderts wurden hauptsächlich deutsche mathematische Werke gelesen. Dimitri Sergievitch Anitchkof (1740—1788), ein Lizentiat der 1755 gegründeten Universität von Moskau, wurde 1762 als Lehrer an der Universität und den dazu gehörigen Gymnasien angestellt. Er gab 1765 eine Übersetzung aus der lateinischen in die russische Sprache der verschiedenen Teile von Weidlers Institutiones Matheseos.., editio quinta, Vitembergae 1759, heraus. Uns interessieren hier nur zwei Teile, die Theoretische und Praktische Arithmetik, deren zweite und dritte Auflage 1787 und 1795 erschienen, und die Algebra, welche 1778 in zweiter Auflage herausgegeben wurde. Diese Werke, sowie diejenigen, welche von Anitchkof selbst nach dem Vorbilde der Weidlerschen und Wolffschen Werke geschrieben wurden[1]), brachten in russischen Elementarwerken der Mathematik die demonstrative Methode in den Vordergrund.

In Großbritannien ist die Methodenentwicklung für den Rechenunterricht langsamer fortgeschritten als in Deutschland. Das Anschauungsprinzip kam gar nicht in Betracht, wohl aber wurde die Beweisführung in den neueren Büchern dem bloßen Regelrechnen vorgezogen. Englische Rechenbücher unterscheiden sich von denen des Festlandes hauptsäch-

[1]) Theoretische und Praktische Arithmetik (Auflagen: 1764, 1775, 1786, 1793); Elemente der Algebra, oder litterale Arithmetik (1787).

lich darin, daß erstere den Dezimalbrüchen und der Sammlung von Übungsaufgaben viel größere Aufmerksamkeit schenken. Englische Bücher operieren mit größeren Zahlen. Ein Verfasser gibt z. B. eine Aufgabe, welche die Berechnung von 2^{144} erfordert, und diese wird mit 44 Ziffern durchgeführt[1]).

Zu dieser Zeit fanden Auflagen von den älteren Werken von Edward Cocker, Thomas Dilworth, John Hill und Edmund Wingate noch immer Absatz. Unter den verschiedenen Auflagen von Cockers Arithmetik[2]) erschienen zwischen 1725 und 1767 mehrere von Mrs. Slack unter dem Namen „George Fisher" herausgegeben[3]). Mrs. Slack hat unter dem Pseudonym „George Fisher" auch eine eigene Arithmetik geschrieben. Sie ist unseres Wissens die erste Frau, welche arithmetische Bücher zu verfassen unternahm.

1760 gab James Dodson eine Ausgabe der ungefähr 1629 zuerst erschienenen Arithmetik von Wingate heraus. De Morgan erklärt, daß Wingate, nach den in verschiedenen Auflagen vorgenommenen Abänderungen, sein Werk nicht wieder erkannt haben könnte[4]). Dodson war Lehrer der Mathematik zu Christ's Hospital, ein Freund De Moivres und ein Mitglied der Royal Society. Er ist ein Urgroßvater August De Morgans[5]).

De Morgan zählt dreißig Rechenbücher auf, welche in Großbritannien während der Periode 1759—1799 geschrieben wurden[6]). Hervorragend unter diesen war A complete treatise on Practical Arithmetic and Book-Keeping von Charles Hutton. Die 5. Auflage soll 1778 gedruckt worden sein; die 8. erschien in London 1788. In diesem kurzen Werke wird der Dezimalpunkt gegen den oberen Teil der Ziffer gesetzt, wie in 1·3, damit er nicht mit Satzzeichen verwechselt werden könne. Hutton bemerkt, daß er den

---

1) John Hill, Arithmetic, 1772, p. 144. 2) Die erste Auflage erschien 1678, „perused and published by John Hawkins". Wenigstens 112 Auflagen sollen herausgegeben worden sein [V. Dictionary of National Biography]. Cockers Werk hatte vor dem 1661 erschienenen Rechenbuch des James Hodder den Vorzug, daß es Untersichdividieren, statt Übersichdividieren lehrte. Beide Bücher gaben Regeln ohne Beweise. Beide genossen weite Verbreitung. Näheres über Cocker findet man in De Morgans Arithmetical Books, S. 56 bis 62. Wohl zu verwerfen ist De Morgans Ansicht, daß Cockers Arithmetic nicht von Cocker, sondern von John Hawkins geschrieben wurde, daß Hawkins, um größeren Absatz zu erlangen, sich den Namen Cockers beilegte.

3) G. Valentin, „Die Frauen in den exakten Wissenschaften", Bibliotheca Mathematica, N. F., 1895, S. 75. 4) A. De Morgan, op. cit. p. 73.

5) Memoir of Augustus De Morgan by his wife, Sophia Elizabeth De Morgan, London 1882, p. 283, 284. 6) De Morgan, op. cit. p. 73—82.

Wink für diese Schreibweise aus Tabellen von Newtons Optics erhalten habe.

Ein anderes Werk war The Scholar's Guide to Arithmetic, London 1780 (6. Auflage 1795), von John Bonnycastle (1750 [?] bis 1821). Man findet darin Beweise für die Regeln, welche in einigen Fällen in algebraischer Sprache dargestellt sind, aber immer in kleinerem Druck in der Form von Anmerkungen, so daß sie ganz bequem übergangen werden konnten. 1851 erschien die 18. Auflage dieses Werkes. Bonnycastle war ein Autodidakt, stand einer Akademie in London vor und wurde ungefähr 1782 Professor der Mathematik an der königlichen Militärakademie bei Woolwich.

In Schottland stand die Arithmetic, Rational and Practical von John Mair in großer Gunst. Die erste Auflage soll 1766 erschienen sein[1]), die fünfte wurde 1794 in Edinburgh herausgegeben. Dies ist ein weitläufiges, vollständiges Werk, verständlich geschrieben, obschon das Versprechen alles gründlich zu beweisen, nicht überall durchgeführt ist. Mair war Lehrer in Ayr, später Rektor an der Perth Akademie und Verfasser von Schulbüchern über verschiedene Fächer.

In Irland erschien 1759 die Practical Arithmetic von einem Quäker John Gough (1721—1791), Schriftsteller und Lehrer in Cork und Dublin. Das Rechenbuch enthält Fragen und Antworten, einige davon in Versen: „Q. What is subtraction? A. Subtraction from a greater takes a less, and thereby shews the difference or excess". Nach De Morgan[2]) soll die zweite Auflage große Erweiterungen erfahren haben, während die späteren für Schulzwecke wieder reduziert wurden. Der Name des Schriftstellers wurde in Irland ein Synonym der Arithmetik, und als gegen Mitte des 19. Jahrhunderts Thomsons Werk Eingang fand, erhielt es den Namen „Thomson's Gough"[3]).

Eines der brauchbarsten Bücher damaliger Zeit war The Tutor's Assistant von Francis Walkingame, dessen 28. Ausgabe in London 1798 gedruckt wurde. Eine Ausgabe davon erschien[4]) in London 1844.

Englische Rechenbücher legen großes Gewicht nicht nur auf Dezimal-, sondern auch auf Duodezimalbrüche. Ein Werk, The Measurer's Best Companion; or Duodecimals brought to Perfection, von Thomas Sutton, 1785 in Great-Yarmouth gedruckt, erklärt diesen Gegenstand mit großer Vollständigkeit. Es wird erzählt, daß

[1]) Allibones Dictionary of Authors. [2]) Ebenda, S. 79, 80. [3]) Ebenda, S. 80. [4]) Ebenda, S. 80.

ein Lehrer am Pembroke College auf der Universität Cambridge einem Studenten einmal folgenden Rat gab: „Vernachlässigen Sie keineswegs die Duodezimalen. Ich wurde Senior Wrangler 1767 durch meine Kenntnis der Duodezimalen."[1])

Das Rechnen mit periodischen Dezimalbrüchen, welche schon in älteren englischen Büchern eine hervorragende Stelle erhielten, wurde theoretisch 1768 von John Robertson (1712—1776), damals Bibliothekar der Royal Society, früher Lehrer der Mathematik in Portsmouth, in einem Artikel erklärt[2]). Die Werte periodischer Dezimalbrüche werden durch Summation geometrischer Progressionen gefunden. In einem anderen Aufsatz erläutert er zwanzig Fälle in der Zinseszinsrechnung, worin jede der fünf Größen (Annuität, Zeit, Prozent, Betrag, Kapital) auf vier verschiedenen Wegen aus den übrigen hergeleitet wird[3]). Diese Schrift führt er als die Vervollständigung einer Arbeit des William Jones vor. Eine andere[4]) über die Konstruktion der Logarithmen durch Reihenentwicklung schreibt er ganz diesem William Jones zu.

Eine mathematische Gesellschaft existierte zu Spitalfields in London von 1717 bis 1845. Sie war also jünger als die Hamburger und älter als die Amsterdamer Gesellschaft. Sie war von Joseph Middleton, einem Verfasser mathematischer Bücher, gegründet und hatte Dolland, Simpson, Saunderson, Crossley, Parvissen und Gompertz als Mitglieder. Anfangs waren die Mitglieder Arbeiter, viele davon Seidenweber. Es wurde von jedem erwartet, daß er seine Pfeife, seinen Krug und sein Problem mitbringe[5]).

Während des 18. Jahrhunderts gab es in England keine Journale, welche sich ganz der Mathematik widmeten, wohl aber mehrere, welche Abteilungen für Elementarmathematik enthielten. Die berühmtesten unter diesen waren The Ladies' Diary, gegründet 1704, und The Gentleman's Diary, welche 1840 vereinigt wurden. Thomas Simpson war Herausgeber der Ladies' Diary von 1754 bis 1760, und er rühmte von dieser Jahresschrift, sie hätte mehr zum Studium und Fortschritt der Mathematik beigetragen als die Hälfte der Bücher speziell für diesen Zweck geschrieben[6]).

---

[1]) C. Wordsworth, Scholae Academicae, 1877, p. 73. [2]) Philosophical Transactions (London), Vol. 58, for the year 1768, p. 207—213. [3]) Ebenda, Vol. 60, for the year 1770, p. 508—517. [4]) Ebenda, Vol. 61, for the year 1771, p. 455—461. [5]) A. De Morgan, Budget of Paradoxes, p. 80, 232, 451; S. E. Morgan, op. cit. p. 123; P. A. Mac Mahon, Address before Section A, British Asia, Report 71, 1901. [6]) Andere periodische Schriften, welche sich teilweise der Elementarmathematik widmeten, waren The Palladium, 1749—1777 von Robert Heath als ein Rival der Ladies' Diary veröffentlicht; Miscellanea

In den Kolonien von Nordamerika wurden im 18. Jahrhundert hauptsächlich Rechenbücher von Großbritannien importiert[1]). Die erste amerikanische Auflage eines großbritannischen Werkes, welches ganz dem Rechnen gewidmet ist, war die Arithmetick: or, That necessary Art made most easie von James Hodder[2]), Boston 1719. 1779 erschien in Philadelphia ein Neudruck des populärsten englischen Werkes des 17. Jahrhunderts, nämlich Edward Cockers Arithmetick. Weitere Verbreitung als diese zwei hatte Thomas Dilworths Schoolmaster's Assistant, wovon wenigstens acht amerikanische Auflagen gedruckt wurden[3]). Es wurden hier auch die Rechenbücher von Daniel Fenning, John Gough und „George Fisher" gedruckt.

Das erste Werk aus der Feder eines amerikanischen Schriftstellers ist die Arithmetick, Vulgar and Decimal, Boston 1729. Das Buch ist anonym, wird aber Isaac Greenwood (1702—1745) zugeschrieben[4]). Ungleich den obengenannten ausländischen Werken setzt es die Kenntnis der Grundoperationen voraus und macht einigen Anspruch an die Denkkraft der Schüler. Vielleicht aus diesen Gründen fand es sehr geringe Verbreitung. Isaac Greenwood war Professor der Mathematik und Naturphilosophie an der Universität Harvard von 1727 bis 1738.

Scientifica Curiosa, Vol. I, 1766, mit Charles Hutton als Mitarbeiter; The Scientific Receptacle, von Thomas Whiting 1791 in London gegründet; The Stockton Bee: or Monthly Miscellany, 1793; The Gentleman's Mathematical Companion, von 1798 bis 1804 jährlich in London gedruckt. Diese Schriften standen mir zu Washington in der Bibliothek des Herrn Dr. Artemas Martin zur Verfügung. Es gab mehrere andere Journale gleicher Art, z. B. The Mathematical Magazine and Philosophical Repository von G. Mitchell, T. Moss und anderen, 1761; Huttons Mathematical Miscellany, The London Magazine, The British Oracle. (Vgl. T. T. Wilkinson, Memoir of the Rev. John Lawson, Manchester 1854; Bolton, Catalogue of Scientific and Technical Periodicals, 1665—1895, Washington 1897.)

[1]) Holländische Einwanderer des 17. Jahrhunderts brachten die Coffer-Konst von Pieter Venema († 1612) mit. Dies Buch war so hoch geschätzt, daß 1730 in New York eine englische Übersetzung davon gedruckt wurde (F. Cajori, The Teaching and History of Mathematics in the U. S., Bureau of Education Washington 1890, p. 13). [2]) Die erste Auflage erschien in London 1661 (August de Morgan, op. cit. p. 46). [3]) Philadelphia 1769, Hartford 1786, New York 1793 und 1806, New London 1797, Philadelphia 1805, Brooklyn 1807, Albany 1824. [4]) Eine ausführlichere Beschreibung des Werkes findet man in „Notes on the History of American Text-books on Arithmetic" by James M. Greenwood and Artemas Martin in The Report of the Commissioner of Education for 1897—1898, Washington, D. C., p. 802—805; Cajori, op. cit. p. 14.

Erst über fünfzig Jahre später begegnen wir einem zweiten amerikanischen Autor, dem Nicolas Pike, dessen New and Complete System of Arithmetic 1788 in Newburyport gedruckt wurde. Nicolas Pike (1743—1819) absolvierte die Universität Harvard und war während vieler Jahre Lehrer in Newburyport. Seine Arithmetik enthielt auch ganz kurze Kapitel über Logarithmen, Trigonometrie, Kegelschnitte und Algebra.

In der Beweismethode des arithmetischen und algebraischen Teils galt ihm Bonnycastle als Vorbild. Alle Beweise erscheinen als Anmerkungen in kleinerem Druck. Während dreißig Jahren wurde das Werk viel gelesen; anfangs diente es als Text für den mathematischen Kursus auf den Kollegien. Es wurde von Professoren mehrerer amerikanischen Kollegien empfohlen und Georg Washington sandte dem Autor einen Brief, worin er seine Anerkennung ausdrückte.

Als nach dem Revolutionskrieg die Vereinigten Staaten 1789 zu der Verfassung gelangten, die sie noch heutzutage haben, und die Früchte der erstrittenen Freiheit zu genießen anfingen, erhielt das Schulwesen auch neuen Aufschwung. In dem Zeitraum 1789—1799 erschienen über ein Dutzend neuer Rechenbücher[1]), von denen The Schoolmaster's Assistant von Daboll, New London 1799, das hervorragendste war. Es legt auf Dezimalbrüche viel größeres Gewicht als damals üblich war. Nathan Daboll (ungefähr 1750 bis 1818) war Lehrer in Connecticut.

1792 wurde ein neues Münzsystem eingeführt. Seit dem ersten Gepräge 1794 verdrängten dollars und cents allmählich die englischen pounds und shillings. Die Rechenbücher schlossen sich der neuen Ordnung an. Durch diese Münzveränderung wurden die ausländischen Schriftsteller Dilworth und Cocker aus amerikanischen Schulen allmählich verdrängt. Zu erwähnen ist noch, daß The American Accomptant von Chauncy Lee, welches 1797 in Lansingburgh erschien, das früheste Rechenbuch ist, worin das Dollarzeichen $ sich vorfindet[2]). Nicolas Pike gab 1788 für mills, cents, dimes, dollars folgende Abkürzungen: *m, c, d, D.* Lee schreibt, ohne weitere Erklärungen, für mill /, cent //, dime ⫽̶, dollar ⫻. In Handschriften von Robert Morris, dem Finanzier der Revolution, findet man das Dollarzeichen $ schon 1793. Gründliche Studien über den Ursprung des Zeichens sind nicht vorgenommen worden; man hat aber wenigstens sieben verschiedene Hypothesen darüber[3]).

---

[1]) Vide Greenwood and Martin, op. cit. p. 809—814; Cajori, op. cit. p. 46, 47. [2]) Greenwood and Martin, op. cit. p. 812. [3]) Vgl. Malcolm Townsend, U. S.; an Index to the United States of America, Boston 1890, S. 420.

In dem Lesen der Zahlen und in der Ausführung der vier Rechnungsarten mit ganzen Zahlen sind während der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts keine neuen Methoden erschienen, wohl aber ist ein Fortschritt zu größerer Übereinstimmung über den relativen Wert der verschiedenen Methoden und ein allmähliches Verwerfen der komplizierteren derselben wahrnehmbar. Die Wörter Billion, Trillion usw. werden in allen europäischen Ländern, außer Frankreich, sowie auch in den Staaten von Nordamerika, als 10^{12}, 10^{18} usw. definiert. Den Gebrauch dieser Wörter im Sinne von 10^9, 10^{12} usw. findet man schon in der Arithmétique von G. Trenchant, Lyon 1566; der Gebrauch wurde in Frankreich im 17. Jahrhundert allgemein[1]). Daß hier und dort ein Rechenbuch zu finden ist, welches die Wörter Billion, Trillion, ja sogar das Wort Million noch gar nicht gebraucht, ist nicht auffallend[2]). Das Alte läßt sich nicht so leicht verdrängen.

S. F. Lacroix[3]) bemerkt, daß man im Handel statt billion das Wort milliard brauche. F. Legendre schreibt milliars. Wir haben milliard in praktischen französischen Rechenbüchern allgemein gefunden; Barrême und Pierre Sénebier[4]) schreiben auch milliasses für trillions. In der Arithmétique raisonnée et demontrée, welche Leonhard Euler zugeschrieben wird[5]), heißt 10^9 milliard,

---

[1]) Encyclopédie des sciences mathématiques, Ed. Française, Tome I, 1904, p. 17. [2]) Das Wort Million ist z. B. in De Vernieuwde/Cyfferinge van Mr. Willem Bartjens, Herstelt, vermeerdert ende verbetert Door Mr. Jan van Dam, . . . Amsterdam 1771, nicht zu finden. Dort ist 1000000 = Dupzendmaal-Dupzend. Ähnliches findet man in J. C. Huths Die kürzeste, bequemste und leichteste Art zu Rechnen, Halberstadt 1774 (wie wir aus der Geschichte des Unterrichts in den mathematischen Lehrfächern in der Volksschule, bearbeitet von E. Jänicke und G. Schurig, Gotha 1888, S. 17, entnehmen). In dem Abbaco ovvero Pratica Generale Dell' Aritmetica . . . esposto da Girolamo-Pietro Cortinovis, maestro d'Aritmetica Pratica. Quarta Edizione. Venezia 1759, wird das Wort Billion nicht gebraucht, und 976000000000000 = novecento, e settantasei milioni, di milioni. [3]) Traité élémentaire d'arithmétique, Paris 1807, p. 5. [4]) Sénebier, Traité d'arithmétique, Lausanne 1774, p. 7. [5]) L'arithmétique raisonnée et démontrée, oeuvres posthumes de Léonard Euler, traduite en françois par Daniel Bernoulli, directeur de l'Observatoire de Berlin etc. Corrigée et considérablement augmentée par M. De la Grange, Berlin, chez Voss & fils et Decker & fils, 1792. Man glaubte zunächst in diesem Werke eine französische Übersetzung von Eulers 1738—40 erschienenen, jetzt sehr seltenen Einleitung zur Rechenkunst zu sehen, aber P. H. Fuß und G. Valentin sind der Ansicht, daß hier ein literarischer Betrug vorliegt, und daß Euler, Daniel Bernoulli und Lagrange kein Wort von diesem Werke geschrieben haben. Fuß führt im Bull. Ac. Petrop. Classe math. 9, 1851, S. 340—341 die ersten Sätze des Werkes von 1738 und desjenigen von 1792 an und findet keine Ähnlichkeit zwischen beiden. Auch hebt er hervor, daß Daniel Bernoulli nie directeur de l'observatoire de Berlin war und nicht

10^{12} **billiard**, 10^{15} **trilliard**. Hätte sich diese Sprachweise erhalten, wäre man heutzutage von Verwirrung frei; es würden 10^9, 10^{12}, 10^{15} milliard, billiard, trilliard, und 10^{12}, 10^{18}, 10^{24} billion, trillion, quadrillion heißen.

Es ist bemerkenswert, daß das seit Anfang des 16. Jahrhunderts in Spanien von **Ciruelo** und **Ortega** gebrauchte Wort **cuento** für 10^6 (siehe Bd. II^2, S. 386, 387) sich erhalten hat und von **Perez de Moya** und **Bails** in ihren von uns früher angeführten Werken dem Worte **millone** vorgezogen wird. Für 10^{12} schreibt **Bails bicuentos** und **Perez de Moya cuento de cuento**.

Die Ausführungen der Addition und Multiplikation waren mit den jetzigen Methoden identisch. Im Multiplizieren fing man allgemein mit der niedrigsten Ziffer des Multiplikators an. Einige Autoren aber machen darauf aufmerksam, daß vorteilhaft mit der höchsten Ziffer des Multiplikators angefangen werden kann[1]). Es werden drei Arten des Subtrahierens gelehrt. Wenn eine Ziffer im Subtrahend

---

der Übersetzer von **Eulers** Algebra ist. In der Vorrede des Werkes von 1792 heißt es nämlich: „le fameux **Bernoulli**, traducteur de l'Algèbre de ce savant [**Euler**], a cru rendre service au public, en traduisant un Ouvrage . . .“ **Valentin** hebt in der Bibliotheca Mathematica N. F. 12, 1898, S. 49 hervor, daß in **Quérards** La France littéraire III, 1829, p. 238 ein Werk, L'arithmétique démontrée, opérée et expliquée von C. F. **Gaignat de L'Aulnays de Nantes**, Paris 1770, angeführt wird, mit der Anmerkung: „Cet ouvrage a été reimpr. en 1792 comme un ouvrage posthume de **Léonard Euler**, etc.“ (folgt der obige Titel). Wir haben zwei verschiedene Ausgaben der **Euler**schen Arithmetik vom Jahre 1792 gesehen, die sich aber nur durch das Titelblatt, einen Satz in der Vorrede und eine kurze Anmerkung unterscheiden. Der Titel der anderen Ausgabe lautet: „L'arithmétique raisonnée et démontrée, oeuvres posthumes de **Léonard Euler**, traduite en françois par **Bernoulli**, directeur de l'Observatoire de Berlin etc. (Berlin, chez Voss & fils et Decker & fils, 1792“). Der letzte Satz in der Vorrede der ersten Ausgabe, welcher sich auf **Lagrange** bezieht, wird weggelassen. Auf S. 616 der zweiten Ausgabe wurde hinzugefügt: „De l'Imprimerie de **Grangé**, rue de la Parcheminerie“. Bisher ist es niemandem möglich gewesen, alle in Frage kommenden Werke einsehen zu können, weshalb die Geschichte des Werkes nicht definitiv bestimmt ist. In den Oeuvres complètes en François de L. **Euler**, publiées par M. M. **Dubois** et **Drapiez** in Belgien wurde die Arithmetik des Jahres 1792 als echt angenommen und 1839 als dritter Band herausgegeben. Um sie den damaligen Schulbedürfnissen anzupassen, wurde sie so gründlich bearbeitet, daß sie mit dem Buche des Jahres 1792 beinahe keine Ähnlichkeit hat. Von nun an werden wir letzteres als „**Euler-Bernoulli**“ zitieren.

[1]) Z. B. W. J. G. **Karsten**, Lehrbuch der gesamten Mathematik. Der Erste Theil, Greifswald 1767, S. 128; **John Mair**, Arithmetic, 1794, S. 59; **Lagrange**, Math. Elementarvorlesungen, deutsche Separatausg. von Dr. H. **Niedermüller**, Leipzig 1880, S. 22, 23.

größer ist als die darüber stehende, so wird in ungefähr dreiviertel der Rechenbücher eine Einheit von der nächst höheren Ziffer im Minuend geborgt und wird dann vielleicht mit einem Punkte bezeichnet, daß letztere sodann um eins weniger gelte. Statt die folgende Ziffer des Minuenden um eine Einheit zu verkleinern, wird in der zweiten Methode die folgende Stelle im Subtrahenden um eins vermehrt. Diese Erklärung findet man öfter in französischen und italienischen als in deutschen Werken. Manche Schulbücher enthalten beide Methoden. In den Vorlesungen von Laplace, 1795 auf der Normalschule in Paris gehalten, werden beide Arten erklärt[1]. In einem dritten Verfahren, welches selten erscheint, wird, wie früher bei Riese und Rudolff, die untere Ziffer erst von der geborgten 10 abgezogen und die obere Ziffer hernach dazu addiert. Michelsen gibt noch einen anderen Weg. Man ziehe die Ziffer des Minuenden von der Ziffer des Subtrahenden ab, und subtrahiere den Rest von neuem von 10, und lasse dann die folgende Ziffer des Minuenden eins weniger gelten[2]. In allen von uns gelesenen Werken sagt man: 2 von 5 bleibt 3; niemals wird 2 und 3 macht 5 angegeben. Die Operation geht beinahe immer von rechts nach links.

Division ist eine bedeutend schwierigere Operation, wofür zur Zeit der Renaissance viele Methoden vorgeschlagen wurden. Gegen Ende des 18. Jahrhunderts findet der Sturz der während zweier Jahrhunderte gemeinen Divisionsformen statt und größere Uniformität in den Operationen tritt ein. Die Rechenmeister der Zeitperiode 1759 bis 1799 reden von zwei Hauptmethoden, die um die Herrschaft kämpften, 1. das Übersich- oder Oberwärtsdividieren, oder die Turmmethode, 2. das Untersich- oder Unterwärtsdividieren. Diese Einteilung der damals bekannten Divisionsformen ist nicht fundamental. Die Hauptfrage ist nicht, ob man oberwärts oder unterwärts fortschreiten solle; wohl aber, ob man die Teilprodukte sofort abziehen solle oder nicht, ob im Bilden der Produkte man mit der höchsten oder mit der niedrigsten Ziffer des Divisors anfangen solle, und was überhaupt die anschaulichste Anordnung der Ziffern sei. Die verschiedenen Divisionsarten, welche in dieser Zeitperiode gebraucht wurden, lassen sich so anordnen, daß man stufenweise von einer extremen Form zur anderen fortschreiten kann. Unten machen wir dies an folgenden Beispielen klar:

---

[1] Journal de l'école Polytechnique ou Bulletin du Travail fait à cette école, 7. et 8. cahiérs, Tome II, A Paris 1812. Leçons de Mathématiques, données à l'école normale, en 1795 par M. Laplace, p. 8. [2] Versuch in Socratischen Gesprächen usw. von J. A. C. Michelsen, I. Bd., 1784, S. 183.

A B C⎫ D E F G H
a b c⎭

Wir haben hier zwei Anordnungen, A B C D E F G H und a b c D E F G H: Die Divisionsarten a, b, c unterscheiden sich von A, B, C darin, daß man in ersterer beim Bilden der Teilprodukte mit der ersten Ziffer zur Linken anfängt und nach rechts geht, während in letzterer man mit der ersten Stelle zur Rechten anfängt und nach links schreitet.

A.

```
32
3188 ┌quotient
6754 └  18     reste 328
----
3577
35
```

F. Le Gendre[1]), 1774
(6754 : 357).

a.

```
1
2
37
496
801
19773
56331 | 118 163/476
47666
477
4
```

Christian Pescheck[2]), 1759
(56331 : 476).

B.

```
Diviseur 469 | 387046
Produit  825   11881
                 242
                   1
```

„Euler-Bernoulli", 1792, p. 173
(387046 : 469).

b.

```
      2  1
      32321
      555532
      090254
346 | 212550001 | 258594 121/346
    | 89473645  |
```

Johann Friedrich Heynatz[3]),
1780 (89473645 : 346).

---

[1]) L'arithmétique en sa perfection, mise en pratique selon l'usage des financiers, gens de pratique, banquiers, et marchands . . . par F. Le Gendre, Arithméticien, Dernière édition, corrigée . . ., Paris 1774, p. 50. [2]) M. Christian Peschecks . . Deutliche Erklärung derer Kaufmann- und öconomischen Rechnungen, als da sind: Thara- und Fusti-Rechnung; . . ., Budissin 1759, S. 11. [3]) M. Johann Friedrich Heynatz, Rektors zu Frankfurt an der Oder, Handbuch . . ., Zweiter Theil, welcher ein ausführliches Rechenbuch enthält. Zweyte vermehrte und verbesserte Auflage. Berlin 1780, S. 106.

C.

Dividende	Diviseur
4787	
108	37
347	129
14	

„Euler-Bernoulli“, 1792, p. 165
(4787 : 37).

c.

346 | 89473645 / 21255001 | $258594\frac{121}{346}$
090254
555532
82321
2 1

Johann Friedrich Heynatz,
1780, S. 106.

D.

4
203
17812
123456 | 233
105644 | 528
1588
15

Barrême, 1764, p. 227
(123456 : 528).

E.

12|2
426|7
34|72685|2137
68
34
102
·238

John Mair[1]), 1794
(72685 : 34).

F.

72634 ÷ $2594\frac{2}{28}$
28
56
166
28
140
263
28
252
114
28
112
2

Johann Georg Prändel[2]), 1795
(72634 : 28).

G.

		Divisore	Dividendo
7980.	1.	7980	148431
15960.	2.	Quoz:	18
23940.	3.		7980
31920.	4.		68631
39900.	5.		63840
47880.	6.	Residuo	4791
55860.	7.		
63840.	8.		
71820.	9.		

Odoardo Gherli[3]), 1770
(148431 : 7980).

[1]) John Mair, Arithmetic, Rational and Practical, Edinburgh 1794, p. 89. [2]) Johann Georg Prändels . . . Arithmetik . . . München 1795, S. 47. [3]) Gli Elementi Teorico-Pratici delle matematiche pure del Padre Odoardo Gherli, Domenicano . . . Tomo I, Modena 1770, p. 19.

H.

```
75347 | 53
53    | 1421 34/53
----
223
212
----
 114
 106
 ----
   87
   53
   --
   34
```

Étienne Bézout[1]), 1797
(75347 : 53).

In A. und a. werden die Teilprodukte sofort abgezogen, die Reste über den Dividend geschrieben, der Divisor unter den Dividend gesetzt und nach rechts gerückt, und jede Ziffer durchgestrichen, sobald man damit fertig ist. A. wird von „Euler-Bernoulli“ 1792, von Pescheck 1741 und von Barrême 1764 division à l'Espagnole genannt. a. heißt bei Pescheck die gemeine Art, bei Barrême die division à la Françoise, bei „Euler-Bernoulli“ à la Françoise briève, bei J. F. Maler[2]) 1765 das Teutsche Dividieren. Über die Divisionen aufwärts sagt Johann Georg Prändel[3]): „Ihr Aussehen ist sehr geschmeidig; aber sie haben die Beschwerlichkeit, daß sich ein begangener Fehler nicht so leicht entdecken läßt, wie beym Abwärtsdividieren, folglich meistens die Operation von Neuem angefangen werden muß“. „Ich bin überzeugt,“ sagt Heinatz[4]) 1799, „daß die meisten Menschen darum nicht ordentlich rechnen, weil ihnen die Turmmethode des Dividierens zu viel Schwierigkeiten macht.“

In b. wird der Divisor links und nur einmal geschrieben, während in c. die Reste unten gesetzt werden. Letztere wird von Pescheck die welsche Art und von „Euler-Bernoulli“ division à la Françoise longue genannt. Schon über 200 Jahre früher erwähnt Rudolff diese französische Manier des Rechnens[5]).

In B. wird der Divisor nur einmal geschrieben. Divisor und

---

[1]) Cours de Mathématiques, à l'usage du corps de l'Artillerie. Par M. Bézout . . . , Tome Premier, . . . à Paris 1797, v. st. An V, p. 44. [2]) Kurzer und deutlicher Unterricht zum Rechnen . . . Jacob Friderich Maler . . . zweite und verbesserte Auflage, Carlsruhe 1765, S. 62. [3]) Op. cit. S. 50. [4]) Jänicke und Schurig, op. cit. S. 58. [5]) Sterner, op. cit. S. 279.

Quotient werden links gesetzt, und die Reste unter den Dividend. Bei „Euler-Bernoulli" heißt diese Art division à l'italienne longue. „Diese Art des Dividirens ist die kürzeste unter allen, und ob sie gleich auch nicht leicht ist, so muß man doch um des daraus zu hoffenden Nutzens willen die auf ihre Erlernung zu wendende Mühe nicht achten."[1]).

C. ist der vorigen Form sehr ähnlich. Der Divisor und Quotient stehen rechts, und Ziffern werden nicht durchgestrichen. „Euler-Bernoulli", sowie Barrême, nennen diese Art division à l'italienne briève.

In D. werden die vollständigen Produkte unter den Dividend und die Reste über denselben gesetzt. Das sofortige Abziehen findet hier nicht statt. „Euler-Bernoulli" und Barrême geben dieser Form den Namen division à la Portugaise.

Eine ganz ähnliche Manier ist E., wo der Divisor links steht und Ziffern nicht durchgestrichen werden.

F. ist eine mit der heutigen beinahe identische Form, worin der Divisor für jede Multiplikation wiederholt wird. Dieser Divisor wird öfters in Klammern gesetzt oder weiter nach links geschrieben, um bei der Subtraktion weniger im Wege zu sein. Diese Art wurde in Deutschland viel gebraucht. Barrême nennt sie division à l'italienne longue und Pescheck die französische Art[2]).

In G. wird durch Hilfe der Addition das zweifache, dreifache usw. des Divisors gefunden, so daß man die Rechnung ohne Einmaleins, „ja sogar ohne Neppersche Stäbe"[3]) durchführen und den Quotienten ohne Raten finden kann[4]). „Das Dividiren ohne Ein mal Eins nennt man das Indianische"[5]).

H. ist eine alte Form, die Ende des 18. Jahrhunderts in den besten Werken alle anderen Arten verdrängt hatte. Um Verwirrung zu vermeiden, wird nach jeder Subtraktion die nächste Ziffer im Dividend mit dieser zum gebliebenen Reste heruntergezogenen Ziffer öfters mit einer geraden Linie verbunden; oder die Anzahl Ziffern, die noch nicht heruntergezogen sind, wird nach jedem neuen Teildividend durch Punkte angedeutet[6]).

---

[1]) Heynatz, op. cit. S. 114. [2]) Sterner, op. cit. S. 330. [3]) Heynatz, op. cit. S. 116. [4]) Es ist bemerkenswert, daß diese Divisionsart schon von Adrianus Romanus (1561—1615) in einer Schrift Nova Multiplicandi, Dividendi, Quadrata componendi, Radices extrahendi ratio, multò quam pervulgata certior, facilior, & majoribus maximè numeris accommodatio, erklärt wurde. [Vide H. Bosmans, S. J.; „La Méthode D'Adrien Romain pour effectuer les calculs des grands nombres" in Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, T. XXVIII, 2e partie.] [5]) J. F. Maler, op. cit. S. 62. [6]) J. F. Maler, op. cit. S. 63, nennt diese Methode die Portugiesische.

Um genauere Angaben über den Gebrauch der verschiedenen Divisionsarten zu machen, bemerken wir, daß von den Werken, die während der Jahre 1759—1799 gedruckt wurden und dem Übersichdividieren Aufmerksamkeit schenken, die meisten Ausgaben früher erschienener Werke sind. Von 103 mathematischen Büchern, die uns zur Einsicht vorlagen, sind Bartjens und Pescheck die einzigen, die das Übersichdividieren ausschließlich benutzen. Die ersten Auflagen beider Werke erschienen lange vor der Zeit, die wir jetzt betrachten. Nur 16 Bücher erklären das Oberwärts- sowohl als das Unterwärtsdividieren. Die übrigen — ungefähr fünfsechstel der ganzen Anzahl — erklären das Unterwärtsdividieren, nämlich eine oder mehrere der Formen C, F, G, H; gewöhnlich ziehen sie eine der Arten F, G, H der Form C vor.

Bei Dezimalbrüchen werden von etwa einviertel der Schriftsteller dieser Zeit die abgekürzten Multiplikations- und Divisionsmethoden erklärt. Die abgekürzte Multiplikation wird theoretischer- und praktischerseits in einer Abhandlung von Isidoro Bernareggi (1735 bis 1808), Priester und Professor der Mathematik an der königlichen Schule zu Lodi, behandelt[1]). Bernareggi untersucht die Anzahl der Dezimalstellen in den Faktoren, welche notwendig sind, damit der Fehler im Produkte eine vorgelegte Grenze nicht übersteige. In der Ausführung der Multiplikation schreibt er die Ziffern des Multiplikators in entgegengesetzter Reihenfolge. In seiner Aritmetica riformata, Milano 1797, werden diese Ideen für Schulzwecke dargestellt.

Ein anonymes Werkchen über den gleichen Gegenstand, Essai sur les nombres approximatifs, Paris, an VII — 1799, wird Jean Antoine François Massabiau (1765—1837) zugeschrieben[2]) welcher ein eifriger Anhänger der Prinzipien von 1789 war und 1795 die Normalschule in Paris besuchte. In diesem Aufsatze stellt er sich die Aufgabe, allgemeine Formeln für die durch Kombination annähernder Zahlen entspringenden Fehler herzuleiten. Soll z. B. eine solche Zahl N durch eine andere N' dividiert werden, wo Q und Q' beziehungsweise die genauen Werte darstellen, so daß $Q = N \pm e$ und $Q' = N' \pm e'$, dann wird der Fehler $(\pm N'e \mp Ne') : N'(N' \pm e')$. Von den vier Werten, welche dieser Ausdruck annehmen kann, ist $(N'e + Ne') : N'(N' - e')$ der größte. Wenn $e = e' = \frac{1}{2}(10^{-n})$, und $\pm x$ die Entfernung vom Dezimalpunkte der höchsten Ziffer im Quotienten

[1]) Memorie di matematica e fisica della società Italiana, Tomo VI, Verona 1792, p. 1—70. [2]) Biogr. Universelle (Michaud).

$N:N'$ darstellt, während y dieselbe für $10^n N'$ repräsentiert, dann hat man, für $N > N'$, $z = x + n + 1 - y$ und, für $N < N'$, $z = n + 1 - y$, wo der Fehler im Quotient kleiner als $10^z : 2(10^n)$ sein soll. Man soll z. B. die Anzahl Dezimalstellen finden, um, in der Division von $Q = 63.04545\ldots$ mit $Q' = .6666\ldots$, den Fehler $< \frac{1}{2}(10^{-2})$ zu machen. Hier ist $x = 2$, $y = n$, $z = n - 2$, folglich $n = 5$, die erforderliche Anzahl Dezimalstellen im Dividend und Divisor.

Die Zeichensprache der Arithmetik und Algebra hatte in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts bedeutende Vollständigkeit und Uniformität erlangt. Die Zeichen + und — findet man beinahe überall. In mehreren holländischen Werken und einem deutschen Werke[1]) sind wir statt — dem alten Rudolffschen Zeichen ÷ begegnet. In der Maandelykse mathematische Liefhebbery, 1754—69, wird ÷ regelmäßig als Subtraktionszeichen geschrieben. Wie unten angedeutet, galt ÷ in England als Divisionszeichen und auf dem Festlande als Symbol einer arithmetischen Progression. In dieser Liefhebbery findet man auch die eigentümliche Bezeichnung von $\sqrt{\frac{4225}{65}}$ als $\sqrt{4225} = 65$, und $\frac{x+1}{xx+2x+1}\sqrt{}$ als

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Außer in der Proportionenlehre hatte = in allen Gebieten der Rechenkunst als Zeichen der Gleichheit sich eingebürgert. Während der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts verschwanden die letzten Spuren[2]) des Descartesschen ∞. Auch in der Proportionenlehre war = in Deutschland üblich. Leibniz' Sprache folgend wurde dort beinahe immer für geometrische Proportion $a:b = c:d$ oder $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ geschrieben, während in Frankreich, Spanien, Portugal, Italien und England das Oughtredsche Zeichen :: allgemeinen Beifall genoß und $a:b::c:d$ die gewöhnliche Bezeichnungsart war. Überhaupt herrschte damals bedeutende Verschiedenheit in der Zeichensprache für arithmetische und geometrische Proportionen und Pro-

---

[1]) Arithmetisches Handbuch für Lehrer in den Schulen ... von Carl Christian Illing, Dresden-Friedrichstadt 1793, S. 11. [2]) M. Gallimard in seiner Méthode Théorique et Pratique D'Arithmétique, D'Algèbre et de Géométrie ..., Paris 1753, p. 26, sagt: = signifie est égale à, ∞ signifie tout simplement, égal à, ou qui est égal à. Er schreibt S. 42: „Donc $x \propto \frac{90}{6} = 15$". Odoardo Gherli, op. cit., 1770, Tomo I, p. 6, erinnert den Leser daran, daß „Il Cartesio in vece di = usa il segno ∞".

gressionen. Für die Regeldetri hatte man in früheren Jahrhunderten verschiedene Bezeichnungen. Als im 18. Jahrhundert diese Regel mehr und mehr als eine Anwendung der Proportion, der Gleichheit zweier oder mehrerer Verhältnisse, aufgefaßt wurde, fand die frühere Zeichensprache dieser Regel öfters Eingang unter den Proportionssymbolen. Bartjens[1]) 1771 schreibt

elle guld. elle
4 — 9 — 16.

Für das unbekannte vierte Glied gibt er gar kein Symbol. Pescheck 1759 und viele andere tun desgleichen. Thomas Dilworth[2]) klagt, daß einige Meister lange Striche statt Punkte gebrauchen, um die Glieder zu trennen, was nicht recht sei, weil in $a:b::c:d$ die : zeigen, daß die zwei ersten und die zwei letzten Glieder in gleicher Proportion seien, während das :: die zwei Paare trenne und zugleich zeige, daß das zweite Glied zum dritten sich nicht wie das erste zum vierten verhalte. Die Proportion als die Gleichheit zweier Verhältnisse ist von Dilworth noch nicht klar erfaßt. Rivard[3]) schreibt 1768 eine geometrische Proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ oder $a.b::c.d$. M. l'Abbé Maries Auflage von De la Caille[4]) schreibt $a.b::c.d$ oder $a:b::c:d$; während die lateinische Auflage des De la Caille[5]) 1762 und die italienische Auflage von Boscovich[6]) 1796 $a:b::c:d$, $a:b=c:d$, oder $a|b\|c|d$ enthalten. Die lateinische Übersetzung gibt auch $a.b::c.d$, und die italienische $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Die arithmetische Proportion deuteten Rivard, De la Caille und Bézout[7]) durch $a.b:c.d$ an. In deutschen Büchern findet man öfters $a.b=c.d$ oder $a-b=c-d$. Mit Recht klagt Scheibel[8]), daß wenn $a.b=c.d$ geschrieben wird, man den Punkt mit dem Multiplikationszeichen leicht verwechseln könne.

Die geometrischen und arithmetischen Progressionen wurden noch immer in die Rechenbücher aufgenommen. Allgemein brauchte man $\div\!\!\div$ als das Symbol der geometrischen Progression ($\div\!\!\div$ 1 . 2 . 4 . 8 . 16) und, mit der Ausnahme von England, öfters $\div$ als das Symbol der

---

[1]) Bartjens-Jan van Dam, op. cit. S. 36. [2]) Thomas Dilworth, op. cit., unter The Explication of some Marks used in this Compendium.
[3]) Éléments de Mathématiques par M. Rivard, Professeur de Philosophie en l'Université de Paris. Sixième Édition, Revue et augmentée de nouveau par l'Auteur. A Paris 1768, p. 185. [4]) Leçons de Mathématiques par M. l'Abbé de la Caille, avec des augmentations par M. l'Abbé Marie, Paris 1770, p. 148. [5]) De la Caille, Lectiones . . . a C.[arolo] S.[cherffer] e S. J. Viennae, Pragae, et Tergesti 1762, p. 76. [6]) Elementi . . . del Padre Ruggero Giuseppe Boscovich. Editione terza italiana . . . in Venezia 1796, p. 115.
[7]) Bézout, op. cit., Tome I, p. 128. [8]) Einleitung zur Mathematischen Bücher Kentnis, Breslau 1781, Bd. I, S. 679.

arithmetischen Progression (÷ 3 . 6 . 9 . 12 . 15). In Großbritannien gilt das ganz ähnliche von J. H. Rahn 1659 zuerst gebrauchte Symbol ÷ statt : als Divisionszeichen; weshalb von Schriftstellern, welche überhaupt für die arithmetische Progression die Notwendigkeit eines Zeichens fühlten, ∸ gebraucht wurde. Diese Bezeichnung findet man auch mitunter in deutschen Büchern[1]). W. Emerson[2]) bezeichnet eine harmonicche Proportion durch .∵. und eine harmonische Progression durch —∴—.

Algebra.

Im Studium der Algebra war viel größerer Verkehr zwischen den verschiedenen Ländern Europas als im Studium der Arithmetik. Wegen der Abwesenheit einer streng provinziellen Behandlungsweise der Algebra wird es nicht nötig sein, die Geschichte dieser Wissenschaft in jedem Lande einzeln zu verfolgen.

Einige Werke über Algebra, die während der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, und zwar 1740—1748, verfaßt wurden, waren noch während der zweiten Hälfte sehr einflußreich, nicht nur im Lande ihrer Entstehung, sondern in ganz Europa, wo immer die Wissenschaft betrieben wurde. Von englischen Werken heben wir das Elements of Algebra von Nicholas Saunderson (1682—1739) hervor, welches 1740 zu Cambridge in zwei Bänden erschien. Dieser blinde Mathematiker stand als Jüngling im Briefwechsel mit Sir Isaac Newton und war der Nachfolger von Whiston als Lucasian Professor der Mathematik an der Universität Cambridge. Weite Verbreitung in England fand der Auszug aus dem Originalwerk: Select parts of Professor Saunderson's Elements of Algebra for the use of students at the Universities. Die 3. Auflage davon wurde 1771 in London veröffentlicht, die 4. Auflage 1776, die 5., von John Hellins (? —1827) verbessert, 1792. Das Originalwerk wurde 1756 in französischer Übersetzung von Elie de Joncourt zu Amsterdam und Leipzig in zwei Bänden herausgegeben. Eine deutsche Übersetzung rührt von Johann Philipp Grüson, Professor am adelichen Cadettencorps in Berlin, her. (Erster Teil 1798, Halle; zweiter Teil 1805.)

---

[1]) Z. B. in der Unterweisung in den philos. u. math. Wissenschaften für die obern Classen d. Schulen u. Gymnasien von Johann Jacob Ebert, Prof. d. Math. zu Wittenberg. Dritte vermehrte u. verbesserte Auflage, Leipzig 1787, S. 187. [2]) The Doctrine of Proportion, Arithmetical and Geometrical . . ., London 1763, p. 2.

Ein anderer englischer Schriftsteller, den wir erwähnen müssen, ist Thomas Simpson (1710—1761), Professor an der königlichen Militärakademie zu Woolwich. Seine Treatise on algebra wurde 1745 in London gedruckt; eine dritte Auflage 1767, eine fünfte 1782, eine achte 1804. Die erste amerikanische Ausgabe erschien 1809 in Philadelphia. Eine Übersetzung in französischer Sprache wurde 1771 in Paris veröffentlicht.

Ein drittes Werk wurde von dem schottischen Mathematiker Colin Maclaurin unter dem Titel Treatise of Algebra 1748 zu London veröffentlicht, wovon die 4. Auflage 1779 erschien.

Die weite Verbreitung von De La Cailles Leçons élémentaires de mathématiques nicht nur in Frankreich, sondern auch in Italien, ist von uns schon früher hervorgehoben worden (S. 47, 48). Eine lateinische Übersetzung durch „C. S. e S. J." (= Carolo Scherffer, S. J.) erschien 1762 zu Wien, Prag und Triest. Scherffer verfaßte eine Anzahl eigener Lehrbücher, von welchen die Institutiones analyticae, Wien 1770, hier Erwähnung verdienen.

Das bedeutendste Werk dieser Zeit war aber das nach der heuristischen Methode verfaßte Éléments d'algèbre des Alexis Claude Clairaut, Paris 1746.

Dieses berühmte Werk wurde 1752 von Christlob Mylius (1678—1754) zu Berlin ins Deutsche übersetzt und an der Universität Göttingen gebraucht, bis es von Kästners Kompendien verdrängt wurde[1]). Clairauts Algebra erschien in holländischer Sprache 1760 zu Amsterdam, von Arnoldus Bastiaan Strabbe übersetzt. Eine 5. französische Ausgabe in zwei Bänden von S. F. Lacroix erschien 1797 in Paris. Diese enthält Anmerkungen und Nachträge über Gleichungstheorie, Kettenbrüche und Logarithmen, den Vorlesungen von Lagrange und Laplace an der Normalschule entnommen, und eine einleitende Elementarschrift über Arithmetik, die in der Vorrede als größtenteils die Arbeit des jungen Jean Baptiste Biot (1774—1862) bezeichnet wird. Lacroix schrieb an Pietro Paoli von Pisa, diese Ausgabe sei doppelt so umfangreich als die früheren und enthalte Theorien, die vorher nie in Elementarwerken erklärt worden seien[2]). Die 6. Auflage (1801 zu Paris) ist vom Citoyen Jean Guillaume Garnier (1766—1840), Professor an der Polytechnischen Schule, bearbeitet und enthält eine arithmetische Ab-

---

[1]) C. H. Müller, „Studien z. Gesch. d. Math. . . . an der Univ Göttingen", Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., 18. Heft, Leipzig 1904, S. 113. Eine zweite Auflage, Berlin 1778, enthielt Zusätze von G. F. Tempelhof. [2]) Memorie della regia accademia di scienze, Modena, Serie III, Tom. I, 1898, Sezione di Scienze, p. 109.

handlung von Charles Marie Simon Théveneau (1759—1821) Clairauts Algebra wurde von Mathematikern hoch geschätzt. Lambert schien in seinen ersten Schriften Forschungsergebnisse, die nicht im Clairaut zu finden waren, als neu und deshalb der Veröffentlichung würdig anzusehen.

Im Jahre 1758 erschien in Halle der zweite Teil des Cursus mathematici von Johann Andreas Segner (1704—1777), damals Professor an der Universität Halle. Dieser Teil führte den Titel Elementa analyseos finitorum und behandelte die Algebra. Obschon Segner einer der besten Mathematiker und Physiker in Deutschland war, fand sein Kursus nicht viele Leser. Segner schrieb in Latein und stellte auch an die Fähigkeiten seiner Schüler hohe Ansprüche. Von 1735—1754 war er Professor der Naturlehre und Mathematik in Göttingen. Sein Nachfolger an dieser Universität war Abraham Gotthelf Kästner, welcher 1760 in Göttingen unter dem Titel Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen ein Werk verfaßte, welches den Bedürfnissen des Universitätsunterrichts in Deutschland entsprach und zugleich die Lehren der großen Mathematiker seiner Zeit so erfolgreich popularisierte, daß es lange Zeit das beliebteste Kompendium war. Eine zweite Ausgabe erschien 1767; eine sechste vor dem Schlusse des Jahrhunderts.

Als zweite, während der Periode 1759—1799 verfaßte Schrift nennen wir den algebraischen Teil des schon früher (S. 40) angeführten Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine, 1764—1769, von Bézout, worin eine elementare Darstellung der von Bézout 1764 veröffentlichten berühmten Abhandlung über die Auflösung von Gleichungen (S. 98) gegeben ist. In seinem Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie, 1770—1772, wird diese Darstellung weggelassen, wahrscheinlich weil die Sache für Anfänger zu schwer war. Sonst ist die Algebra von 1770—1772 mit der früheren beinahe identisch.

Der zweite Teil eines achtbändigen Werkes, betitelt Lehrbegrif der gesamten Mathematik von Wenceslaus Johann Gustav Karsten (1732—1787), erschien 1768 zu Greifswald. Karsten lehrte seit 1760 an der neuen Universität Bützow. Durch sein Werk erhielten die auf Mittel- und Hochschulen eingeführten Kompendien von Wolf, Segner, Kästner eine gefährliche Konkurrenz[1]).

Ohne Zweifel das einflußreichste Buch über Algebra im 18. Jahrhundert ist die Vollständige Anleitung zur Algebra von Leonhard Euler (erste deutsche Ausgabe 1770 in St. Petersburg). Die

---

[1]) Allg. Deutsche Biographie (Art. v. Günther).

Entstehungsweise des Werkes ist interessant. Euler schrieb in der Gazette litt. de Berlin, 1768, fol. 245, ich „nehme mir die Freiheit, Ihnen von meinen Arbeiten Nachricht zu ertheilen, mit welchen ich mich seit dem Verlust meines Gesichtes beschäftigt habe, der von Herrn Krafft und meinem älteren Söhne dadurch ersetzt worden, daß sie meine Ideen ausgearbeitet und öfters durch ihre eigne Ansichten weiter ausgeführt haben“[1]). Bestimmtere Auskunft findet man im Vorbericht zur Ausgabe von 1770: Um das Lehrbuch zu verfertigen, „erwählte er sich einen jungen Menschen, den er mit sich aus Berlin zur Aufwartung genommen hatte, und der ziemlich fertig rechnen, sonsten aber nicht den geringsten Begriff von der Mathematik hatte: er war seines Handwercks ein Schneider, und gehörte was seine Fähigkeit anlangt, unter die mittelmäßigen Köpfe. Dem ohngeachtet hat er nicht nur alles wohl begriffen, was ihm sein großer Lehrer vorsagte, und zu schreiben befahl, sondern er wurde dadurch in kurzer Zeit in den Stand gesetzt die in der Folge vorkommende schwere Buchstaben-Rechnungen ganz allein auszuführen.“

Im Vorbericht der Ausgabe von 1770 wird auch mitgeteilt, daß „schon vor zwey Jahren eine russische Uebersetzung zum Vorschein gekommen ist“. In etwas kleinerem Druck als die erste deutsche Ausgabe erschien 1771 eine zweite, welche als Verlagsort in vielen Exemplaren Lund, in anderen St. Petersburg angab. Eine Übersetzung ins Französische wurde von Johann Bernoulli III., Direktor an der Sternwarte zu Berlin, angefertigt und von Joseph Louis Lagrange mit Zusätzen über die unbestimmte Analysis versehen. Diese berühmte Ausgabe erschien 1774 zu Lyon. Andere französische Ausgaben erschienen zu Lyon 1795 (an III), St. Petersburg und Paris 1798, Paris 1801[2]).

Valentin[3]) nennt zwei holländische Ausgaben, Amsterdam 1773, Dordrecht 1807.

Eine lateinische Ausgabe, mit den Zusätzen von Lagrange, wurde 1790 in Venedig gedruckt. In den Jahren 1796—1797 veröffentlichte Johann Philipp Grüson zu Berlin die erste deutsche Ausgabe nach der von 1771, obgleich 1789 ein Auszug von Eulers Algebra von Johann Jacob Ebert, Professor der Mathematik zu Wittenberg, in Frankfurt am Main geliefert worden. Eine andere deutsche Ausgabe erschien in St. Petersburg im Jahre 1802. Es ist auffallend,

---

1) Scheibel, Einl. zu Math. Bücherkentnis, Breslau 1781, Bd. I, S. 102.
2) G. Valentin in Bibliotheca Mathematica, N. F. 12, 1898, S. 42. 3) Ebenda, S. 42. Hier werden auch einige andere, von uns nicht angeführte Ausgaben angegeben.

daß vor 1797 keine englische Übersetzung angefertigt wurde. In diesem Jahre gab John Hewlett unter der Mitwirkung seines Schülers Francis Horner zu London eine solche aus dem Französischen, wovon die zweite Auflage 1810, die dritte 1822 und die fünfte 1840 erschien. In der zweiten schreibt der Herausgeber überall x^2 statt des früher gebräuchlichen $x \cdot x$, und x^3 statt $x \cdot x \cdot x$. Im Jahre 1818 gab John Farrar, Professor der Mathematik an der Harvard Universität zu Cambridge in Massachusetts, einen Auszug heraus, welcher den Titel führt An Introduction to the Elements of Algebra, ... Selected from the Algebra of Euler.

In Italien schrieb Padre Odoardo Gherli 1771 zu Modena den zweiten Teil des schon auf S. 47 angeführten siebenbändigen Kompendiums, Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure, worin die Algebra mit großer Vollkommenheit erklärt wird. In der Vorrede zum letzten Bande wird ein Gratulationsschreiben von Lagrange an Gherli angeführt, worin Lagrange den Autor auch auf seine eigenen Abhandlungen über die Auflösung von Gleichungen in den Berliner Memorien der Jahre 1770 und 1771 (veröffentlicht 1772 und 1773) aufmerksam macht. Es folgt dann ein Auszug dieser Abhandlungen. Gherlis Bücher fanden in Italien nur geringen Absatz, was vielleicht ihrem unpassenden Quartoformat zuzuschreiben ist.

Pietro Paoli, Professor an der Universität Pisa, gab 1794 ein Werk mit dem Titel Elementi d'algebra in drei Bänden heraus, deren erster der Algebra von endlichen Größen gewidmet ist. Obschon die Elementarteile eher kurz gefaßt sind, wurde das Werk von Mathematikern hoch geschätzt.

Im Jahre 1799 (an VII) erschien in Paris die erste Auflage der Élémens d'algèbre von Sylvestre François Lacroix, ein Werk, welches nicht nur in Frankreich, sondern in ganz Europa und in den Vereinigten Staaten großen Einfluß auf den Unterricht ausübte. Im gleichen Jahre veröffentlichte James Wood in Cambridge seine Elements of Algebra, die auf den englischen Universitäten lange Zeit als „standard work" galten[1]).

Nachdem wir nun die bedeutenderen Lehrbücher über Algebra, welche während der Zeit gedruckt wurden, aufgezählt haben, werden wir die damalige Darstellung von Grundprinzipien dieser Wissenschaft unserem Studium unterziehen. Wie wurde der Zahlbegriff aufgefaßt? Inwieweit wurde die Algebra logisch entwickelt? Wir machen die einleitende Bemerkung, daß die Mathematik noch allgemein als die

---

[1]) W. W. R. Ball's Mathematics at Cambridge, 1889, p. 110.

Wissenschaft von der Größe definiert wurde. Man findet diese Definition z. B. in den Werken von Christian Wolff[1]), Kästner[2]), La Caille[3]), Sauri (1741—1785)[4]), Bézout[5]), D'Alembert[6]), Abel Bürja[7]), Georg Vega (1756—1802)[8]), Johann Georg Büsch[9]), Johann Friedrich Lorenz[10]), Georg Metzburg[11]), Johann Heinrich Voigt[12]), Pietro Paoli[13]). In keinem Lehrbuch sind wir einer wesentlich verschiedenen Definition begegnet. Sie ist alt, kann aber kaum griechischen Ursprungs sein, denn die Griechen hatten eine Geometrie, worin Probleme vorkamen, wie dasjenige, zu entscheiden, ob vier Punkte auf einer Ebene liegen. Solche Probleme hatten mit Größenbestimmungen nichts zu tun. Im 17. und 18. Jahrhundert fand der Ausdruck, Mathematik „die Wissenschaft von der Größe", wenig Anstoß. Immanuel Kant war mit demselben nicht einverstanden. Einige Ideen von Lagrange, die in seinen Untersuchungen über Gleichungen enthalten sind und die Keime der Substitutionstheorie sind, passen in diese Auffassung der Mathematik nicht hinein. Dennoch war sie bei Mathematikern beinahe universal.

Wenn aber Mathematik die Wissenschaft von der Größe ist, dann muß der einfachste mathematische Akt — das Zählen — notwendig als eine Messung und die Zahl als ein Verhältnis angesehen werden. Dieser Schluß wurde aber unseres Wissens in Wirklichkeit nicht gezogen, obschon viele Autoren dem Beispiel von Newton folgten und die Zahl als ein Verhältnis betrachteten. An den Begriff der meßbaren Größen anknüpfend, drückt sich Christian Wolff so aus: „Zahl ist dasjenige, was sich zur Einheit verhält wie eine gerade Linie zu einer gewissen anderen Geraden"[14]). Bei Ausmessungen kommt es darauf an, sagt Leonhard Euler[15]), „daß man bestimme, in was für einem Verhältniß die vorgegebene Größe gegen dieses [Einheits-] Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß

---

[1]) Mathemat. Lexicon, Leipzig 1716, Artikel „Mathematik". [2]) Anfangsgründe d. Arithmetik, Geometrie usw., Göttingen 1758, S. 8. Dieses Werk wurde später mit neuen Teilen unter dem Titel Anfangsgründe der Mathematik zusammenbegriffen. [3]) Leçons élémentaires de mathématiques, Paris 1770, p. 1. [4]) Cours complet de mathématiques par M. l'Abbé Sauri, ancien professeur de philosophie en l'université de Montpellier, T. I, Paris 1774, p. 1. [5]) Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie, Paris 1797, p. 1. [6]) Encyclopédie méthodique, „Mathématique". [7]) Der selbstlernende Algebrist, I. Teil, Berlin und Libau 1786 (Vorrede). [8]) Vorles. ü. d. Mathematik, I. Bd., 3. Aufl., Wien 1802, S. 2. [9]) J. G. Büsch, op. cit. S. 1. [10]) J. F. Lorenz, op. cit., Bd. I, 1798, S. III. [11]) Anleitung zur Mathematik, I. Teil, Wien 1798, S. 1. [12]) Grundlehren d. reinen Math., Jena 1791, S. 1. [13]) Paoli, op. cit. T. I, S. 1.
[14]) Elementa matheseos universae (Elementa arithmeticae) Halae 1710, art. 10.
[15]) Anleitung zur Algebra, I. Teil, St. Petersburg 1770, S. 5.

eine Zahl nichts anders ist als das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht. Hieraus ist klar, daß sich alle Größen durch Zahlen ausdrücken lassen, und also der Grund aller mathematischen Wissenschaften darin gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen ... genau in Erwegung ziehe, und vollständig abhandele." Hier ist der Gedankengang dem von uns oben angedeuteten entgegengesetzt. Die quantitative Idee wird der Zahl zugeschrieben und daraus der Schluß gezogen, daß Mathematik die Wissenschaft von der Größe sei. Dann und wann findet man auch in anderen Lehrbüchern dieser Zeit die Zahl ausdrücklich als ein Verhältnis erklärt. „Das 1 selber ist eine Zahl: denn 1 hält eine Verhältnuss zu eins", sagt einer[1]). „Das Verhältnis irgend einer Größe zu einer gleicher Art, die als Einheit erwählt ist, wird eine Zahl genannt, und man nennt Arithmetik die Wissenschaft von solchen Verhältnissen"[2]). Gewöhnlich wird aber der Begriff des Verhältnisses oder des Messens nicht so scharf hervorgehoben, so daß man im Zweifel ist, ob das Zählen als ein wirkliches Messen aufgefaßt wurde. „Eine Menge von Dingen einer Art heißt eine ganze Zahl", sagt Kästner[3]). Diese Definition der Zahl ist der Euklidischen, „eine aus Einheiten bestehende Menge", ganz ähnlich und hat keine notwendige Verknüpfung mit Verhältnissen. Bei Euklid waren Verhältnisse keine Zahlen. Bei Bézout[4]) scheint der Meßbegriff vorzuherrschen, denn er sagt: „le nombre exprime de combien d'unités, ou de parties d'unités, une quantité est composée" und „l'unité est une quantité que l'on prend .. pour servir de terme de comparaison à toutes les quantités d'une même espèce". Andere Schriftsteller führen unbedeutende Wortänderungen ein. „Mehrere gleichnamige Einheiten machen eine Zahl aus"[5]). „Mehrere solche zusammengestellte Einheiten geben eine ganze Zahl"[6]). Ob bei diesen und ähnlichen Ausdrücken, die in Lehrbüchern allgemein vorkommen, die Zahl ausschließlich als ein Verhältnis anzunehmen ist oder nicht, hängt davon ab, ob die Schriftsteller stillschweigend den Gedankengang von Newton und Wolf oder von Euklid befolgten.

J. F. Heynatz[7]) macht die Bemerkung: „Einige leugnen, daß Eins oder die Einheit eine Zahl sey, und lassen nur das, was durch die Wiederholung der Einheit herauskömmt .. für eine Zahl gelten".

---

[1]) Jacob Friederich Maler, Unterricht zum Rechnen, Carlsruhe 1765, S. 23. [2]) E. Develey, Arithmétique D'Émile, 2. Éd., Paris 1802, p. 2. [3]) Kästner, op. cit. S. 21. [4]) Bézout, op. cit. T. I, p. 2. [5]) Matthias Haußer, Analytische Abhandlung der Anfangsgründe d. Mathematik, I. Teil, Wien 1778, S. 1.. [6]) Johann Georg Prändels Arithmetik, München 1795, S. 8. [7]) Heynatz, op. cit. S. 3.

Condillac[1]) hebt hervor, daß wenn eine Zahl als eine Menge von Einheiten angenommen wird, 1 keine Zahl sei. Gherli[2]) sagt ausdrücklich: „l'unità non è numero".

Kästner nennt einen Bruch eine ganze Zahl, deren Einheit ein Teil der ursprünglichen Einheit ist und so viele Einheiten hat, als der Zähler anzeigt. Irrationalzahlen oder surdische Zahlen lassen sich nach Kästner „weder durch ganze Einheiten noch durch Theile der Einheit vollkommen richtig ausdrücken"[3]).

Einen ganz neuen Zahlbegriff, welchem die Mathematiker des 18. Jahrhunderts gar keine Aufmerksamkeit schenkten, gab Immanuel Kant 1781 in seiner Kritik der reinen Vernunft[4]), worin er sich so ausspricht: „Das reine Schema der Größe aber (quantitatis), als eines Begriffes des Verstandes ist die Zahl, welche eine Vorstellung ist, die die successive Addition von Einem zu Einem (gleichartigen) zusammen befaßt; also ist die Zahl nichts anderes als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch daß ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge". Erst im 19. Jahrhundert wurde dieser auf die Vorstellung der Zeit gegründete Zahlbegriff von einigen Mathematikern (z. B. W. R. Hamilton) freundlich aufgenommen.

Die Erweiterung des Zahlbegriffs durch die Einführung negativer Zahlen war die Folge des Bedürfnisses, die Subtraktion allgemein ausführen zu können. Eine solche Allgemeinheit wurde in der Entwicklung der Algebra schon früh als eine große Bequemlichkeit erkannt. Zur Einführung negativer Zahlen durch die Not gedrungen, war es den Mathematikern nie gelungen, die Theorie derselben von störenden Paradoxien zu befreien. In der zweiten Hälfte des Jahrhunderts wurden die allgemeinen Erklärungen negativer Zahlen und ihrer Operationsregeln allmählich als unzureichend erkannt, ohne daß aber im 18. Jahrhundert eine strenge Entwicklung der logischen Voraussetzungen erreicht wurde. Gegen Ende des Jahrhunderts begegnet man Forschern da und dort, die den Zahlbegriff auf positive Zahlen beschränken möchten, um dadurch die „Pfuschereien" in der Mathematik zu vermeiden. Der Einwand gegen imaginäre Zahlen war noch stärker als gegen die negativen, obschon alle Mathematiker ersten Ranges von beiden ohne Bedenken beständigen Gebrauch machten.

Ein Schriftsteller, welcher während der letzten vierzig Jahre des Jahrhunderts in England eine Reaktion gegen den Gebrauch von

---

[1]) La langue des calculs, p. 42. [2]) Gherli, op. cit. T. I, p. 2. [3]) Kästner, op. cit. S. 102. [4]) Kants sämtl. Werke, herausgeg. von Hartenstein, III, S. 144.

negativen und imaginären Größen in der Algebra hervorzurufen suchte und bei einigen gewissenhaften Mathematikern nicht ersten Ranges auch Anerkennung fand, war Francis Maseres (1731 bis 1824). Schon früher hatte Robert Simson, welcher 1711 zum Professor der Mathematik an der Universität von Glasgow ernannt wurde und während beinahe fünfzig Jahren diese Stelle bekleidete, negative Zahlen in der Algebra verworfen[1]). Maseres schrieb 1758 zu London eine in der Gleichungstheorie weiter zu besprechende Dissertation on the use of the negative sign etc. Er war damals „fellow of Clare-Hall" in Cambridge. In dieser und in späteren Schriften sucht er negative, sowie imaginäre Größen aus der Algebra zu verbannen, durch welche die sonst klare und elegante Wissenschaft bewölkt worden sei. Eine negative Größe definiert er als eine Zahl, die von einer größeren abgezogen werden soll. Der Ausdruck $a - b$ habe keinen Sinn, wenn $b > a$ ist; $(-5)(-5) = +25$ bedeute nur, daß $5 \times 5 = 25$, ohne Rücksicht auf Zeichen, oder es sei lauter Unsinn. So lange er nur im Bereich der positiven Zahlen zu rechnen unternahm, mußten natürlich alle wirklich negativen Zahlen sinneswidrig erscheinen.

Die Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und ebenen und sphärischen Trigonometrie von A. G. Kästner, welche im gleichen Jahre (1758) zu Göttingen erschienen, enthalten eine wirkliche Erweiterung des Zahlbegriffs, obschon die Exposition noch immer mangelhaft ist. „Entgegengesetzte Größen heißen Größen von einer Art, die unter solchen Bedingungen betrachtet werden, daß die eine die andere vermindert" (I. Cap., Art. 90). „Man kann die verneinende Größe als etwas, das von der bejahenden abgezogen werden muß, ansehen, und also mit dem Zeichen — bezeichnen, wenn die bejahende + hat" (Art. 92). „Die verneinende Größe kann die bejahende übertreffen" (Art. 93). „Dieses Negative, das übrig bleibt, ist eine wirkliche Größe, nur der, die als positiv betrachtet wird, entgegengesetzt" (Art. 94). Die Auffassung, daß eine verneinende Größe „abgezogen werden muß", hat bis in das 19. Jahrhundert gedauert.

Von Kästner beeinflußt, verfaßte Immanuel Kant 1763 eine Schrift, Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzuführen[2]). „Einander entgegengesetzt ist, wovon Eines dasjenige aufhebt, was durch das Andere gesetzt ist.

---

[1]) C. Wordsworth, Scholae Academicae: Some Account of the Studies at English Universities in the 18. Century, 1877, p. 68. [2]) I. Kant, Sämmtliche Werke, herausg. v. G. Hartenstein, Bd. II, Leipzig 1867, S. 71—79.

Diese Entgegensetzung ist zwiefach; entweder logisch durch den Widerspruch, oder real, d. i. ohne Widerspruch." „Es sind die negativen Größen nicht Negationen von Größen, wie die Ähnlichkeit des Ausdrucks ihn hat vermuten lassen, sondern etwas an sich selbst wahrhaftig Positives, nur was dem andern entgegengesetzt ist." Seine Exposition der Zeichen + und — ist nicht so gewandt. „Da die Subtraction ein Aufheben ist, welches geschieht, wenn entgegengesetzte Größen zusammengenommen werden, so ist klar, daß das — eigentlich nicht ein Zeichen der Subtraction sein könne, wie es gemeiniglich vorgestellt wird, sondern das + und — zusammen nur zuerst eine Abziehung bezeichnen. Daher $-4-5=-9$ gar keine Subtraction war, sondern eine wirkliche Vermehrung und Zusammenthuung von Größen einerlei Art. Aber $+9-5=4$ bedeutet eine Abziehung, indem die Zeichen der Entgegensetzung andeuten, daß die eine in der anderen, soviel ihr gleich ist, aufhebe."

Um den Gedankengang in Lehrbüchern in größerer Kürze darstellen zu können, werden wir die Erklärungen in Eulers Vollständige Anleitung zur Algebra (1770) vorführen und sie kurz mit denen anderer Autoren vergleichen. Das Werk ist in populärem Stile geschrieben. Was logische Entwicklung von Grundprinzipien anbelangt, kann es aber mehreren anderen Werken dieser Zeit nicht vorgestellt werden. Der Ruhm dieses Lehrbuches scheint uns eher dem zweiten Teile, über die unbestimmte Analysis, als dem ersten Teile zuzuschreiben zu sein.

In Art. 8 sagt Euler: „Wann zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addiert werden soll, so wird solches durch das Zeichen + angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und plus ausgesprochen wird". Art. 11: „Wann hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen — minus angedeutet, welches soviel als weniger ist, und derselben Zahl, welche weggenommen wird, vorgesetzt wird". Nach dieser Einführung von + und — als Operationszeichen liest man folgendes in Artikel 16: „Hier kommt also die Hauptsache darauf an, was für ein Zeichen eine jegliche Zahl vor sich stehen hat; daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen, welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive Größen zu nennen, diejenigen aber, welche das Zeichen — vor sich haben, werden verneinende oder negative Größen genennet". Sind nach dieser Erklärung die Zeichen + und — noch immer überall als Operationszeichen zu betrachten? Hat man in den gewöhnlichen Rechenbüchern nicht auch negative Zahlen an Stellen, wo das Zeichen — benutzt wird? Kann eine negative Zahl

zu einer anderen addiert werden? Darüber gibt der Autor keine genügende Auskunft.

Die Zeichen + und — in der Algebra immer nur als Operationszeichen ausdrücklich zu erklären, und sie hernach ohne zulängliche Auseinandersetzungen auch zur Bezeichnung positiver und negativer Zahlen zu gebrauchen, war ein allgemeines Verfahren in Lehrbüchern damaliger Zeit. Man findet es in den Werken von Clairaut, Maclaurin, Thomas Simpson, W. Emerson, William Trail[1]), Bézout, Sauri, Blassière, Büsch, Bürja, Prändel, Karsten, Gherli, Paoli, Da Cunha und Bossut. Daß bei diesem Verfahren die Erschaffung einer neuen Zahlengattung für die Verallgemeinerung der Subtraktion nicht klar hervortritt, ersieht man aus der Bemerkung von Thomas Simpson, daß $-a$ in einem Sinne so unmöglich sei wie $\sqrt{-b}$, da es nicht möglich sei, a von nichts abzuziehen, und der Begriff oder Irrglaube einer Größe weniger als Nichts sinneswidrig sei. Trail behauptet, eine negative Größe an sich sei unerklärlich. In einer Pariser Promotionsschrift des Jahres 1774 heißt es[2]): Keine absolute Größe kann $= -a$; weshalb die Zeichenregel in der Multiplikation nur für Polynomien gilt. Daß die Möglichkeit negativer Zahlen von vielen geleugnet wurde, erhellt auch aus einer Promotionsschrift gleichen Jahres an der Universität Kopenhagen, worin negative Größen durch Beispiele erklärt werden[3]).

In einigen Lehrbüchern werden + und — zuerst zur Bezeichnung entgegengesetzter Zahlen angewandt und dann später stillschweigend auch als Operationszeichen gebraucht. Dieses ist z. B. bei Saunderson[4]), Le Blond und Haußer der Fall. Die zweifache Bedeutung von + und — wird aber in einigen wenigen Schriften recht sorgfältig erklärt, z. B. in der Traité élémentaire de l'analyse mathématique, Paris 1797, von Jacques Antoine Joseph Cousin (1739—1800), Professor an dem Collége de France. Das Werk wurde von ihm zur Zeit der Schreckensherrschaft im Gefängnis geschrieben.

Bei der Multiplikation ist folgendes bei Euler (Artikel 32) von Interesse: „Wir wollen erstlich $-a$ mit 3 oder $+3$ multipliciren;

[1]) Elements of Algebra for the Use of Students in Universities, 3rd Ed. 1789 (1st Ed. 1778). Im Dict. of the anonymous and pseudonymous literature of Great Britain, by S. Halkett and J. Laing, Edinburgh 1882, p. 238, wird dieses Werk dem Rev. William Trail, Professor der Mathematik am Marishal College zu Aberdeen, zugeschrieben. [2]) Theses mathematicas demonstrabit Theodorus Anna Bourrée de Corberon, 1774 „Nulla quantitas absoluta est $= -a$: hinc in solis polynomiis obtinet signorum regula". [3]) S. A. Christensen, op. cit. S. 180. [4]) Saundersons Algebra, übersetzt von Grüson, Halle 1798, I. Teil, S. 102, 123.

weil nun $-a$ als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß wann diese Schuld 3 mal genommen wird, dieselbe auch 3 mal größer werden müsse, folglich wird das gesuchte Product $-3a$ seyn.“ Nicht so klar ist der nächste Ausspruch, daß „wann eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde“, da der Fall, wo $+a$ mit $-b$ multipliziert werden soll, gar nicht besprochen wird. Euler fährt fort (Art. 33): „Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nämlich, wann — mit — multiplicirt wird, oder $-a$ mit $-b$. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, ab: ob aber das Zeichen + oder — dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß, so viel aber ist gewis, daß es entweder das eine, oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kann es nicht das Zeichen — seyn? Dann $-a$ mit $+b$ mult. giebt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben, was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es muß das Gegentheil herauskommen, welches nehmlich heißt, $+ab$. Hieraus entsteht die Regul, — mit — multiplicirt giebt + eben so wohl als + mit +.“ Diese Aussprüche soll der Leser augenscheinlich als einen Beweis der paradoxischen Zeichenregel akzeptieren, obschon man dieselben kaum eine Demonstration nennen darf. Euler hätte beinahe ebenso gut behaupten können, das Produkt sei $-ab$, weil es eben nicht das geben kann, was $+a$ mit $+b$ gibt; ein Schluß' den wir später (S. 85) bei Daniel Porro wirklich vorfinden. Euler sucht gar nicht zu entscheiden, inwieweit die Operationsregeln einfach auf Voraussetzungen beruhen und inwieweit sie wirklich bewiesen werden können.

Die Beweisführungen dieser Regel in anderen Lehrbüchern weichen gewöhnlich von der Eulerschen bedeutend ab. „Um zu beweisen,“ sagt Saunderson[1]), „daß $+4$ multiplizirt mit -3, -12 macht, multiplizire man $+4$ nach einander mit $+3$, 0 und -3, und die Produkte machen eine arithmetische Progression; die zwey ersten sind 12 und 0, das dritte also -12, und das Produkt von $+4$ mit -3 gleich -12.“ Schreibt man hier überall -4 und $+12$, statt $+4$ und -12, hat man Saundersons Nachweis, daß $- \cdot - = +$. Der Leser muß dabei mit dem Satze „bekannt gemacht worden seyn“, daß wenn Zahlen in arithmetischer Progression durch einen Multiplikator, oder wenn eine Zahl durch jede Zahl einer arithmetischen Progression multipliziert wird, die Produkte ebenfalls eine arithmetische Progression bilden. Dieser ohne Beweis angenommene Satz birgt aber wichtige Voraussetzungen in sich.

[1]) Saunderson, Aufl. Grüson, 1798, I, S. 118.

Die Nachweise von Segner[1]), Karsten[2]) und Da Cunha[3]) ruhen auf einem unbewiesenen Satz und setzen zu gleicher Zeit stillschweigend voraus, daß $1 \cdot + b = + b$ und $1 \cdot - b = - b$ ein Teil dessen, was die Autoren beweisen wollen. Der Satz lautet: Wenn in einer Proportion die zwei ersten Glieder gleiche (oder ungleiche) Zeichen haben, müssen die zwei letzten auch gleiche (oder ungleiche) Zeichen haben. Es ist $1 : a = - b : a\,(- b)$, $1 : - a = b : (- a)\,b$, $1 : a = b : a\,.\,b$, $1 : - a = - b : (- a)(- b)$. Also müsse $+ a \cdot - b$ und $- a \cdot + b = - ab$, aber $+ a \cdot + b$ und $- a \cdot - b = + ab$ sein.

Clairaut betrachtet in seiner Algebra (Art. 43, 44, 45, 60) das Produkt $(a - b)(c - d)$, wo $(a - b)$ so viel mal zu nehmen ist, als in $(c - d)$ Einheiten sind. Man hat $(a - b)\,c = ac - bc$. Um aber das richtige Resultat zu erlangen, muß man $(a - b)\,d$ oder $ad - bd$ abziehen, wodurch man das wahre Endresultat $ac - bc - ad + bd$ erhält. „Es erhellet folglich zugleich, daß das Glied bd, ... das Zeichen $+$ hat, da indessen die Buchstaben b und d, ... das Zeichen $-$ haben.“ Damit ist aber Clairaut nicht zufrieden. Man muß noch sehen, „ob, wenn zwo negative Größen, als $- b$ und $- d$, keine positive Größe vor sich haben, ihr Produkt noch bd sey“. Zu dem Zweck setzt er $a = c = 0$ und erhält $- b \cdot - d = + bd$. Thomas Simpson geht nicht so weit; er betrachtet das Produkt von $(a - b)(c - d)$, ohne am Ende $a = c = 0$ zu setzen, und erkennt einen Vorzug seines Verfahrens darin, daß Multiplikator und Multiplikand beide zusammengesetzte Größen sind. Einfache Größen, wie $- b$ und $- c$, unabhängig von anderen, seien unmögliche Größen, wegen der Unmöglichkeit, Etwas von Nichts abzuziehen. Es sei deshalb lächerlich durch wirkliche Demonstration zeigen zu wollen, was das Produkt von $- b$ und $- c$ oder von $\sqrt{- b}$ und $\sqrt{- c}$ sein muß, wenn man von den Werten der zu multiplizierenden Größen keine Idee habe.

William Frend[4]) kritisiert das Clairautsche Verfahren $a = c = 0$ zu setzen, weil Clairaut das Zeichen $-$ als Subtraktionszeichen definiert habe, und die Subtraktion, in der Abwesenheit eines Minuenden, keinen Sinn habe, also $- b$ und $- d$ nicht selbständig existieren können. Der Beweis, den wir von Simpson entnahmen, wird von Bézout, Sauri, Lhuilier[5]) und vielen anderen Autoren angegeben.

Eine zweite weitverbreitete Beweismethode entnehmen wir aus

---

[1]) Segner, op. cit. I, S. 43. [2]) Karsten, op. cit. II, S. 77, 79. [3]) Da Cunha, Principios mathematicos; Lisboa 1790, p. 101. [4]) Principles of Algebra, London 1796, p. 514—518. [5]) Anl zur Elementaralgebra, 1. Teil, Tübingen 1799. Lhuilier war seit 1795 Professor in Genf.

den Vorlesungen von Laplace[1]) 1795. „Cette règle", sagt er, „présente quelques difficultés." Das Produkt von $-a$ mit $b-b$ ist $+0$, dasjenige von $-a$ mit $+b$ ist $-ab$, weshalb $-a\cdot -b$ den Wert $+ab$ annehmen muß. Diesen Nachweis gaben auch W. Emerson[2]), Maclaurin (5. Auflage), Basedow und Paulus Mako.

In den zwei letzten Demonstrationen wird die Natur der stillschweigend vorausgesetzten Gesetze leichter wahrgenommen. In beiden sollte das distributive Gesetz als logischer Vordersatz angeführt sein. In allen „Beweisen" der Zeichenregel für die Multiplikation, welche im 18. Jahrhundert gegeben wurden, werden Schlüsse gezogen, welche auf kein Grundgesetz zurückgeführt werden und deshalb in Wirklichkeit keine Deduktionen, sondern bloß Expositionen einer in der Praxis nützlich gefundenen Verfahrungsweise sind.

Ein Werk, welches der Unklarheit in der Auseinandersetzung der Grundprinzipien der Algebra seinen Ursprung verdankt, wurde von François Daniel Porro (1729—1795) von Besançon anonym unter dem Titel L'Algèbre selon ses vrais principes, à Londres, à Paris et à Besançon 1789, veröffentlicht. Früher erschien von ihm Exposition du calcul des quantités négatives, Avignon (Besançon) 1784. Der Autor klagt, in der gewöhnlichen Darstellung der Algebra hätten die Zeichen + und — je vier Bedeutungen. Das Symbol — bedeute 1) Subtraktion, 2) negative Größe, 3) Division, wie in a^{7-5}, 4) Multiplikation, wie in „$\frac{1}{-a^3} = 1 \times a^3$, parce que la quantité a^3 précédée du signe —, devient facteur du numérateur en changeant son signe". Auch sei die Multiplikationsregel, $-\cdot-$ gibt $+$, zu verwerfen, denn diese Regel sei die Ursache des Streits über negative Größen, Imaginäres, den irreduktiblen Fall und Logarithmen negativer Größen. Dieses Übel könne man dadurch beseitigen, daß man annehme $+\cdot+$ gibt $+$ und $-\cdot-$ gibt $-$. Diese zwei Prinzipien gäben zwei Kalkülsorten, deren jede ihre eigenen Regeln hätte. In diesen Schriften hervorzuheben ist wohl der Gedanke des Autors, daß Grundoperationen in Algebra hauptsächlich Voraussetzungen sind, und daß verschiedene Annahmen verschiedene Arten der Algebra liefern.

Die Theorie negativer Größen wird auch von einem Professor der Mathematik an dem Collége national de Toulouse, Gratien Olléac, in einer Schrift, Sur des théories nouvelles des nombres opposés, des imaginaires et des équations du

---

[1]) Journal de l'école polytechnique. Septième et huitième cahiers. T. II, Paris 1812, p. 30. [2]) Treatise of Algebra, London 1780.

troisième degré, à Toulouse, an II (1794) behandelt. Man solle die Wolfsche Idee der Heterogenität entgegengesetzter Zahlen, der zufolge sie miteinander keine Verhältnisse haben können, als absurd fallen lassen und die Descartessche Idee der Realität der negativen sowohl als der positiven Zahlen annehmen.

An der Universität Cambridge sowie auch auf anderen Hochschulen in England hatte Baron Maseres' arithmetische Auffassung der Algebra gegen Ende des Jahrhunderts viele Nachfolger, denn nur durch die Fortschaffung negativer Zahlen glaubte man die Algebra zu den auf strenge Beweise gegründeten Wissenschaften zählen zu dürfen.

Uns ist nur eine Schrift bekannt, worin der Standpunkt von Maseres kritisiert wird. In einer Schrift On the use of negative quantities in the solution of problems by algebraic equations[1]) beklagt William Greenfield, Pfarrer der St. Andrewskirche und Professor der Rhetorik an der Universität Edinburgh, daß Maseres sein Geschick der Umstürzung, statt der Befestigung, der Theorien des Negativen zugewandt habe. Er selber versucht eine Erklärung, indem er das Zeichen — immer nur als Subtraktionszeichen ansieht. Wenn ein Problem es erlaubt, eine Unbekannte x in zwei entgegengesetzten Lagen anzunehmen, dann wird die Gleichung, welche die Bedingungen ausdrückt, die x in einer seiner Lagen verlangt, und deren positive Wurzeln die Werte von x für dieselbe Lage geben, zu gleicher Zeit auch, durch ihre negativen Wurzeln, die Werte von x für die entgegengesetzte Lage liefern. Ähnliches schließt Greenfield für den Fall, wo eine bekannte Größe entgegengesetzte Lagen einnehmen kann. Die Rechtfertigung negativer Größen beruht also bei Greenfield auf der Kenntnis, daß wirklich zwei Probleme auf einmal gelöst werden, und man für beide richtige Resultate erreicht.

Um den Einfluß von Maseres auf Lehrer der Mathematik zu erkennen, braucht man nur die Lehrbücher von Nicolas Vilant[2]), Professor der Mathematik an der Universität St. Andrews zu Edinburgh, von Thomas Manning[3]) in Cambridge, von W. Ludlam[4]), „fellow of St. John's College" in Cambridge, zu durchblättern. Besonders in der Exposition der Gleichungstheorie kommt Maseres' Standpunkt stark zum Vorschein. Ludlam lehrt, daß entgegengesetzte

[1]) Trans. of the Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. 1, Edinburgh 1788, p. 131 bis 145. [2]) Elements of Mathematical Analysis, Edinburgh 1798. [3]) Introduction to Arithmetic and Algebra, Cambridge 1796. [4]) Rudiments of Mathematics designed for the use of students at the Universities, 5[th] Ed., London 1809.

Größen kein Verhältnis hätten. Die Proportion $-1:1=1:-1$ werde als eine wunderbare Paradoxie angeführt, da -1 (eine Zahl weniger als 0 und deshalb weniger als 1) zu einer größeren sein sollte, wie diese größere zur kleineren. In diesen Verhältnissen dürfe man aber nur die absoluten Werte in Betracht ziehen[1]).

Nach Maseres war der bekannteste Gegner des Negativen in England zu dieser Zeit William Frend (1757—1841). Er promovierte 1780 an Christ's College in Cambridge als zweiter „wrangler". Nachdem er ein halb Dutzend Jahre lang als Tutor der Mathematik an der Universität gewirkt hatte, wurde er durch die Paradoxien, über „Zahlen weniger als Nichts", über $-a \cdot -b = +ab$, über imaginäre Zahlen, deren Produkt die Einheit ist, zur Verwerfung aller negativen und imaginären Zahlen und zur Vorbereitung eines Lehrbuches einer streng arithmetischen Buchstabenrechnung geführt. So entstand sein Werk, Principles of Algebra, London 1796, mit einem Appendix über Gleichungen von Francis Maseres.

Die Argumente, welche diese Gegner der Algebra vorbrachten, waren unanfechtbar. Der Ausdruck, negative Zahlen sind „weniger als Nichts" oder, nach Newton, „nihilo minores", war nicht gehörig definiert und deshalb paradoxisch. Negative Zahlen, definiert als solche, die „abgezogen werden müssen", waren gewiß sinneswidrig, sobald der Subtrahend größer als der Minuend angenommen wurde. Man versuchte in den Lehrbüchern das Unmögliche zu tun, nämlich negative Zahlen aus positiven Zahlen abzuleiten, ohne die Operation der Subtraktion ausdrücklich zu erweitern oder den Begriff „weniger als Nichts" zu beleuchten. Eine solche Erweiterung oder Beleuchtung hätte die Verallgemeinerung des Zahlbegriffs erfordert. In keinem Lehrbuche erschienen aber negative Zahlen in klarem Lichte, als eine willkürliche Erweiterung des Zahlbereichs, oder als eine Annahme (Voraussetzung), welche mit der Annahme positiver Zahlen auf gleicher Stufe stand und in der Definition selbst die Existenz negativer Zahlen begründete.

Die besprochene Reaktion ist eine eigentümliche Erscheinung in der Geschichte der Mathematik. Gewiß fehlte es dem Robert Simson, Maseres und Frend an Einsicht, an einem ins Innere eindringenden Erkennen. Sonst, statt negative und imaginäre Zahlen, welche nie falsche Resultate lieferten und eine große Ökonomie im mathematischen Arbeiten erzielten, zu verwerfen, wären sie tiefer in die Theorie derselben gedrungen, um ihre logischen Grundlagen zu

---

[1]) Rudiments of Mathematics, S. 31.

entdecken. Der erste, der an der Universität Cambridge dieses versuchte und die Opposition gegen die Erweiterung des Zahlbereichs zu entfernen strebte, war Robert Woodhouse, welcher 1801 in den Philosophical Transactions eine Abhandlung über Algebra veröffentlichte. Eine 1806 dort gedruckte Arbeit über imaginäre Größen vom Abbé Buée soll dem Lesen von Frends Algebra seinen Ursprung verdanken. Ein Brief von Buée an Frend führt auf diese Vermutung[1]).

In Deutschland erschien 1795 ein Artikel Über die Lehre von den entgegengesetzten Größen[2]) von Georg Simon Klügel (1739—1812), Professor zu Halle, worin der Verfasser nahe daran war, einen wichtigen Schritt in der Exposition der Algebra vorzunehmen. Er führt acht Vorschriften für die gemeinen Operationen der Buchstabenrechnung an, welche das distributive Gesetz ausdrücken. Z. B. VII:

$$(a+b)(c-d) = a(c-d) + b(c-d) = ac - ad + bc - bd.$$

Es findet sich hier ein Versuch vor, die Formalgesetze der Algebra festzusetzen. Es wird aber angenommen, daß in der Formel VII der Subtrahend kleiner als der Minuend sei. Jeder Rest und Quotient wird ursprünglich als positiv angesehen. Aus VII erhelle es, daß ein Produkt aus zwei Faktoren das Zeichen — erhält, wenn die Faktoren verschiedene Zeichen haben.

So lange über negative Zahlen keine klaren Begriffe existierten, ist nicht zu verwundern, wenn imaginäre Größen allgemein als unmöglich angesehen wurden. Euler drückt sich in seiner Algebra (Art. 143, 144) so aus: „Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als 0, oder etwa 0 selbst; so ist klar, daß die Quadratwurzel von Negativ-Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden.... Von diesen behauptet man also mit allem Recht, daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht einmahl nichts selbsten, als aus welchem Grund sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müssen.“ Eine andere Auffassung findet man in einem Werke, Éléments de mathématiques à l'usage des écoles nationales, Toulouse et Paris 1781 (nouv. Éd., Paris, an X) von Roger Martin (? —1811), welcher sich viel Mühe nimmt, die Grundprinzipien deutlich darzulegen. Nach Euklid definiert er die Einheit als den abstrakten Begriff dessen, was irgend ein einziges

[1]) A. De Morgan, Trigonometry and Double Algebra, London 1849, p. V.
[2]) Archiv d. r. u. a. Math. (Hindenburg), Bd. I, 1795, S. 309—319, 470—481.

Dasein vorstellt, und die Zahl als eine Menge gleicher Einheiten. Irrationale und imaginäre Größen seien auch Zahlen. Nehme man $\sqrt{-1}$ als Einheit, könne man $2\sqrt{-1}$, $3\sqrt{-1}$ durch Wiederholungen erlangen, was für den Begriff einer Zahl genüge. „Rien n'empêche donc de mettre les imaginaires au rang des nombres."

In einer Schrift, On the arithmetic of impossible quantities[1]) gibt John Playfair (1748—1819), der schottische Mathematiker und Physiker, eine naive Erklärung, warum der Gebrauch von imaginären Größen zu richtigen Resultaten führe. Operationen mit imaginären Schriftzeichen, obschon in sich selbst unsinnig, seien Kennzeichen für andere, welche Sinn mit sich führen. Dies werde bei der Berechnung von Sinus und Kosinus in bezug auf den Kreis und die Hyperbel besprochen. Wenn Untersuchungen, die mit imaginären Größen durchgeführt werden, ebenso erfolgreich zur Wahrheit leiten, als solche mit reellen Größen, so könne dieser Umstand nur einer Analogie zugeschrieben werden, welche zwischen den untersuchten Gegenständen existiere, eine Analogie, die so eng sei, daß jede Eigenschaft des einen auf den anderen Gegenstand übertragen werden könne. Demnach könne jeder Ausdruck, den er beim Kreise abgeleitet habe, durch Substitution von $\sqrt{1}$ für $\sqrt{-1}$, in einen für die Hyperbel gültigen Ausdruck umgeändert werden. Die mit imaginären Symbolen durchgeführten Operationen, obschon an sich absurd, dienen als Wegweiser zu solchen, welche verständlich seien. Diese Abhandlung Playfairs machte großen Eindruck in England, und 1801 fand Robert Woodhouse[2]) es noch nötig, die Unzulänglichkeit dieser Erklärung hervorzuheben.

Eine eigentümliche Angabe findet man in W. Emersons Treatise of Algebra, welcher 1780 zu London erschien. Auf S. 67 heißt es: „Wenn imaginäre Wurzeln miteinander multipliziert werden, geben sie immer —, sonst würde ein reelles Produkt von unmöglichen Faktoren entspringen, was sinneswidrig wäre. Also $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-ab}$, und $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-b} = -\sqrt{-ab}$, etc. Auch $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$, und $\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = +a$, etc." Diese widersprüchlichen Angaben werden nicht weiter erklärt oder angewandt. Überhaupt ist die Entwicklung fundamentaler Begriffe bei Emerson sehr mangelhaft.

In Huttons Mathematical and Philosophical Dictionary, London 1796, wird im Artikel „Imaginary" hervorgehoben, daß man über die Arithmetik imaginärer Größen noch keine Übereinstimmung

[1]) Phil. Trans., Vol. 68 for the year 1778, Pt. I, p. 318—343. [2]) Phil. Trans., 1801, S. 89.

erreicht habe. Euler schreibe in seiner Algebra $(\sqrt{-3})^2 = -3$, setze aber $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{4} = 2$. Wie könne die Gleichheit oder Ungleichheit der Faktoren die Zeichen beeinflussen? Er schreibe auch $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{+1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}$, woraus $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{+1}$ zu ziehen sei. Über die Behauptung von Emerson, daß das Produkt imaginärer Größen selbst imaginär sein müsse, bemerkt Hutton, daß die Schriftsteller in ihren Ansichten hierüber ziemlich gleich geteilt seien.

Imaginäre Zahlen werden in der Geschichte der Gleichungstheorie sehr oft auftreten. Auch spielen sie in der Diskussion über Logarithmen von negativen Zahlen eine hervorragende Rolle.

Wir lassen nun einige Einzeluntersuchungen folgen.

Die Zerlegung eines Bruches in Partialbrüche wird von Nicolaus Fuß in seinen Meditationes circa resolutionem fractionis $x^m/(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ etc. in fractiones simplices, ubi simul demonstratio insignis theorematis arithmetici occurrit[1]) durch einen von dem Verfahren Eulers in seinen Institutiones calculi integralis verschiedenen Vorgang ausgeführt. Fuß setzt (I), $(x^m/(x-a)(x-b)(\text{etc.}) = \alpha/x - a + \beta/x - b + \cdots$, multipliziert nun mit $(x-a)$ und nimmt $x = a$, woraus $\alpha = a^m/(a-b)(a-c)(\text{etc.})$ hervorgeht. Die gleiche Methode ergibt die Werte von $\beta, \gamma, \ldots$ Multipliziert man beide Seiten von (I) mit x, und setzt $x = \infty$, hat man $1 = \alpha + \beta + \cdots$, wenn $m + 1$ der Anzahl Faktoren n gleich ist; wenn aber $m + 1 < n$ ist, ergibt sich $0 = \alpha + \beta + \cdots$ Letztere Formeln enthalten den im Titel angedeuteten arithmetischen Satz.

Eine neue Bruchvereinfachungsmethode wurde von Euler in der Abhandlung Nova methodus fractiones quasconque rationales in fractiones simplices resolvendi[2]) auseinandergesetzt. Wir wählen das einfache Beispiel eines Bruches $\frac{P}{Q}$, dessen Nenner den Faktor $(z-a)^2$ hat. Man setze $z = a + \omega$ und gebe dem Bruch die Form

$$\frac{A + B\omega + C\omega^2 + \cdots}{B' + C'\omega + D'\omega^2 + \cdots} \cdot \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega^2}(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \cdots),$$

woraus sich $\alpha = \frac{A}{B'}$, $\beta = \frac{B}{B'} - \frac{AC'}{B'^2}, \cdots$ ergibt. Die Methode ist auch auf transzendente Funktionen anwendbar. In der Behandlung des Bruches $\frac{\sin\Phi}{\tan\Phi - \cos\Phi}$ werden, im Laufe der Analysis, imaginäre

---

[1]) Acta Acad. scient. imp. Petr. pro anno 1777, pars prior. Petropoli 1778, p 91—104 [2]) Ebenda. 1780, pars prior. Petropoli 1783, p. 32—46.

Winkel eingeführt, die von der Unerschrockenheit, mit welcher Euler imaginäre Größen zu gebrauchen gewöhnt war, Zeugnis geben.

Einen Satz über Mittelwerte teilt Johann Nikolaus Tetens (1736—1807), Professor in Kiel, in einer Schrift, Beweis eines Lehrsatzes von dem Mittelpunkte der Coefficienten in den Polynomien[1]) mit. Er sei darauf bei der Berechnung von Leibrenten gekommen. Hat man $P = a + bx + cx^2 + \cdots + tx^m$ und $\mu(a + b + c + \cdots + t) = b + 2c + 3d + \cdots + mt$, auch $\Pi = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots \tau x^n$, wo $\nu(\alpha + \beta + \cdots + \tau) = \beta + 2\gamma + \cdots + n\tau$, dann hat man in $P\Pi = A + Bx + \cdots + Tx^{mn}$, $(\mu + \nu)(A + B + \cdots + T) = B + 2C + \cdots mnT$. Dann folgen Betrachtungen über das Durchschnittsglied.

Burja[2]) schlägt für den Elementarunterricht eine Methode zur Logarithmenberechnung vor, welche direkter sei als die älteren Methoden und geringere Kenntnisse voraussetze als die Reihenmethode. Sie besteht in der sukzessiven Ausziehung der Quadratwurzel von 10, der 5. Wurzel dieser Quadratwurzel, der Quadratwurzel des letzten Resultats usw., um dadurch die Zahlen zu finden, deren Logarithmen 0,5, 0,1, 0,05, 0,01, 0,005 usw. sind. Durch Kombination dieser Resultate kann irgend ein Logarithmus im Briggschen Systeme gefunden werden. In einer anderen Schrift, Essai d'un nouvel algorithme des logarithmes[3]) schlägt er den Logarithmuskalkül als eine den sechs primitiven Operationen der Arithmetik (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung, Wurzelausziehung) anzureihende Operation vor, und bezeichnet mit $\frac{a}{b} = m$ eine Zahl a, deren Logarithmus, zur Basis b, m ist.

Christian Kramp (1760—1826) entwickelt in einer Abhandlung, Fractionum Wallisianarum Analysis[4]), einen Kalkül für die Berechnung der Werte von Brüchen wie der von Wallis gebrauchte Ausdruck von $\frac{\pi}{2}$. Kramp schreibt $a(a + \nu)(a + 2\nu) \cdots (a + n\nu - \nu)$ so $a^{n\pi\nu}$, wo π an dieser Stelle nur als Separationszeichen dient. Er erhält $a^{m\pi\nu} \div (a + n\nu)^{m\pi\nu} = a^{n\pi\nu} \div (a + m\nu)^{n\pi\nu}$ und, wenn $a + n\nu = b$, $a^{m\pi\nu} \div b^{m\pi\nu} = a^{\frac{b-a}{\nu}\pi\nu} \div (a + m\nu)^{\frac{b-a}{\nu}\pi\nu}$. Nimmt man $b - a = d$ und m unendlich groß, dann wird $a(a + \nu)(a + 2\nu)$ etc. in inf. $\div (a + d)(a + d + \nu)$ etc. in inf. $= a^{\frac{d}{\nu}\pi\nu} \div (\infty\,\nu)^{\frac{d}{\nu}}$.

[1]) Leipziger Magazin für r. u. a. Math. (Hindenburg), 1787, S. 55—62.
[2]) N. Mémoires de l'acad. roy. des sciences, 1786—1787, Berlin 1792, p. 433—478.
[3]) Ebenda, 1788 et 1789, Berlin 1793, p. 300—325. [4]) Nova Acad. Elect. Moguntinae scient. utilium, ann. 1797—1799, Erfurti 1799, p. 257—292.

Nun wird $a^{m\pi\nu}$ in die Reihe entwickelt $a^m(1 + Aa^{-1}\nu + Ba^{-2}\nu^2 +$ etc., wo $A \div m(m+1) = (m-1) \div 2(m+1)$, $2B \div (m-1)(m+1) = A(m-1) \div 2\left(m + 1 - \frac{m}{12}\right)$, etc., oder, wenn diese divergiert, in die Reihe $U(1 + Au + Bu^2 + \cdots)$, wo $u = \nu \div (a + n\nu)$ und $U = a^{n\pi\nu}(a + n\nu)^m \div (a + m\nu)^{n\pi\nu}$. Auf den Bruch $\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7}$ etc. angewandt, wird dessen Wert $2^{\frac{1}{2}\pi^2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}\pi^2}$ berechnet. Wenn man in

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1-m}{1-n}\cdot\frac{1+m}{1+n}\cdot\frac{2-m}{2-n}\cdot\frac{2+m}{2+n}\ \text{etc.}$$

für n, $\frac{1}{2} - n$, und für m, $\frac{1}{2} - m$ schreibt, hat man einen ähnlichen Bruch, der, für $m = n$, einen Ausdruck für $\tan m\pi$ liefert, welcher Kramp neu zu sein glaubt, da dem berühmten Pfaff, in seinem Werk Beiträge zur Summationslehre, die Herleitung einer solchen Form nicht gelungen sei.

Wichtige Untersuchungen wurden von Waring in England vorgenommen.

Edward Waring (1734—1798)[1] wurde bei Shrewsbury geboren, ging 1753 auf das Magdalen College in Cambridge, wo er 1757 promovierte und „senior wrangler" ward. Er wurde 1760, bevor er durch Erlangung der Magisterwürde sich qualifiziert hatte, zum Lucasianprofessor der Mathematik in Cambridge erwählt. Francis Maseres war sein Rivalkandidat. Wegen seiner Jugend fand Warings Kandidatur Opposition. Um seine Fähigkeiten zu zeigen, sandte er vor der Wahl das erste Kapitel seiner Miscellanea Analytica herum, welches von William Samuel Powell wegen einiger unbedeutender Fehler angegriffen wurde. Es erschienen mehrere Streitschriften. Waring wurde in diesem Streite von seinem Freunde, John Wilson vom Peterhouse College, unterstützt. Seine Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus wurde 1762 zu Cambridge veröffentlicht, seine Meditationes algebraicae 1770, seine Proprietatis algebraicarum curvarum 1772, seine Meditationes analyticae 1776. Diese Werke enthalten viel Neues, sind aber in der Darstellungsmethode sehr mangelhaft. Er soll in Cambridge keine Vorlesungen gehalten haben. Seine tiefen Untersuchungen waren zur Mitteilung durch Vorlesungen nicht geeignet, sagt Dr. Parr. Waring soll gestanden haben, daß er in England, außer in Cambridge, von niemandem je gehört habe, der seine Schriften gelesen und verstanden habe. Mit Mathematikern des

[1]) Dictionary Nat. Biog. (L. Stephen).

Festlandes scheint er wenig in Briefwechsel gewesen zu sein. Im Jahre 1782 bemerkte er, daß er 1763 ein Exemplar seiner **Miscellanea** an L. **Euler**, und 1770 Exemplare seiner **Meditationes algebraicae** an **D'Alembert**, **Bézout**, **Montucla**, **Euler**, **Lagrange** und **Frisi** geschickt habe. Aber nur **Frisi** habe den Empfang des Werkes bestätigt[1]). In seinen Schriften erwähnte aber **Lagrange** 1771 die Verdienste **Warings**. Die **Meditationes algebraicae** seien ein „ouvrage rempli d'excellentes recherches"[2]). **Waring** wurde 1763 als Mitglied der Royal Society of London aufgenommen, aber schon 1757 schickte er, wie er selber erzählt[3]), einige Untersuchungen ein, welche er zur Zeit seiner Kandidatur 1759 drucken ließ. Unter diesen soll eine Methode, die Anzahl imaginärer Wurzeln in der Quartic und Quintic und in $x^n \pm Ax^m \pm B = 0$ zu finden, gewesen sein[4]). Es ist wahrscheinlich letztere Mitteilung, welche 1764 von der Royal Society gedruckt wurde[5]). Ohne Beweis führt er dort Sätze über die Anzahl komplexer Wurzeln der Gleichungen $x^4 + qx^2 - rx + s = 0$, $x^5 + qx^3 - rx^2 + sx - t = 0$ an. Ist in der Quartic der Ausdruck $256 s^3 - 128 q^2 s^2 + (144 r^2 q + 16 q^4) s - 27 r^4 - 4 r^2 q^3$ negativ, so existieren zwei imaginäre Wurzeln; ist dieser Ausdruck positiv, und entweder $-q$ oder $q^2 - 4s$ negativ, dann sind alle Wurzeln imaginär; verschwindet dieser Ausdruck, und ist entweder $-q$ oder $q^2 - 4s$ negativ, so sind die zwei ungleichen Wurzeln imaginär. Ähnliche, aber viel weitläufigere Ausdrücke sind für die Quintic angegeben[6]). **Waring** war der erste, ein solches Kriterium für die Quintic abzuleiten. Dieses ist durch eine von ihm erfundene Transformation erzielt worden, wodurch eine Gleichung deduziert wird, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeldifferenzen der vorgelegten Gleichung sind, um dadurch notwendige, sowie auch hinreichende Bedingungen für das Vorhandensein imaginärer Wurzeln zu erhalten. In den **Miscellanea analytica**, 1762, S. 17, werden die drei ersten Glieder der allgemeinen transformierten Gleichung ohne Ableitung angegeben. Wenn die Zeichen derselben beständig abwechseln, habe die vorgelegte Gleichung keine imaginären Wurzeln. Dieses berühmte Verfahren hat später **Lagrange** unabhängig ausgearbeitet. In seinen nachfolgenden Werken hat er aber **Warings** Priorität angezeigt[7]).

Waring fängt in den **Miscellanea analytica** mit der Ab-

---

[1]) Meditationes algebraicae, Ed. tertia, 1782, p. XXI. [2]) **Lagrange**, Oeuvres, T. III, p. 370. [3]) Med. alg. 1782, p. XXVIII. [4]) Phil. Trans. (London), Vol. 77, 1787, p. 71. Vgl. Med. alg. 1782, p. 91. [5]) Phil. Trans., Vol. 53. For the year 1763, London 1764, p. 294—298. [6]) Abgedruckt in Med. alg. 1782, p. 85, und in **Lagrange**, De la résol. des équat. num. Note III. [7]) De la résolution des équations numériques, Paris, An VI, Note III.

leitung seiner Formel für die Potenzsummen der Wurzeln an. Sie unterscheidet sich von den Newtonschen dadurch, daß statt durch rekurrierende Darstellung eine Summe s_n durch Summen niedrigeren Grades, $s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots$, zu berechnen, sie die Summe ganz unabhängig von früheren Ergebnissen darstellt. Auch führt Waring eine Formel für die Darstellung eines Koeffizienten der Gleichung durch die Potenzsummen $s_1, s_2, \ldots$ an. Gleichfalls als Waringsche Formeln bekannt sind diejenigen[1]), mittels welcher man beliebige ganze symmetrische Funktionen mit Gliedern $\alpha^a \beta^b \gamma^c \delta^d \varepsilon^e$ usw. direkt als Funktionen der Gleichungskoeffizienten ausdrücken kann. Er skizziert dann das Verfahren, mittels symmetrischer Funktionen eine Gleichung zu finden, deren Wurzeln irgend eine gegebene Relation zu den Wurzeln einer oder mehrerer gegebenen Gleichungen haben. Durch die Annahme $v = x^{\frac{1}{n}}$ könne man dasselbe zur Wegschaffung von Radikalen $x^{\frac{1}{n}}$ anwenden. Um imaginäre Wurzeln einer Gleichung $x^{2n} - px^{2n-1} + qx^{2n-2} - rx^{2n-3} + \text{etc.} = 0$ zu entdecken, gibt er ohne Nachweis die Regel S. 18: Man eliminiere v aus den zwei Gleichungen $2nv^{2n-1} - (2n-1)pv^{2n-2} + (2n-2)qv^{2n-3} - \text{etc.} = 0$ und $v^{2n} - pv^{2n-1} + qv^{2n-2} - \text{etc.} = w$; wenn in der resultierenden Gleichung $w^{2n-1} - Pw^{2n-2} + Qw^{2n-4} - \text{etc.} = 0$, P, Q, etc. alle positiv sind, habe die vorgelegte Gleichung keine reellen Wurzeln. Um die Grenzen von Wurzeln zu bestimmen, transformiert er die gegebene Gleichung in eine andere, deren Wurzeln die reziproken Wurzeldifferenzen $1/(\alpha - \beta)$, $1/(\alpha - \gamma)$, $1/(\alpha - \delta)$, etc. der vorgelegten Gleichung sind. Diese Methode wurde später von Lagrange wieder erfunden[2]).

Waring nimmt Wurzelformen wie

$$x = \sqrt[n]{a + \sqrt{-b^2}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{-b^2}}$$

an, und berechnet durch Wegschaffung der Radikalen die entsprechende Gleichung. Mit einer solchen Auflösungsmethode hatte Euler schon 1732 (Bd. III², S. 574) experimentiert. Für die Quartic machte Waring die Annahme[3]) $x = \sqrt[4]{\alpha} + \sqrt[4]{\beta} + \sqrt[4]{\gamma}$ und leitet die kubische Gleichung zur Bestimmung von α, β, γ ab. Für die Quintic macht er die ganz ähnliche Voraussetzung[4]) $x = \sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\beta} + \sqrt[5]{\gamma} + \sqrt[5]{\delta}$ und läßt dann die unklare Bemerkung folgen: „Ich habe durch Berechnung gefunden, daß die biquadratische Gleichung, deren Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind, not-

[1]) Misc. analyt., p. 8. [2]) Lagrange, op. cit., Note III. [3]) Misc. analyt., p. 45. [4]) Ebenda, p. 47.

wendig irrationale Größen habe, und daß die vorgelegte Gleichung durch diese Methode nicht auflösbar ist"[1]). Was sollen irrationale Größen hier bedeuten? Waren nach der Ansicht des Verfassers Irrationale anderer Natur als Radikale? Oder gründete er seinen Einwand gegen irrationale Koeffizienten der Quartic auf die scheinbare Unmöglichkeit dieselben zu berechnen? Daß die Auflösung von Gleichungen gewöhnlich auf der Lösung von Hilfsgleichungen höherer Grade beruht, davon hat sich Waring durch seine Beispiele von Gleichungen, welche vorgelegte Wurzelformen haben, überzeugt[2]).

Waring schlägt aber noch eine andere Wurzelform vor, welche einige Jahre später auch Euler und Bézout benutzten. Mit lakonischer Kürze sagt Waring[3]): „Aufzulösen $x = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^2} + c\sqrt[n]{p^3} + d\sqrt[n]{p^4} \ldots A\sqrt[n]{p^{n-4}} + B\sqrt[n]{p^{n-3}} + C\sqrt[n]{p^{n-2}} + D\sqrt[n]{p^{n-1}}$. Man rotte die irrationalen Größen aus und erhalte

$$x^n - n \times \overline{aD + bC + cB + dA, \text{ etc.}}\; x^{n-2} + \text{etc.} = 0.$$

Daraus kann man die Auflösung kubischer Gleichungen entnehmen." Letztere Lösung wird durchgeführt.

Im 18. Jahrhundert beschäftigte sich die Pariser Akademie der Wissenschaften dreimal mit der Bestimmung der Anzahl imaginärer Gleichungswurzeln. Das erstemal 1743, als de Gua eine Abhandlung mitteilte; das zweitemal, als Fontaine seine Resultate vorlegte, und das drittemal, als 1772 du Séjour seine Studien veröffentlichte. Die Untersuchungen von de Gua und die erste Schrift von Fontaine sind schon im dritten Band dieser Geschichte besprochen worden. Eine zweite Arbeit des Fontaine, L'art de résoudre les équations, wurde 1764 veröffentlicht[4]). Es ist ein langer Aufsatz, welcher die Methoden seiner ersten Schrift auch auf Gleichungen 4. und 5. Grades anzuwenden sucht. Er zählt für quartische Gleichungen 617 mögliche Fälle auf. Sein Verfahren ist für praktische Zwecke ungeeignet und von theoretischer Seite, wie Lagrange[5]) hervorgehoben hat, unbefriedigend.

In einer Abhandlung De functionum algebraicarum integrarum factoribus trinomialibus realibus commentatio[6]) nimmt Franz Ulrich Theodor Aepinus (1724—1802) die Wurzelexistenz stillschweigend an und zeigt, daß, wenn $x + m + n\sqrt{-1}$ ein Faktor

[1]) Man sehe auch Meditationes algebraicae, 1782, p. 182, 183. [2]) Miscellanea analyt., p. 47. [3]) Ebenda, p. 44. [4]) Mémoires donnés à l'acad. roy. des sciences, non imprimés dans leur temps. Par M. Fontaine, de cette académie, Paris 1764, p. 422—588. [5]) De la résol. des équat. num., Note VII. [6]) Novi Comm. acad. Sc. imp. Petropolitanae, Tom. VIII, 1760 et 1761, Petropoli 1763, p. 169—180.

von $x^m + ax^{m+1} + \cdots$, es $x + m - n\sqrt{-1}$ auch ist. Dabei wählt er für $m + n\sqrt{-1}$ die trigonometrische Form $\alpha(\cos\Phi + \sin\Phi\sqrt{-1})$, so daß

$$x^\nu = \alpha^\nu(\cos\nu\Phi + \sin\nu\Phi\sqrt{-1}).$$

Durch Substitution des Wertes von x ergibt sich die Gleichung $P + Q\sqrt{-1} = 0$ und $P = Q = 0$, worauf dann folgt, daß $x = \alpha(\cos\Phi - \sin\Phi\sqrt{-1})$ die Relation $P - Q\sqrt{-1}$ liefert und deshalb eine Wurzel der vorgelegten Gleichung ist.

In der Abhandlung De Resolutione aequationum cuiusvis gradus[1]) macht L. Euler einen seiner Abhandlung[2]) von 1732 ähnlichen Versuch, die allgemeine Auflösung algebraischer Gleichungen zu finden. Wie vor dreißig Jahren, so glaubt er jetzt aus der Tatsache, daß eine quadratische Gleichung durch die Ausziehung von Quadratwurzeln, eine kubische Gleichung durch Ausziehung von Quadrat- und Kubikwurzeln, und eine Gleichung vierten Grades durch Ausziehung biquadratischer Wurzeln gelöst werden kann, annehmen zu dürfen, daß sich die Wurzelform einer Gleichung n^{ten} Grades durch Radikale nicht höher als n^{ter} Ordnung ausdrücken lasse. Statt aber, wie 1732, für eine solche (vom zweiten Gliede befreite) Gleichung die Wurzelform von $n - 1$ Gliedern

$$x = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta} + \sqrt[n]{\gamma} + \cdots$$

anzunehmen, stellt er jetzt einen allgemeineren, gewisse Schwierigkeiten der älteren Form vermeidenden Ausdruck auf,

$$x = w + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + \cdots + Q\sqrt[n]{v^{n-1}},$$

wo w eine rationale Zahl ist, und „$A, B, \ldots, Q$ entweder rationale Größen oder mindestens keine n^{te} Wurzel enthalten". Er hoffe, daß diese Form allen Anforderungen genüge, da die übrigen Wurzeln dadurch bestimmt sind, daß man für $\sqrt[n]{v}$ nacheinander alle Werte von $\sqrt[n]{1}\sqrt[n]{v}$ einsetzt. Die Voraussetzung, daß $A, B, \ldots, Q$ im allgemeinen algebraische Zahlen seien, ist in unserer Zeit als unmöglich anerkannt. Euler zeigt, daß die Wurzeln der Gleichungen der ersten vier Grade sich auf diese Weise ausdrücken lassen. Durch die Tatsache, daß alle damals bekannten, auflösbaren Gleichungen diese Wurzelform besaßen, ist Euler von der Richtigkeit seiner Annahme überzeugt. „Aus diesen Gründen", sagt er, „ist die neue Wurzelform zur höchsten Wahrscheinlichkeit erhoben." Bemerkenswert ist es noch, daß Eulers Form in etwas präziserer Fassung die Grundlage des Abelschen Be-

---

[1]) N. Comm. Petr., T. IX, pro annis 1762 et 1763, p. 70—98. [2]) Diese Vorlesungen, Bd. III, 2. Aufl., S. 574.

weises der Unmöglichkeit der algebraischen Auflösungen höherer Gleichungen bildet[1]). In der Auflösung der vom zweiten Gliede befreiten biquadratischen Gleichung setzt Euler $x = A\sqrt[4]{v} + B\sqrt[4]{v^2} + C\sqrt[4]{v^3}$ und findet dann die Gleichung vierten Grades, welche diese Wurzelform hat. Quadriert man beide Seiten von $x - B\sqrt{v} = A\sqrt[4]{v} + C\sqrt[4]{v^3}$, so erhält man $x^2 - 2Bx\sqrt{v} + B^2v = A^2\sqrt{v} + 2ACv + C^2v\sqrt{v}$ oder $x^2 + (B^2 - 2AC)v = 2Bx\sqrt{v} + (A^2 + C^2v)\cdot\sqrt{v}$. Quadriert man abermals, so erhält man die rationale Gleichung $x^4 = 2(B^2 + 2AC)vx^2 + 4(A^2 + C^2v)Bvx + A^4v - B^4v^2 + C^4v^3 + 4AB^2Cv^2 - 2A^2C^2v^2$. Wenn $a = \sqrt{-1}$, $b = -1$, $c = -\sqrt{-1}$, dann sind die drei übrigen Wurzeln dieser Gleichung $x = Aa\sqrt[4]{v} + Bb\sqrt[4]{v^2} + Cc\sqrt[4]{v^3}$, $x = Ab\sqrt[4]{v} + B\sqrt[4]{v^2} + Cb\sqrt[4]{v^3}$, $x = Ac\sqrt[4]{v} + Bb\sqrt[4]{v^2} + Ca\sqrt[4]{v^3}$. Ist nun die gegebene Gleichung $x^4 = A'x^2 + B'x + C'$, so kann man die Werte von A, B, C, v durch die Gleichungen $A' = 2(B^2 + 2AC)v$, $B' = 4(A^2 + C^2v)Bv$, $C' = (A^2 + C^2v)^2v - (B^2 + 2AC)^2v^2 + 8AB^2Cv^2$ bestimmen. Setzt man $B = 1$, so erhält man die kubische Gleichung für die Bestimmung von v, nämlich,

$$v^3 - \frac{1}{2}A'v^2 + \frac{1}{4}\left(C' + \frac{1}{4}A'^2\right)v - \frac{1}{64}B'^2 = 0.$$

Die vier Wurzeln gibt Euler in dieser Form:

$$x = \sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{B'\sqrt{v} + 2A'v - 4v^2},$$

$$x = \sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{B'\sqrt{v} + 2A'v - 4v^2},$$

$$x = -\sqrt{v} + \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{-B'\sqrt{v} + 2A'v - 4v^2},$$

$$x = -\sqrt{v} - \frac{1}{2\sqrt{v}}\sqrt{-B'\sqrt{v} + 2A'v - 4v^2}.$$

Euler wendet diese Methode auf die Gleichung fünften Grades $x^5 = A'x^3 + B'x^2 + C'x + D'$ an. Die angenommene Wurzelform ist nun $x = A\sqrt[5]{v} + B\sqrt[5]{v^2} + C\sqrt[5]{v^3} + D\sqrt[5]{v^4}$. Das obige Verfahren befolgend, bildet er vier Gleichungen für die Bestimmung der Werte von A, B, C, D, v. Die Elimination von A, B, C, D führt er aber nicht durch. Er hätte eine Gleichung des vierundzwanzigsten Grades in v gefunden. Es folgen nun Bemerkungen, die wir in deutscher

[1]) Vgl. J. Pierpont, „Zur Geschichte der Gleichung des V. Grades (bis 1858)" in Monatsh. f. Math. u. Phys., VI. Jahrg., Wien 1895, S. 28.

Übersetzung wiedergeben: „Wenn nun gegenteilig die Größen A, B. C, D, sowie der Buchstabe v, durch die Koeffizienten A', B', C', D' bestimmt werden könnten, hätte man die allgemeine Auflösung aller Gleichungen fünften Grades. Aber gerade darin liegt die größte Schwierigkeit, da kein Weg offen steht, die Buchstaben A, B, C, D, von welchen zwar einer nach Willkür angenommen werden kann, nacheinander so zu eliminieren, daß eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten v und den gegebenen Werten $A' B' C' D'$ entstehe, die auch keine überflüssigen Wurzelzeichen einschließe. Wir dürfen gewiß vermuten, daß, wenn diese Elimination richtig durchgeführt ist, man endlich eine Gleichung vierten Grades erhalten wird, welche den Wert von v selbst festsetzt. Denn wenn die Gleichung einen höheren Grad erreichte, dann würde der Wert von v selbst Wurzelzeichen desselben Grades enthalten, was verstandeswidrig erscheint."

Auf Spezialfälle übergehend nimmt er 1) $C = D = 0$ an und erhält die auflösbare Gleichung $x^5 = 5Px^2 + 5Qx + \frac{Q^2}{P} + \frac{P^3}{Q}$, 2) $B = C = 0$ an und erhält die Gleichung $x^5 = 5Px^3 - 5P^2x + D$, deren Auflösung schon früher De Moivre gezeigt hatte, 3) die Koeffizienten A', B', C', D' als gewisse rationale Funktionen fünf neuer Größen an und erhält eine Gleichung, deren Wurzeln bekannt sind.

Diese Abhandlung wurde 1785 von Graf Franz Schafgotsch[1]) und 1791 von J. A. C. Michelsen[2]) in das Deutsch übersetzt. Ein mühevoller Versuch Schafgotschs, die von Euler angedeutete Resolvente zu finden, blieb ohne Erfolg.

Ungefähr zu gleicher Zeit erschien eine andere hervorragende Arbeit, Sur Plusieurs Classes d'Équations de Tous les Degrés, qui admettent une solution algébrique[3]), aus der Feder von Étienne Bézout. Er geht von der Idee aus, daß alle binomischen Gleichungen auflösbar sind. Wenn es deshalb möglich wäre, alle Gleichungen in binomische zu transformieren, hätte man das Ziel erreicht. Er erklärt seine Methode durch kubische Gleichungen und nimmt dann das Studium derjenigen n^{ten} Grades auf. Es sei $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ die vorgelegte Gleichung. Man setze $y^3 + h = 0$ und $(x + b)y = x + a$. Letztere Gleichung wird so gewählt, daß die Elimination von y zwischen den zwei letzten eine kubische Gleichung gibt, die mit der vorgelegten verglichen werden kann. Man erhält

---

[1]) Abh. d. Böhmisch. Gesellsch. d. Wiss., Prag 1785, S. 177—236, 1. Abteil.
[2]) Theorie der Gleich. aus den Schriften der Herren Euler u. de la Grange, Berlin 1791. [3]) Histoire de l'Acad. Roy. des Sciences, Année 1762, Paris 1764, p. 17—78.

auf diese Weise $p = \frac{3a + 3bh}{1+h}$, $q = \frac{3a^2 + 3b^2h}{1+h}$, $r = \frac{a^3 + b^3h}{1+h}$. Eliminiert man h, dann hat man $p(a+b) - 3ab = q$ und $p(a^2 + ab + b^2) - 3ab(a+b) = 3r$, woraus man weiter erhält $a + b = \frac{pq - 9r}{p^2 - 3q}$ und $ab = \frac{q^2 - 3pr}{p^2 - 3q}$. Es sind nun a und b die zwei Wurzeln der Gleichung $a^2 - \frac{pq - 9r}{p^2 - 3q} + \frac{q^2 - 3pr}{p^2 - 3q} = 0$. Man hat jetzt $y^3 = -h = \frac{p - 3a}{p - 3b}$ und $x = \frac{a - by}{y - 1}$, woraus sich endlich

$$x = -\tfrac{1}{3}p + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{[(3a-p)^2(3b-p)} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{[(3a-p)(3b-p)^2]}$$

ergibt. Diese Methode verfolgend, sucht er nun die Bedingungen dafür, daß die Gleichung n^{ten} Grades sich in eine binomische transformieren lasse. Er nimmt $y^n + h = 0$ und $y = \frac{x+a}{x+b}$ an, und eliminiert y. Er erhält eine Gleichung n^{ten} Grades in x, worin er das zweite Glied gleich Null setzt und so $h = -\frac{a}{b}$ erhält. Alle Koeffizienten der resultierenden Gleichung sind rationale Funktionen von a und b. Es können deshalb die zwei Koeffizienten des dritten und vierten Gliedes willkürlich angenommen werden, wonach sich alle übrigen als Funktionen dieser zwei ausdrücken lassen. Dies sind die gesuchten Bedingungen. In der Auflösung einer Gleichung n^{ten} Grades, welche diesen Bedingungen entspricht, löse man anfangs eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln a und b sind. Dann können h und y berechnet werden, sowie x. Die allgemeine algebraische Auflösung von $y^n + h = 0$ kannte Bézout nicht; er verfolgte die De Moivresche trigonometrische Behandlungsweise. Er untersucht dann die Gleichungen, deren Wurzeln die Form $x = \sqrt[n]{a^{n-1}b} + \sqrt[n]{a^{n-2}b^2}$, $n < 8$, haben, und zeigt, daß der irreduktible Fall, wo a und b imaginär sind, für x reelle Werte gibt.

Bézout setzt seine Untersuchungen in einer zweiten Abhandlung, Sur la résolution générale des équations de tous les degrés[1]) fort. Unterdessen ist ihm Eulers Arbeit von 1762 bekannt geworden. Sein jetziges Verfahren läßt sich aus seiner Behandlung der biquadratischen Gleichung ersehen. Er setzt $y^4 - 1 = 0$ und $ay^3 + by^2 + cy + x = 0$. Multipliziert man letztere mit $y, y^2, \ldots$, erhält man

---

[1]) Histoire de l'Acad. Roy. des Sciences Année 1765, Paris 1768, p. 533 bis 552.

$$ay^3 + by^2 + cy + x = 0,$$
$$by^3 + cy^2 + xy + a = 0,$$
$$cy^3 + xy^2 + ay + b = 0,$$
$$xy^3 + ay^2 + by + c = 0,$$

aus welchen sich durch Elimination von y^3, y^2, y eine Gleichung vierten Grades in x ergibt. Vergleicht man deren Koeffizienten mit p, q, r in $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, so hat man die Bestimmungsgleichungen $4ac + 2b^2 = -p$, $4a^2b + 4bc^2 = q$, $a^4 + c^4 - b^4 - 2a^2c^2 + 4ab^2c = -r$. Sucht man nun a und c zu berechnen, so erhält man eine Gleichung des 24ten Grades; sucht man aber zuerst b, dann hat man eine des 6ten Grades, die als eine kubische angesehen werden kann. Die Werte von x erhalten die Form

$$x = -a - b - c,$$
$$x = +a - b + c,$$
$$x = +a\sqrt{-1} + b - c\sqrt{-1},$$
$$x = -a\sqrt{-1} + b + c\sqrt{-1}.$$

Wenn der Exponent n eine zusammengesetzte Zahl ist, wird ein zweites, etwas kürzeres Verfahren beschrieben. Die Bestimmungsgleichungen für den Fall $n = 5$ findet Bézout abschreckend. „Obschon ich diese letzten Gleichungen auf mehrere Weisen verändert und verschiedene Mittel zur Abkürzung der Elimination gefunden habe, bin ich doch noch nicht imstande, die Schlußresultate anzugeben." Auch sagt er: „Durch den Vergleich von Eulers Abhandlung mit der meinigen sieht man, daß, obschon beide Methoden zu den gleichen Resultaten führen, wir voneinander bedeutend abweichen in der Schätzung des Grades der Gleichung, auf welcher die Auflösung der vorgelegten Gleichung beruht. Dieser gelehrte Analyst glaubt, dieser Grad sei immer niedriger als der der vorgelegten Gleichung; ich glaube im Gegenteil, er ist immer viel höher, daß aber die Gleichung keine anderen Schwierigkeiten als jene aller niedrigeren Grade umfaßt." Der Grad dieser Resolventen sei $n(n-1)\cdots 2 \cdot 1$, und der Exponent der Unbekannten jedes Gliedes sei ein Vielfaches von n. Die Größen a, b, c, ... nennt Bézout coëfficiens indéterminés, ohne eine Meinung zu äußern, ob sie algebraisch seien.

Die Eliminationsmethode, welche heutzutage die Eulersche genannt wird, ist in seiner Schrift Nouvelle méthode d'éliminer

les quantités inconnues des équations[1]) erklärt. Er zeigt den Gedankengang zuerst an den speziellen Gleichungen $z^2 + Pz + Q = 0 = (z - w)(z + A)$ und $z^3 + pz^2 + qz + r = 0 = (z - w)(z^2 + az + b)$, wo w die gemeinsame Wurzel und A, a, b unbestimmte Koeffizienten sind. Daraus folgen

$$(z^2 + Pz + Q)(z^2 + az + b) = (z^3 + pz^2 + qz + r)(z + A),$$

und die Bestimmungsgleichungen $P + a = p + A$, $Q + Pa + b = q + pA$, $Pb + Qa = qA + r$, $Qb = rA$, welche durch Elimination von A, a, b das erwünschte Resultat liefern.

Wilhelm Otto Reitz (1702—1768), ein Lehrer in Rotterdam und Middelburg, veröffentlichte eine Schrift[2]) über die Auflösung der Quartik, worin er Kunstgriffe angibt, um Fälle zu lösen, wo durch Addition eines Trinoms $a^2x^2 + 2abx + b^2$ zu beiden Seiten, die Seiten Quadratformen annehmen können.

Bézouts Untersuchungen über die algebraische Auflösung von Gleichungen führten ihn zu dem Eliminationsproblem. Er fand, daß Newtons Eliminationsmethode, durch Aufsüchung des größten gemeinschaftlichen Teilers, öfters fremde Lösungen gibt; daß das Verfahren von Euler und Cramer, durch symmetrische Funktionen, nur auf zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf einmal anwendbar ist. Im Falle mehrerer Gleichungen müsse man sie paarweise nehmen und die Endgleichung sei höheren Grades als notwendig ist. In einer Abhandlung Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues[3]) fängt Bézout mit einem Lemma an, um die Resultante von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten zu finden. Sind $a, b, c, d, \ldots$ die Koeffizienten der ersten Gleichung, $a', b', c', d', \ldots$ und $a'', b'', c'', d'', \ldots$ diejenigen der zweiten und dritten Gleichung usw., dann bilde man die Permutationen ab, ba und schreibe $ab - ba$. Mit diesen zwei und c bilde man alle möglichen Permutationen und beachte einen Zeichenwechsel, wenn c in ab oder ba seine Stelle ändert. Man hat $abc - acb + cab - bac + bca - cba$. Auf gleiche Weise verfahre man mit dem Buchstaben d und den übrigen Koeffizienten der ersten Gleichung. Setzt man den letzten Ausdruck gleich Null, so hat man die Bedingung, daß die vorgelegten Gleichungen simultan seien. Diese Polynomen sind Determinanten, die durch eine einfache Regel niedergeschrieben werden können. Bézout schreitet dann zur Elimination zweier Un-

[1]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1764, Berlin 1766, p. 91 bis 104. [2]) Verhandelingen uitgegeeven door de Hollandsche Maatschappye der Weetenschappen, te Haarlem, IX Deels III. Stuk 1767, S. 1—48. [3]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1764, Paris 1767, p. 288—338.

bekannten aus zwei Gleichungen m^{ten} und m'^{ten} Grades, indem er die erste Gleichung mit einem Polynom $M'x^{m'-1} + N'x^{m'-2} + \cdots$ multipliziert und die zweite mit einem Polynom $Mx^{m-1} + Nx^{m-2} + \cdots$ und die Produkte addiert. Der Koeffizient jeder Potenz von x in dieser Summe wird nun $= 0$ gesetzt. Sind z. B. die vorgelegten Gleichungen $Ax^2 + Bx + C = 0$, $A'x^2 + B'x + C' = 0$, multipliziert man beziehungsweise mit $Mx + N$, $M'x + N'$, und läßt die Koeffizienten von x in der Summe der Produkte verschwinden, dann hat man $AM + A'M' = 0$, $BM + B'M' + AN + A'N' = 0$, $CM + C'M' + BN + B'N' = 0$, $CN + C'N' = 0$. Man darf hier den willkürlichen Koeffizienten M gleich A' setzen, dann wird $M' = -A$. Durch Elimination von N, N' erhält man einen Ausdruck, den man leichter durch die Formeln obgenannten Lemmas niederschreiben kann. Dies Verfahren läßt sich, wie Bézout erklärt, auf drei oder mehrere Gleichungen ausdehnen. Um die Operationen abzukürzen, schlägt er vor, daß man bei den Gleichungen $Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots + T = 0$, $A'x^{m'} + B'x^{m'-1} + \cdots T' = 0$, im Falle $m = m'$, die erste nacheinander mit A', $A'x + B'$, $A'x^2 + B'x + C'$, $\cdots$, und die zweite nacheinander mit A, $Ax + B$, $Ax^2 + Bx + C$, $\cdots$ multipliziere und jedesmal die Differenz der entsprechenden Produkte niederschreibe. Man erhalte auf diese Weise m Gleichungen $m - 1^{ten}$ Grades. Man soll dann jede Potenz von x als eine Unbekannte betrachten, und das Lemma liefere die Bedingung für die simultane Existenz dieser m Gleichungen. Die Frage, ob die Werte der verschiedenen Potenzen von x bei der Annahme, daß sie verschiedene Unbekannte vorstellen, miteinander verträglich seien, wird nicht berührt. Das Endresultat erkennt man als eine symmetrische Determinante. Ist $m' < m$, dann multipliziere man die zweite Gleichung mit $Ax^{m-m'}$, $Ax^{m-m'+1} + B^{m-m'}, \ldots$ und verfahre wie oben. Der Grad der Resultante wird achtsam untersucht und nicht größer als das Produkt der Ordnungsexponenten der zwei Gleichungen gefunden.

In der Schrift Nova criteria radices aequationum imaginarias dignoscendi[1]) erklärt Euler, daß die damals aufgestellten Kriterien für imaginäre Wurzeln die Existenz solcher Wurzeln in einer Gleichung wie $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 24x + 108 = (x^2 + 8x + 18) . (x^2 - 4x + 6) = 0$ nicht kund machen. Clairauts Algebra und die Veröffentlichungen von Waring aus den Jahren 1762 und 1764 wären ihm also nicht bekannt. Euler stellt drei Prinzipien auf: Erstens, sind alle Wurzeln einer Gleichung reell, dann hat die Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate derjenigen der vorgelegten Gleichung

[1]) N. Comm. Petr., Tom. XIII, pro anno 1768, Petropoli 1769, p. 89—119.

sind, lauter positive Wurzeln, und die Zeichen ihrer Koeffizienten wechseln beständig ab. Zweitens, in der Gleichung $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \pm \cdots = 0$ mit reellen Wurzeln muß die Summe der Quadrate der Wurzeldifferenzen positiv sein und folglich $a^2 > \frac{2n}{n-1} b$. Drittens, hat die Gleichung $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \cdots = 0$ lauter reelle Wurzeln, dann haben die zwei davon abgeleiteten Gleichungen $n-1^{\text{ten}}$ Grades auch lauter reelle Wurzeln: $nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)bx^{n-3} + \cdots = 0$, $ax^{n-1} + 2bx^{n-2} + 3cx^{n-3} + \cdots = 0$. Den Nachweis dafür zieht er aus der Kurventheorie. Für die erste betrachtet er $\frac{du}{dx} = 0$, und für die zweite setzt er erst $x = 1/z$. Durch Wiederholung der Operation fließen aus den zwei Gleichungen $n-1^{\text{ten}}$ Grades drei Gleichungen $n-2^{\text{ten}}$ Grades und vier Gleichungen $n-3^{\text{ten}}$ Grades usw., bis man endlich auf quadratische Gleichungen kommt, deren Wurzeln leicht erkennbar sind. Es ist zu beachten, daß von diesen drei Kriterien keines hinreichend ist, und keines die Anzahl imaginärer Wurzeln anzeigt, im Falle, daß solche sich vorfinden. Die zwei ersten Prinzipien findet man schon in Newtons Arithmetica universalis.

Das dritte Prinzip Eulers wird auch von J. H. Lambert in seinen Observations sur les équations d'un degré quelconque[1]) hergestellt. Um die Bedingung für die Existenz gleicher Wurzeln einer Gleichung $z^3 + az^2 + bz + k = 0$ zu bestimmen, findet Lambert den größten gemeinschaftlichen Teiler zwischen $z^3 + az^2 + bz + k$ und $3z^2 + 2az + b$, und setzt den letzten Rest gleich Null. In einer zweiten Abhandlung des gleichen Jahres[2]) bemerkt Lambert, daß Analysten wenig Hoffnung hegen, die allgemeine Auflösung algebraischer Gleichungen zu erzielen, weshalb es wünschenswert sei, Kunstgriffe für die Auffindung der Wurzeln für Spezialfälle zu entdecken. Er beschäftigt sich hauptsächlich mit numerischen Gleichungen. Nach einem seiner Vorschläge bilde man eine zweite Gleichung, deren Wurzeln die Summe je zweier Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Diese Hilfsgleichung lasse sich öfters in rationale Faktoren zerlegen und liefere die erwünschte Lösung.

Francisco de Toschi a Fagnano untersucht in einer Schrift, De infinitarum aequationum resolutione, quarum radices sub eadem forma exhibentur, qua radix cubica, quae dicitur Cardani[3]) Gleichungen, die mit $x^3 + \frac{3a^2}{4}x + \frac{a^2y}{4} = 0$ oder

---

[1]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1763, Berlin 1770, p. 278 bis 291. [2]) Ebenda, S. 292—310. [3]) Nova Acta Eruditorum, 1770, p. 200—227.

$t^6 + 2a^2yt^3 - a^6 = 0$ $\left(\text{wo } 2x = t - \frac{a^2}{t} \text{ gesetzt ist}\right)$ verwandt sind. Statt dieser Gleichung 6^{ten} Grades nehme man $t^{2n} + 2a^{n-1}t^n y - a^{2n} = 0$, worin n eine ganze oder gebrochene, positive oder negative, ja sogar eine irrationale Zahl sein möge. In jedem Falle habe man $2a^{\frac{1-n}{n}} x = (-y \pm \sqrt{y^2 + a^2})^{\frac{1}{n}} - (y \pm \sqrt{y^2 + a^2})^{\frac{1}{n}}$. Jede Gleichung, die sich auf die Form der obigen $2n^{\text{ten}}$ Grades reduzieren läßt, zeigt Wurzeln der Cardanschen Art. Wenn n eine gerade Zahl ist und man bei $\pm$ das untere Zeichen nimmt, sei die Wurzel durch Imaginäres verunstaltet; ist aber n ungerade, sei es gleichgültig, welches Zeichen man nimmt. Durch Differentiation der Wurzelform und Kombination erhält er $\frac{n\,dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \mp \frac{dy}{\sqrt{y^2 + a^2}}$. Dann durch Integration und Transformation wird

$$2a^{n-1}y = (x + \sqrt{x^2 + a^2})^n - (-x + \sqrt{x^2 + a^2})^n,$$

eine Gleichung, die die Cardansche Wurzelform besitzt. Indem man für x $t - \frac{a^2}{t}$ einsetzt, gelangt man zur ursprünglichen Gleichung $2n^{\text{ten}}$ Grades. Dann folgen geometrische Betrachtungen, aus welchen hervorgeht, daß die Konstruktion aller dieser Gleichungen durch die Seiten rechtwinkliger Dreiecke nach der Cotes'schen Methode für Kubikgleichungen erzielt werden kann.

Ein durch leichtfaßliche Darstellung für den Unterricht geeignetes Werk über Gleichungstheorie wurde von Mako unter dem Titel De arithmeticis, et geometricis aequationum resolutionibus liber duo 1770 in Wien veröffentlicht. Paul Mako de Kerek Gede (1724?—1793) war ein ungarischer Jesuit, welcher durch seine Lehrtätigkeit in Mathematik und Physik an der Theresianischen Akademie in Wien Geschmack für die Mathematik erweckte.

Der Pariser Astronom und Physiker Achille Pierre Dionis du Séjour (1734—1794) veröffentlichte[1]) einen Beweis, daß $x^3 - px + q = 0$ für den irreduktiblen Fall, $4p^3 > 27q^2$, keine Wurzel von der Form $a + b\sqrt{-1}$ haben kann, und, da D'Alembert gezeigt habe, daß alle imaginären Wurzeln diese Form annehmen, müssen alle drei Wurzeln reell sein. Dieser Gedanke wird in einer Abhandlung Pour déterminer le nombre des racines réelles et des racines imaginaires ...[2]) weiter entwickelt und auf Gleichungen dritten und vierten Grades angewandt. Er setzt voraus, daß jede

---

[1]) Histoire de l'académie royale des sciences, année 1768, Paris 1770, p. 207, 208. [2]) Ebenda, année 1772, II. Partie, Paris 1776, p. 377—456.

Wurzel sich in der Form $a + b\sqrt{-1}$ ausdrücken lasse, wo a reell ist, b aber diesmal entweder reell oder eine durch $\sqrt{-1}$ nicht teilbare imaginäre Größe ist. Für x substituiert er $a + b\sqrt{-1}$ und bildet aus dem Resultate zwei Gleichungen, wovon die eine aus den mit dem Faktor $\sqrt{-1}$ behafteten Gliedern besteht und die andere alle übrigen Glieder enthält. Erhält nun a in einer dieser Gleichungen einen willkürlichen Wert, dann läßt sich der korrelative Wert von b bestimmen. Setzt man diese Werte von a und b in die andere Gleichung ein, so erhält man Ausdrücke für die Bestimmung der Spezialgleichung desselben Grades, welche $x - a - b\sqrt{-1}$ als Faktor enthält. Stellt sich b als eine durch $\sqrt{-1}$ nicht teilbare imaginäre Größe heraus, dann ist dieser Faktor imaginär, in anderen Fällen ist er reell. Setzt man z. B. in der Gleichung $x^3 + px + q = 0$ den Wert $a + b\sqrt{-1}$ für x, dann erhält man nach obiger Anweisung die zwei Gleichungen (α) $a^3 - 3ab^2 + ap + q = 0$, (β) $b^2 - 3a^2 - p = 0$. Eliminiert man b^2, so wird (γ) $2a(4a^2 + p) - q = 0$. Der kleinste Wert, den a^2 in (β) annehmen kann, ist 0. Setzt man in (α) $a = 0$ und $b = \pm\sqrt{p}$, so wird $q = 0$, und $x \pm \sqrt{-p} = 0$ ist ein Faktor der Gleichung. Aus (β) zieht man $b = \pm\sqrt{3a^2 + p}$; für Werte von $p > -3a^2$ ist b also immer reell und zwei Wurzeln der Kubik sind immer imaginär, $b = 0$ ist der Grenzwert. Setzt man in (α) $b = 0$ und $a = \pm\sqrt{\frac{-p}{3}}$, so wird $4p^3 + 27q^2 = 0$, in welchem Falle $x \mp \sqrt{\frac{-p}{3}} = 0$. Nun kann b nicht reell sein, wenn y in der Gleichung (1) $3a^2 + p - y = 0$ nicht positiv ist. Diese Gleichung, in Verbindung mit (α) und (β), liefert $4p^3 + 27q^2 = 4y(4y - 3p)^2$, woraus zu ersehen ist, daß die vorgelegte Gleichung nur dann imaginäre Wurzeln haben kann, wenn y positiv, und folglich $4p^3 + 27q^2$ positiv ist. Séjour läßt eine ausführliche Besprechung der Quartik und die geometrische Deutung seiner Resultate folgen. Lagrange drückte sich über Séjours Verfahren anerkennend aus[1]), möchte aber dasselbe auf die Quintik übertragen sehen. Dies soll Séjour kurz vor seinem Tode wirklich erzielt haben; die neue Abhandlung sei aber verloren gegangen[2]).

Die Hauptresultate über Gleichungen in der Miscellanea analytica, 1762, wurden von Waring in etwas veränderter Form in

[1]) Lagrange, Oeuvres, T. XIV, p. 71. [2]) Michaud, Biogr. univ.; Laplace, „Leçons de math. données à l'école normale", Journ. de l'école polyt. T. II, Paris 1812, p. 44.

den Meditationes algebraicae, 1770, wiedergegeben. Letzteres ist aber ein größeres Werk und enthält vieles, was sich im ersten nicht vorfindet oder dort nur ganz kurz angedeutet ist. Die einschlagenden Neuerungen finden sich aber alle schon im ersten Werke.

Er zeigt unter anderem folgende Methode, die Grenzwerte von Wurzeln festzusetzen: Hat $(A)\ x^n - px^{n-1} + \text{etc.} = 0$ die reellen Wurzeln α, β, γ, etc., wo $\alpha > \beta > \gamma > \cdots$, dann hat $(B)\ nx^{n-1} - (n-1)px^{n-2} + \text{etc.} = 0$ die reellen Wurzeln $\pi, \varrho, \sigma, \ldots$, welche bezüglich zwischen α und β, β und γ etc. liegen; auch liegen die Wurzeln von $hA + mB = 0$, wenn h und m gleiche Zeichen haben, bezüglich zwischen α und π, β und ϱ etc.; wenn aber h und m entgegengesetzte Zeichen haben, ist eine Wurzel von $hA + mB = 0$ größer als α, während die übrigen bezüglich zwischen π und β, ϱ und γ etc. liegen. Wenn h und m gleichzeichig sind, liegt eine Wurzel von $hA + mB = 0$ zwischen der kleinsten positiven und Null, und eine andere zwischen der kleinsten negativen und Null von der Gleichung $A = 0$. Nun leitet er mehrere Regeln ab, welche annähernd die Anzahl imaginärer Wurzeln einer Gleichung angeben[1]), die aber wegen ihrer komplizierten Natur keine Aufnahme gefunden haben. Ist die vorgelegte Gleichung[2]) $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} - \text{etc.} = 0$, so eliminiere man x zwischen derselben und $nx^{n-1} - (n-1)px^{n-2} + \text{etc.} = v$ oder zwischen $x^n - px^{n-1} + \text{etc.} = v$ und $nx^{n-1} - (n-1)px^{n-2} + \text{etc.} = 0$, und man kann aus der Gleichung $v^n - Av^{n-1} + Bv^{n-2} + \cdots + S = 0$ immer die genaue Anzahl imaginärer Wurzeln in einer Kubik, Quartik und Quintik entnehmen, und in einer höheren Gleichung entscheiden, ob sich imaginäre Wurzeln vorfinden. Das letzte Glied entscheidet ferner, ob die Anzahl solcher Wurzeln 2, 6, 10 etc. oder 0, 2, 8 etc. ist. Um Descartes' Zeichenregel nachzuweisen, wird hervorgehoben, daß bei Multiplikation des Polynoms durch $(x - a)$ die Anzahl der Zeichenwechsel um 1 oder 3 oder 5 etc. vermehrt wird. Die Diskussion komplexer Wurzeln nimmt 80 Seiten von Warings Quarto-Werke ein.

Es wird[3]) eine Methode vorgeführt, Annäherungen zu imaginären Wurzeln zu finden. Ist $a + b\sqrt{-1}$ ein Näherungswert, so kann man größere Genauigkeit durch die Substitution von $x = a + a' + (b + b')\sqrt{-1}$ in die vorgelegte Gleichung und die Festsetzung der beiden Werte, a' und b', durch Auflösung der erfolgten Bestimmungsgleichungen erlangen. Dann wird ein Verfahren skizziert, um aus

---

[1]) Meditationes algeb., ed. tertia, 1782, p. 68, Problem IX ff. [2]) Ebenda, p. 87, Problem XIII, XIV. [3]) Ebenda, p. 268.

Inkrementen der Koeffizienten die Inkremente der Wurzeln zu berechnen. Endlich wird nach der Anzeige in der Vorrede[1]) „bewiesen, daß jede Gleichung reelle oder imaginäre Wurzeln von der Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ habe". Jede Gleichung[2]) $x^n - px^{n-1} + \text{etc.} = 0$ könne in irgend eine andere $x^n - Px^{n-1} + \text{etc.} = 0$ durch beständige Addition von Größen $-p'x^{n-1} + q'x^{n-2} - \text{etc.}$ (wo p', q', ... möglich kleinste Größen sind, so gewählt, daß mehr als zwei Wurzeln niemals einander gleich werden) transformiert werden. Deshalb müsse irgend eine Wurzel der Gleichung $x^n - Px^{n-1} + \text{etc.} = 0$ in der Formel $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ enthalten sein. Es ist diese eine der Stellen in Warings Schriften, so allgemein und kurz gefaßt, daß sie beinahe wertlos sind. James Wood, ein Verehrer Warings, gesteht, daß der Verfasser hier den Leser über die Wurzelexistenz im Zweifel lasse. Uns scheint die Wurzelexistenz stillschweigend vorausgesetzt; Waring wollte wahrscheinlich nur nachweisen, daß sogar die sogenannten unmöglichen Wurzeln immer in der Form $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ enthalten sind.

Die Theorie der Gleichungen wird nun von Lagrange, dem größten Mathematiker des 18. Jahrhunderts, mit einschlagenden Abhandlungen bereichert. Wir halten einige Augenblicke inne, kurz seinen Lebenslauf zu schildern. Joseph Louis Lagrange[3]) (1736 bis 1813) wurde zu Turin am 25. Januar geboren. Sein Urgroßvater[4]) war ein geborener Pariser und war als Kavalleriekapitän im Dienste Königs Emanuel II. nach Sardinien gegangen, der ihn durch Verheiratung mit einer Dame Conti an Turin fesselte. Lagranges Vater war Kriegszahlmeister und seine Mutter die Tochter eines

---

[1]) Ebenda, p. XLI. [2]) Ebenda, p. 272. [3]) Wir benutzen folgende Schriften: 1) Nachricht von Lagrange's Leben und Schriften, vorgelesen von Delambre am 3. Januar 1814 in der Akademie der Wissenschaften zu Paris [Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'institut de France, année 1812], übersetzt von A. L. Crelle und gedruckt in J. L. Lagrange's mathematische Werke, herausgegeben von A. L. Crelle, Erster Band, Berlin 1823. 2) Précis Historique sur la vie et la mort de Joseph-Louis Lagrange, par MM. J. J. Virey et Potel, Paris 1813. 3) Intorno alla vita ed alle opere di Luigi Lagrange. Discorso letto nel R. Liceo Galilei di Pisa dal Cav. Angelo Forti, Roma 1869. 4) Notizen von Guyton Morveau in A. L. Crelle, op. cit. I, p. LXIX—LXXI. 5) Einige Zusätze zu vorstehenden Nachrichten von Lagrange's Leben von A. L. Crelle in op. cit. I, p. XCV bis XCIX. 6) Joseph Bertrand, Éloges Académiques, nouvelle série, Paris 1902, p. 291—311 (Extrait du Journal des Savants, septembre 1888). 7) A. Harnack, Gesch. d. K. Preuß. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 1900. 8) Cossalis Elogio di L. Lagrange war uns nicht zugänglich. [4]) Nach Forti, op. cit. S. 8, und Virey et Potel, op. cit. p. 4, wurde er am 30. Januar geboren, nach Forti war sein Großvater, nicht sein Urgroßvater, im Dienste Emanuels II. von Sardinien.

reichen Arztes zu Cambiano. Durch gewagte Unternehmungen verlor der Vater sein Vermögen. Der junge Lagrange interessierte sich anfangs für Cicero und Virgil; erst später zeigte sich Neigung für Mathematik. Zuerst studierte er die Geometrie der Griechen, dann erregte eine Abhandlung des Astronomen Halley, worin die Vorzüge der Analysis hervorgehoben wurden, in ihm großen Eifer für die Analysis. Er machte so ausgezeichnete Fortschritte, daß er vor seinem 20. Jahre[1]) die Stelle eines Professors der Mathematik an der Königlichen Artillerieschule zu Turin bekleiden konnte. In Verbindung mit einigen seiner Schüler gründete er die Turiner Akademie. Zu dieser Zeit bearbeitete er seine neuen Methoden für die Maxima und Minima, schrieb über rücklaufende Reihen und Wahrscheinlichkeitsrechnung. In der Abhandlung über die Fortpflanzung des Schalles behandelte er einen schwierigen Gegenstand, an welchem Newton, Taylor, Daniel Bernoulli und D'Alembert gearbeitet hatten, und trat gleichsam als Schiedsrichter auf, der jedem zeigte, worin er in diesem Streite recht oder unrecht hatte. Lagranges Arbeiten veranlaßten Euler ihn in die Berliner Akademie aufnehmen zu lassen. Am 2. Oktober 1759 meldete Euler seine Aufnahme an.

Lagrange sehnte sich die Pariser Gelehrten, mit denen er in Briefwechsel war, persönlich kennen zu lernen. Er nahm eine Einladung seines Freundes Carraccioli an, mit ihm über Paris nach London zu reisen. In Paris wurde er von D'Alembert, Clairaut, Condorcet, Fontaine, Nollet, Marie und anderen gut aufgenommen. Plötzlich erkrankt, konnte er seinem Freunde nicht nach London folgen. Nach Turin zurückgekehrt, widmete er sich mit neuem Eifer der Mathematik. Als Euler sich entschied, Berlin zu verlassen, um nach St. Petersburg zu gehen, bot Friedrich der Große die Präsidentenstelle seiner Akademie D'Alembert an. D'Alembert hatte aber keine Lust Paris zu verlassen und schlug Friedrich vor, Lagrange an Eulers Stelle zu setzen. Diesen Vorschlag hatte schon Euler selbst gemacht. Lagrange wurde berufen. Sein Aufenthalt zu Turin hatte ihm wenig mehr gefallen. Er fand dort niemand, der Mathematik mit Erfolg studierte. Er schrieb: „Je suis déterminé à me tirer d'ici à quelque prix que ce soit.“[2])

Lagrange nahm die Stelle in Berlin am 6. November 1766 an. Während seines zwanzigjährigen Aufenthaltes in Berlin lebte er so ganz seiner Wissenschaft, daß ihm die Händel der Welt beinahe unbekannt blieben.

[1]) Nach Virey im 15., nach Delambre im 16., nach Forti im 18. Jahre.

[2]) Vide Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche, Editore Carlo Clausen, Torino, T. IV, 1901, p. 4.

Veranlassung zur Verlegung seines Wohnortes nach Paris waren der Tod Friedrichs des Großen und die Veränderungen, welche danach in Preußen stattfanden oder befürchtet wurden. Mit der Bedingung, daß er der Berliner Akademie noch einige Memoiren liefere, nahm er Abschied und kam 1787 in Paris an. Er wurde mit Wohlwollen empfangen und ihm eine Wohnung im Louvre zugeteilt. Aber von dieser Zeit bis zur Gründung der Polytechnischen Schule verlor er den Geschmack an mathematischen Untersuchungen; er war zerstreut und schwermütig. Zwei Jahre lang lag seine Mécanique analytique, 1788 von Legendre herausgegeben, ungeöffnet auf seinem Schreibtische. Metaphysik, Medizin, Botanik, Chemie teilten sich in seine Muse. Lavoisiers Chemie fand er „so leicht wie Algebra".

Die Hinrichtung Lavoisiers versetzte ihn in große Trauer. „Sie haben nur einen Augenblick gebraucht," sagte er zu Delambre, „um diesen Kopf fallen zu machen, und hundert Jahre vielleicht werden nicht hinreichen, einen ähnlichen hervorzubringen." Zu dieser Zeit sank das französische Papiergeld im Werte, und Lagrange geriet in drückenden Mangel. Durch die Vermittlung eines seiner deutschen Freunde wurde ihm aus Preußen eine Pension von 300 Talern pro Jahr für die ganze Zeit seit seiner Abreise von Berlin zugeschickt. Bei der Gründung der Normalschule in Paris wurde er zum Lehrer ernannt, die ephemere Existenz derselben ließ ihm aber kaum Zeit, die Grundsätze der Arithmetik und Algebra vorzutragen. Es war die Polytechnische Schule, welche Lagrange der Analysis wiedergab.

In der Unterhaltung war er sanft und beinahe schüchtern. Seine Rede begann gewöhnlich mit einem „Ich weiß nicht". Von den Verdiensten anderer sprach er mit größter Achtung. Auf die Frage, wie die Mathematik am besten zu studieren sei, verwies er auf Eulers Schriften. Er war zweimal verheiratet. In Berlin vermählte er sich mit seiner Cousine, deren früher Tod ihn tief betrübte. In Paris heiratete er 1794 die junge Tochter des Astronomen Lemonnier, die ihm ihre schönsten Jahre widmete und sein Leben versüßte.

Euler verfaßte seine Abhandlungen in Latein, aber Lagrange benutzte die allgemeiner verständliche französische Sprache. Während Euler mit naiver Schaffensfreudigkeit und großer Begeisterung alle Teile der Mathematik entwickelte und Wichtiges und Unwichtiges mit gleicher Weitläufigkeit darlegte, so daß seine Schriften zu einem kaum zu überwältigenden Umfange anwuchsen, schrieb Lagrange mit größerer Sorgfalt, nahm sich mehr Mühe allgemeine Gesichtspunkte zu erreichen und seine Resultate in knappe und elegante Form zu bringen. Eulers Schriften lesen sich „wie Novellen"; diejenigen

Lagranges sind mehr abstrakt, dringen tiefer und zeigen größere Präzision der Darstellung.

Lagrange machte einen neuen Angriff auf das Eliminationsproblem in einer Schrift, Sur l'élimination des inconnues dans les équations[1]). Wenn zwischen zwei simultanen Gleichungen $0 = 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \cdots$ und $0 = 1 + Ax + Bx^2 + \cdots = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)\cdots$, bezüglich m^{ten} und n^{ten} Grades, x eliminiert werden soll, ist es klar, daß das Produkt $\Pi = (1 + a\alpha + b\alpha^2 + \cdots)(1 + a\beta + b\beta^2 + \cdots)\cdots = 0$ sein muß. Der Logarithmus dieses Produktes Π liefert n Glieder, $\log(1 + a\alpha + a\alpha^2 + \cdots) +$ etc., wovon jedes in eine Reihe entwickelt wird. Dann zieht er die Theorie der symmetrischen Funktionen zu Hilfe und erhält eine Reihe $\Pi = 1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - \cdots$, welche Π als eine Funktion von $a, b, c, \ldots$ und $A, B, C, \ldots$ ausdrückt. Die Gleichung $\Pi = 0$ hat kein Glied, worin die $a, b, c \ldots$ zusammen die Dimension m, und die $A, B, C, \ldots$ zusammen die Dimension n übersteigen. Das Verfahren ist schwerfällig und hat keine weite Annahme gefunden.

Die bedeutendste Abhandlung über Gleichungstheorie des 18. Jahrhunderts ist wohl die Arbeit von Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations[2]), denn darin, wie in keiner anderen, werden allgemeine Gesichtspunkte erreicht und die Grundlagen der Methoden gelegt, auf welche später Ruffini, Abel und Galois weiter bauten. Er fängt mit der kubischen Gleichung an und zeigt, daß ihre Lösung von einer Resolventen-Gleichung sechsten Grades abhängt, die er réduite derjenigen dritten Grades nennt. Sind a, b, c die Wurzeln der kubischen Gleichung, y eine Wurzel der réduite und α, β die imaginären Werte von $\sqrt[3]{-1}$, so hat man $3y = a + \alpha b + \beta c$. Da der Wert des y nicht direkt von a, b, c, sondern von den Koeffizienten der kubischen Gleichung abhängt, in denen die drei Wurzeln gleichförmig eintreten, so ist klar, daß man in dem Ausdruck für $3y$ die drei Größen a, b, c willkürlich vertauschen kann, wodurch man sechs verschiedene Werte für $3y$ erhält. Wenn nun $Aa + Bb + Cc$ einen Wert von y darstellt, worin A, B, C von a, b, c unabhängig sind, so kann man a, b, c auf alle mögliche Weisen vertauschen und so die sechs Wurzeln und endlich die Resolvente selbst herleiten. Er erklärt die Tschirnhausensche Auf-

---

[1]) Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1769, t. 25, Berlin 1771, p. 303—320 = Oeuvres, T. III, p. 141—154. [2]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1770, Berlin 1772, p. 134—215; année 1771, Berlin 1773, p. 138—254 = Oeuvres, T. III, p. 205—421.

lösungsmethode und zeigt, daß diese, sowie alle anderen, die Auffindung von Resolventen, deren Wurzeln entweder $x' + x''\alpha + x'''\alpha^2$ oder $(x' + x''\alpha + x'''\alpha^2)^3$ sind und deren Grad entweder der sechste oder der zweite ist, erfordern.

In diesen Untersuchungen hatte Lagrange Gelegenheit, die Kriterien abzuleiten, damit zwei Gleichungen mehr als eine Wurzel miteinander gemein haben. Sind $P = 0$, $Q = 0$ die zwei Gleichungen, nehme man $P = y$ und schaffe x aus beiden Gleichungen weg. Man bekommt $y^m + ay^{m-1} + \cdots + py^2 + qy + r = 0$. Da nun $r = 0$ sein muß, damit $P = 0$ und $Q = 0$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so wird zu zwei gemeinschaftlichen Wurzeln $r = 0$, $\frac{dr}{d\zeta} = 0$, und zu dreien $r = 0$, $\frac{dr}{d\zeta} = 0$ und $\frac{d^2r}{d\zeta^2} = 0$, etc. erfordert, wo ζ das letzte Glied der einen von den gegebenen Gleichungen ist.

Zur Gleichung vierten Grades schreitend, bespricht Lagrange die Methoden von Ferrari, Descartes, Tschirnhausen, Euler, Bézout und zeigt den Zusammenhang und die gegenseitige Abhängigkeit derselben. Er gibt die a priori Gründe an, warum einige davon auf Resolventen dritten, andere auf solche sechsten Grades führen, die aber zum dritten erniedrigt werden können. Die Wurzeln dieser Resolventen sind Funktionen der Größen x', x'', x''', x^{IV}, solcher Art, daß, wenn alle möglichen Permutationen der vier Größen stattfinden, nur drei verschiedene Werte entspringen, wie bei $x'x'' + x'''x^{\mathrm{IV}}$, oder sechs Werte, von denen je zwei entgegengesetzte Zeichen aber gleichen absoluten Wert haben, wie bei $x' + x'' - x''' - x^{\mathrm{IV}}$, oder auch sechs Werte, die in drei solche Paare verteilt werden können, daß, wenn man die Summe oder das Produkt der Werte jedes Paares bildet, diese drei Summen oder drei Produkte, bei irgend einer Permutation der x', x'', x''', x^{IV} immer unverändert bleiben. Auf der Existenz solcher Funktionen ruht die allgemeine Auflösung biquadratischer Gleichungen.

Lagrange kennt zwei Methoden, durch deren Hilfe man vielleicht die allgemeine Auflösung der quintischen Gleichung erwarten dürfe: die Tschirnhausensche Methode und diejenige von Euler und Bézout. Diese ergeben eine allgemeine und einheitliche Lösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen, erfordern aber bei der Quintik die Lösung einer Gleichung des 24ten Grades, die gewiß nicht auf einen niedrigeren als den 5ten Grad reduziert werden kann. Lagrange sucht a priori die Tragweite dieser Methoden zu ermitteln. Um die Gleichung

$$x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \cdots = 0$$

nach Tschirnhausen zu lösen, setzt man $x^\vartheta + fx^{\vartheta-1} + gx^{\vartheta-2} + \cdots + y = 0$, worin $f, g, \ldots$ unbestimmte Koeffizienten sind, und erhält $y^\mu + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + Cy^{\mu-3} + \cdots = 0$, wo $A, B, C, \ldots$ rationale, ganze Funktionen von $f, g, \ldots$ sind. Man darf $A = B = C = \cdots = 0$ setzen, so daß $y^\mu + V = 0$. Ist μ zusammengesetzt und $= \nu\omega$, so erhält man im allgemeinen eine Resolvente des Grades $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu-1)}{\omega^{\nu-1}}$. Wenn μ prim ist, ist sie des Grades $1 . 2 . 3 \cdots (\mu - 1)$, kann aber immer in $1 . 2 . 3 \cdots (\mu - 2)$ Gleichungen $\mu - 1^{\text{ten}}$ Grades, mit Hilfe einer Gleichung $1 . 2 . 3 \cdots (\mu - 2)^{\text{ten}}$ Grades, zerlegt werden. Für $\mu = 5$ ist der Grad letzterer Gleichung 6; für $\mu = 7$ ist er 120. Wie hoch aber auch der Grad $1 . 2 . 3 \cdots (\mu - 2)$ sein mag, bietet ihre Lösung keine Schwierigkeiten dar, die man nicht zugleich in der vorgelegten Gleichung μ^{ten} Grades findet, denn die $|\underline{\mu - 2}$-Wurzeln sind bekannte Funktionen der μ Wurzeln $x', x'', x''' \ldots$, und deshalb nicht unabhängig voneinander, sondern durch $|\underline{\mu - 2} - \mu$ Beziehungen miteinander verbunden. Resolventen der gleichen Grade ergeben sich im allgemeinen aus Eulers und Bézouts Methoden. Eine zweite Auflösungsmethode von Bézout wird untersucht. Dieselbe liefert für die Gleichung 6^{ten} Grades eine Resolvente des 10^{ten} Grades, die, Bézouts Vermutung zuwider, nicht in zwei Gleichungen zerlegt werden kann.

Mit diesen kurzgefaßten Auseinandersetzungen des dritten Teils der Lagrangeschen Schrift schreiten wir zum letzten Teil, wo er zeigt, daß alle bekannten Auflösungsmethoden sich auf das gleiche allgemeine Prinzip reduzieren lassen. Dieses besteht darin, Funktionen der Wurzeln der vorgelegten Gleichung zu finden, solcherart, daß 1) die Gleichung oder Gleichungen, von denen diese Funktionen die Wurzeln sind, von niedrigerem Grade als dem der vorgelegten sind, oder wenigstens in solche zerlegt werden können, 2) man die gesuchten Wurzeln auf bequeme Weise herleiten kann. Die Auflösungskunst besteht also in der Entdeckung solcher Funktionen. Ist es möglich, für $\mu > 4$ solche Funktionen zu finden? Dies sei im allgemeinen sehr schwer zu beantworten. Für $n < 5$ sei $x' + yx'' + y^2x''' + \cdots + y^{\mu-1}x^{(\mu)}$ die allgemeine Form der einfachsten Funktion der Wurzeln $x', x'', \ldots$, wo y eine imaginäre μ^{te} Einheitswurzel ist. Da für $n \geqq 5$ diese Funktion nicht zum Ziele führt, müsse die Auflösung durch neue Funktionen erfolgen, wenn sie überhaupt möglich sei. Bisher habe er solche Funktionen nur a posteriori gesucht, nun wolle er zeigen, wie rationale Funktionen a priori zu finden seien.

Sind (§ 95) $x', x'', x''', \ldots$ die Wurzeln der vorgelegten Glei-

chung, f rationale Funktionen dieser Wurzeln, und nimmt man im allgemeinen das Produkt von so vielen Faktoren

$$t - f[(x')(x'')(x''')(x^{IV})\ldots],$$
$$t - f[(x'')(x')(x''')(x^{IV})\ldots],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

als Versetzungen unter den Wurzeln $x', x'', \ldots$ möglich sind, nämlich $\varpi = \underline{|\mu}$ Faktoren, so ist $\underline{|\mu}$ die Anzahl Wurzeln von einer irreduziblen Gleichung $\Theta \equiv t^{\varpi} - Mt^{\varpi-1} + Nt^{\varpi-2} - \cdots = 0$, wo M die Summe aller Funktionen, N die Summe aller Produkte je zweier Funktionen etc. darstellt. Es folgt, daß $M, N, \ldots$ rationale Funktionen der Koeffizienten sind, welche, wie schon Cramer und Waring gezeigt hatten, direkt berechnet werden können. Wenn nicht jede Permutation ungleichförmige Funktionen liefert, und man gleiche Funktionen ausschließt, stellt sich $\Theta = 0$ von niederem Grade heraus. Es ergibt sich das Resultat (§ 99), daß 1) alle gleichartigen Funktionen von $x', x'', \ldots$ (nämlich Funktionen von denselben Wurzeln, die bei einer gewissen Permutation sich gleichzeitig ändern oder sich nicht ändern) durch Gleichungen von gleichem Grade bestimmt sind; 2) daß dieser Grad der Anzahl verschiedener Werte der Funktion gleich ist und immer $\underline{|\mu}$ oder ein Teiler von $\underline{|\mu}$ ist, 3) daß diese Funktionen berechnet werden können. Eine solche Funktion kann rational durch eine gleichartige Funktion ausgedrückt werden. Hat man zwei rationale Funktionen, y und t, solcher Art, daß sich t für jede Wurzelpermutation verändert, welche zugleich in y eine Variation hervorbringt, dann läßt sich y rational durch t und den Koeffizienten der vorgelegten Gleichung ausdrücken. Lagrange erkennt diesen Lehrsatz als einen der wichtigsten in der Gleichungstheorie (§ 100). 61 Jahre später erhielt dieser Satz eine allgemeinere Formulierung durch Évariste Galois. Die Eigenschaften dieser rationalen Funktionen werden durch die Kombinationsrechnung („calcul des combinaisons") untersucht. Man findet darin die Keime der großen Substitutionstheorie. Lagrange sagt (§ 109): „Dies sind, wenn ich nicht irre, die wahren Gründe von der Auflösung der Gleichungen, und der eigentliche Weg, welcher uns dahin führen kann." In der Vorrede des dritten Abschnitts sagt er: „Aus diesen Betrachtungen erhellet, daß es äußerst zweifelhaft ist, ob die Methoden, von welchen wir geredet haben, zu einer vollständigen Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, und noch viel mehr der höheren Grade führen können."

Kurz nach Lagranges Abhandlung erschien eine andere wich-

tige Arbeit, Mémoire sur la résolution des équations[1]) von Alexandre Théophile Vandermonde (1735—1796)[2]), einem Mitglied der Pariser Akademie der Wissenschaften und seit 1782 Direktor des Conservatoire pour les arts-et-métiers. Die Untersuchungen von Waring, Lagrange, Marguerie (S. 118), Condorcet wurden ihm erst nach der Einreichung seines Memoires bekannt. Vandermonde hebt hervor, daß die wesentliche Bedingung für die allgemeine Auflösung der Gleichungen darin bestehe, eine Funktion der Summe der Wurzeln, der Summe der Produkte je zweier ihrer Wurzeln, der Summe der Produkte je dreier ihrer Wurzeln etc. zu finden, die gegen irgendwelche Wurzel indifferent sei. Diese Untersuchung zerfalle in drei Teile: 1) eine Funktion der Wurzeln zu finden, die solchen dieser Wurzeln, die man wünscht, gleich sei, 2) dieser Funktion eine Form zu geben, daß sie auch der Vertauschung der Wurzeln unter sich indifferent sei, 3) darin die Werte der Summe der Wurzeln, der Summe der Produkte je zweier ihrer Wurzeln etc. einzusetzen. Er fängt mit 3) an und berechnet Tafeln, die die Werte symmetrischer Funktionen, durch die Gleichungskoeffizienten ausgedrückt, angeben. Eine Funktion der in 1) verlangten Art ist

$$\frac{a}{n}\Big[a + b + c + \text{etc.} + \sqrt[n]{(a + r_1 b + r_2 c + \cdots)^n}$$
$$+ \sqrt[n]{(a + r_1^2 b + r_2^2 c + \cdots)^n} + \cdots + \sqrt[n]{(a + r_1^{n-1} b + r_2^{n-1} c + \cdots)^n}\Big],$$

die a, b oder c etc. indifferent gleich ist, wo $a, b, c, \ldots$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung und $1, r_1, r_2, r_3, \ldots$ die n^{ten} Einheitswurzeln sind. Ist $n = 3$, hat man

$$a = \frac{1}{3}[(a + b + c) + (a + r_1 b + r_2 c) + (a + r_1^2 b + r_2^2 c)],$$

$$b = \frac{1}{3}[(a + b + c) + r_2 (a + r_1 b + r_2 c) + r_2^2 (a + r_1^2 b + r_2^2 c)],$$

$$c = \frac{1}{3}[(a + b + c) + r_1 (a + r_1 b + r_2 c) + r_1^2 (a + r_1^2 b + r_2^2 c)].$$

Ferner $(a + r_1 b + r_2 c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 6abc + 3r_1 (a^2 b + b^2 c + c^2 a) + 3r_2 (a^2 c + b^2 a + c^2 b)$, welcher Ausdruck nun leicht als eine Funktion der Koeffizienten der vorgelegten Gleichung ausgedrückt werden kann. Desgleichen für $(a + r_1^2 b + r_1^2 c)^3$. Auf diese Weise folgt nun die Auflösung. Vandermonde sucht nun seine Methode auf die Quintic und höhere Gleichungen anzuwenden. Hier stößt er auf Schwierig-

[1]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1771, Paris 1774, p. 365 bis 416. [2]) Über Vandermondes Vornamen sehe man H. Simon in Zeitschr. f. Math. u. Physik, 41. Jahrg., Hist.-Lit. Abth.

keiten, die obige Bedingung 2) zu erfüllen. Er schließt, daß die Auflösung der Quintic sich auf die einer Gleichung sechsten Grades stütze, deren Koeffizienten rationale Funktionen derjenigen der vorgelegten Gleichung seien. Für die Gleichung sechsten Grades entdeckt er Resolventen 10. und 15. Grades. Man substituiere in den letzten die obgenannten Funktionen. Wenn diese Gleichungen sich dann nicht auf solche vierten oder niedrigeren Grades reduzieren lassen, suche man die Resolventen der Gleichungen 10. und 15. Grades auf etc. Sei die allgemeine Quintic überhaupt lösbar, dann komme man endlich zum Ziele. Für die Quintic entdeckte er auch eine Resolvente fünften Grades. Er hat keine der angeführten Resolventen wirklich berechnet. Er ist der erste, der eine algebraische Lösung für $x^{11} - 1 = 0$ angab.

In der Vandermondeschen, sowie in einigen Teilen der vorangehenden Lagrangeschen Abhandlung findet man eine Auflösungsmethode, welche den Namen Kombinationsmethode erhalten hat[1]). Die älteren Verfahrungsarten von Tartaglia, Tschirnhausen, Waring, Bézout werden zum Unterschiede Substitutionsmethoden genannt. Auch Lagrange hat diese gebraucht. In ersterer werden a priori eine oder mehrere einfache Kombinationen der Wurzeln angenommen und Resolventen zur Bestimmung dieser Kombinationen abgeleitet. Vandermondes Annahme dient als Beispiel. In der Substitutionsmethode substituiert man für x eine Funktion von einer oder mehreren neuen Unbekannten, die zu Resolventen mit möglichst einfachen Wurzelformen führen. Als Beispiel solcher Funktionen führen wir die Wurzelformen von Euler, Waring, Bézout und Lagrange und die Cardansche Annahme für kubische Gleichungen, $x = y + z$, oder die Tschirnhausensche, $y = a + bx + cx^2$, an.

Die Newtonsche Formel für die Potenzsummen der Wurzeln wird von Kästner in einer 1757 verfaßten, aber erst 1771 gedruckten Schrift[2]) nach der Methode der vollständigen Induktion bewiesen. Die unvollständige Induktion sei in der Mathematik zu meiden. Auch in seinen Anfangsgründen der Algebra, § 316, klagt Kästner, daß viele Schriftsteller Gesetze allgemein annehmen, welche nur bei besonderen Fällen als richtig erwiesen sind, wie z. B. beim binomischen Lehrsatz. Es werde berichtet, „Reyneau habe Harriots Lehrsatz aus seiner Analyse demontrée weggelassen, weil er die Regeln der Algebra demonstriren wollte“. „Ich hatte eben so viel Eifer die Regeln zu demonstriren, als Reyneau kann gehabt haben, und in

[1]) L. Matthiessen, op. cit., p. 288, 789. [2]) Dissertationes math. et phys. quas soc. reg. scient. Gottingensi annis 1756—1766 etc., Altenburgi 1771, p. 1—8.

der That wäre es eine Schande für einen Deutschen, wenn er da nicht demonstriren wollte, wo selbst ein Franzose dieses unternimmt." Die Franzosen seien von der Euklidischen Beweisschärfe abgewichen, um Leuten das Studium der Mathematik zu erleichtern.

An eine Arbeit von Gabriele Manfredi anknüpfend, gab Gianfrancesco Malfatti in einem bedeutenden Artikel, De aequationibus quadrato-cubicis disquisitio analytica[1]) die Lösungen quadratischer, kubischer und biquadratischer Gleichungen, und überträgt dann seine Methode auf Gleichungen fünften Grades. Der Arbeiten von Waring und Bézout tut er keine Erwähnung. Wie Euler und Bézout nimmt er als Wurzelform der Gleichung $x^5 - 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx + d = 0$

$$x + m\sqrt[5]{f^4} + p\sqrt[5]{f^3} + q\sqrt[5]{f^2} + n\sqrt[5]{f} = 0,$$

wo $f = 1$ genommen wird, und erhält

$$x^5 - 5(mn + pq)x^3 + 5(m^2q + n^2p + mp^2 + nq^2)x^2$$
$$- 5(m^3p + n^3q + mq^3 + np^3 - m^2n^2 + mnpq - p^2q^2)x + m^5 + n^5$$
$$+ p^5 + q^5 + 5(mn - pq)(mp^2 + nq^2 - m^2q - n^2p) = 0.$$

Malfatti setzt $mn = y$, $pq = u$, $m^2q + n^2p = r$, $mp^2 + nq^2 = t$. Zur weiteren Abkürzung schreiben wir $m^3p + n^3q = v$ und $mq^3 + np^3 = w$. Malfatti erhält nun $uv = rt - yw$, $vw = r^2u + t^2y - 4u^2y^2$, und aus diesen letzten $2uv = rt + s$, $2yw = rt - s$, wo $s = \sqrt{r^2t^2 - 4r^2u^2y - 4t^2uy^2 + 16u^3y^3}$. Dann wird $vr = (m^5 + n^5)u + y^2t$, $wt = (p^5 + q^5)y + u^2r$. Durch Elimination von v und w folgen $2u^2(m^5 + n^5) = (rt + s)r - 2tuy^2$ und $2y^2(p^5 + q^5) = rt^2 - 2ru^2y - ts$. Durch Vergleichung der Koeffizienten der vorgelegten und der derivierten Gleichung hat man

$$y + u = a, \quad r + t = b,$$
$$\frac{-rt(y+u) + (u-y)s}{2uy} + y^2 - uy + u^2 = c,$$
$$\frac{r^2ty^2 + rt^2u^2 - 2ty^4u - 2ryu^4 + (ry^2 - tu^2)s}{2u^2y^2} + 5(y-u)(t-r) = d.$$

Die dritte Relation gibt $s(u-y) = rt(y+u) - 2uy^3 + 2u^2y^2 - 2u^3y + 2cuy$. Setzt man hierin $t = b - r$ und quadriert, so erhält man

---

[1]) Atti dell' Accademia delle Scienze di Siena detta de' Fisio-critici, L'anno 1771, T. IV, p. 129—184.

$$r^4 - 2br^3 + (2y^3 - y^2u - yu^2 + 2u^3 - cy - cu + b^2)r^2$$
$$+ (-3by^3 + 4by^2u - 2byu^2 - bu^3 + bcy + bcu)r + y^5u - 6y^4u^2 + 11y^3u^3$$
$$-6y^2u^4 + yu^5 - 2cy^3u + 2cy^2u^2 - 2cu^3y + c^2yu + b^2y^3 - 2b^2y^2u + b^2yu^2 = 0$$

und, für s seinen Wert in der vierten Bestimmungsgleichung einsetzend,

$$(y+u)r^3 - (by - 2bu)r^2$$
$$+ (2y^4 - 12y^3u + 22y^2u^2 - 12yu^3 + 2u^4 + b^2u - cy^2 - cu^2)r - by^4$$
$$- 6by^3u - 11by^2u^2 + 6byu^3 - bu^4 + bcu^2 - dy^2u + dyu^2 = 0.$$

Eliminieren wir nun r, sagt Malfatti, so werden wir die langersehnte Resolvente erhalten. Er schreibt $25uy = z + 5a^2 - \frac{5c}{3}$ und setzt die Resolvente in die Form

$$\Big\{z^3 - 5z\left(3a^2c - \frac{4c^2}{3} + ab^2 + bd\right) + 20a^2c^2 - \frac{560}{27}c^3 + \frac{155}{6}ab^2c$$
$$+ 5b^4 + 15a^2bd + \frac{40}{3}bcd + \frac{5}{2}ad^2\Big\}^2 + \left(z - \frac{5}{4}a^2 - \frac{5}{3}c\right).$$
$$(d^4 + 30abd^3 - 108a^5d^3 + 180a^3cd^2 - 80ac^2d^2 + 165a^2b^2d^2$$
$$+ 90b^2cd^2 - 360a^4bcd + 560a^2bc^2d - 160bc^3d - 80a^3b^3d$$
$$+ 630ab^3cd - 108b^5d + 400a^4c^3 - 640a^2c^4 + 256c^5$$
$$+ 100a^3b^2c^2 - 720ab^2c^3 - 135b^4c^2) = 0.$$

Man wird gewiß zugestehen, daß Malfatti seine Elimination sehr scharfsinnig durchgeführt hat. Vor ihm hatte niemand dieses Ziel erreicht. Da die Gleichungen des 2., 3., 4. und 5. Grades Resolventen des 0., 1., 3., 6. Grades besitzen, spricht Malfatti die Vermutung aus, daß eine Gleichung $n + 2^{\text{ten}}$ Grades eine Resolvente $\frac{1}{2}(n^2 + n)^{\text{ten}}$ Grades besäße. Er äußerte aber diese Ansicht mit Schüchternheit, besonders da Euler den Resolventengrad niedriger als den Gleichungsgrad zu stellen schien. Da Malfatti seine Resolvente sechsten Grades nicht allgemein lösen kann, sucht er Spezialfälle aufzulösen. Er erkennt das Vorhandensein rationaler Faktoren der Resolvente als genügende Bedingung, und findet nicht nur alle vor ihm als auflösbar bekannten Fälle, sondern auch noch neue Fälle.

In der Tat entdeckt er alle auflösbaren Fälle, denn es ist von E. Luther[1]) gezeigt worden, daß die hinreichenden Bedingungen auch zugleich notwendig sind[2]).

---

[1]) Crelle, Bd. 34. [2]) Vgl. J. Pierpont, loc. cit., S. 36; auch Francesco Brioschi, „Sulla risolvente di Malfatti . . .“ in Memorie del reale istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti, Vol. 9, terzo della serie seconda, p. 217 bis 223, 224—227.

In einer Abhandlung, Sur les équations résolues par M. de Moivre[1]) behandelt de Castillon die früher von Euler und Bézout besprochene De Moivresche Gleichung

$$a = z^n - nz^{n-2}\sqrt[n]{b^2} + \frac{n(n-3)}{|2} z^{n-4}\sqrt[n]{b^4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{|3} z^{n-6}\sqrt[n]{b^6} + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{|4} z^{n-8}\sqrt[n]{b^8} - \text{etc.},$$

die $z = \frac{\sqrt[n]{(a+\sqrt{(a^2-4b^n)})} + \sqrt[n]{(a-\sqrt{(a^2-4b^n)})}}{\sqrt[n]{2}}$ als Wurzel hat. De Moivre gab keinen Beweis; Euler verifizierte die Lösung für $n \gtrless 5$. Castillon beobachtet das Bildungsgesetz der Glieder dieser Gleichungen, mit Hilfe dessen das Resultat der Substitutionen viel leichter gefunden wird, und bespricht die irreduktiblen Fälle.

Im Jahre 1773 erschien ein Mémoire sur la résolution des équations en général, et particulièrement sur l'équation du 5e degré[2]) von Jean-Jacques de Marguerie (1742—1779), einem jungen, aus Mondeville bei Caen gebürtigen Schiffsleutnant. Auf einer Fahrt nach Rußland machte er die Bekanntschaft von L. Euler. Er beteiligte sich am nordamerikanischen Freiheitskampf und starb in einer Seeschlacht der Franzosen gegen die Engländer. Seine mathematischen Schriften sind uns nur durch die Angaben von Lagrange und seinem Biographen[3]) bekannt. Lagrange pries die Talente des jungen Mannes[4]) und schrieb an ihn[5]): „Ihre Methode die Resolventengleichung irgendwelchen Grades zu finden gefällt mir. Sie hat den Vorzug diese Gleichung in der einfachsten Form zu liefern... Ich bewundere, wie Sie durch geeignete Substitutionen Mittel gefunden haben, den Eliminationskalkül zu vereinfachen und besonders, wie Sie sich von nutzlosen Faktoren befreien, die den Grad der Endgleichung viel höher machen als er sein sollte. Ich glaube Sie sind der erste, welcher das Resultat der Elimination für den 5. Grad gegeben hat."

In seinen Réflexions sur la forme des racines des équations déterminées, la réduction et la solution de ces équations[6]) gibt Le Marquis de Condorcet allgemeine Überlegungen, die er bei der Durchsicht der Arbeiten von Euler, Bézout,

---

[1]) Nouveaux mémoires de l'acad. roy. des sciences et belles-lettres, année 1771, Berlin 1773, p. 254—272. [2]) Mémoires de l'acad. roy. de marine, T. 1, Brest 1773, p. 1. [3]) Prosper Levot in Biographie universelle (Michaud), N. Éd. [4]) Lagrange, Oeuvres, T. XIV, p. 17, Brief an Condorcet vom 24. Febr. 1774. [5]) Ebenda, p. 270. [6]) Mélanges de Phil. et de Math. de la Soc. Roy. de Turin, pour les années 1770—1773, Classe Math., p. 1—7.

Waring, de Marguerie, Lagrange und Vandermonde machte. Er geht von der unsicheren Annahme aus, daß die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades ganze algebraische Funktionen ihrer Koeffizienten sein müssen und keine Radikale höherer als n^{ter} Ordnung zulassen. Er nimmt dann die ältere Eulersche Wurzelform $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \cdots$ an, bespricht den Grad und die Reduktibilität der Gleichung für die Bestimmung von A und zieht den Schluß, „daß die Methode für die Auflösung der Gleichungen 2., 3., 4. Grades sich auf höhere Grade ausdehnen lasse und daß die Schwierigkeit, welche von der Höhe der Gleichung oder der Wurzelform entspringt, nur die ungeheure Komplikation der Berechnung betreffe, welche dann die Auflösung der Aufgabe erfordere; daß man aber immer zur gesuchten Lösung gelange“. Condorcet veröffentlicht im gleichen Bande[1]) Nouvelles recherches, worin er seine Ideen weiter entwickelt und sie soweit modifiziert, daß er die Existenz unlösbarer Gleichungen nicht als unmöglich, wohl aber als unwahrscheinlich erklärt. Wenn eine Gleichung keine allgemeine und endliche Wurzelform besitze, werde man dieses dadurch herausfinden, daß man in den von ihm vorgeschlagenen Operationen auf eine andere Gleichung n^{ten} Grades geführt werde, die keine rationalen Divisoren enthalte, wenn n eine Primzahl ist; oder wenn n nicht prim ist, daß man auf eine Gleichung komme nicht niedrigeren Grades als $(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1$. Diese Ideen werden von ihm auch im Artikel „Équations Déterminées“ in der Encyclopédie méthodique (Mathématiques) erklärt.

In der Abhandlung Sur la forme des racines imaginaires des équations[2]) gibt Lagrange einen Beweis des Satzes, daß jede imaginäre Wurzel einer Gleichung auf die Form $A + B\sqrt{-1}$ gebracht werden kann. Nachdem er D'Alemberts auf der Kurventheorie beruhenden Nachweis (1746), Eulers Nachweis (1749) und de Foncenex' (1759), über welchen im XXI. Abschnitte berichtet werden wird, kurz besprochen und ihre Schwächen aufgedeckt hat, schreitet er zur Ausfüllung der Lücken in Eulers Beweise. Lagrange nimmt im allgemeinen die Wurzelexistenz ohne Beweis an. Auch wird als bewiesen vorausgesetzt, daß jede Gleichung von ungeradem Grade und mit reellen Koeffizienten wenigstens eine reelle Wurzel habe. Er erklärt, daß das Eulersche Verfahren, um eine Funktion $f(x)$ vom Grade $2m$, $m > 1$, in zwei reelle Faktoren

[1]) Mélanges de Phil. et de Math. de la Soc. Roy. de Turin, pour les années 1770—1773, Classe Math., p. 236—264. [2]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1772, Berlin 1774, p. 222—258 = Lagrange, Oeuvres, T. III, p. 479—516.

zu zerlegen, nicht immer zum Ziele führt, da dasselbe auf Formeln für die Bestimmung der Koeffizienten führt, die in gewissen Fällen unbestimmt, $\frac{0}{0}$, sind. Es gelingt Lagrange, diesen Einwurf gegen die Methode Eulers und de Foncenex' zu beseitigen, indem er hier seine in den Réflexions sur la résolution des équations, Sektion IV, n. 100, entwickelte Permutationstheorie anwendet, welche den Wert einer rationalen Funktion y der Wurzeln zu berechnen lehrt, sobald man den Wert einer anderen Funktion t kennt, solcherart, daß t für alle Permutationen sich ändert, wofür sich y ändert. Gauß äußerte sich anerkennend über diese Arbeit. Der große Lagrange habe die Sache „so tief durchforscht, daß nichts Weiteres zu wünschen bleibt; abgesehen davon, daß vielleicht bei seiner vorausgehenden Behandlung der Eliminationstheorie, auf welche sich die gesammte Untersuchung stützt, einige zweifelhafte Punkte zurückbleiben"[1]).

De Foncenex' Beweis wird von Louis Bertrand in Schutz genommen[2]). Bertrand behauptet, daß das Verfahren des Verfassers nur in sehr seltenen Fällen mißlinge. In diesen könne man eine Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der vorgelegten Gleichung seien, als Hilfsgleichung ableiten, welche zum Ziele führe. Diese Aussage wird nur für die Quartic bewiesen. Wenn Lagranges Einwurf gegen $x^4 - Ax^3 + Bx^2 - Cx + D = 0$ gelte, gelte er gegen $x^4 - (A^2 - 2B)x^3 + (B^2 - 2AC + 2D)x^2 - (C^2 - 2BD)x + D^2 = 0$ nicht. Da nun die Quadratwurzeln einer Größe $a + b\sqrt{-1}$ von der gleichen Form wie dieselbe sind, sei der Satz für die Quartic bewiesen. Auch bei Bertrand wird die Wurzelexistenz ohne weiteres vorausgesetzt.

In einer Schrift, Sur des irrationnelles de différens ordres avec une application au cercle[3]), entwickelt Vandermonde eine neue Darstellungsweise der Irrationalen, indem er eine Verallgemeinerung des Symbols $p^n = p \,.\, p \,.\, p \ldots$ (n Faktoren) annimmt, worin die zweiten statt der ersten Differenzen der Faktoren Null sind. Er schreibt $[p]^n \equiv p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)$ und entwickelt die Operationsregeln dafür. Er findet

$$[p+m+n]^n[p]^{-n} = [p+m+n]^m[p]^{-m} = 1 + [m]^1[o]^{-1}[n]^1[p]^{-1} + [m]^2[o]^{-2}[n]^2[p]^{-2} + \cdots,$$

[1]) C. F. Gauß, „Neuer Beweis des Satzes...", § 12 in Ostwalds Klassiker, Nr. 14. [2]) L. Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, T. II, à Genève, 1778, p. 499. [3]) Histoire de l'académie royale des sciences, année 1772, Première Partie, Paris 1775, p. 489—498.

wo $[p]^{-m} = 1 : [p+m]^m$ ist, und nimmt ohne weiteres an, daß diese Ausdrücke sich für Bruchwerte von m und n bewähren. In der Formel $[q]^n [p]^{-n} = [q+r]^n [p+r]^{-n} . [p]^{-r} [q]^{-r} : [p+n]^{-r} [q-n]^{-r}$ läßt er r unendlich werden und erhält dadurch das unendliche Produkt

$$[q]^n [p]^{-n} = [p]^{-\infty} [q]^{-\infty} : [p+n]^{-\infty} [q-n]^{-\infty}$$
$$= (p+n+1)(q-n+1)(p+n+2)(q-n+2)\ldots$$
$$: (p+1)(q+1)(p+2)(q+2)\ldots$$

Die Anwendung seiner Resultate auf den Kreis ergibt die Ausdrücke $\frac{\pi}{2} = \left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2.2.4.4.6.6\ldots}{1.3.3.5.5.7\ldots}$ und $\sqrt{\pi} = 2\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$. Die irrationalen Formen zweiter Ordnung $[q]^n [p]^{-n}$ lassen sich, wie gezeigt wird, öfters auf rationale Zahlen oder auf einfachere irrationale Größen reduzieren. Z. B. $\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \left[-\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$, $\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{4}} \left[-\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$. Kriterien der verschiedenen Irrationalitätsarten werden aber nicht entwickelt.

In den Nova acta eruditorum gibt Fagnano eine Demonstratio theorematis Studeniani pro reductione aequationum, quae radices habent aequales[1]). Der Satz heißt: Wenn die Glieder einer Gleichung, deren m Wurzeln einander gleich sind, mit den Gliedern irgendwelcher arithmetischen Progresssion je multipliziert werden, behält die neue Gleichung $m-1$ der gleichen Wurzeln bei. Fagnano beweist zuerst den Satz für Gleichungen mit lauter gleichen Wurzeln. Werden die Glieder von $(x+a)^n = 0$ mit den entsprechenden Gliedern von $p, p+q, p+2q, \ldots$ multipliziert, erhält man $(p[x+a] + nqa)(x+a)^{n-1} = 0$. Dieses Resultat wird nun auf $(b + cx + dx^2 + \cdots)(x+a)^n = b(x+a)^n + cx(x+a)^n \cdots$ angewandt, wo die Glieder von $b(x+a)^n$, $cx(x+a)^n, \cdots$ mit den entsprechenden Gliedern von je $p, p+q, \ldots, p+q, p+2q, \ldots,$ multipliziert werden.

Nun folgt die Abhandlung Vandermondes, Mémoire sur l'élimination[2]), worin er für n Gleichungen ersten Grades eine Eliminationsformel von sehr gedrängter Form entwickelt und seine Schreibart auf Elimination zwischen zwei Gleichungen höherer Grade anwendet; sie ist eine für die Determinantentheorie besonders wichtige Schrift. Vandermonde erfindet eine Bezeichnung, welche mit der später von Syl-

---

[1]) Nova acta eruditorum, 1776, p. 1—11. „Studeniani" sollte „Hudeniani" heißen. Man findet Huddes Satz in der Ausgabe der Descartesschen Schrift Geometria à Renato des Cartes, Amsterdam 1659 (welche auch Arbeiten von Hudde und anderen niederländischen Mathematikern enthält), S. 435.

[2]) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1772, II. Partie, Paris 1776, p. 516 bis 532. Vgl. Thomas Muir, op. cit., S. 15—28.

vester aufgestellten **umbral notation** wesentlich übereinstimmt. Koeffizienten werden wie früher bei **Leibniz** durch zwei Buchstaben (oder Zahlen) $\overset{\alpha}{a}$ dargestellt, deren einer die Gleichung, worin der Koeffizient vorkommt, und der andere den Ort desselben in der Gleichung bezeichnet. Was **Leibniz** durch 12 oder 1_2 bezeichnete, wird von **Vandermonde** $\overset{1}{2}$ geschrieben. Ferner schreibt **Vandermonde**

$$\frac{\alpha|\beta}{a|b} = \overset{\alpha}{a}\cdot\overset{\beta}{b} - \overset{\alpha}{b}\cdot\overset{\beta}{a},$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c} = \overset{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta|\gamma}{b|c} + \overset{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta|\gamma}{c|a} + \overset{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta|\gamma}{a|b},$$

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta}{a|b|c|d} = \overset{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{b|c|d} - \overset{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{c|d|a} + \overset{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{d|a|b} - \overset{\alpha}{d}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta}{a|b|c} \text{ etc.}$$

Diese Ausdrücke enthalten die Definition einer Funktionenklasse und deren Rekursionsgesetz, die mit der von **Bézout** gebrauchten Definition identisch ist. Werden die Unbekannten x, y, z aus drei Gleichungen $\overset{r}{1}x + \overset{r}{2}y + \overset{r}{3}z = 0$ $(r = 1, 2, 3)$ eliminiert, so stellt $\frac{1|2|3}{1|2|3}$ das Resultat dar. **Vandermonde** erklärt, daß, statt der unteren Buchstaben $a, b, c, \ldots$, man die oberen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ permutieren könne, ohne das Endresultat zu ändern, daß die Anzahl Glieder der Anzahl Permutationen von $a, b, c, \ldots$ gleich sei, wovon die Hälfte negative Zeichen haben. Wir illustrieren durch $\frac{\alpha|\beta}{a|b} = -\frac{\alpha|\beta}{b|a}$ den von ihm für spezielle Fälle verifizierten, aber allgemein auf zwei von ihm unbewiesenen Hilfssätzen gegründeten Lehrsatz, daß die Permutation von zwei Buchstaben im gleichen Alphabet einen Zeichenwechsel, sonst aber keine Änderung hervorbringt. Daraus zieht er den Schluß, daß $\frac{\alpha|\beta|\gamma|\cdots}{a|b|c|\cdots} = 0$, wenn zwei Buchstaben im gleichen Alphabet einander gleich sind. Davon wird nun die Regel für die **Auflösung** simultaner Lineargleichungen abgeleitet. Wenn

$$\left.\begin{aligned} \overset{1}{1}\xi_1 + \overset{1}{2}\xi_2 + \overset{1}{3} = 0 \\ \overset{2}{1}\xi_1 + \overset{2}{2}\xi_2 + \overset{2}{3} = 0 \end{aligned}\right\} \text{ wird } \xi_1 = \frac{\frac{1|2}{2|3}}{\frac{1|2}{1|2}}, \quad \xi_2 = \frac{\frac{1|2}{3|1}}{\frac{1|2}{1|2}}.$$

Die Schreibweise für den allgemeinen Fall von n Gleichungen wird angegeben. Bei der Elimination zwischen zwei Gleichungen m^{ten} Grades, $\overset{1}{1}x^m + \overset{1}{2}x^{m-1} + \text{etc.} = 0$, $\overset{2}{1}x^m + \overset{2}{2}x^{m-1}$ etc. $= 0$, führt er die weiteren Abkürzungen $\overline{a|b}$ für $\frac{1|2}{a|b} = \overset{1}{a}\cdot\overset{2}{\alpha} + \overset{1\;2}{\alpha\;\alpha'}$, $\overline{ab|\alpha\beta}$ für $\overset{1}{a}\cdot\overset{1}{b}\cdot\overset{2}{\alpha}\cdot\overset{2}{\beta}$

$+\overset{1}{\alpha}\cdot\overset{1}{\beta}\cdot\overset{2}{a}\cdot\overset{2}{b}$, etc. ein, woraus sich Transformationsformeln dieser Art $\overline{a|\alpha}\cdot\overline{b|\beta}=\overline{ab|\alpha\beta}-\overline{a\beta|\alpha b}$ ergeben. Die Eliminanten für die Fälle $m=2, 3, 4$ werden niedergeschrieben. Für $n=3$ erhält er

$$\overline{1|4}\cdot\left\{\begin{matrix}\overline{1|4}\,.\,\overline{1|4}\\ -2\,1|2\,.\,3|4\end{matrix}\right\}-\overline{1|3}\cdot\left\{\begin{matrix}\overline{1|4}\,.\,\overline{2|4}\\ -\,1|3\quad 3|4\end{matrix}\right\}$$
$$+\overline{1|2}\cdot\left\{\begin{matrix}\overline{2|4}\,.\,\overline{2|4}\\ -\,2|3\,.\,3|4\end{matrix}\right\}=0.$$

Bei der Ableitung einer ähnlichen Form der Eliminante für den Fall $m=5$ stößt er auf Schwierigkeiten, die sich in der Reduktion der Eliminante auf die kleinste Anzahl Glieder zeigen. Nachdem der Ausdruck so weit entwickelt ist, daß derselbe in Faktoren der Form $\overline{a|b}$ umgesetzt ist, sucht Vandermonde Vereinfachungen durch eine Formel des Fontaine, welche in Vandermondes Schreibweise

$$\overline{a|b}\cdot\overline{c|d}-\overline{a|c}\cdot\overline{b|d}+\overline{a|d}\cdot\overline{b|c}=0$$

lautet, zu erzielen, ohne aber das Ziel völlig zu erreichen. Das Endresultat sollte auf 120 Glieder reduziert werden, bevor es in die Form, welche denen für die Fälle $m=2, 3, 4$ analog ist, gesetzt werden kann. Vandermonde erhält 124 Glieder und bemerkt, daß, nach einer persönlichen Mitteilung, de Gua durch ein anderes Verfahren auf die gleiche Anzahl gestoßen sei.

Im gleichen Bande findet man eine Abhandlung von Laplace[1]), Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde, worin die Determinantentheorie berührt wird. Der Name résultant wird hier zum erstenmal für das Resultat der Elimination bei n linearen homogenen Gleichungen gebraucht. Er schreibt dafür das Symbol $({}^1a\,.\,{}^2b\,.\,{}^3c)$. Der Lehrsatz über den Zeichenwechsel, durch die Transposition zweier Buchstaben hervorgerufen, wird hier auf befriedigendere Weise als bei Vandermonde bewiesen. Simultane lineare Gleichungen werden nach dem jetzt gebräuchlichen Verfahren gelöst. Um die Berechnung der Resultante zu vereinfachen, führt er eine Methode ein, die wir in Spezialfällen schon bei Vandermonde vorfanden, und die nun als die Laplacesche Entwicklung von Determinanten bekannt ist. Die Regel für diese Entwicklung wird aber nicht in einer Form ausgesprochen, daß sie auf andere Fälle leicht angewendet werden könnte.

Beiläufige, isolierte Resultate über Determinanten hat Lagrange

---

1) Hist. de l'acad. roy. des sciences, année 1772, 2e pt., Paris 1776, p. (267 bis 376), 294—304. Vgl. T. Muir, op. cit., p. 23—33.

in zwei Abhandlungen des Jahres 1773 gegeben. In der ersten, Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation etc.[1]) sind fünf Identitäten, die wir jetzt als Beispiele der Multiplikation und Addition von Determinanten ansehen. Andere Identitäten finden sich in der zweiten Abhandlung, Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires[2]).

Von einer Mitteilung Condorcets angeregt, untersuchte Euler in einem Artikel De formulis exponentialibus replicatis[3]) die Grenzwerte der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, wo $\beta = r^\alpha$, $\gamma = r^\beta, \ldots$ Damit diese Größen nicht ins Unendliche wachsen, muß ein Glied, welches die Grenze berührt hat (attigerit), dem nächstfolgenden gleich sein, d. h. $r^\omega = \omega$, oder $r = \omega^{\frac{1}{\omega}}$. Wenn $\log \omega = 1$, erreicht r sein Maximum $e^{\frac{1}{e}} = 1{,}4447\ldots$ Ist $1 < r < e^{\frac{1}{e}}$, gibt es zwei Größen Φ und Ψ, welche die Bedingungen $r^\varphi = \Phi$, $r^\psi = \Psi$ erfüllen. Setzt man $\Psi = p\Phi$, dann wird $\Phi = p^{\frac{1}{p-1}}$, $\Psi = p^{\frac{p}{p-1}}$. Man kann also p beliebig wählen und die zugehörigen Werte von Φ, Ψ, r finden. Wenn $r > e^{\frac{1}{e}}$, können nur imaginäre Zahlen die Bedingung $r^\omega = \omega$ erfüllen. Der Fall $r < 1$ wird auch untersucht.

In einem Artikel, Observations on the limits of algebraical equations; and a general demonstration of Des Cartes's Rule...[4]) hebt Isaac Milner (1750—1820), „fellow" an Queen's College in Cambridge, hervor, daß der Satz in Maclaurins Algebra, demzufolge die Wurzeln der Gleichung (B)

$$(l + nm)x^n - (l + \{n-1\}m)px^{n-1} + (l + \{n-2\}m)qx^{n-2} - \cdots = 0$$

als Grenzen zwischen den Wurzeln der Gleichung (A) $x^n + px^{n-1} + qx^{n-2} - \cdots = 0$ liegen, nicht allgemein richtig sei. Z. B. die Wurzeln $2 \pm \sqrt{13}$ von $x^2 - 4x - 9 = 0$ liegen nicht zwischen den Wurzeln 3 und -1 der Gleichung $x^2 - 2x - 3 = 0$. Der Satz gelte nur, wenn alle Wurzeln gleiche Zeichen haben, was Maclaurin nicht deutlich hervorgehoben habe[5]). Milner habe 1775 auch Waring mitgeteilt, daß der Maclaurinsche Satz, daß die Wurzeln von (C) $nx^{n-1} - (n-1)px^{n-2} + (n-2)qx^{n-3} - \cdots = 0$ Grenzen der Wurzeln von (A) seien, einer Einschränkung bedürfe, da es möglich sei, daß keine der Wurzeln von (C) zwischen der kleinsten positiven und der größten nega-

[1]) N. mém. de l'acad. roy. des sciences, année 1773, Berlin 1775, p. 85 bis 120 = Lagrange, Oeuvres, T. III, p. 579—616. [2]) Ebenda, p. 149—176 = Oeuvres T. III, p. 661—692. Vgl. T. Muir, op. cit. p. 33—41. [3]) Acta acad. scient. imp. Petropolitanae, pro anno 1777, Pars 1, Petropoli 1778, p. 38—60.
[4]) Philos. Trans., Vol. 68, for the year 1778, London 1779, p. 380—388. [5]) Vide Maclaurin in Phil. Trans. (London) Vol. 36, auch seine Algebra, Art. 44, 45—50.

tiven Wurzel von (A) liegen. Denn setze man diese zwei Wurzeln in (C) ein, so möge das Polynom (C) Werte gleichen Zeichens erhalten, weshalb keine Wurzel von (C) zwischen den zwei Wurzeln von (A) liegen würde. Daß ein solcher Fall wirklich eintreten kann, ist natürlich nicht bewiesen.

Milner gibt folgenden Beweis der Descartesschen Zeichenregel. Sind alle Wurzeln von (D) $l + mx + nx^2 + \cdots + x^n = 0$ reell, dann sind diejenigen von (E) $m + 2nx + \cdots nx^{n-1} = 0$ Grenzen der Wurzeln von (D). Es sind deshalb nicht weniger +-Wurzeln in (D) als in (E), denn da jede Wurzel von (E) zwischen verschiedenen Wurzeln von (D) liegt, kann die Anzahl positiver Wurzeln nicht kleiner sein. Sind l und m beide positiv, muß die Anzahl +-Wurzeln in (D) und (E) gerade sein, und die Anzahl in (D) kann also die in (E) nicht durch die Einheit übersteigen. (D) hat aber eine Wurzel mehr als (E), welche gewiß — sein muß. Ähnlich behandelt er den Fall, wo l und m beide negative, und den Fall, wo diese entgegengesetzte Zeichen haben.

In der Abhandlung Sur la détermination du nombre des racines imaginaires dans les équations litérales[1]) entwickelt Lagrange anfangs die bekannten Kriteria für die Bestimmung der Natur der Wurzeln von $x^3 - Bx + C = 0$; alle Wurzeln sind reell, wenn $4B^3 > 27C^2$; zwei sind einander gleich, wenn $4B^3 - 27C^2 = 0$; zwei Wurzeln sind imaginär, wenn $4B^3 < 27C^2$. Zu Gleichungen n^{ten} Grades übergehend, bemerkt Lagrange, daß Newton und andere Forscher Bedingungen für die Existenz lauter reeller Wurzeln aufgestellt haben, die nicht hinreichend seien. Der Grund dafür liege darin, daß diese Bedingungen nicht durch die direkte Betrachtung der reellen und imaginären Wurzeln abgeleitet wurden, sondern bloß aus gewissen Bedingungen, welche befriedigt sein müssen, wenn alle Wurzeln reell sind. Wenn die Wurzeln reell sind, muß z. B. die Summe der Quadrate aller Wurzeln, oder der Quadrate ihrer Differenzen, positiv sein; man darf aber nicht schließen, daß eine positive Summe das Vorhandensein lauter reeller Wurzeln nachweist. Lagrange hebt nun hervor, daß man die Frage, ob es imaginäre Wurzeln gibt oder nicht, sicherlich dadurch beantworten kann, daß man ermittelt, ob die linke Seite der Gleichung durch einen oder mehrere Faktoren $x^2 - ax + b$, wo $b > \frac{a^2}{4}$, teilbar ist oder nicht. In demjenigen Divisionsrest, welcher keine höheren Potenzen von x als die erste enthält, setze man den Koeffizienten von x, sowie auch den

[1]) Nouveaux mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1777, Berlin 1779, p. 111—139; Lagrange, Oeuvres, T. IV, p. 343—374.

von x freien Teil gleich Null. Man erhält auf diese Weise zwei Gleichungen, und eine dritte durch die Annahme $\frac{a^2}{4} - b = u$, aus welchen man die unbestimmten Größen a und b eliminieren soll. Die Größe u stellt sich hier als das Quadrat der Halbdifferenz irgend eines Wurzelpaares der vorgelegten Gleichung heraus. Ist letztere m^{ten} Grades, muß erstere $\frac{m(m-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades sein. Wenn nun in der Endgleichung u negative Werte hat, sind in der vorgelegten Gleichung imaginäre Wurzeln vorhanden, sonst nicht. Ob u negative Werte habe oder nicht, lasse sich durch Descartes' Zeichenregel entscheiden. Gibt es in der Reihe der Koeffizienten lauter Zeichenwechsel, so hat die vorgelegte Gleichung keine imaginären Wurzeln; sind Zeichenfolgen vorhanden, dann sind imaginäre Wurzeln gewiß vorhanden. Lagrange erklärt, daß die Anzahl von imaginären Wurzelpaaren nicht größer als die Anzahl Zeichenfolgen sei, weshalb man wisse, daß sich imaginäre Wurzelpaare vorfinden, nicht aber deren Anzahl. Um diese Anzahl näher zu untersuchen, berechne man eine zweite transformierte Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Halbdifferenzen zwischen der Summe zweier Wurzeln und zweier anderer Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Hat diese neue Gleichung keine negative Wurzel, dann hat die vorgelegte Gleichung nur zwei imaginäre Wurzeln. Daß eine negative Wurzel wenigstens vier imaginäre Wurzeln der vorgelegten Gleichung andeuten würde, ersieht man aus dem Ausdrucke $\left(\frac{a+c-b-d}{2}\right)^2$ für die Wurzeln der transformierten Gleichung. Sind a und b, c und d zwei konjugierte imaginäre Wurzelpaare, so muß obiger Ausdruck einen negativen Wert annehmen. Um herauszufinden, ob nicht mehr als vier imaginäre Wurzeln existieren, bilde man eine dritte Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen zwischen der Summe von drei Wurzeln und der Summe dreier anderer Wurzeln sind. Hat diese dritte Gleichung eine negative Wurzel, dann besitzt die vorgelegte Gleichung wenigstens sechs imaginäre Wurzeln. Wenn notwendig, könne man noch weitere Transformationen unternehmen. Lagrange bemerkt, daß ihm kein allgemeines Kriterium zur Bestimmung der Anzahl negativer Wurzeln einer Gleichung bekannt sei. Diese Methode für die Bestimmung der Anzahl imaginärer Wurzeln führt immer zum Ziele. Sie ist der Glanzpunkt der Resultate, welche man im 18. Jahrhundert über diesen Gegenstand erreicht hat.

Endlich leitet Lagrange noch die Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer Quartic, welche die Natur ihrer Wurzeln bestimmen, ab, und bemerkt, daß schon früher Waring in seinen Medi-

tationes algebraicae diese Resultate mitgeteilt habe, ohne aber den Nachweis dafür zu veröffentlichen.

Das 1779 zu Paris erschienene Werk Théorie générale des équations algébriques von Bézout zeichnet sich aus durch das, was es enthält, sowie durch das, was es wegläßt. Von der algebraischen Auflösung von Gleichungen $f(x) = 0$ verschiedener Grade, oder der Auflösung durch Annäherung, oder der Transformation von $f(x) = 0$ in eine neue Gleichung, deren Wurzeln oder Koeffizienten bestimmte Beziehungen zu denen der vorgelegten Gleichung haben, davon wird nichts gesagt. Das ganze Werk ist dem Eliminationsproblem gewidmet. Die Elimination ohne Einführung fremder Faktoren hatten Euler und Bézout bisher nur für zwei Gleichungen höheren Grades mit zwei Unbekannten erzielt. Um für den allgemeinen Fall fremde Lösungen zu vermeiden, erkannte Bézout schon früher[1], „daß nicht eine allmähliche, sondern nur eine gleichzeitige Elimination von $(m-1)$ der m Variablen zum richtigen Grade der Endgleichung oder der Eliminante führen könne". Diese Sache wird nun weiter entwickelt. Nach einer Einleitung über Differenzenrechnung folgt die allgemeine Theorie von Gleichungen irgendwelchen Grades und mit mehreren Unbekannten. Ein vollständiges Polynom des Grades T mit n Unbekannten wird durch $(u \ldots n)^T$ bezeichnet; dessen Gliederzahl, durch $N(u \ldots n)^T$ symbolisiert, ergibt sich gleich $|\underline{T+n}/n|T$. Bézout leitet einen Ausdruck ab für die Berechung der Anzahl derjenigen Glieder in diesem Polynom, welche durch keine der Größen u^r, x^s, y^t, z^v teilbar sind, und wird durch denselben zum Lehrsatz geführt: Der Grad der Endgleichung, welche aus einer Anzahl n von vollständigen Gleichungen irgendwelcher Grade mit n Unbekannten hervorgeht, ist dem Produkte der Grade der vorgelegten Gleichungen gleich. Nur für den Spezialfall von zwei Gleichungen war dieser Satz früher bekannt. Im Falle unvollständiger Polynome mag der Grad des Endresultats niedriger sein. Bézout unterwirft dieselben einer eingehenden Untersuchung. Im zweiten Teile des Werkes wird die Elimination selbst durchgeführt. Ohne Nachweis gibt er zur Berechnung der Unbekannten von linearen Gleichungen eine scheinbar willkürliche Regel, welche gleichgültig auf literale und numerische, allgemeine und spezielle Gleichungen anwendbar ist. Wir erläutern sie an einem Beispiele aus § 200. Sind $a^i x + b^i y + c^i z + d^i = 0$ $(i = 0, 1, 2)$, nehme man stillschweigend t als Unbekannte der absoluten Glieder an. Man hat dann $a^i x + b^i y + c^i z + d^i t = 0$. Im Produkte $xyzt$ setze man nacheinander bezüglich a, b, c, d an die Stelle von x, y, z, t.

[1]) Cours de math. à l'usage des Gardes du Pavillon, 1764/69, p. 209. Vgl. Encyklopädie der math. Wiss., Bd. I, S. 261.

Man erhält, nach einem Zeichenwechsel für jede ungerade Vertauschung, die erste Linie, $ayzt - bxzt + cxyt - dxyz$. In dieser ersten Linie setze man ähnlicherweise, nacheinander, bezüglich a', b', c', d' statt x, y, z, t. Man erhält die zweite Linie. Darin setze man bezüglich a'', b'', c'', d'' statt x, y, z, t, und man erhält die dritte Linie. Der Wert von x ergibt sich dann durch Division des Koeffizienten von x mit dem des Koeffizienten von t; d. h.

$$x = -\{(bc' - b'c)d'' - (bd' - b'd)c'' + (cd' - c'd)b''\}$$
$$:\{(ab' - a'b)c'' - (ac' - a'c)b'' + (bc' - b'c)a''\}.$$

Ähnliches für y und z. Warum mit $xyzt$ angefangen wird, und was dieses Produkt eigentlich bedeutet, wird nicht erklärt. Man sieht, daß hier Determinantenausdrücke vorkommen und daß die Methode auch zur Resultantenbestimmung dient. Die Regel wird an Beispielen angewendet, wo einige Koeffizienten Null sind, oder eine Linie verschwindet, oder eine der Unbekannten in der letzten Linie wegbleibt. Bézout gibt auch eine bessere Regel, die Laplacesche Entwicklung niederzuschreiben[1]).

Bézout geht dann zu Gleichungssystemen höherer Grade über und bewirkt die Elimination nach einer Methode von unbestimmten Koeffizienten. Jede der vorgelegten Gleichungen wird mit einem unbestimmten Polynom multipliziert, so daß in der Summe dieser Produkte alle Unbekannten mit Ausnahme einer einzigen verschwinden. Durch eine Konstantenabzählung und die Auflösung von linearen Gleichungen lehrt er Polynome dieser Art zu finden. Das Werk wurde von Lagrange[2]) und Laplace[3]) sehr hoch geschätzt. Lagrange sagte: „je le mets dans le petit nombre de ceux qui sont véritablement utiles aux progrès des sciences". Und doch scheinen Bézouts Resultate teilweise in Vergessenheit geraten zu sein, denn Jacobi und Minding leiteten solche über ein halbes Jahrhundert später von neuem ab, ohne Bézout als Vorgänger zu nennen[4]).

Bézouts Eliminationsregel für lineare Gleichungen wurde von C. F. Hindenburg in seiner Vorrede zu einem Werke von C. F. Rüdiger, Specimen analyticum de lineis curvis etc., Leipzig 1784, ins Lateinische übersetzt. Hindenburg selbst gab eine Regel, welche zugleich die Gliederbildung und die Zeichenordnung in Determinanten lieferte[5]).

---

[1]) Vgl. T. Muir, op. cit., p. 41—53. [2]) Oeuvres, T. XIV, p. 276: Brief an Bézout, 12. Juli 1779. [3]) Ebenda, p. 80: Brief an Lagrange. [4]) A. Brill und M. Noether, Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver., 3. Bd., 1892—1893, S. 143 bis 147. [5]) T. Muir, op. cit., p. 53—55.

Vor dem Abschlusse unserer Angaben über Determinanten bemerken wir noch, daß in den Schriften von Vandermonde und François Marie Riche de Prony[1] (1755—1839) die ersten Spuren von Alternanten vorkommen[2]).

Der Mathematiker und Astronom John Hellins (?—1827), 1779—1783 Pfarrer zu Constantine in Cornwall, schlug eine Methode zur Berechnung von zwei gleichen Wurzeln vor, welche für die kubische Gleichung so lautet[3]): Wenn $x^3-px^2+qx-r=0$ zwei gleiche Wurzeln hat, finde man durch Division den gemeinschaftlichen Faktor zwischen dieser Gleichung und $3x^2-2px+q=0$. Man erhält dadurch $x=(pq-9r):(2p^2-6q)$. Hat nun $x^3+5x^2-32x+36=0$ zwei gleiche Wurzeln? Man findet $(pq-9r):(2p^2-6q)=2$. Dieser Wert, $x=2$, genügt der vorgelegten Gleichung und muß also die doppelte Wurzel sein. Diese Methode wird auf die Quartic und Quintic angewendet.

Ungefähr zu gleicher Zeit wurden Studien über Gleichungen auf den schwedischen Universitäten zu Upsala und Lund vorgenommen; in Upsala von Mallet, in Lund von Bring. Friedrich Mallet (1728—1797) stammte von einer Familie, die aus Frankreich nach Schweden auswanderte. Nachdem er einige Jahre in England, Frankreich und den Niederlanden zugebracht hatte, wurde er 1757 Assistent für Astronomie und später Professor der Mathematik an der Universität Upsala. Zwischen 1777 und 1784 hat er vier Schriften über Gleichungen der ersten vier Grade geschrieben. Drei sind von Matthiessen angeführt[4]); eine vierte, De Aequatione biquadratica (Resp. J. Norderling) erschien in Upsala 1782 und ist geschichtlichen Inhalts. Er eröffnete einen neuen Gesichtspunkt durch sein Verfahren, die Unbekannte zu variieren und die Koeffizienten der erhaltenen Gleichung gewissen Bedingungen zu unterwerfen. Bei $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$ setzt er[5]) $x=y+E$ und erhält $y^4+aby^3+(6E^2+AE+B)y^2+ab^3y+b^4=0$, wo $b^4=E^4+AE^3+BE^2+CE+D$, $ab=4E+A$, $ab^3=4E^3+3AE^2+2BE+C$. Daraus folgt die kubische Gleichung

$$(A^3-4AB+8C)E^3+(A^2B+2AC-4B^2+16D)E^2$$
$$+(A^2C+8AD-4BC)E+A^2D-C^2=0$$

für die Bestimmung des E. Es sind dann a, b, $cb^2=6E^2+3AE+B$

---

[1]) Journ. de l'éc. polyt. I, p. 264, 265. [2]) T. Muir, „The Theory of Alternants in the Historical Order etc." in Proceed. roy. Soc. of Edinburgh, Vol. 23, 1899—1901, p. 93, 94. [3]) Phil. Trans. 1782 London, p. 417—425. [4]) Matthiessen, op. cit. S. 340, 438, 545, 621, 977. [5]) Nov. Act. Soc. Scient. et Litt. Ups., Vol. III, p. 253, auch De aequatione biquadratica, Upsala 1782, p. 16, 17.

bekannt. Die erhaltene Gleichung ist nach Saundersons Methode leicht zu lösen, denn

$$y^4 + aby^3 + cb^2y^2 + ab^3y + b^4 = 0 = (y^2 + eby + b^2)\cdot(y^2 + fby + a^2),$$

wo $e + f = a$, $e - f = \sqrt{a^2 - 4c + 8}$.

De aequatione, cujus radices sunt binarum datae aequationis radicum summae[1]) ist eine Untersuchung von Sebastiano Canterzani (1734—1819), Professor der Mathematik in Bologna und Verfasser mehrerer Lehrbücher und Abhandlungen. Er war auch Sekretär des Instituts von Bologna. Er hebt hervor, daß Waring in seinen Meditationes algebraicae die Herleitung einer Gleichung besprochen habe, deren Wurzeln irgend eine algebraische Funktion der Wurzeln einer gegebenen Gleichung seien, daß aber die Bestimmung der Glieder einer allgemeinen Gleichung n^{ten} Grades nicht leicht sei. Lagrange habe 1767 die Gleichung, deren Wurzeln die Differenz je zweier der vorgelegten Gleichung sind, hergeleitet. Nun soll die Summe je zweier Wurzeln in Betracht kommen. Die Methode ist hier nur sehr kurz erklärt. Sind $a', a'', a''', \ldots$ die Koeffizienten der vorgelegten Gleichung m^{ten} Grades und $A', A'', A''', \ldots$ diejenigen der gesuchten $\frac{m(m-1)}{2}^{\text{ten}}$ Grades, dann sei

$$A^\varrho = \sum(a'A^{\varrho-1} + a''A^{\varrho-2} + \cdots a^{\varrho-1}A') + (m - 2^{r-1})a^\varrho,$$

wo in der durch $\sum$ angedeuteten Summe m die Variable ist. Obschon im nächsten Bande die Sache weiter auseinandergesetzt wird, ist sie doch nicht mit genügender Klarheit dargestellt.

Ein sorgfältig verfaßtes Werk, betitelt Analysis aequationum, Dublin 1784, erschien aus der Feder von William Hales (1747 bis 1831), Tutor zu Trinity College, Dublin, und Professor der orientalischen Sprachen an der dortigen Universität. Es ist reich an Literaturangaben. Lagrange soll an den Autor aus Berlin ein Lobschreiben gerichtet haben[2]).

Unter den wichtigen Ergebnissen, welche während der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts in der Gleichungstheorie hervorgebracht wurden, muß man auch eine kleine Schrift des oben angeführten schwedischen Mathematikers Bring nennen. Während 75 Jahre blieb dieselbe den Mathematikern unbekannt; die Resultate derselben wurden von dem englischen Mathematiker Jerrard 1834 neu ent-

---

[1]) De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii, T. VI, Bononiae 1783, Comm. p. 107. [2]) Dictionary of National Biography (Stephen und Lee).

deckt. Sie betrifft die Transformation der allgemeinen Gleichung 5. Grades in die Form $y^5 + Gy + H = 0$ und erschien unter dem Titel B. cum D. Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum, quae ... in Regia Academia Carolina praeside D. Erland Sam. Bring, Hist. Profess. Reg. & Ord. publico eruditorum examini modeste subjicit Sven Gustaf Sommelius ... 1786, Lundae. Man könnte diesem Titel zufolge veranlaßt sein, Sommelius für den Verfasser zu halten, besonders da auch die Dedikation seine Namensunterschrift trägt, und er darin von diesen seinen Erstlingsfrüchten („primitias") redet. Auf eine Anfrage des Hrn. Felix Klein teilt aber Hr. Bäcklund in Lund mit, „daß dies jedenfalls unzutreffend sein würde, indem die Promotionsschriften damals durchgängig von den Vorsitzenden des Examens verfaßt wurden und den Examinanden nur als Substrat der Disputation dienten".[1])

Schon früher hatten C. Hill (1861) aus Lund und Ebbe Sam. Bring, ein Neffe unseres Bring (ungefähr 1824), diese Dissertation ihm zugeschrieben. Ja schon 1798 enthält der Titel einer Tegmanschen Dissertation den Ausdruck „methodus Bringiana". Auch muß bemerkt werden, daß Bring sich viel mit Gleichungen beschäftigte, während der siebzehnjährige Sommelius sich später nicht wieder mit mathematischen Studien abgab und 1790 eine Promotionsschrift historischen Inhalts verteidigte. Die Verdienste von Erland Samuel Bring wurden 1861 von Hrn. C. Hill in Lund ausführlich gewürdigt, der die Arbeit mit eigenen Bemerkungen begleitete[2]). Es ist merkwürdig, daß die Bringsche Arbeit nicht früher allgemein bekannt wurde, denn, wie schon bemerkt, erschien 1798 eine Dissertation mit Brings Namen im Titel. Ferner hob Brings Neffe ungefähr 1824, bei der Inauguration des Physikers J. C. Hill in Lund, den großen Wert seiner Gleichungsuntersuchungen scharf hervor und 1837 wurden Auszüge dieser Mitteilungen in einem wohlbekannten schwedischen biographischen Lexikon gedruckt[3]). Erland Samuel Bring (1736—1798) studierte in Lund Rechtswissenschaft, wurde 1762 Dozent, später Professor Historiarum und 1790 Rektor der Akademie. Mathematik war für ihn ein Lieblingsstudium, aber nur wenige seiner Arbeiten wurden veröffentlicht. In der Bibliothek der

[1]) F. Klein, Vorles. ü. d. Ikosaeder, Leipzig 1884, S. 143. [2]) Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1861, Stockholm 1862, p. 317 bis 355. Ein Auszug von Brings Schrift mit Bemerkungen erschien in Grunerts Archiv, Bd. 41, 1864, S. 105—117; Bd. 40, 1863, S. 55, auch in Quarterly Journ. of Mathematics, Vol. VI, 1864, p. 38—47. [3]) Biographisk Lexikon öfver Namnkundige Svenska män Tredje Bandet, Upsala 1837, p. 83—84.

Universität in Lund sind acht handschriftliche Bände seiner mathematischen Abhandlungen und Kommentarien zu Euler, Wolf, Palmquist, Hospital und anderen. Er schrieb über Algebra, Geometrie, Differentialrechnung, Gleichungen, Theorie der homogenen Funktionen, Chronologie und Astronomie[1]).

In seiner Dissertation wendet Bring die Tschirnhausensche Transformation an. Er fängt mit der quadratischen Gleichung $z^2 + mz + n = 0$ an, setzt $z = y - a$, dann $-2a + m = 0$ zur Bestimmung des a und erhält $y^2 = \frac{m^2}{4} - n$. Durch ein ähnliches Verfahren wird die kubische in eine binomische Gleichung transformiert. Dann folgt eine interessante Diskussion der Quartic, $z^4 + nz^2 + pz + q = 0$. Durch Hilfsgleichungen zweiten Grades $z^2 + bz + a + y = 0$ wird diese auf die Form $y^4 + Ay^2 + B = 0$ gebracht. Um, wenn möglich, alle dazwischenliegenden Glieder der vorgelegten Quartic zu beseitigen, nimmt er $z^3 + cz^2 + bz + a + y = 0$ an, eliminiert z und setzt die Koeffizienten y^3, y^2, y gleich Null. Die Elimination von b führt ihn zu einer Gleichung sechsten Grades in c. Ohne diese Sache weiter aufzuklären schreitet er zur Quintic.

Um die Quintic $z^5 + pz^2 + qz + r = 0$ von dem Gliede z^2 zu befreien, nimmt Bring $z^4 + dz^3 + cz^2 + bz + a + y = 0$ an und eliminiert z. In der neuen Quintic $y^5 + Dy^4 + Ey^3 + Fy^2 + \cdots = 0$ setzt er $D = 0$, $E = 0$, $F = 0$. Von $D = 0$ erhält er $a = (3pd + 4q):5$, dessen Wert er in $E = 0$ und $F = 0$ setzt. Versucht man nun b, c oder d zu eliminieren, so bekommt man eine Gleichung sechsten Grades. Dieses vermeidet Bring aber durch die Annahmen $b = \alpha d + \zeta$ und $c = d + \gamma$. Die Gleichung $E = 0$ nimmt nun die Form einer Quadratic in d an, deren drei Koeffizienten er gleich Null setzt. Das Verschwinden des ersten Koeffizienten liefert ihm durch Auflösung einer Gleichung ersten Grades den Wert von α, dasjenige des zweiten Koeffizienten gibt ihm ζ als eine lineare Funktion von γ, dasjenige des dritten Gliedes bringt ihm γ durch Auflösung einer Quadratic, als eine Funktion von p, q, r. Setzt man nun in $F = 0$ für a, b, c die Werte $(3pd + 4q):5$, $\alpha d + \zeta$, $d + \gamma$ ein, so erhält man eine Gleichung in d, die nicht höheren als dritten Grades sein kann. Auf diese Weise transformiert Bring die allgemeine Quintic in die Form $y^5 + Gy + H = 0$, ohne aber in seiner Dissertation zu zeigen, ob eine weitere Änderung zur Binomialform $y^5 + I = 0$ unmöglich wäre[2]). Diesen bedeutenden Leistungen sind in Schweden keine weiteren Untersuchungen gefolgt, außer zwei Dissertationen der Jahre

[1]) Biographisk Lexicon etc., S. 84. [2]) Eine Kritik der Bedeutung von Brings Transformation findet man in F. Klein, op. cit. S. 143, 144, 207—209, 244.

1798 und 1799 von Tegman, Regula Cardani et methodus Bringiana radices inveniendi cubicas inter se collatae, und De aequatione biquadratica, worin die Gleichungen dritten und vierten Grades etwas eingehender behandelt werden, als bei Bring der Fall war[1]. Pehr Tegman (1757—1810) war Professor der Mathematik an der Universität zu Lund[2].

J. H. Lambert sagt in einem Aufsatze Über die Verwandlung und Auflösung der Gleichungen[3]), daß Waring einen dem seinigen ganz ähnlichen Versuch gemacht habe, die Sache aber so sehr abstrakt vornehme, daß er die Vorteile, welche besondere Fälle darbieten, gar nicht sehen konnte. Lambert bestimmt die Grenzen, in welchen alle Wurzeln einer Quartic entweder unmöglich oder reell sind. Die Auflösung einer solchen Quartic hängt von einer kubischen Gleichung mit lauter reellen Wurzeln ab, die sich auf die Dreiteilung eines Kreisbogens reduzieren läßt. Eine bequeme Auflösungsform wird angegeben. Auch behandelt er die Aufgabe, aus zwei Gleichungen $0 = x^m - ax^{m-1} + \cdots$, $0 = y^n - \alpha x^{n-1} + \cdots$, ohne diese vorerst aufzulösen, eine dritte Gleichung $0 = z^\lambda - Az^{\lambda-1} + \cdots$ herzuleiten, so daß $z = x + y$ ist.

Sebastiano Canterzani sucht in einer Schrift Della riducibilità di ogni quantità immaginaria algebrica alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$[4]) einen für elementare Lehrbücher geeigneten Beweis darzulegen. Es ist dem Verfasser aber nicht gelungen, den Beweis dieses schweren Satzes von Übelständen verschiedener Arten zu befreien.

In einer Schrift, Von der cubischen und biquadratischen Gleichungen bejahten, verneinten und unmöglichen Wurzeln[5]), gibt Gustaf Adolph Leijonmark (1734—1815), Bergrat beim schwedischen Bergkollegium, eine weitläufige Erklärung von Konstruktionen, um die Natur von kubischen und quartischen Gleichungen geometrisch zu bestimmen. In späteren Artikeln untersucht er quartische Gleichungen, die sich in zwei quadratische Faktoren zerlegen lassen und quintische Gleichungen, die sich in quadratische und kubische Faktoren zerlegen lassen[6]).

In einem Artikel On finding the values of algebraical quan-

---

[1]) C. Hill, loc. cit. S. 319. [2]) J. C. Poggendorff, Handwörterb. z. Gesch. d. exact. Wiss., Bd. II, Leipzig 1863, S. 1074. [3]) Beyträge z. Gebrauche d. Math. u. deren Anwend. Zweyter Theil, Berlin 1770, S. 184—249. [4]) Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, Tomo II, Pt. II, p. 720 bis 731. [5]) Neue Abhandl. d. K. Schw. Akad. d. Wiss. für das Jahr 1785, aus dem Schwedischen übers. von A. G. Kästner, Leipzig 1786, S. 3—15, nebst fünf Fortsetzungen. [6]) Ebenda, Bd. 9, 1788; Bd. 16, 1795.

tities by converging serieses, and demonstrating and extending propositions given by Pappus and others[1]) betrachtet Edward Waring den Ausdruck

$$\sqrt[r]{}(\pm\sqrt[n]{\pm A}\pm\sqrt[m]{\pm B}\pm\sqrt[p]{\pm C}\pm \text{etc.}).$$

Sind $\alpha+i\lambda$, $\alpha'+i\lambda', \ldots \Gamma+\varDelta i$ respektive Wurzeln von $x^n\mp 1=0$, $x^m\mp 1=0, \ldots x^r\mp 1=0$ (Waring schreibt $\sqrt{-1}$ statt i), und $\pm P=\pm A^{\frac{1}{n}}\alpha\pm B^{\frac{1}{m}}\alpha'\pm\cdots$, $\pm Q=\pm A^{\frac{1}{n}}\lambda\pm B^{\frac{1}{m}}\lambda'\pm\cdots$, dann wird obiger Ausdruck, wo P statt $\pm P$ und $P>Q$,

$$(P\pm iQ)^{\frac{1}{r}}=\left(P^{\frac{1}{r}}-\frac{1}{r}\,\frac{1-r}{2r}\cdot\frac{Q^2}{P^{\frac{2r-1}{r}}}+\cdots=\pm L\right)$$

$$\pm\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{Q}{P^{\frac{r-1}{r}}}-\frac{1}{r}\cdot\frac{1-r}{2r}\cdot\frac{1-2r}{8r}\cdot\frac{Q^3}{P^{\frac{3r-1}{r}}}+\cdots=\pm M\right)i=\pm L\pm iM,$$

in welchem Falle L und M konvergieren. Sodann ist $(\Gamma+i\varDelta)\cdot(\pm L\pm iM)$ eine Wurzel der vorgelegten Größe. Er nimmt ferner $-P$ statt $\pm P$, hernach $P<Q$, $P=\pm Q$. Die Wurzeln von $x^b\pm 1=0$ könne man algebraisch finden, wenn $b<11$ (Vandermondes Auflösung von $x^{11}-1=0$ von 1774 war ihm also nicht bekannt), oder wenn $b=2^l\cdot 3^{l'}\ldots 10^{l^9}$, wo $l, l'\ldots l^9$ ganze Zahlen sind.

Auflösbare Gleichungen höheren Grades werden von Euler in der 1776 eingereichten Schrift Innumerae aequationum formae, ex omnibus ordinibus, quarum resolutio exhiberi potest[2]) behandelt. Der Bruch $x=\left(b\sqrt[n]{\frac{a}{b}}-a\right):\left(1-\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)$, wo $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ n verschiedene Werte annimmt, ist Wurzel der Gleichung $\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^n=\frac{a}{b}$, welche in entwickelter Form

$$x^n=n''ab\left(\frac{a-b}{a-b}\right)x^{n-2}+n'''ab\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)x^{n-3}+\cdots$$

wird, wenn $n'', n''', \ldots$ den zweiten, dritten etc. Koeffizienten eines zur n^{ten} Potenz erhobenen Binoms andeutet. Es ist auffallend, daß in dieser Abhandlung gar kein Hinweis auf die Arbeiten von Bézout, Lagrange und Malfatti vorkommt. Seine jetzigen Ansichten über die allgemeine Lösbarkeit von Gleichungen stimmen mit denen, die er 1732 und 1762 geäußert hatte, ganz überein. Obiges Resultat

[1]) Phil. Trans. Vol. 77, for the year 1787, Pt. I, London 1787, p. 71—88.
[2]) Nova acta acad. scient. imp. Petropolitanae, T. VI, ad annum 1788. Petropoli 1790, p. 25—35.

wird von ihm als eine Bestätigung seiner früheren Mutmaßung, daß eine Gleichung $x^n = px^{n-2} + qx^{n-3} + \cdots$ die Wurzelform $x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} + \cdots$ besitze, wo $\alpha, \beta, \ldots$ Wurzeln einer Resolvente $n-1^{\text{ten}}$ Grades darstellen, angesehen.

In der Abhandlung De radicibus aequationis infinitae $0 = 1 - \frac{x \cdot x}{n(n+1)} + \frac{x^4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{x^6}{n \ldots (n+5)} + \text{etc.}$[1]) zeigt Euler, daß für $n = 1$, $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \ldots$; für $n = 2$, $x = \pm \pi$, $\pm 2\pi, \ldots$; für $n = 3$, $x = \pm 2\pi$, $\pm 4\pi, \ldots$ Während in diesen Fällen eine unendliche Anzahl reeller Wurzeln existiert, sind für $n = 4$ alle Wurzeln imaginär, weil die Summe $\frac{6(x - \sin x)}{x^3}$ der unendlichen Reihe für keine reellen Werte von x verschwinden kann. Euler schließt nun ohne Beweis, daß höhere ganzzahlige Werte von n ebenfalls nur imaginäre Wurzeln besitzen. Ist $n < 3$ und ein Bruch, so gibt Daniel Bernoullis Methode der rekurrierenden Reihen Näherungswerte. Setzt man $n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, dann wird der kleinste Wert von x bezw. 0.909, 0.687, 0.572. Die verschiedenen Wurzeln, welche sich für Bruchwerte von n oder für ganzzahlige Werte von $n > 3$ ergeben, lassen sich nicht auf einfache Weise durch π ausdrücken.

Wir erwähnen hier ein uns nicht zugängliches Werk, Opuscules mathématiques contenant de nouvelles théories pour la résolution des équations de deux, trois et quatre degrés (Leyde et Paris 1794) von Louis Bourguet (1678—1742), welcher in den letzten Jahren seines Lebens Professor der Philosophie und Mathematik in Neuenburg war[2]).

In einem Büchlein über Analytische Entdeckungen in der Verwandlungs- und Auflösungskunst der höheren Gleichungen von Hulbe, Berlin und Stralsund 1794, werden, wie der Autor sich ausdrückt, „weitere Gesichtslinien gezogen". Adam Ehregott Leberecht Hulbe (1768—?) wurde zu Berlin geboren und bekleidete dort gegen Ende des Jahrhunderts die Stelle eines königlichen Lotteriesekretärs. Sein wertvolles Werkchen wurde von Kästner, dem es zugeeignet ist, erwähnt; sonst blieb es lange unbekannt[3]). Er zeigt wie man eine Gleichung nach x in eine andere nach y durch die Annahme $y = x^r$ transformieren kann. Wenn man

---

[1]) Nova acta acad. scient. imp. Petropolitanae, T. IX, ad annum 1791. Petropoli 1795, p. 19—40. [2]) Michaud, Biogr. univ. [3]) Allgemeine Biographie, Art. von S. Günther.

also die allgemeine kubische Gleichung $y^3 + xy^2 + Ry - \frac{r}{8} = 0$ in die Gleichung $z^3 + (2R - x^2)z^2 + \left(R^2 + \frac{rx}{4}\right)z - \frac{r^2}{64} = 0$ verwandelt, worin $z = y^2$, und man setzt $2R - x^2 = \frac{q}{2}$, $R^2 + \frac{rx}{4} = \frac{(q^2 - 4s)}{16}$ und eliminiert R mittels der zwei letzten Gleichungen, so erhält man die allgemeine quartische Gleichung $x^4 + qx^2 + rx + s = 0$. Folglich erhält man auch umgekehrt durch Auflösung der kubischen Gleichung von z die Wurzeln dieser quartischen Gleichung[1]). Hulbe lehrt auch Gleichungen mit ganzen und gebrochenen Exponenten, wenn diese Exponenten auch nicht alle positiv sind, in Gleichungen mit ganzen positiven Exponenten zu verwandeln, sowie aus der Summe der Potenzen mit ganzen positiven Exponenten der Wurzeln, die Summen der Potenzen mit ganzen positiven und negativen Exponenten der Produkte von gleich vielen ihrer Wurzeln zu finden, wodurch jede Gleichung in eine andere verwandelt werden kann, worin die Wurzeln den Produkten von gleich vielen Wurzeln dieser Gleichung, zu Potenzen mit ganzen positiven oder negativen Exponenten erhoben, gleich sind.

Um die Wegschaffung der Wurzelgrößen aus den Gleichungen zu erzielen, gibt C. G. Fischer, Professor am Kölnischen Gymnasium, drei Methoden[2]). Soll nach der ersten eine Gleichung in eine andere, deren Exponenten sämtlich z. B. dreimal so groß sind, verwandelt werden, so bringe man die Gleichung auf die Form $-a = bx + cx^2$, wo a, b, c entweder gar keine, oder bloß solche Potenzen von x enthalten, deren Exponenten durch 3 teilbar sind. Man erhält dann $-a^3 = b^3x^3 + 3b^2cx^4 + 3bc^2x^5 + c^3x^6$, $-\alpha ax^3 = \alpha bx^4 + \alpha cx^5$. Das willkürlich angenommene α läßt sich nun so bestimmen, daß in der Summe der Seiten dieser Gleichungen die Glieder, welche x^4 und x^5 enthalten, Null werden; also $\alpha = -3bc$, und man hat das Resultat $0 = a^3 + b^3x^3 + c^3x^6 - 3abc$. In der zweiten Methode, wenn die gegebene Gleichung $x^r + ax^{r-1} + \cdots = 0$ und die gesuchte

$$x^{rn} + Ax^{(r-1)n} + \cdots = 0$$

ist, dividiere man letztere durch erstere bis im Quotienten ein Glied vorkommt, das kein x mehr hat, dann muß der $r$gliedrige Rest, Glied für Glied, Null sein. Man hat also r Gleichungen für die Bestimmung der r Größen A, B, ... Die dritte Methode ist trigonometrisch.

In einem Aufsatze, De inventione divisorum[3]) werden von

[1]) Hulbe, S. 135. Vgl. Matthiessen, Grundz. d. Ant. & Mod. Alg d. Litt. Gleich., S. 331, 433, 568. [2]) Archiv d. r. u. a. Mathem. (Hindenburg), 2. Bd., 1798, S. 180—195, 426—440. [3]) Nova acta scient. imp. Petropolitanae, T. XI, ad annum 1793. Petropoli 1798, p. 172—182.

dem Astronomen Friedrich Theodor v. Schubert (1758—1825) aus Helmstedt die Regeln in Newtons Arithmetica universalis für die Auffindung linearer und quadratischer Faktoren eines Polynoms $F(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \cdots$ angegeben und auch eine allgemeine Regel, um rationale Faktoren $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$ höheren Grades aufzufinden, abgeleitet. Diese Arbeit scheint von Mathematikern übersehen worden zu sein, denn noch 1882 äußerte Kronecker das Bedürfnis einer allgemeinen Zerlegungsmethode[1]). Schubert gründet sein Verfahren auf folgendes durch mathematische Induktion bewiesene Lemma: Gibt man dem x in $X = x^n$ nacheinander die Inkremente $1, 2, 3, \ldots$, so ist die n^{te} Differenz $\Delta^n X = 1 . 2 . 3 \ldots n$. Für jeden ganzzahligen Wert x_1 von x ist der Wert von $F(x_1)$ ein ganzes Vielfaches des Wertes von $f(x_1)$. Man trage nun für x nacheinander die Werte $\ldots 2, 1, 0, -1, -2 \ldots$ ein. Für jeden derselben zerlege man den Zahlenwert von $F(x)$ in seine ganzzahligen Teiler. Wenn man jeden dieser Teiler für irgendeinen Wert von x, von ax^n abzieht, muß, wenn ein Faktor $f(x)$ überhaupt vorhanden ist, unter den verschiedenen Resten der Wert von $ax^n - f(x)$ sich vorfinden. Wenn man jetzt in der Berechnung von

$$\Delta(ax^n - f(x)), \ldots \Delta^{n-2}(ax^n - f(x))$$

für die oben angedeuteten Werte von x alle möglichen Kombinationen von Minuenden und Subtrahenden macht, wird es möglich sein, für $\Delta^{n-2}(ax^n - f(x))$ Werte zu erhalten, die eine arithmetische Reihe bilden. Ist dieses nicht möglich, so kann $F(x)$ nicht in Faktoren zerlegt werden. Im Verfahren Kroneckers werden statt der Differenzenmethode Interpolationsformeln gebraucht. Sonst sind die zwei Methoden ganz ähnlich.

Einen interessanten Versuch nachzuweisen, daß Gleichungen von geradem Grade in lauter reelle trinomische Faktoren zerlegt werden können, machte Laplace 1795 in seinen Vorlesungen auf der Normalschule[2]). Die Wurzelexistenz wird stillschweigend vorausgesetzt. Ist der Grad der vorgelegten Gleichung $2^i S$, und S eine ungerade Zahl, und sind $a, b, c, \ldots$ die Wurzeln, so soll man eine neue Gleichung vom Grade $2^{i-1}S(2^i S - 1)$ bilden, deren Wurzeln $a + b + mab$ sind, wo m verschiedene bestimmte Werte annehmen

---

[1]) Journal f. r. u. a. Mathematik, Bd. 92, S. 10. [2]) Séances des écoles normales, an III (1794—1795) = Journal de l'école polytechnique 7. et 8. cahiers, T. II, 1812, p. 56, 57. Vgl. G. Loria, Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche, Rivista di matematica, 1891, p. 185—248; G. Loria, Esame di alcune ricerche concernenti l'esistenza di radici nelle equazioni algebriche, Bibliotheca mathematica 1891, p. 99—112.

darf. Wenn $i = 1$, so ist ihr Grad ungerade und sie hat wenigstens eine reelle Wurzel, welchen Wert m auch haben möge. Es kann aber m beliebig viele Werte annehmen, weshalb es beliebig viele Gleichungen letztgenannten Grades gibt, welche je wenigstens eine reelle Wurzel von dem Typus $a + b + mab$ haben. Unter diesen Gleichungen sind gewiß zwei, welche dasselbe Wurzelpaar enthalten und reelle Werte für $a + b + mab$ liefern. Sind diese reellen Werte $a + b + mab$ und $a + b + m'ab$, dann sind $a + b$ und ab auch reell, sowie der Trinom $x^2 - (a + b)x + ab$, welcher ein Faktor der vorgelegten Gleichung ist. Wenn $i = 2$, so hat eine Gleichung des Grades $2^{i-1}S$, wie eben gezeigt worden, einen quadratischen Faktor. Es gibt beliebig viele Faktoren des Typus $a + b + mab$, welche Werte von der Form $e + g\sqrt{-1}$ annehmen, woraus geschlossen wird, daß $a + b$ und ab gleichfalls diese Form haben, und daß die vorgelegte Gleichung einen reellen quartischen Faktor enthält. Für $i > 2$ ist das Verfahren ähnlich.

In einer Schrift, On the roots of equations[1]) gibt James Wood (1760—1839), damals Fellow in St. John's College, ein einflußreicher Mann auf der Cambridge Universität, einen Beweis, daß eine Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln von der Form $a \pm \sqrt{\pm b}$ besitze. Der Eulersche Beweis dieses Satzes sei nicht allgemein, während Warings Auseinandersetzungen zu kurz und schwer verständlich seien. Wood demonstriert den Satz, daß zwei Wurzeln einer Gleichung $2m^{\text{ten}}$ Grades durch die Lösung einer Gleichung $m(2m-1)^{\text{ten}}$ Grades gefunden werden können. Wenn möglich, seien $z + v$ und $z - v$ zwei Wurzeln der vorgelegten Gleichung. Man erhält durch Substitution dieser Werte und Addition und Subtraktion der erlangten Ausdrücke zwei Gleichungen, die sich durch $y = v^2$ in $y^m + by^{m-1} + \cdots = 0$ und $Ay^{m-1} + By^{m-2} + \cdots = 0$ reduzieren. Letztere haben einen gemeinschaftlichen Faktor $y \pm Z$, wo Z eine Funktion von z und bekannten Größen ist. Diesen Faktor findet er nach der bekannten Divisionsmethode, indem er den von y freien Rest gleich Null setzt. Dieser Rest ist $m(2m-1)^{\text{ten}}$ Grades in z. Existiert nun ein Wert von z, dann existieren auch Z und der gemeinschaftliche Faktor $y \pm Z$, sowie zwei Wurzeln $z \pm \sqrt{\pm Z}$ der vorgelegten Gleichung. Nach dieser Vorbereitung nimmt Wood an, daß jede Gleichung ungeraden Grades wenigstens eine reelle Wurzel habe, und deshalb auf eine $2m^{\text{ten}}$ Grades erniedrigt werden könne. Ist m eine ungerade Zahl, so ist es auch $m(2m-1)$, weshalb z

[1]) Phil. Trans. Vol. 88, for the year 1798, London 1798, p. 369—377.

und v^2 reell sein können. Die vorgelegte Gleichung $2m^{\text{ten}}$ Grades hat demnach den reellen quadratischen Faktor $x^2 - 2zx + z^2 - v^2 = 0$. Wenn m gerade und $\frac{m}{2}$ ungerade sind, dann hat die Hilfsgleichung in z, wie eben bewiesen, zwei reelle Wurzeln, oder zwei von der Form $a \pm \sqrt{-1}\,b$; v^2 hat die Form $c \pm d\sqrt{-1}$. Daraus zieht er die Folgerung, daß die vorgelegte Gleichung einen quartischen Faktor $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$ mit reellen Koeffizienten besitzt, welcher in zwei reelle quadratische Faktoren zerteilbar ist und deshalb Wurzeln von der Form $a \pm \sqrt{-1}\,b$ besitzt. Man fahre so fort für die Fälle, wo $\frac{m}{4}$ oder $\frac{m}{8}, \ldots$ ungerade ganze Zahlen sind. Wood macht von den verwandten Arbeiten von Foncenex und Lagrange keine Erwähnung. Gegen den Beweis von Wood und auch gegen diejenigen von Euler, Foncenex, Lagrange und Laplace gilt der Einwurf, daß dieselben nicht zum Ziele führen ohne die Wurzeln, deren Existenz zu beweisen ist, vorher auf irgendwelche Weise vorzuführen. Was die Mathematiker des 18. Jahrhunderts hauptsächlich im Auge hatten, war der Nachweis, daß alle Wurzeln von Gleichungen mit rationalen Koeffizienten entweder reelle Größen oder Größen vom Typus $a + b\sqrt{-1}$ seien.

Zakarias Nordmark (1751—1828), Professor der Physik zu Upsala, veröffentlichte eine Schrift Expressio uniuscujusque radicis aequationis cubicae in casu irreductibili, ope trium radicum e casu reductibili simul adhibitarum[1], worin er $x = (\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q} + \sqrt[3]{r})^3$ setzt und die Koeffizienten der kubischen Gleichung, welche diese Wurzel hat, den Koeffizienten der vorgelegtn Kubik $x^3 - 3gx - 2h = 0$ bezw. gleich setzt. Danach erhält er eine Gleichung, deren Wurzeln p, q, r sind und die für den irreduktiblen Fall $(g^3 > h^2)$ der vorgelegten Gleichung nur eine reelle Wurzel hat und deshalb durch Del Ferros Formel numerisch lösbar ist. Es kann also jede Wurzel von $x^3 - 3gx - 2h = 0$, für den Fall $g^3 > h^2$, durch drei Wurzelgrößen einer reduktiblen Kubik ausgedrückt werden. Diese Untersuchung muß denen von besonderem Interesse gewesen sein, die mit D'Alembert glaubten, der irreduktible Fall entspringe aus den unschicklichen Annahmen in der Del Ferroschen Auflösung. Nordmarks neuer Angriff des Problems mußte aber doch den Glauben an die Unmöglichkeit, imaginäre Ausdrücke zu vermeiden, bedeutend stärken.

Die 1799 veröffentlichte Teoria generale delle equazioni von Paolo Ruffini ist die erste von mehreren wichtigen Schriften

[1]) Nova Acta Reg. Soc. Scien. Upsaliensis, Vol. VI, 1799, p. 208—210.

Ruffinis über die Unlösbarkeit der Quintic und gehört deshalb einer späteren Zeitperiode an. Nach Poggendorff und Matthiessen wurde das eben zitierte Werk 1798 gedruckt. Alle Exemplare, die wir gesehen haben, tragen aber die Jahreszahl 1799[1]).

Zu Berechnungsmethoden der Wurzeln durch Annäherung übergehend, fangen wir mit einer Schrift, Observationes variae in mathesin puram[2]), von J. H. Lambert an, welche die Gleichungstheorie berührt. Formeln für die Berechnung von Summen der Wurzelpotenzen und der Wurzeln selbst werden hergeleitet. In $0 = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \cdots - Ix + K$ setze man für x nacheinander die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, dann wird durch Addition dieser Ausdrücke $\int r^m = A\int r^{m-1} - B\int r^{m-2} + \cdots + I\int r - mK$, wo $\int r^m$ die Summe der m^{ten} Potenzen der Wurzeln bezeichnet und m nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, ... vorstellen kann. Um Lamberts Näherungsmethode zu kennzeichnen, setze man in $0 = a - bx + cx^2 - \cdots + px^m$, $x = k + y$ und verwerfe alle Glieder, die $y^2, y^3, \ldots$ enthalten, wodurch man $x = k + y = \frac{a - ck^2 + 2dk^3 - \cdots - (m-1)pk^m}{b - 2ck + 3dk^2 - \cdots - mpk^{m-1}}$ erhält. Wenn k irgend eine Zahl ist, gebe diese Formel eine Zahl, welche ein Näherungswert für die dem k nächstliegende Wurzel sei. Sind alle Wurzeln positiv, dann setze man $-k$ gleich dem Koeffizienten von x^{m-1}, und man erhalte einen Näherungswert für die größte Wurzel, während $k = 0$ einen für die kleinste liefert.

Lambert erwähnt noch eine zweite Näherungsmethode als eine sehr natürliche und einfache. Es sei $x^2 + px = q$, dann ist $q > px$, $x < q:p$, $x^2 < q^2:p^2$, $x^2 + px < q^2:p^2 + px > q$, $x > q:p - q^2:p^3$, $x^2 > q^2:p^2 - 2q^3:p^4 + q^4:p^6$, $x^2 + px > q^2:p^2 - 2q^3:p^4 + q^4:p^6 + px < q$, $x < q:p - q^2:p^3 + 2q^3:p^5 - p^4:p^7$, etc. Auf diese Weise erhält er obere und untere Grenzen für x in der quadratischen und auch in der allgemeineren Gleichung $ax^m + bx^l = d$, welche sich auf die Form $x^m + px = q$ reduzieren läßt. Für $x^m + px = q$ schließt er dann, daß

$$x = q:p - q^m:p^{m+1} + mq^{2m-1}:p^{2m+1} - \frac{m(3m-2)}{2}q^{3m-2}:p^{3m+1} \text{ etc.},$$

eine Reihe, die konvergiere, wenn $(m-1)^{m-1}p^m > m^m q^{m-1}$. Also konvergiere diese Reihe für den irreduktiblen Fall von $x^3 + px = q$. Nun läßt Lambert die Bemerkung folgen: „Qui casus praecise illum complecitur, qui hactenus nullo modo perfecte solvi potuit. V. Cel. Clairaut, Elem. Algebr. P. V. § 8“, woraus zu ersehen ist, daß

[1]) Man sehe auch E. Bortolotti, „Paolo Ruffini“, Annuario della R. università di Modena 1902—1903, p. 12; Carteggio in Mem. d. Soc. ital. d. Scienze, S. 3ª, T. XIV, 1906. [2]) Acta Helvetica, Basileae, Vol. III, 1758, p. 128—168.

Lambert 1758 zwischen einer algebraischen Auflösung und solcher durch Näherungsmethoden noch keine scharfe Grenze zog. Obige Reihe für die Wurzeln trinomischer Gleichungen führt den Namen **Lamberts**.

Im Jahre 1759 veröffentlichte **Johann Andreas v. Segner** einen Methodus simplex et universalis, omnes omnium aequationum radices detegendi[1]), welcher die Kurve der Gleichung graphisch zu erhalten lehrt. Soll z. B. die Kurve der kubischen Gleichung $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = y$ gefunden werden, dann ziehe man PO, TS, RQ auf MN senkrecht, wo $OQ = 1$ und $OS = z$. Die Koeffizienten D, C, B, A der Gleichung sind durch die Strecken OD, DC, CB, BA dargestellt. Man ziehe $Aa \parallel MN$, dann ziehe man Ba, und durch den neuen Punkt b $pc \parallel MN$. Durch Cc erhält man den Punkt d und $qe \parallel MN$. Auf ähnliche Weise erhält man die Linie De und den Punkt f. Es ist nun $fS = y$ und f ein Punkt der Kurve; denn durch die Betrachtung ähnlicher Dreiecke findet man leicht $pC = Az + B$, $qD = Az^2 + Bz + C$, $fS = Az^3 + Bz^2 + Cz + D$. Für jeden neuen Wert von z oder OS erhält man einen neuen Punkt der Kurve. Wo diese Kurve die Linie MN schneidet, hat man eine reelle Wurzel der Gleichung $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$; wo sie eine Minimum-Ordinate zeigt, ohne an dieser Stelle die Linie MN zu erreichen, wird eine imaginäre Wurzel angezeigt, ohne jedoch deren Wert anzudeuten. Es wäre wünschenswert, sagt **Segner**, solche Kurven mechanisch beschreiben zu können. Die Erfindung eines solchen Verfahrens scheine ihm aber so schwer, daß er es nicht versucht habe.

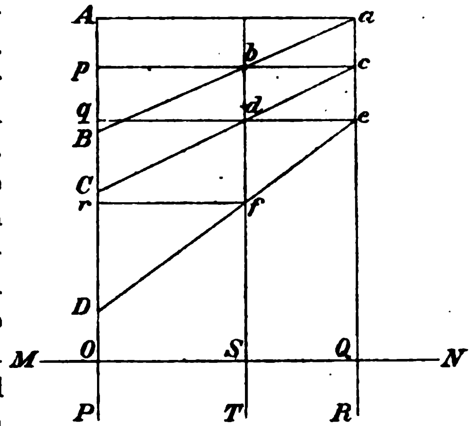


Fig. 1.

Die numerische Auflösung der Gleichungen ist ein Gebiet, wofür **Lagrange** sich sein Leben lang interessierte. Seine erste Arbeit darüber führt den Titel Sur la résolution des équations numériques[2]). Den Satz für die Bestimmung des ganzzahligen Näherungswertes einer Wurzel, daß zwischen p und q wenigstens eine reelle Wurzel einer Gleichung $f(x) = 0$ liegt, wenn $f(p)$ und $f(q)$ entgegengesetzte Zeichen haben, beweist er ohne den damals üblichen Hinweis

[1]) Novi Comm. Acad. Scient. Imp. Petropolitanae, T. VII, pro annis 1758 et 1759, p. 211—226. [2]) Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1767, Berlin 1769, p. 311—352 = **Lagrange**, Oeuvres, T. 2, p. 539—578.

auf die Kurventheorie, indem er in dem Ausdruck $(x-\alpha)(x-\beta)\cdots = 0$ ($\alpha, \beta, \ldots$ Wurzeln), $x = p$, dann $x = q$ setzt und die zwei Ergebnisse vergleicht. Substituiert man für α die Glieder der Progression $0, D, 2D, \ldots$, wo D kleiner als die kleinste Wurzeldifferenz sein muß, so ist man imstande die Lage aller reellen Wurzeln zu bestimmen. Das Schwierigste ist, den Wert von D zu berechnen. Lagrange hat dafür drei Methoden angegeben; eine 1767, eine andere 1795, die dritte 1798. Die erste stützt sich auf die Gleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeldifferenzen von $f(x) = 0$ sind. Von dieser Hilfsgleichung leitet er die Anzahl von imaginären Wurzeln ab. Man wird sich erinnern, daß schon früher Waring diese wichtige Hilfsgleichung abgeleitet hatte; Lagranges Exposition ist aber viel eleganter. Warings Schriften waren Lagrange 1767 noch nicht bekannt.

Gleiche Wurzeln werden durch die Divisionsoperation zur Entdeckung des größten gemeinschaftlichen Teilers von $f(x)$ und $f'(x)$ bestimmt. Allgemeine charakteristische Beziehungen zwischen den Koeffizienten von $f(x) = 0$ für den Fall, daß $f(x)$ und $f'(x)$ einen gemeinschaftlichen Teiler haben, oder $f(x)$ eine vorgeschriebene Anzahl mehrfacher Wurzeln besitzt, werden von Lagrange weder hier noch in späteren Schriften entwickelt. Hätte er sein beliebtes Werkzeug, die symmetrischen Funktionen, auf die Vervollkommnung der Theorie der mehrfachen Wurzeln angewandt, so wäre er nach der Ansicht Sylvesters[1]) auf einem Rückwege sehr wahrscheinlich auf die Entdeckung des Sturmschen Satzes gekommen. Die Berechnung der negativen Wurzeln in der Gleichung für die Quadrate der Wurzeldifferenzen liefert Lagrange die Werte β, welche in den imaginären Wurzeln $\alpha + i\beta$ der vorgelegten Gleichung erscheinen. Um α zu finden, setzt er in die vorgelegte Gleichung $x = \alpha + i\beta$, und erhält durch Trennung der reellen und imaginären Glieder zwei Gleichungen, die für denselben Wert von β einen gemeinschaftlichen Teiler haben. Setzt man denselben gleich Null, so kann man α berechnen.

Es ist bemerkenswert, daß Lagrange die Kettenbrüche mit Vorliebe als ein Mittel zur Wurzelberechnung von bestimmten, sowie unbestimmten Gleichungen angewandt hat. Für erstere beschreibt er eine ganz neue Näherungsmethode. Ist p der erste Näherungswert einer Wurzel α von $f(x) = 0$, setze man $x = p + \frac{1}{y}$, dann in der resultierenden Gleichung $f(y) = 0$, $y = q + \frac{1}{z}$, ferner in $f(z) = 0$, $z = r + \frac{1}{u}$ usw. Es ergibt sich daraus ein Kettenbruch für den

---

1) Philosophical Magazine, Vol. 18, 1841, p. 249.

Wert von x, welcher alternierend zwei Arten von Näherungsbrüchen des x liefert. Die Werte der einen Art sind alle $> \alpha$, die der anderen Art sind alle $< \alpha$. Die Eigenschaften dieser Ausdrücke werden mit Meisterhand entwickelt. Bei einer rationalen Wurzel wird der Kettenbruch endlich und liefert den genauen Wert derselben. Bei einer irrationalen Wurzel kennt man bei jeder einzelnen Annäherung die Größe des Fehlers, was bei der Newtonschen Methode bekanntlich nicht der Fall ist.

Um diese Schrift zu ergänzen und seine Methode zu vereinfachen, schrieb Lagrange Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques[1]). Die Gleichung der quadrierten Wurzeldifferenzen wird vollständiger besprochen. In derselben kann die Anzahl imaginärer Wurzelpaare die Anzahl Zeichenfolgen nicht übersteigen. Durch bloße Besichtigung der Zeichen kann man entscheiden, ob die Anzahl reeller Wurzeln eine der Zahlen 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, ..., oder ob sie eine von 2, 3, 6, 7, 10, 11, ... ist. Dieses genügt, die ganze Anzahl von reellen und von imaginären Wurzeln in allen Fällen zu entscheiden, wo der Gleichungsgrad nicht höher als 5 ist, und wo für höhere Grade man im voraus weiß, daß nicht mehr als 4 imaginäre Wurzeln vorkommen.

Es folgen Anwendungen auf die vier ersten Grade. Bei der Kettenbruchentwicklung der numerischen Wurzeln wird hervorgehoben, daß auch ein unendlicher Kettenbruch den genauen Wurzelwert liefert, wenn nur dieser Bruch periodisch ist. Daß jeder periodische Kettenbruch auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt werden kann, war längst bekannt; der inverse Satz wird aber hier zum erstenmal demonstriert. Den Spezialfall, $x^2 = c$, hatte Euler früher[2]) ohne Nachweis angeführt, wo $\sqrt{c}$ zu einem periodischen Kettenbruch entwickelt wurde.

Obschon die Näherungsmethode von Lagrange theoretisch vortrefflich ist und vor älteren Methoden den Vorteil besitzt, immer mit Sicherheit zum Ziele zu führen, so daß Lagrange mit Recht behaupten konnte, „cette méthode ne laisse, ce me semble, rien à désirer", besaß sie für praktische Zwecke geringen Vorteil, denn die Wurzel wird in der Form eines Kettenbruchs ausgedrückt und die Berechnung derselben ist mühsam.

Ein Werk, Traité de la résolution des équations en général, von J. Raym. Mourraille in Marseille 1768 herausgegeben, behandelt hauptsächlich die Auflösung von Gleichungen durch Annäherung. Während vierzehn Jahren, bis 1782, war Mourraille

[1]) Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1768, T. 24, Berlin 1770, p. 111—180 = Oeuvres, T. 2, p. 581—652. [2]) N. Comm. Petr. XI, 1765.

Sekretär de la classe des sciences der Akademie von Marseille. Zur Zeit der Revolution wurde er zum Bürgermeister der Stadt ernannt und später verschiedener Verbrechen angeklagt[1]). Sein Werk über Gleichungen ist eigentümlich. Von zu großem Umfange und für den Anfänger zu abstrakt in der Behandlungsweise scheucht es den Fachmann durch die Unbündigkeit vieler seiner Beweise zurück. Dennoch ist es nicht ganz ohne Verdienst. Außer einer Rezension im Journal des Sçavans in Amsterdam, März 1769, haben wir gar keine Äußerungen darüber finden können. Unter Mathematikern blieben das Werk und der Name des Autors ganz unbekannt. Der Verfasser gesteht, daß er sich keine Mühe gegeben habe, sich über die Literatur seines Faches zu orientieren. Nur englische Schriftsteller vor Waring und der Franzose Reynau werden von ihm genannt. Newtons Annäherungsmethode ist der Hauptgegenstand seines Werkes und wird von ihm nicht analytisch, sondern aus den allgemeinen Eigenschaften der Kurven entwickelt. Auf diese Weise sei es ihm möglich geworden, die Mängel der Newtonschen Methode zu heben. Er verhütet das Mißlingen der Operation dadurch, daß er erst die Kurve beschreibt und dann den ersten Annäherungswert A der Wurzel a so wählt, daß die Kurve für die Strecke $x = a$ bis $x = A$ gegen die X-Achse konvex ist. Man wird beachten, daß auch andere Mathematiker dieser Zeit zur Geometrie und dem Kurvenzeichnen Zuflucht nehmen, um die analytischen Mängel ihrer Näherungsmethoden zu ersetzen.

Angeregt durch Segners Aufsatz aus dem Jahre 1759 veröffentlichte John Rowning[2]), ein „fellow" von Magdalenen College in Cambridge und später Pfarrer an diesem College[3]), einen Artikel, Directions for making a Machine for finding the Roots of Equations universally, with the Manner of using it.[4]) Wenn die verschiedenen Linien in Segners Figur (S. 141) durch Lineale mit Rinnen dargestellt werden, und PO, RQ, Aa, Ba, sowie die Punkte A, B, C, D unbeweglich gemacht werden, während pc und qe sich nur MN parallel bewegen können, und Cc, De beweglich sind, dann kann man die Linie ST parallel nach rechts oder links stoßen, ohne die Konstruktion der Figur zu vernichten. Wenn nun TS eine Lage annimmt, wo $fs = 0$, dann ist OS eine reelle Wurzel, die negativ ist, wenn OS nach links weist. Rowning gibt eine Abbildung seiner interessanten Maschine.

---

[1]) A. Fabre, Histoire de Marseille T. II, Marseille et Paris 1829, p. 409, 482, 496, 499. [2]) 1701?—1771. [3]) Dictionary of National Biography. [4]) Philos. Trans. Vol. 60, for the year 1770, p. 240—256.

In einer Untersuchung, Observationes circa radices aequationum[1]), leitet L. Euler eine Reihe ab, welche die größte Wurzel einer Gleichung $1 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$ ausdrückt, und erhält dann durch Induktion die entsprechende Reihe für $1 = \frac{A}{x^\lambda} + \frac{B}{x^\mu}$. Er schreitet nun zu quadrinomischen und endlich zu allgemeinen Gleichungen und zeigt, daß nicht nur irgend ein Wurzelwert, sondern auch irgend eine Potenz eines solchen durch Reihen dargestellt werden kann.

In der Abhandlung, Observations analytiques[2]), erzählt Lambert, daß er seine 1758 in den Acta Helvetica gedruckte Behandlung von trinomischen Gleichungen bei seiner Ankunft in Berlin, 1764, Euler und später auch Lagrange mitteilte, worauf Euler diese Resultate auf quadrinomische Gleichungen $0 = x^m + ax^n + bx^p + c$ übertrug und Lagrange auch die allgemeinere Gleichung $\alpha - x + \varphi(x) = 0$ (wo $\varphi(x)$ irgend eine Funktion ist) untersuchte[3]). Dieses Thema führt nun Lambert weiter fort. In einer Gleichung $\varphi(y) = \psi(x, y)$ soll x oder irgend eine Funktion von x oder von x und y mittels der Differentialrechnung in Reihenentwicklung durch y bestimmt werden.

In der ersten von den zwei 1776 eingereichten Abhandlungen[4]) spricht Euler anerkennend von der Lambertschen Reihenentwicklung der Wurzelwerte einer trinomischen Gleichung. Die zwei Abhandlungen stehen in enger Verbindung mit der letzten von uns angeführten Eulerschen Schrift Observationes circa radices aequationum. Hier wie dort sollen nicht nur die Wurzeln selbst, sondern auch irgendwelche Potenzen derselben durch Reihen dargestellt werden; die Reihenentwicklung sucht er nun zu vereinfachen und zu präzisieren und von allem Mysterium zu befreien. Die Schriften von Lagrange über Auflösung der Gleichungen durch Reihen erwähnt Euler nicht.

In dem Aufsatze Eulers, Nova ratio quantitates irrationales proxime exprimendi,[5]) werden rasch konvergierende Reihen entwickelt, um Irrationalgrößen $N^{\frac{\mu}{\nu}} = (a^\nu + b)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^\mu(1 + \frac{b}{a^\nu})^{\frac{\mu}{\nu}}$ zu

[1]) N. Comm. Petr. T. XV pro anno 1770. Petropoli 1771, p. 51—74.
[2]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1770. Berlin 1772, p. 225—244.
[3]) Man sehe „Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries". Mémoires de Berlin t. 24, 1770 = Lagrange, Oeuvres t. III, p. 5—73 und „Sur le problème de Képler" ebenda, t. 25, 1771 = Oeuvres t. III, p. 113—138.
[4]) N. Acta Petr. IV, 1786, p. 55—73, p. 74—95.
[5]) N. Comm. Petr. T. XVIII pro anno 1773. Petropoli 1774, p. 136—170.

berechnen. Wenn die Binomialentwicklung von $(1+x)^n$ durch $1-\alpha x$ multipliziert wird, erhält man

$$(1+x)^n = (1 + Ax + Bx^2 + \cdots) : (1-\alpha x).$$

Setzt man nun $A = 0$, wird $\alpha = n$ und der Näherungswert $= \frac{1}{1-nx}$. Setzt man statt dessen $B = 0$, wird $\alpha = \frac{n-1}{2}$ und der Näherungswert $= \frac{2+(n+1)x}{2-(n-1)x}$ usw. Euler verfährt auf ähnliche Weise, indem er statt $1-\alpha x$ den Nenner $1-\alpha x+\beta x^2$ und später noch irgend ein Polynom nimmt. Die Brauchbarkeit der errungenen Formeln wird durch Aufgaben in der Wurzel-, Logarithmen- und Exponentialberechnung erläutert.

In einer Abhandlung, Methodus generalis investigandi radices omnium aequationum per approximationem[1]), die Euler schon 1776 einreichte, soll eine Wurzel z der Gleichung $Z=0$ berechnet werden. Setzt man für z den Näherungswert v ein, so erhält man einen Ausdruck $Z = V$, wo V eine bekannte Funktion von v ist, welche für $v = z$ verschwindet. Umgekehrt ist v eine Funktion von V, also etwa $v = \Gamma : V$. Nun ist $\Gamma : (V+a) = v + ap + \frac{1}{2}a^2q + \cdots$, wo $p = \frac{dv}{dV}$, $q = \frac{d^2v}{dV^2}$, $\cdots$ Wenn $a = -V$, so erhält man die Reihe $z = v - pV + \frac{1}{2}qV^2 - \cdots$, welche in der Berechnung von Wurzeln anwendbar ist. Die Konvergenz der Reihe wird nicht untersucht. Ein Nachteil der Methode besteht darin, daß man nicht weiß, welchen Grad der Genauigkeit man erreicht hat.

In den Riflessioni sul Metodo di risolver l'equazioni numeriche proposto dal Sig. De-la-Grange[2]) hebt der Padre Stanislao Canovai (1740—1811) hervor, daß die Hauptteile der Lagrangeschen Theorie schon früher von Waring und anderen entwickelt worden und versucht dann eine einfachere Entwicklung dieser Theorie zu geben.

Lagrange schrieb 1777 an Lorgna,[3]) daß seine Untersuchung über die numerische Auflösung der Gleichungen aus den Jahren 1767 und 1768 von Mathematikern größere Aufmerksamkeit verdiene als sie wirklich erhalten habe. Nach der Veröffentlichung seiner Schrift De la résolution des équations numériques de tous les degrés, Paris, an VI (1798), schickte Lagrange ein Exemplar an

---

[1]) N. Acta Petr. T. VI, ad ann. 1788. Petropoli 1790, p. 16—24. [2]) Atti dell' accademia delle scienze di Siena detta de' Fisio-Critici, Tomo VII, 1794, p. 29—45. [3]) Lagrange, Oeuvres T. XIV, p. 253.

Pietro Paoli mit der Bemerkung: „Es enthält meine alten Memoiren über die Auflösung numerischer Gleichungen, ... mit mehreren Noten über diese Memoiren, sowie auch über andere Punkte der Gleichungstheorie. Ich fügte jene Noten bei, um die Aufmerksamkeit von Mathematikern auf diesen wichtigen Gegenstand der Analyse zu richten, welchen sie beinahe verlassen zu haben scheinen."[1]) Die zwei ersten Noten enthalten Verbesserungen in den Beweisen der Fundamentalsätze, 1) daß zwischen a und b, wo $f(a) = +$ und $f(b) = -$, wenigstens eine reelle Wurzel liegt, (2) daß, wenn eine reelle Wurzel zwischen a und b liegt, $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Zeichen haben. Einen ähnlichen Zweck hat Note III, worin er die Gleichung der Wurzeldifferenzen behandelt. Hier werden die Arbeiten von Waring erwähnt und daraus die Gleichung, deren Wurzeln die quadrierten Wurzeldifferenzen der Quintik sind, entnommen. Lagrange selber hatte die Koeffizienten dieser Gleichung nie berechnet. Es wird dann in Note IV das Problem weiter untersucht, eine Zahl D zu finden, die kleiner als die kleinste Wurzeldifferenz ist. Die erste Berechnungsweise von D wurde von ihm 1767 erklärt; die zweite wurde 1795 in Vorlesungen auf der Normalschule vorgetragen.[2]) Die dritte ist eine Modifikation der zweiten und nicht ganz so schwerfällig. Die Annäherungsmethoden von Newton und Raphson werden in Note V kritisch untersucht. Es stellt sich heraus, daß Newtons Methode mit Sicherheit nur zur Berechnung der größten oder kleinsten reellen Wurzeln derjenigen Gleichungen dient, in welchen der reelle Teil α jeder imaginären Wurzel $\alpha + i\beta$ zwischen der größten und der kleinsten reellen Wurzel liegt. Zunächst werden die Annäherung durch rekurrente Reihen und die Fontainesche Auflösungsmethode untersucht. Er zeigt, daß Fontaines Verfahren selbst für Gleichungen niedrigen (z. B. dritten) Grades nicht immer zum Ziele führt. Es folgen dann Noten mit historischen Angaben über Wurzelgrenzen, die Reellität der Wurzeln und die Möglichkeit, alle imaginären Wurzeln einer Gleichung in der Form $a + \sqrt{-1}\,b$ auszudrücken. Note X betrifft die Zerlegung eines Polynoms in reelle Faktoren, Note XI weitere Approximationsformeln zur Berechnung der Wurzelwerte. Die letzte Note behandelt Transformationen, welche Gleichungen liefern, in denen alle x enthaltende Glieder einerlei Zeichen haben und das absolute Glied das entgegengesetzte Zeichen besitzt.

---

[1]) Memorie della regia accad. di scienze in Modena, Serie III, T. I, 1898, p. 109. [2]) Séances des écoles normales, T. 3, p. 466 = H. Niedermüller, op. cit., p. 90—97.

Eine geometrische Methode, die Wurzeln von Gleichungen zu bestimmen, wird von Teodoro Bonati (1724—1820), einem in Ferrara gebürtigen italienischen Arzte, beschrieben[1]. Die Natur und Lage der Wurzeln soll durch die Gleichungskurve bestimmt werden. Um diese zu zeichnen, wird die Gleichung anfangs durch Transformation von dem vorletzten Gliede befreit. Hat man z. B. $x^5 - 5ax^4 + 5cx^3 - 5hx^2 + i = 0$ und setzt man $\frac{dy}{dx} = 0$, so hat man auch $x = 0$ und man hat auf der Y-Achse einen Maximum- oder Minimumpunkt der Kurve, welcher zur bequemeren Zeichnung der Kurve dient. Die übrigen solcher Punkte werden durch Verschiebung der Y-Achse nach rechts oder links gefunden.[2]

Unter den Spezialuntersuchungen über Gleichungstheorie bringen wir in erster Linie die Diskussion über den irreduktiblen Fall in der Lösung von Kubikgleichungen. Zahlreiche Schriften über diesen Gegenstand wurden verfaßt, besonders in Italien. Obschon keine neuen Resultate gewonnen wurden, war die Diskussion doch nicht ohne Erfolg, denn viele Mathematiker überzeugten sich allmählich von den Vorteilen, welche imaginäre Größen in der Gleichungstheorie gewähren. Lagrange schrieb an Lorgna 1777 aus Berlin:[3] „Als einen der wichtigsten Schritte, welche die Analyse in letzter Zeit genommen hat, erachte ich, daß sie durch imaginäre Größen nicht länger in Verlegenheit gesetzt wird, und daß dieselben der Rechnung unterzogen werden, eben wie reelle Größen.“

Allgemeine Gesichtspunkte werden nicht ohne Mühe erreicht. Als Beispiel dient die Äußerung, die in dieser Zeit gelegentlich gemacht wurde, daß die Algebra keine allgemeine Auflösung kubischer Gleichungen kenne[4].

Ein bloßer formaler Ausdruck, wie die Del Ferrosche Formel für den irreduktiblen Fall, welcher numerische Wurzelwerte zu berechnen nicht gestattete, wurde nicht selten von algebraischen Lösungen ausgeschlossen. Blassière ist der Ansicht, daß, obschon eine allgemeine Lösung von $x^3 + qx + r = 0$ nicht möglich sei, er die Möglichkeit einer allgemeinen Lösung von $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ doch nicht leugnen möchte.

---

[1] Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, Tomo VIII, Pt. I, Modena 1799, p. 231—272. [2] Abhandlungen von P. Franchini und T. V. de Caluso in Mémoires de l'acad. de Turin, année 1792 à 1800, T. VI, werden hier ausgelassen, weil erst 1800 gedruckt. [3] Lagrange, Oeuvres, T. XIV, p. 261. [4] Z. B. Paoli Frisii operum tomus primus algebram et geometriam analyticam continens, Mediolani 1782, p. 269, und J. J. Blassière in Verhandel. uitgegeeven door de Hollandsche Maatschappye der Weetensch. te Haarlem, VIII. Deels I. Stuk, 1765, S. 197—220.

Ein schon früher erwähntes Werk von Francis Maseres, betitelt A dissertation on the use of the negative sign in algebra ... showing how quadratic and cubic equations may be explained, without the consideration of negative roots, erschien 1758 in London. Negative Wurzeln verwerfend, behauptet Maseres, die Gleichung $x^2 - xp = r$ habe nur eine Wurzel. Bei der Gleichung $x^3 + px^2 + qx = r$ bespricht er die sieben Fälle, die man erhält, wenn nicht mehr als zwei Glieder auf der linken Seite das —Zeichen erhalten und zählt die Anzahl Wurzeln jeden Falles auf. Er teilt die kubischen Gleichungen in solche erster, zweiter und dritter Art, je nachdem kein Glied, das dritte oder das zweite Glied fehlt. Er zeigt, wie die übrigen auf solche dritter Art transformiert werden können und erklärt die Auflösung jeden Falles. Alles ist mit langweiliger Weitläufigkeit auseinandergesetzt. Die große Anzahl spezieller Fälle, welche seine Auffassung der Algebra erfordert, bezeugt, wie sehr bequem und zeitersparend negative Größen wirklich sind, indem sie alle Fälle in einen einzigen einschließen. Maseres ist aber gewissenhaft. Die Möglichkeit einer solchen Algebra sieht er nicht ein und er zieht die Logik der Einfachheit vor, so lange er nicht beide gleichzeitig haben kann. Der irreduktible Fall für $y^3 - cy = d$, wo $d < \frac{2c\sqrt{c}}{3\sqrt{3}}$, hänge in seiner Auflösung von $cy - y^3 = d$ ab. Letztere Gleichung habe zwei Wurzeln, die man durch Dreiteilung eines Kreisbogens erhalten könne. Wenn $x^3 - px^2 + qx = r$ Wurzeln hat, setze man $x = \frac{p}{3} - y$ und finde die kleinste durch Auflösung von $y^3 - cy = d$, wo $d > \frac{2c\sqrt{c}}{3\sqrt{3}}$, $c = \frac{p^2}{3} - q$, $d = \frac{pq}{3} - \frac{2p^3}{27} - r$. Die zwei übrigen erhalte man durch die Berechnung der zwei Wurzeln von $cy - y^3 = d$ und $x = \frac{p}{3} + y$.

In den Artikeln in Diderots Encyclopédie über den irreduktiblen Fall[1]) erklärt D'Alembert, daß die Cardansche Formel nicht bloß eine Wurzel, wie gewisse Mathematiker (z. B. Clairaut) behaupten, sondern gleichzeitig alle drei darstellen. Der Übelstand beim irreduktiblen Fall bestehe darin, daß man $x = y + z$ setze, wo y und z unbestimmt sind, und dann zugleich $-3yz = q$ annehme, wodurch y und z imaginär werden. Diese Annahme sei nicht nötig und werde gemacht, nur um die Werte von y und z leichter abzuleiten. Es sei aber sehr schwierig, wenn nicht unmöglich, diese An-

[1]) Man sehe auch die Encyclopédie méthodique (mathématiques), Paris 1784, Art. „Cas irréductible".

nahme durch eine bessere zu ersetzen. Daß das Del Ferrosche Verfahren schon von Anfang falsch sei, behaupten auch Frisius[1]) und Francesco Domenico Michelotti[2]). Der Aufsatz Sur l'expression de certaines quantités imaginaires[3]) von D'Alembert dient als Ergänzung seiner Artikel in Diderots Encyclopédie. Er hebt unter anderem hervor, daß aus $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$ man nicht schließen dürfe $1+h\sqrt{-1} = 1-h\sqrt{-1}$, wo h nicht Null sei. In dieser paradoxen Gleichung nimmt er $h = \tan A = \tan(\Theta \pm 2n)\pi$ an und, um die Gleichung $\cos mA + \sin mA \cdot \sqrt{-1} = \cos mA - \sin mA \cdot \sqrt{-1}$ oder $\sin mA = -\sin mA$ zu befriedigen, soll $mA = \pm\mu\pi$, wo μ eine ganze Zahl ist, weshalb $m(\Theta \pm 2n) = \pm\mu$ ist, und die Werte von m festgesetzt sind.

Ein vielsagender Kommentar über den Scharfblick gewisser Verfasser von Schriften, sowie der Herausgeber der Nova acta eruditorum sind zwei anonyme Artikel[4]), worin gezeigt werden soll, daß kubische Gleichungen, die drei reelle Wurzeln haben

$$(\text{wie } x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0),$$

zugleich noch drei imaginäre Wurzeln besitzen mögen.

Jean-François-Mauro-Melchior Salvemini de Castillon (1709—1791), aus Toskana gebürtig, tut einen reaktionären Schritt in der Erklärung[5]), daß die Del Ferrosche Formel nur auf arithmetische Gleichungen Bezug habe; Gleichungen, die sich auf geometrische Aufgaben beziehen, lassen sich durch geometrische Konstruktion leicht erledigen. Viele Algebristen trauen der Algebra blindlings. Für das Problem, zwei Zahlen zu finden, deren jede das Quadrat der anderen sei und deren Summe dem Kubus einer von ihnen gleich sei, liefere die Algebra Ausdrücke, obschon der gesunde Menschenverstand die Unmöglichkeit derselben leicht erblicke. Diese Bemerkung wurde durch die Äußerung Lagranges hervorgerufen, daß $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ das Quadrat von $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$ sei; Lagranges Autorität hatte bei Castillon weniger Gewicht als bei anderen Mathematikern, weil letzterer ein Mitbewerber für die Stelle als Nachfolger von Euler an der Berliner Akademie gewesen war und zu Lagrange in gespannten Beziehungen stand[6]).

---

[1]) Atti dell' accademia delle scienze di Siena detta de' Fisio-Critici, T. IV, 1771, p. 20—24. [2]) Antologia Romana T. IV, 1778, p. 300—302. [3]) Opuscules mathématiques T. V, Pt. I, p. 183—215. [4]) Anni 1775, p. 60—84, 104—116. [5]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1783, Berlin 1785, p. 244—265. [6]) Lagrange, Oeuvres, T. XIII, p. 79, 89, 202, 205.

Die Entwicklung des Cardanschen Ausdruckes, wie man allgemein zu sagen pflegte, in Reihen, von Nicole schon 1738 vorgeschlagen, wurde später von mehreren angeraten. Maseres veröffentlichte A method of extending Cardan's rule for solving one case of a cubick equation of this form $x^3 * - qx = r$, to the other case of the same equation, which it is not naturally fitted to solve, and which is therefore often called the irreducible case[1]), worin die Entwicklung der Wurzelwerte durch die Binomialformel in Reihen gegeben wird.

Kästner äußerte sich 1794 so: „Sonderbar ist, daß man in Italien noch in neueren Zeiten sich mit dieser Untersuchung viel zu tun gemacht hat." Er selber habe seine Betrachtungen in dem 1757 herausgegebenen Programm Formulam Cardani aequationum cubicarum radices omnes tenere cet. vorgetragen.

Schriften von den Italienern Frisi und Michelotti haben wir schon angeführt. Francesco Maria Zanotti (1692—1777) zeigt[2]), daß, wenn $r + i = \sqrt[3]{A + \sqrt{-B}}$, dann sei auch $r - i = \sqrt[3]{A - \sqrt{-B}}$, wodurch leicht zu ersehen sei, wie der Cardansche Ausdruck für die Wurzeln im irreduktiblen Fall reell sein kann. Ähnliche Nachweise findet man bei mehreren Mathematikern.

In einem Aufsatze, De casu irreductibili tertii gradus et seriebus infinitis, Verona 1776 (?)[3]), gibt Antonio Maria Lorgna[4]) (1735—1796) von der Militärschule zu Verona eine Auseinandersetzung der Reihenentwicklung von den Cardanschen Wurzelausdrücken und der Zurückführung von der Summation dieser Reihen auf die Integralrechnung. In einem Briefe an ihn gibt Lagrange[5]) eine Berichtigung betreffs einer Elimination. Malfatti kritisierte die Reihenbehandlung.

In einem Aufsatze des Jahres 1782, Dell' Irreducibilità della Formula Cardanica a forma finita, algebraica, e libera da aspetto immaginario[6]), sucht Lorgna einen kürzeren Beweis als den des Jahres 1776 vorzuführen. Er zeigt, daß die Cardansche Formel für den irreduktiblen Fall der Gleichung $x^3 - px - q = 0$ nicht gleich $x + \sqrt{v}$ oder $\sqrt{v}$ oder $x\sqrt[3]{v}$ oder einer

[1]) Phil. Trans. Vol. 68 for the year 1778, Pt. II, London 1779, p. 902—949.
[2]) De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii Tomi Quinti Pars Prima, 1767, p. 145—151.
[3]) Über das Datum sehe man Bullettino Boncompagni, T. VI, Roma 1873, p. 101 ff.
[4]) Man sehe Bullettino Boncompagni, T. X, p. 1—74.
[5]) Lagrange, Oeuvres, T. XIV, p. 261.
[6]) Memorie di Matematica e Fisica della società Italiana. Tomo I, Verona 1782, p. 707—746.

größeren endlichen Anzahl solcher reellen Glieder sein kann, wo x und v rational angenommen werden und Gleichungen mit rationalen Wurzeln ausgeschlossen sind. In der Anwendung dieser Ergebnisse kommt aber ein unheilbarer Fehlschluß vor. Diese Abhandlung wurde der Akademie zu Padua, die 1781 eine Preisfrage über den irreduktiblen Fall gestellt hatte, eingereicht. Durch den Einfluß eines der Schiedsrichter, Nicolai, wurde der Preis vorenthalten[1]).

In Paulli Frisii operum tomus primus, 1782, wird im 10. Kapitel der irreduktible Fall eingehend besprochen. Im folgenden Jahre erschien in Padua eine Abhandlung Della possibilità della reale soluzione analitica del caso irreducibile von Lorgnas Gegner Giambatista Nicolai (1726—1795), Lehrer der Mathematik an der Universität zu Padua. Durch Operationen, die nicht alle mit $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1$ im Einklang sind, leitet Nicolai die Paradoxie ab $(1+\sqrt{1-q}):(1-\sqrt{1-q}=(1-\sqrt{1-q}):(1+\sqrt{1-q})$. Durch ähnliche Fehlschlüsse ergibt sich ihm das Resultat, daß der irreduktible Fall von imaginären Größen befreit werden kann[2]).

Dieser Aufsatz entflammte einen langen Streit. Sebastiano Canterzani schrieb drei Aufsätze, um heterodoxe Ideen dieser Art zu widerlegen[3]).

Petronio Maria Caldani (1735—1808), Professor zu Bologna, schrieb einen Brief an Padre Jacquier, worin er Nicolais Fehlschluß im Beweise, daß

$$(1+\sqrt{1-q}):(1-\sqrt{1-q})=(1-\sqrt{1-q}):(1+\sqrt{1-q})$$

sei, hervorhebt. Nicolai schreibe $-\sqrt{-1}\sqrt{-1+q}=-\sqrt{1-q}$, anstatt $+\sqrt{1-q}$[4]). Es erschienen noch mehrere Streitschriften über diesen Gegenstand in italienischen Journalen, welche die Frage, ob das Produkt von $-\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ positiv oder negativ sein soll, diskutieren[5]).

Es erschienen auch Abhandlungen von den Brüdern Vincenzo und Giordano Riccati[6]).

Eine klare Diskussion des irreduktiblen Falles gab Lagrange[7]) in seinen Vorlesungen des Jahres 1795. Er hebt hervor, daß das

[1]) Bullettino Boncompagni, T. VI, 1873, p. 122, 123. [2]) Näheres auch in De studiis philosophicis et mathematicis, Matriti 1789, von Juan Andrès, p. 158—181. [3]) Man sehe Antologia Romana, Tomo XIV, 1788, p. 114. [4]) Antologia Romana, Tomo X, 1784, p. 33—37. [5]) Antologia Romana, Tomo X, p. 61—62, 313—317, 401—405; Tomo XI, p. 33—46, 49—54, 57—62. Giornale de' confini d'Italia 1783, num. 43; 1784, num. 13. [6]) Nuovo Giornale, Modena, T. 24, p. 170—205; T. 28, p. 256. [7]) Séances des écoles normales, an III, 3. Vorlesung = H. Niedermüller, op. cit., p. 48—69.

Imaginäre in der Cardanschen Wurzelform von der Annahme $x = y + z$ unabhängig sei.

Als Einzeluntersuchung über Gleichungen ist noch anzuführen eine Schrift, De aequationibus indefinitis, deque methodo indeterminatarum[1]), von Gregorio Fontana, über die Aufgabe in Eulers Anleitung zur Algebra[2]), eine reelle Wurzel der Gleichung mit unendlichen Exponenten $x^\infty - x^{\infty-1} - x^{\infty-2} - \cdots - 1 = 0$ zu finden. Man schreibe die Gleichung $x^\infty + (1 - x^\infty) : (x - 1) = 0$ oder $x^{\infty+1} - 2x^\infty + 1 = 0$, oder $x - 2 + \frac{1}{x^\infty} = 0$ und es sei dann klar, daß $x = 2$ sei. Die Lösung der Gleichung $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (n+1)x^n = 0$ hänge von der Lösung der Trinomialgleichung $(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1 = 0$ ab, wie aus der Division $1 : (1 - x)^2$ zu ersehen sei.

Zahlentheorie.

Am Anfange unserer Zeitperiode ist L. Euler noch immer der einzige hervorragende Mathematiker, welcher sich mit der Zahlentheorie beschäftigte. Die erste seiner hierher gehörigen Schriften gibt die Auflösung der simultanen Gleichungen $x + y + z = u^2$, $xy + xz + yz = v^2$, $xyz = w^2$.[3]) Euler bemerkt, daß er an der Auflösung dieses Problems beinahe verzweifelte, so viel Mühe habe ihm dieselbe gekostet. Wie wir bald sehen werden, hat er später diese Aufgabe auf vier Zahlen x, y, z, s ausgedehnt und noch andere bedeutend schwierigere unbestimmte Gleichungen dieser Art gelöst. Die kleinsten von Null verschiedenen ganzen Zahlenwerte für x, y, z im gegenwärtigen Problem sind

$$x = 1633780814400, \quad y = 252782198228, \quad z = 3474741058973.$$

Wenn diese durch 2315449^2 dividiert werden, erhält man Bruchwerte von x, y, z.

Im gleichen Bande kehrt Euler in der Schrift Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata[4]) zum Studium der Potenzreste zurück, die er schon ein Vierteljahrhundert früher bei Betrachtungen über den Fermatschen Satz untersucht hatte. Er erforscht die durch Division der sukzessiven Glieder arithmetischer

---

[1]) Atti dell' accademia delle scienze di Siena, T. VI, p. 184—191.
[2]) 2. Tl., 1. Absch., Kap. 16, § 239.
[3]) N. Comm. Petr. VIII, 1760—61, p. 64—73 = Comm. Arith. I, p. 239.
[4]) N. Comm. Petr. VIII, 1760—61, p. 74—104 = Comm. Arith. I, p. 274.

und geometrischer Reihen erhaltenen Reste, und erhält den wohlbekannten Ausdruck für die Anzahl der Zahlen, die prim zu einer gegebenen Zahl und nicht größer als dieselbe sind. Ist die gegebene Zahl das Produkt dreier ungleichen Primzahlen p, q, r, dann ist diese Anzahl $=(p-1)(q-1)(r-1)$. Dieser Ausdruck, dessen Verallgemeinerung Euler andeutet, wird öfters die „Eulersche Funktion" genannt. Am Ende der Schrift findet er folgende Erweiterung des von ihm in früheren Jahren schon zweimal bewiesenen Fermatschen Lehrsatzes: Wenn N prim zu x ist und n die Anzahl der Zahlen bezeichnet, die prim zu N und nicht größer als N sind, so ist $x^n - 1$ immer durch N teilbar.

In einer dritten Arbeit über Zahlentheorie in diesem Bande, nämlich Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur[1]) sind die Eigenschaften ganzer Zahlen von der Form $a^2 + 3b^2$ entwickelt und auf das Problem angewandt, drei Kubikzahlen zu finden, deren Summe eine Kubikzahl ist, sowie auf die Vervollständigung seines Beweises des berühmten Fermatschen Unmöglichkeitssatzes über $x^n + y^n = z^n$, für den Fall $n = 3$. Man wird sich erinnern, daß schon zweiundzwanzig Jahre früher Euler, für den Fall $n = 4$, den Unmöglichkeitsbeweis geliefert hatte. (Bd. III[2], S. 613.)

Im Aufsatze De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros[2]) wird die Auffindung rationaler oder ganzzahliger Werte von x und y der Gleichung $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = y^2$ betrachtet, ohne daß allgemeine Gesichtspunkte erreicht würden. Großes Gewicht legt Euler auf folgenden Satz: Wenn die Gleichung $\alpha x^2 + p = y^2$ für $x = a$ und $y = b$, und die Gleichung $\alpha x^2 + q = y^2$ für $x = c$, $y = d$ erfüllt sind, dann sind $x = bc \pm ad$ und $y = bd \pm \alpha ac$ Lösungen von $\alpha x^2 + pq = y^2$. Wäre Euler die Zahlentheorie der Inder zugänglich gewesen, würde er diesen schönen Satz schon in den Arbeiten von Bhaskara gefunden haben[3]).

In seiner Schrift De numeris primis valde magnis[4]) vergleicht er die Auffindung des Gesetzes der Verteilung der Primzahlen mit dem Problem der Quadratur des Kreises: beide gehen über unsere Fassungskraft. Daß die Fermatsche Formel $2^{2^m} + 1$ immer Primzahlen darstelle, hatte Euler in seinem allerersten 1732—33 er-

---

[1]) N. Comm. Petr. VIII, 1760 et 1761, p. 105—128 = Comm. Arith. I, p. 287. [2]) N. Comm. Petr. IX, 1762—63, p. 3—39 = Comm. Arith. I, p. 297. [3]) H. Hankel, Gesch. d. Math. in Alterth. u. Mittelalt., Leipzig 1874, S. 200. [4]) N. Comm. Petr. IX, 1762—63, p. 99—153 = Comm. Arith. I, p. 356.

schienenen Aufsatze über Zahlentheorie[1]) widerlegt. Nun zeigt er, daß es keine algebraische Funktion $X \equiv \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots$ gebe, welche nur Primzahlen darstelle; denn, wenn $x = a$ und $A \equiv \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \cdots$, erhält man im Falle $x = nA + a$ für X einen Wert, der durch A teilbar ist. Die Schrift endet mit mehreren Tabellen. Die erste enthält alle Primzahlen nicht größer als 1997 und von der Form $4n + 1$, jede als die Summe zweier Quadrate ausgedrückt, sowie die Werte von a, welche das Binom $a^2 + 1$ durch diese Zahl teilbar macht. Drei andere Tabellen folgen. Diese zeigen, welches fleißige empirische Studium Euler der Zahlentheorie widmete und wie es Euler möglich wurde, viele Lehrsätze durch bloße Anschauung zu entdecken.

Um die Lehre von den Kettenbrüchen leichter darzustellen und, im besonderen, um Gesetze zu entdecken, welche die Auffindung irgend eines Näherungswertes ohne die Berechnung aller vorangehenden gestatten, schuf Euler in einer Schrift, Specimen algorithmi singularis[2]), einen eigenen Algorithmus und dazu passende Rechnungsregeln, welcher er sich in einer drei Jahre später gedruckten wichtigen zahlentheoretischen Schrift, De usu novi algorithmi, bediente[3]) Ein Kettenbruch $a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$ wird durch das Symbol $\frac{(a, b, c)}{(b, c)}$ dargestellt; ein unendlicher Kettenbruch durch $\frac{(a, b, c, d, e \text{ etc.})}{(b, c, d, e \text{ etc.})}$. Man hat hier $(a, b, c, d, e) = e\,(a, b, c, d) + (a, b, c)$, auch $(a, b, c, d, e) = (e, d, c, b, a)$. Da nun $(a, b, c, d)\,(b, c, d, e) - (b, c, d)\,(a, b, c, d, e)$ $= (a, b, c, d)\,e(b, c, d) + (a, b, c, d, e)\,(b, c) - (b, c, d)\,e(a, b, c, d) - (b, c, d)\,(a, b, c)$ $= -\{(a, b, c)(b, c, d) - (b, c)(a, b, c, d)\} = \pm 1$, weil $(a)(b) - 1(a, b) = -1$ ist, läßt sich der Nachweis führen, daß die sukzessiven Näherungsbrüche sich dem wahren Werte des Kettenbruchs mehr und mehr nähern. Denn man hat $\frac{(a)}{1} - \frac{(a, b)}{(b)} = -\frac{1}{1\,(b)}$, $\frac{(a, b)}{(b)} - \frac{(a, b, c)}{(b, c)} = +\frac{1}{(b)\,(b, c)}$ usw. Zieht man letztere Gleichungen zusammen, so hat man die Entwicklung des Kettenbruchs in einer Reihe. Euler erhält durch Induktion Formeln dieser Art $(a, b, c, d)\,(e, f, g, h) - (a, b, c, d, e, f, g, h)\,1 = -(a, b, c)\,(f, g, h)$, $(a, b, c, d, e)\,(c, d, e, f, g, h) - (a, b, c, d, e, f, g, h)\,(c, d, e) = +(a)\,(g, h)$ und lehrt derartige Formeln in beliebiger Anzahl hinzu-

[1]) Comm. Petr., VI., 1732—33, p. 103 = Comm. Arith. I, p. 1; Cantor, Bd. III², S. 611. [2]) N. Comm. Petr. IX, pro annis 1762 et 1763. Petropoli 1764, p. 53—69. Vergl. S. Günther, Näherungswerthe von Kettenbrüchen, Erlangen 1872, S. 1—10. [3]) Ebenda, T. XI, pro anno 1765, Petropoli 1767, p. 28.

schreiben. Er wendet seinen neuen Algorithmus auf die Bestimmung der Differenz zweier beliebiger Näherungswerte an. Wie Günther hervorgehoben hat[1]), bedient sich Euler „zur Zerlegung seiner Symbole eines Verfahrens, welches ganz dem Zerfällen einer Determinante in ihre Unterdeterminanten entspricht".

Wichtiger ist Eulers nächste Arbeit, De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo[2]), welche eine neue Auflösung der Fermatschen Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ (irrtümlich die Pellsche Gleichung genannt) gibt. Diese berühmte Gleichung, zuerst von den Griechen betrachtet, dann von den Indern aufgelöst und wieder von neuem durch Fermat, Brouncker, Wallis entwickelt, wird in der zweiten Hälfte des achtzehnten Jahrhunderts von Euler und Lagrange weiteren Untersuchungen unterworfen[3]). Nachdem in dem gegenwärtigen Artikel Euler gezeigt hat, daß die Auflösung nicht nur der Gleichung $lx^2 + mx + n = y^2$, sondern auch der allgemeineren Gleichung zweiten Grades $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, wo $B^2 > AC$ angenommen wird, von der Auflösung der Gleichung der Form $p^2 = lq^2 + 1$ (l positive ganze Zahl) abhänge und dadurch die Wichtigkeit der letzten Gleichung betont hat, erklärt er, wie die Auflösung von $p^2 = lq^2 + 1$ durch die Entwicklung von $\sqrt{l}$ in einen Kettenbruch bedeutend erleichtert werden könne. Ohne Beweis nimmt er an, daß, wenn $\frac{p}{q} > \sqrt{l}$, der Bruch $\frac{p}{q}$ eine Annäherung zum irrationalen Werte $\sqrt{l}$ liefere, die nicht überstiegen werden kann, ohne größere ganze Zahlen für p und q in Anwendung zu bringen. Er erklärt die Kettenbruchentwicklung zuerst an numerischen Beispielen, dann im allgemeinen wie folgt:

$$\sqrt{z} = v + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}}$$

wo die Indizes a, b, c, d etc. [so nennt Euler die Teilnenner] durch sukzessive Operationen gefunden werden. Wenn $\sqrt{z} = v + \frac{1}{x}$ und $v = A$, dann wird $x = \frac{\sqrt{z} + A}{z - A^2} = \frac{\sqrt{z} + A}{\alpha}$, wo $\alpha = z - A^2$. Da nun

---

[1]) S. Günther, op. cit., S. 59. [2]) N. Comm. Petr. XI, 1765, p. 28—66 = Comm. Arith. I, p. 316. [3]) Man lese H. Konen, Gesch. d. Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$, Leipzig 1901.

a die größte ganze Zahl in $\frac{\sqrt{z}+A}{\alpha}$ oder $\frac{v+A}{\alpha}$ ist, hat man $a \leqq \frac{v+A}{\alpha}$.
Setzt man zweitens $x = a + \frac{1}{y}$, dann wird, da $z = \alpha + A^2$,

$$y = \frac{\sqrt{z} - A + a\alpha}{1 + 2aA - a^2\alpha} = \frac{\sqrt{z} + B}{\beta},$$

wo $B = a\alpha - A$ und $\beta = 1 + a(A - B)$. Weil b die größte ganze in y enthaltene Zahl ist, hat man $b \overline{\gtrless} \frac{v+B}{\alpha}$. Setzt man drittens $y = b + \frac{1}{z}$ und fährt in ähnlicher Weise fort, so erhält man die folgende Tabelle von Euler:

Capiatur	tum vero	eritque
I. $A = v$	$\alpha = z - A^2 = z - v^2$	$a < \frac{v+A}{\alpha}$
II. $B = \alpha a - A$	$\beta = \frac{z - B^2}{\alpha} = 1 + a(A - B)$	$b < \frac{v+B}{\beta}$
III. $C = \beta b - B$	$\gamma = \frac{z - C^2}{\beta} = \alpha + b(B - C)$	$c < \frac{v+C}{\gamma}$
IV. $D = \gamma c - C$	$\delta = \frac{z - D^2}{\gamma} = \beta + c(C - D)$	$d < \frac{v+D}{\delta}$
V. $E = \delta d - D$.	$\varepsilon = \frac{z - E^2}{\delta} = \gamma + d(D - E)$	$e < \frac{v+E}{\varepsilon}$

etc.

Wenn in der letzten Kolumne die Brüche in Wirklichkeit ganze Zahlen vorstellen, dann soll das Zeichen $<$ durch $=$ ersetzt werden. Da $A = v$ und $a \overline{\gtrless} \frac{v+A}{\alpha}$, so hat man $B = a\alpha - A \overline{\gtrless} v$, $\beta \overline{\gtrless} 1$, $b \overline{\gtrless} 2v$. Folglich ist auch $C = b\beta - B \overline{\gtrless} v$ etc. Durch die Indizes a, b, c, d etc. erhält man also die ganzen Zahlen A, B, C, D etc., welche alle $\overline{\gtrless} v$ sind, sowie die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., welche alle $\overline{\gtrless} 1$ sind. Aus der letzten Kolumne ersieht man nun, daß jeder Index a, b, c, d etc. $\overline{\gtrless} 2v$ sein muß. Euler erklärt, daß, nachdem der Index $2v$ erreicht wird, die Werte a, b, c, d etc. sich wiederholen und die Entwicklung von neuem beginnt. Er gibt aber keinen Beweis, daß der Index $2v$ notwendig existiert. Er zeigt an Beispielen, daß die Indizes a, b, c, d etc. und die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc. sich periodisch wiederholen. Nur für die Form $z = n^2 + 1$ und sieben andere ähnliche Formen werden allgemeine Werte für die Indizes und für die griechischen Buchstaben angegeben.

Um nun $p = \sqrt{lq^2 + 1}$ in ganzen Zahlen aufzulösen, werden aus den Indizes Näherungsbrüche $\frac{x}{y}$ nach dem in folgenden zwei Reihen ersichtlichen Gesetze entwickelt:

$$\begin{array}{lllllllll} \text{Indizes} & v, & a, & b, & c, & \cdots & m, & n, & \\ \frac{x}{y} & \frac{1}{0}, & \frac{v}{1}, & \frac{av+1}{a}, & \frac{(ab+1)v+b}{ab+1}, & \cdots & \frac{M}{P}, & \frac{N}{Q}, & \frac{nN+M}{nQ+P}. \end{array}$$

Dann wird ein abgekürzter Algorithmus für $\frac{x}{y}$ eingeführt wie folgt:

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{(v)}{1}, \quad \frac{(v,a)}{a}, \quad \frac{(v,a,b)}{(a,b)}, \quad \frac{(v,a,b,c)}{(a,b,c)}, \quad \frac{(v,a,b,c,d)}{(a,b,c,d)} \text{ etc.},$$

wo $(v,a) = a(v) + 1$; $(v,a,b) = b(v,a) + (v)$; $(v,a,b,c) = c(v,a,b) + (v,a)$
$(a) = a1 + 0$; $(a,b) = b(a) + 1$; $(a,b,c) = c(a,b) + (a)$.

Euler teilt ferner mit, daß er folgende Transformationen bewiesen habe:

$$\begin{aligned} (v,a,b,c,d,e) &= v(a,b,c,d,e) + (b,c,d,e) \\ (v,a,b,c,d,e) &= (v,a)(b,c,d,e) + v(c,d,e) \\ (v,a,b,c,d,e) &= (v,a,b)(c,d,e) + (v,a)(d,e) \\ (v,a,b,c,d,e) &= (v,a,b,c)(d,e) + (v,a,b)(e). \end{aligned}$$

Durch diese Formeln kann man sich die Berechnung beinahe der Hälfte der Näherungsbrüche ersparen. Sind nämlich $v, a, b, c, c, b, a, 2v$ die Indizes einer Periode und nimmt man mit Euler als bewiesen an, daß $(a,b,c) = (c,b,a)$ und bezeichnet die Näherungsbrüche durch $x_1/y_1, x_2/y_2, \ldots, x_8/y_8$, wo $x_1/y_1 = \frac{1}{0}$ ist, so erhält man $x_8 = x_5 y_5 + x_4 y_4$, $y_8 = y_5^2 + y_4^2$, wo $x_5 = (v,a,b,c)$, $x_4 = (v,a,b)$, $y_5 = (a,b,c) = (c,a,b)$, $y_4 = (a,b) = (b,a)$. Man braucht x_6, x_7 und y_6, y_7 gar nicht zu berechnen[1]).

Es wird nun gezeigt, daß

$$\begin{array}{llll} \text{wenn} & \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} & \text{dann} & x^2 = zy^2 + 1, \\ \text{„} & \left\{ \begin{array}{l} x = (v) \\ y = (1) \end{array} \right\} & \text{„} & x^2 = zy^2 - \alpha, \\ \text{„} & \left\{ \begin{array}{l} x = (v,a) \\ y = (a) \end{array} \right\} & \text{„} & x^2 = zy^2 + \beta, \end{array}$$

[1]) H. Konen, a. a. O., S. 56, hebt hervor, daß diese abgekürzte Methode von G. W. Tenner (Programm Merseburg 1841) unabhängig ausgearbeitet und von einigen Schriftstellern ihm zugeschrieben worden ist.

$$\text{wenn} \begin{cases} x = (v, a, b) \\ y = (a, b) \end{cases} \text{dann } x^2 = zy^2 - \gamma,$$

$$\text{„} \begin{cases} x = (v, a, b, c) \\ y = (a, b, c) \end{cases} \text{„} \quad x^2 = zy^2 + \delta,$$

$$\text{„} \begin{cases} x = (v, a, b, c, d) \\ y = (a, b, c, d) \end{cases} \text{„} \quad x^2 = zy^2 - \varepsilon.$$

etc.

Wird nun einer der Buchstaben β, δ etc. $= 1$, so hat man eine Auflösung der Gleichung $x^2 - zy^2 = 1$. Aber keiner dieser Buchstaben kann ± 1 werden, wenn nicht zugleich der entsprechende Index $2v$ wird. Wenn deshalb irgend eine Periode, die wir in der Anordnung der Indizes finden, den Wert $2v$ enthält und wir x und y den Näherungswerten, welche der ersten Periode entsprechen, gleichstellen, erhalten wir $x^2 = zy^2 + 1$ unter der Bedingung, daß die Anzahl der Indizes in einer Periode gerade ist, und $x^2 = zy^2 - 1$, wenn diese Anzahl ungerade ist. Im ersteren Falle haben wir direkt die gesuchte Lösung; im letzteren Falle soll man entweder zwei Perioden weiter gehen, wo der Index $2v$ gerade ist und für x und y die Näherungswerte in der dritten Periode wählen, oder man soll $p = 2x^2 + 1$ und $q = 2xy$ setzen. Dieses Verfahren liefert auf bequeme Weise die kleinsten Lösungen von $x^2 - zy^2 = 1$. Da aber nirgends bewiesen ist, daß der Index $2v$ notwendig vorkommt, ist man nicht sicher, daß die Gleichung außer $x = 1$ und $y = 0$ wirklich Lösungen hat. Der englische Zahlentheoretiker H. J. S. Smith drückt sich über diese Abhandlung so aus: „Euler beobachtete, daß $\frac{p}{q}$ notwendigerweise ein Näherungswert von $\sqrt{z}$ ist, weshalb es genügt, um die Zahlen p und q zu erhalten, $\sqrt{z}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln. Es ist aber sonderbar, daß ihm die Notwendigkeit nie eingefallen ist, zur Vervollständigung der Theorie zu beweisen, daß die Gleichung auch immer auflösbar sei und daß durch die Entwicklung von $\sqrt{z}$ alle Lösungen gegeben seien. Sein Memoir enthält alle für den Beweis nötigen Elemente; hier aber, wie in anderen Stellen, ist Euler mit einer Induktion ohne strengen Beweis zufrieden"[1]).

Dieser Aufsatz Eulers enthält zwei Tafeln. Die erste gibt die Entwicklung aller Zahlen unter 121, mit Ausnahme der Quadratzahlen, in Kettenbrüchen an; die zweite enthält für jeden nicht

[1]) H. J. S. Smith, British Assn. Report 1861, p. 315 = Collected works, Vol. I, Oxford 1894, p. 192.

quadratischen Wert von s zwischen 1 und 100 den kleinsten Wert von x und y, welcher eine Lösung der Gleichung $x^2 - sy^2 = 1$ ist.

In dem Aufsatze Quomodo numeri praemagni sint explorandi, utrum sint primi, nec ne[1]) fährt Euler mit der Betrachtung der Primzahlen fort und entwickelt Methoden zur Entscheidung, ob eine Zahl von der Form $4n + 1$ prim ist oder nicht.

Wie früher (Bd. III², S. 617, 618, 719—721) klar gemacht wurde, verdankt man Euler die ersten Arbeiten über analytische Zahlentheorie. Dieser Gegenstand wird nun in der Abhandlung De partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas[2]) fortgesetzt. Aus seinen Ergebnissen heben wir nur hervor, daß er mit Hilfe der erzeugenden Funktion $1/(1 - x^a y^\alpha)(1 - x^b y^\beta)(1 - x^c y^\gamma)(1 - x^d y^\delta)$ etc. und der erzeugten Reihe $1 + Ax^{\cdot} y^{\cdot\cdot} + Bx^{\cdot} y^{\cdot\cdot} + Cx^{\cdot} y^{\cdot\cdot} +$ etc. die Folgerung zieht, daß, wenn darin ein Glied $Nx^n y^\nu$ vorkommt, es N Lösungen der simultanen Gleichungen $ap + bq + cr$ etc. $= n$, $\alpha p + \beta q + \gamma r$ etc. $= \nu$ gibt, wenn aber dieses Glied fehlt, keine positiven ganzzahligen Werte für p, q, r etc. existieren. Die Entscheidung über die Anzahl Lösungen solcher Gleichungen ist somit auf das Studium der Koeffizienten N von $x^n y^\nu$ zurückgeführt. Euler bemerkt, daß vormals Lösungen durch die regula virginum[3]) erhalten wurden.

In einer Abhandlung, Observationes variae in mathesin puram[4]), teilt J. H. Lambert unter anderem Sätze über rekurrierende Dezimalbrüche mit. Er beweist, daß bei teilerfremden Zahlen eine Division mit einer Primzahl, außer 2 oder 5, stets einen periodischen Dezimalbruch liefert, und daß alle periodischen Dezimalbrüche aus rationalen Brüchen entspringen, weshalb keine irrationale Größe durch einen periodischen Bruch dargestellt werden kann. In seinen Adnotata quaedam de numeris eorumque anatomia[5]) setzt er diese Studien fort, gibt einen Beweis des schon früher von Leibniz und Euler bewiesenen Fermatschen Satzes und zieht daraus weitere Resultate. Ist a eine Primzahl, aber nicht $= 2$ oder 5, dann stellt $(10^{a-1} - 1) : a$ eine ganze Zahl dar; ist $(10^m - 1) : a$ eine ganze Zahl, dann ist entweder m durch $a - 1$ oder $a - 1$ durch m teilbar; weshalb g nicht prim sein kann, im Falle daß $\frac{1}{g}$ einen Bruch mit

[1]) N. Comm. Petr. XIII, 1768, p. 67—88 = Comm. Arith. I, p. 379.
[2]) N. Comm. Petr. XIV, I, 1769, p. 168—187 = Comm. Arith. I, p. 391.
[3]) Regula virginum = regula coecis = regula potatorum. Man sehe Chr. Peschecks Deutliche Erklärung derer Kaufmann- und öconomischen Rechnungen etc., Budissin 1759, S. 440. [4]) Acta Helvetica, Vol. III, Basileae 1758, p. 128—168. [5]) Nova Acta Eruditorum, Lipsiae 1769, p. 107—128.

$m$zahliger Periode liefert und $g-1$ durch m nicht teilbar ist. Lambert zieht auch die Folgerung, daß, wenn $g-1$ Periodenzahlen vorliegen und g ungerade ist, g prim sein muß. Setzt man $a=2m+1$, so ist $(10^m+1):a$ eine ganze Zahl q und $(10^{2m}-1):a=10^m q-q$. Ist m nicht prim, so kann man es durch einen gewissen seiner Faktoren ersetzen. Nimmt man $a=13$ und $m=3$, so wird $(10^3+1):13=77$, $77000-77=76923$, weshalb $\frac{1}{13}=0, 076923, 076923$ etc. Wenn a nicht prim ist und $\frac{1}{a}$ die Periodenzahl $2m$ gibt, dann haben a und 10^m+1 einen gemeinsamen Faktor. Es folgen dann einige ähnliche aber längere Sätze, die zur Entscheidung, ob eine Zahl prim sei oder nicht, Anwendung finden können. Mehrere derselben sind nicht nur auf Dezimalbrüche, sondern gleichzeitig auf Brüche anderer Systeme anwendbar. Die Auffindung der Teiler einer Zahl wird von Lambert auch in einem Briefe an Oberreit besprochen[1]).

Soweit ist Euler der einzige große Mathematiker des 18. Jahrhunderts, der sich eingehend mit der Zahlentheorie beschäftigt hat. Nun erscheint die erste Arbeit von Lagrange auf diesem Gebiete.

Am 20. September 1768 vollendete er in Berlin seine Abhandlung Solution d'un problème d'arithmétique[2]). Darin wird zum erstenmal ein strenger Beweis von der Lösbarkeit der Gleichung $x^2-ay^2=1$ gegeben. Er kannte zu dieser Zeit die Arbeiten von Wallis über dieses Problem, aber nicht diejenigen Eulers. Um zu zeigen, daß die Gleichung immer ganzzahlig lösbar ist, entwickelt er $\sqrt{a}$ in einen unendlichen Kettenbruch

$$\sqrt{a}=q+\cfrac{1}{q'+\cfrac{1}{q''+\cdots}},$$

wo $q, q', q''\cdots$ ganzzahlig und positiv sind und erhält die Näherungsbrüche $\frac{1}{0}, \frac{m}{n}, \frac{M}{N}, \frac{m'}{n'}, \frac{M'}{N'}, \frac{m''}{n''}, \frac{M''}{N''}, \cdots$, worin $m=q, M=q'm+1$, $m'=q''M+m, \cdots$, $n=1$, $N=q'n$, $n'=q''N+n, \cdots$ und $\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}}>\sqrt{a}>\frac{m^{(r)}}{n^{(r)}}$, $r=0,1,2,\ldots$ Er zeigt, daß $M^{(r)2}-aN^{(r)2}=Z^{(r)}>0$ und $<\frac{2M^{(r)}}{N^{(r)}}$ ist, weshalb die unendliche Anzahl positiver, ganzzahliger Werte $Z, Z', Z'', \ldots$ nur eine endliche Anzahl untereinander verschiedener Zahlen darstellen. Auch hat man $m^{(r)2}-an^{(r)2}=z^{(r)}$,

[1]) J. H. Lamberts Deutscher gelehrter Briefwechsel Bd. II, Berlin 1782, S. 378—382; Bd. V, 1785, S. 323—325. [2]) Miscellanea Taurinensia, tome IV, 1766—1769 = Oeuvres de Lagrange, tome I, Paris 1867, p. 671—731.

wo $z^{(r)} < 0$ und $-z^{(r)} < \frac{2m^{(r)}}{n^{(r)}} + 1$, so daß $z, z^1, z^2, \ldots$ eine unendliche Anzahl ganzzahliger, negativer Zahlen sind, wovon wie oben die Anzahl verschiedener Werte endlich ist. Es gibt also unendlich viele Zahlen $x, x', \ldots$ und $y, y', \ldots$, welche die Gleichung $x^2 - ay^2 = R$ befriedigen, wo R irgend ein Wert $Z^{(r)}$ oder z^r ist. An dieser Stelle untersuchte nun Euler die Werte $Z^{(r)}, z^{(r)}$; Lagrange schlägt aber einen anderen Weg ein und benutzt das schon den Indern bekannte Lemma: Das Produkt von $x^2 - ay^2$ und $x'^2 - ay'^2$ ist $(xx' \pm ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2$. Man hat also

$$(A),\ R^2 = (xx' \pm ayy')^2 - a(xy' \pm yx')^2,$$

auch

$$(B),\ R(y'^2 - y^2) = (xy' + yx')(xy' - yx').$$

Ist nun R prim, so muß nach (B) entweder $xy' + yx'$ oder $xy' - yx'$ durch R teilbar sein; es sei $xy' \pm yx' = qR$, dann gibt (A),

$$R^2 = (xx' \pm ayy')^2 - aq^2R^2,$$

und $xx' \pm ayy'$ ist durch R teilbar. Wenn $xx' \pm ayy' = pR$, so erfolgt sogleich $1 = p^2 - aq^2$. Für den Spezialfall, R prim, ist also die Lösbarkeit erwiesen. Dieses ist aber nur ein kleiner Teil der Untersuchung für den Fall, daß R und a teilerfremd sind. Gemeinteilige Werte von R und a sind einer besonderen Diskussion unterworfen. Die zwei Fälle bieten bedeutende Schwierigkeiten dar; der Beweis, daß $x^2 - ay^2 = 1$ (wo a keine Quadratzahl ist) lösbar ist, wird aber allgemein erzwungen. Zu gleicher Zeit ist das Verfahren, eine Lösung zu finden, angedeutet.

Der zweite Schritt besteht darin, aus der kleinsten Lösung von $x^2 - ay^2 = 1$ alle anderen abzuleiten. Ist p, q ein Wertpaar, so wird

$$1 = (p^2 - aq^2)^m = (p + \sqrt{a}q)^m (p - \sqrt{a}q)^m = (x + \sqrt{a}y)(x - \sqrt{a}y),$$

und

$$x = \frac{(p + q\sqrt{a})^m + (p - q\sqrt{a})^m}{2}$$

$$y = \frac{(p + q\sqrt{a})^m - (p - q\sqrt{a})^m}{2\sqrt{a}}$$

Setzt man nun $m = 1, 2, 3, \ldots$, so hat man eine unendliche Anzahl Lösungen. Es folgt der Beweis, daß, wenn p und q die kleinsten Lösungen sind, $m = 2$ die nächst größeren liefert usw., so daß in obigen Ausdrücken für x und y alle Lösungen eingeschlossen sind.

Der dritte Schritt ist der Beweis, daß alle Werte von x und y, welche der Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$ genügen, unter den Zahlen

$M, M', \ldots$ und $N, N', \ldots$ zu finden sind, daß also $\frac{x}{y}$ immer einer der Näherungsbrüche ist. Es wird nämlich gezeigt, daß die Annahme $M^{(r)} < p < M^{(r+1)}$, $N^{(r)} < q < N^{(r+1)}$ auf einen Widerspruch führt. Daraus stammt eine zweite Lösungsmethode, der zufolge man die Näherungsbrüche für $\sqrt{a}$ berechnet und nacheinander die Zähler für x und die Nenner für y setzt. Eine unendliche Anzahl dieser Zähler und Nenner werden der Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$ genügen.

Lagrange ließ seiner am 20. September 1768 vollendeten Lösung der Gleichung $x^2 - ay^2 = 1$ bald eine noch wichtigere Schrift folgen. Schon am 24. November gleichen Jahres legte er der Berliner Akademie die neue Abhandlung Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré[1]) vor. Es wird hier die unbestimmte Gleichung $A = u^2 - Bt^2$, die obige als Spezialfall einschließt, gelöst. Aus der Einleitung geht hervor, daß nun Lagrange die zwei Abhandlungen Eulers über diese Sache in den Petersburger Kommentarien der Jahre 1738 und 1764 gelesen hatte, aber Eulers De usu novi algorithmi des Jahres 1765 noch immer nicht kannte. Lagrange betont die Wichtigkeit der Gleichung $A = u^2 - Bt^2$, indem er zeigt, daß jede Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten auf diese Form reduziert werden kann. Er liefert zuerst die Auflösung dieser Gleichung, wenn u und t ganze oder gebrochene Zahlen sein können, dann die wichtigere Auflösung, wenn u und t ganze Zahlen sein sollen. In der letzteren Auflösung wird zuerst bemerkt, daß, wenn A einen quadratischen Faktor ϱ^2 hat, man $u = \varrho p$, $t = \varrho q$, $A = \varrho^2 a$ setzen kann, wodurch die vorgelegte Gleichung in die Form $a = p^2 - Bq^2$ übergeht, wo p und q teilerfremd sind. Wenn man alle möglichen teilerfremden Werte von p und q in $a = p^2 - Bq^2$ findet, so kann man daraus mittels $u = \varrho p$, $t = \varrho q$ alle überhaupt vorhandenen Lösungen von $A = u^2 - Bt^2$ herleiten. Es sei also die Gleichung $A = p^2 - Bq^2$ vorgelegt, in der p und q ganze teilerfremde Zahlen sein sollen. Man hat zwei Fälle, B positiv und B negativ. Für den Fall B positiv und zugleich $A > \sqrt{B}$, multipliziere man $A = p^2 - Bq^2$ mit $A_1 = p_1^2 - Bq_1^2$, wo $pq_1 - p_1 q = \pm 1$ und $\alpha = pp_1 - Bqq_1$ angenommen wird. Man erhält $AA_1 = \alpha^2 - B$. Nun sei $\frac{m}{n}$ der in der Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q}$ dem $\frac{p}{q}$ unmittelbar vorausgehende Näherungsbruch, dann wird

---

[1]) Mém. de l'académie roy. des sciences, année 1767, Berlin 1769, p. 165 bis 310 = Lagrange, Oeuvres, Tome II, Paris 1868, p. 377—535. Vgl. Nettos Ausgabe, Ostwalds Klassiker Nr. 146, Leipzig 1904.

$p_1 = \mu p \pm m$, $q_1 = \mu q \pm n$, wo μ irgend welche ganze Zahl sein kann. Es folgt $\alpha = \mu(p^2 - Bq^2) \pm (pm - Bqn) = \mu A \pm a$, wenn $a \equiv mp - Bqn$ ist. Man kann $\alpha < \frac{A}{2}$ machen, und es wird $A_1 < \frac{A}{4}$. Es muß dann $\alpha^2 - B$ durch A teilbar sein und einen Quotienten von der Form $p_1^2 - Bq_1^2$ liefern, sonst ist die vorgelegte Gleichung unlösbar. Gibt es dagegen eine solche Zahl, so hat man eine neue Gleichung $A_1 = p_1^2 - Bq_1^2$ aufzulösen, wo $A_1 < A$ ist. Ist letztere Gleichung lösbar, so kann man aus den bekannten Werten von p_1 und q_1 die Werte von p und q durch die Gleichungen $\alpha = pp_1 - Bqq_1$ und $pq_1 - p_1 q = \pm 1$ bestimmen. Sind p und q ganze Zahlen, dann ist die vorgelegte Gleichung lösbar; sonst nicht. Um alle Lösungen zu erhalten, muß man alle Zahlen α aufsuchen, die $< \frac{A}{2}$ sind, und $\alpha^2 - B$ durch A teilbar machen. Auch muß jede der entstehenden Gleichungen $A_1 = p_1^2 - Bq_1^2$ einzeln untersucht werden. Es wird dann erklärt, wie man aus einem den Bedingungen genügenden Werte von α alle anderen bestimmen kann. Es stellt sich heraus, wenn die Anzahl teilerfremder Faktoren von A, die Primzahlen oder Primzahlpotenzen sind, gleich n ist, daß die Anzahl der Werte von α gleich 0 oder gleich 2^{n-1} ist. Unter Faktoren mit gemeinsamen Teilern braucht man nur solche zu nehmen, deren größter gemeinschaftlicher Teiler 2 ist. Es wird ferner die Gleichung $A_1 = p_1^2 - Bq_1^2$ genau so behandelt, wie es bei $A = p^2 - Bq^2$ der Fall war. Ihre Lösung wird auf $A_2 = p_2^2 - Bq_2^2$ zurückgeführt, letztere auf $A_3 = p_3^2 - Bq_3^2$ etc. Kann man nun irgend eine dieser Gleichungen lösen, etwa $A_n = p_n^2 - Bq_n^2$, so kann man zu Werten p und q aufsteigen, welche die vorgelegte Gleichung lösen. Es wird dann die Gleichung $A_n = p_n^2 - Bq_n^2$ einer eingehenden Untersuchung unterworfen, worin die Kettenbrüche wieder eine hervorragende Rolle spielen, und alles darauf zuspitzt, ein Glied einer Reihe $E, E_1, \ldots$ zu finden, das gleich eins wird. Es ergibt sich endlich, daß $A = p^2 - Bq^2$ bei positivem B, wenn sie überhaupt lösbar ist, eine unendliche Anzahl von Lösungen hat. Der Fall, wo B negativ ist, wird leichter gefunden. Die ganze Abhandlung ist die erste vollständige und strenge Auflösung von unbestimmten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten durch ganze Zahlen. Wie schon bemerkt, tritt die von Lagrange in seiner ersten zahlentheoretischen Abhandlung gelöste Gleichung $\pm 1 = r^2 - Bs^2$, hier als ein Spezialfall auf. Lagrange sagt nun darüber: „Die eben gegebene Methode ist direkter und einfacher; zudem hat sie noch den Vorzug, zu zeigen, daß die gegebene Gleichung für jedes B lösbar ist. Dies konnte ich damals nur auf einem ziemlich großen Umwege dartun." Am Schlusse der Abhandlung wird auch die

Fermatsche Unmöglichkeit $r^n + s^n = q^n$, $n > 2$ berührt, ohne jedoch zu den Eulerschen Ergebnissen etwas beizutragen.

Lagrange verfaßte 1770 eine dritte Schrift über die Auflösung von unbestimmten Gleichungen, betitelt Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers[1]) worin er Methoden entwickelt, welche auf Gleichungen höherer Grade anwendbar sind und die Behandlung der Gleichung zweiten Grades, die er in zwei früheren Abhandlungen auseinandersetzte, bedeutend vereinfachen. Die Theorie der Kettenbrüche, wie er sie in dem Mémoire sur la résolution des équations numériques und in den Additions dazu entwickelt hatte, findet hier Anwendung. Die Transformation von $A = Bt^n + Ct^{n-1}u + Dt^{n-2}u^2 + \cdots + Ku^n$, wo alle Koeffizienten ganze Zahlen und A und u teilerfremd sind, in die Gleichung $1 = Pu^n + Qu^{n-1}y + \cdots Vy^n$ wird durch die Annahme $t = u\theta - Ay$ (θ und y ganzzahlig) erzielt. Die Berechnung von θ, erfolgt durch die von ihm schon früher angewandte Differenzmethode[2]). Sind u und y in der transformierten Gleichung ganze Zahlen, so müssen $P, Q, \ldots V$, sowie u und y selbst, teilerfremd sein: Man setze $x = \frac{u}{y}$ und es wird $Px^n + Qx^{n-1} + \cdots + V = y^{-n} = z$. Wenn $z = 0$, so drücke man eine positive Wurzel a mit Hilfe zweier Reihen von Konvergenzwerten aus, welche die Kettenbruchentwicklung liefert. In der ersten Reihe sind alle Bruchwerte größer, in der zweiten Reihe alle kleiner als die entsprechende Wurzel a. Es folgt dann der Nachweis, daß unter den Brüchen der einen oder der anderen Reihe sich der Bruch $\frac{u}{y}$ vorfindet, und daß man auf diese Weise alle ganzzahligen Werte von u und y aufsuchen kann. Die Operation, welche den Kettenbruch für die Berechnung von a hervorbringt, liefert also zu gleicher Zeit die Zahlen u und y. Die Auflösungen bestimmter und unbestimmter Gleichungen können demnach durch das gleiche Werkzeug, die Kettenbrüche, erledigt werden. Nachdem die Einzelheiten ausgearbeitet sind, schreitet Lagrange zur Anwendung seiner Ergebnisse auf unbestimmte Gleichungen des ersten und zweiten Grades. Seine jetzige Methode der Auflösung von $A = t^2 - \Delta u^2$ nennt er „très-simple et très-élégante", seine frühere „à la vérité un peu longue et compliquée".

Lagrange gesteht, daß seine arithmetischen Abhandlungen ihm viel Mühe gekostet hätten. Am 15. August 1768 schreibt er an

---

[1]) Mém. de l'acad. roy. des sciences, tome XXIV, année 1768, Berlin 1770, p. 181—250 = Lagrange, Oeuvres, tome II, p. 655—726. [2]) Mémoire sur la résolution des équat. num., scolie du no. 13.

D'Alembert[1]): „Ich versichere Ihnen, daß ich viel mehr Schwierigkeiten gefunden habe, als ich vermutet hätte. Hier ist z. B. eine, welche ich nicht ohne große Anstrengung habe überwinden können: Es sei irgend eine ganze, positive, nicht-quadratische Zahl n gegeben, eine ganze Quadratzahl x^2 zu finden, so daß nx^2+1 ein Quadrat wird. Dieses Problem ist von großer Wichtigkeit in der Theorie von Quadratzahlen, die der Hauptgegenstand der diophantischen Analysis ist." In späteren Briefen drückt er sich ähnlich aus[2]).

Es ist ein merkwürdiger Umstand, daß L. Euler und Lagrange in der Theorie der unbestimmten Gleichungen einander wenig beeinflußten. Wie schon bemerkt, kannte Lagrange die wichtigste Arbeit Eulers nicht. Als Lagrange seine Schriften veröffentlichte, war Euler blind. Am 9./20. März 1770 schrieb er an Lagrange[3]): „Ich ließ mir alle Operationen vorlesen, die Sie über die Formel $1=p^2-13q^2$ vorgenommen, und ich bin von ihrer Richtigkeit völlig überzeugt; da ich aber nicht selber lesen und schreiben kann, muß ich Ihnen gestehen, daß meine Einbildungskraft nicht die Grundlage aller Ihrer Ableitungen hat fassen und die Bedeutung aller Buchstaben, die Sie eingeführt haben, nicht im Gedächtnis hat halten können." So fuhr Euler mit seinen eigenen Untersuchungen fort, ohne die Arbeiten Lagranges genau zu kennen. Am 30. September 1771 schrieb Lagrange an Condorcet[4]): „Sie sind, glaube ich, der Einzige, der mir diese Ehre erwiesen hat" (seine Arbeiten zu lesen).

Die unbestimmte Analytik wird im zweiten Teile von L. Eulers Anleitung zur Algebra, 1770, behandelt. Die Popularität dieses Werkes unter Fachmännern ist hauptsächlich diesem zweiten Teile zuzuschreiben[5]). Eulers Interesse scheint sich in der Zahlentheorie konzentriert zu haben, denn er widmet derselben 322 Seiten, während alle anderen Zweige der Algebra nur 560 Seiten erhalten. Euler fängt mit sehr einfachen, beinahe kindlichen Beispielen von unbestimmten Aufgaben an. Im 2. Kapitel werden Fragen angeführt, die in gemeinen Rechenbüchern damaliger Zeit nach der „Regel-Coeci" aufgelöst wurden. Z. B., „30 Personen, Männer, Weiber und Kinder, verzehren in einem Wirths-Hauss 50 Rthl. Daran zahlt ein Mann 3 Rthl., ein Weib 2 Rthl. und ein Kind 1 Rthl., wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?" Im 4. und 5. Kapitel löst Euler die Gleichung $a+bx+cx^2=y^2$. In der Behandlung von $ax^2+b=y^2$,

---

[1]) Lagrange, Oeuvres, T. 13, p. 118. [2]) Ebenda, T. 13, p. 121, 301. [3]) Ebenda, Tome 14, p. 219. [4]) Ebenda, T. 14, p. 4. [5]) Lagrange schrieb am 26. August 1770 an D'Alembert: „Elle ne contient rien d'intéressant qu'un Traité sur les questions de Diophante, qui est, à la vérité, excellent" (Lagrange, Oeuvres, T. 13, p. 181, 191).

im 6. Kapitel, ist er von Lagranges Untersuchungen nicht beeinflußt worden und die Auflösung ist unvollständig. Es „ist unumgänglich nötig", sagt Euler, „daß man schon einen Fall in ganzen Zahlen wisse oder errathen habe". Merkwürdig ist es, daß er im nächsten Kapitel für die Fermatsche Gleichung $an^2 + 1 = m^2$ nicht seine eigene, in seiner Schrift De usu novi algorithmi 1765 entwickelte Methode, sondern die Auflösungsmethode von Wallis darstellt. Die drei folgenden Kapitel enthalten Lösungen von

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = y^2,\quad a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = y^2,$$
$$a + bx + cx^2 + dx^3 = y^3.$$

Im 13. Kapitel wird bewiesen, daß weder die Summe, noch die Differenz zweier Biquadraten jemals eine Quadratzahl werden könne. Die Unmöglichkeit dieser Fermatschen Sätze und mehrerer ähnlicher diophantischer Ausdrücke wird dadurch nachgewiesen, „daß wann auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen eben dergleichen Werthe geschlossen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleinern usf., da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Werthe vorhanden sind ... so kann mann sicher schließen, daß auch in größern ... keine solche Werthe von x und y vorhanden seyn können". Im 15. Kapitel wird die Fermatsche Unmöglichkeit $x^3 + y^3 = z^3$ nachgewiesen.

Der gegenwärtige Zeitpunkt (um 1770) ist in der unbestimmten sowohl als in der bestimmten Gleichungstheorie durch große schöpferische Tätigkeit gekennzeichnet. Während Euler und Lagrange die schon besprochenen Arbeiten hervorbrachten, war auch Waring in England tätig. In seinen Meditationes algebraicae, 1770, werden einige neue zahlentheoretische Sätze angegeben. Ohne Beweis gibt er folgende Theoreme an[1]): „Jede ganze Zahl ist entweder eine Kubikzahl oder die Summe von 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9 Kubikzahlen[2]); entweder eine Biquadrate, oder die Summe von 2, 3 etc. oder 19 Biquadraten." Der Beweis hiervon läßt noch immer auf sich warten. An anderer Stelle schreibt Waring ohne Nachweis hin[3]): „Jede gerade Zahl ist die Summe zweier Primzahlen, und jede ungerade Zahl ist eine Primzahl oder die Summe von drei Primzahlen." Der Satz über gerade Zahlen ist allgemein als der „Goldbachsche Erfahrungssatz" bekannt, wurde aber zuerst von Waring gedruckt. Goldbach[4]) teilte

[1]) Medit. algebraicae, 3. Ed. 1782, p. 349. [2]) Vgl. C. G. J. Jacobi, Ges. Werke, Bd. VI, S. 322—354. [3]) Medit. algebraicae, 3. Ed. 1782, p. 379.
[4]) Corresp. math. (Fuß) I, p. 127, 135. Vgl. Nouvelles Annales, T. 18, 1859; Bull. de Bibl., D'Hist. p. 2.

ihn 1742 Euler brieflich mit (Bd. III, 2. Aufl., S. 610), die Korrespondenz wurde aber erst 1843 veröffentlicht. An gleicher Stelle[1]) führt Waring ohne Beweis noch andere Lehrsätze über Primzahlen an: Bilden drei Primzahlen eine arithmetische Progression, dann ist ihre Differenz durch 6 teilbar, wenn nicht 3 eine der drei Primzahlen ist. Ein ähnlicher Satz lautet: Sind fünf Primzahlen in arithmetischer Progression, dann ist die Differenz durch 30 teilbar, wenn nicht 5 ein Glied der Progression ist. Und im allgemeinen: Es haben 3, 5, 7, 11, 13 oder 17 etc. Primzahlen in arithmetischer Progression Differenzen, die bezüglich durch $1 \cdot 2 \cdot 3$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, oder $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$, etc. teilbar sind, wenn nicht bezüglich 3, 5, 7, 11, 13 oder 17 etc. ein Glied der Progression ist.

Der berühmteste der neuen Sätze, die Waring anführt, ist folgender[2]): „Ist n eine Primzahl, dann wird

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots (n-2) \times (n-1) + 1}{n}$$

eine ganze Zahl". Er fügt dann hinzu: „Diese sehr elegante Eigenschaft von Primzahlen hat der ausgezeichnete, in mathematischen Sachen weit bewanderte Joannes Wilson Armiger entdeckt .... Der Nachweis von Sätzen dieser Art wird deshalb sehr schwer sein, weil keine Notation erfunden ist, welche Primzahlen ausdrückt." Im Werke von Waring erscheint also der berühmte Wilsonsche Satz ohne Demonstration[3]). Sir John Wilson[4]) (1741—1793) wurde in Westmoreland geboren, besuchte Peterhouse College in Cambridge und hatte schon als Student den Ruf, auf der Universität nächst Waring der beste Algebraist zu sein. Im Jahre 1761 war er „senior wrangler". Eine Zeitlang war er Tutor der Mathematik, dann widmete er sich der Rechtswissenschaft. Er wurde 1786 zum Ritter ernannt. Waring führt ihn in seinen Werken öfters an. In seinen Meditationes analyticae nennt er ihn seinen einstmaligen Beschützer, und als den Mann, von dem er in seinen mathematischen Untersuchungen den größten Beistand erhalten habe.

Der Artikel Démonstration d'un théorème d'arithmétique[5])

---

[1]) Medit. algebr., 3. Ed., p. 379. [2]) Ebenda, 1770, p. 218, 3. Ed., p. 380. [3]) Eine Angabe von W. W. R. Ball (Mathematics at Cambridge, 1889, p. 102), derzufolge Waring den Satz vor 1770 in einer Antwort auf eine Kritik der Miscellanea analytica gedruckt haben soll, beruht auf einem Irrtum, wie mir Herr Ball brieflich mitteilt. [4]) Dictionary of National Biography; De Morgan, A Budget of Paradoxes, London 1872, p. 132; Nouvelle correspondance mathématique 2, 1876, p. 110—114, 32—34; Bibliotheca mathematica, 3. Folge, Bd. 3, p. 412, und Bd. 4, 1903, p. 91. [5]) N. Mémoires de l'acad. roy. des

enthält den Lagrangeschen Beweis des von Diophant an einigen Stellen stillschweigend vorausgesetzten und von Bachet zuerst ausgesprochenen Satzes, daß jede Zahl als Summe von vier oder weniger Quadraten dargestellt werden kann. Sich auf einige Resultate Eulers stützend, zeigt Lagrange, daß, wenn die Summe von vier Quadraten durch eine Primzahl größer als die Quadratwurzel dieser Summe teilbar ist, diese Primzahl selbst die Summe von vier Quadraten ist. Eine oder zwei der Quadrate im Dividend dürfen auch Null sein. Dann wird bewiesen, daß p und q so gewählt werden können, daß $p^2 + q^2 + 1$ durch irgend eine vorgelegte Primzahl teilbar wird. Dadurch ist der Bachetsche Satz für Primzahlen sicher gestellt. Aus dem Eulerschen Theorem, daß das Produkt von zwei oder mehreren Zahlen, deren jede die Summe von vier Quadraten ist, selbst die Summe von vier Quadraten ist, kann dieses Ergebnis leicht auf jede zusammengesetzte Zahl ausgedehnt werden.

Eine interessante Leistung ist die Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers[1]), worin Lagrange zwei Beweise des von Waring veröffentlichten und von seinem Freunde John Wilson entdeckten Lehrsatzes über Primzahlen gibt. Der erste Nachweis beruht auf Eigenschaften der Koeffizienten der gleichen Potenzen von x in

$$(x+1)(x+2)\cdots(x+n) = (x+1)^n + A'(x+1)^{n-1} + \cdots A^{(n-1)}(x+1)$$
$$= x^n + (n + A')x^{n-1} + (nA' + A'')x^{n-2} + \cdots + nA^{(n-1)}.$$

Daraus zieht Lagrange auch einen Beweis des Fermatschen Satzes. In dem zweiten Beweise wird umgekehrt der Fermatsche Satz vorausgesetzt und davon der Wilsonsche abgeleitet. Es folgen dann die Beweise der zwei ersten von uns angeführten Sätze von Waring über Primzahlen in arithmetischer Progression.

Ohne von den Untersuchungen Lamberts Kenntnis zu haben, veröffentlichte Johann Bernoulli III. (1744—1807) einen Aufsatz Sur les fractions décimales périodiques[2]), worin er nach einer summarischen Übersicht der Arbeiten von Wallis, Euler und John Robertson Bemerkungen über die am Ende seines Aufsatzes gedruckte Tafel macht. Diese Tafel enthält die Perioden aller aus $\frac{1}{D}$ entspringenden Dezimalbrüche, wo D nacheinander alle Primzahlen außer 2 und 5 bis 199 vorstellt. Die Ziffern in einer Periode

sciences de Berlin, année 1770, Berlin 1772, p. 123—133 = Lagrange, Oeuvres, Tome III, 1869, p. 189—201.

[1]) N. Mémoires de l'acad. roy. des sciences Berlin, année 1771, Berlin 1773, p. 125—137 = Lagrange, Oeuvres, Tome III, p. 425—438. [2]) Ebenda, année 1771, Berlin 1773, p. 273—304.

liefert $\frac{10^s - 1}{D}$, wo s die kleinste ganze Zahl ist, welche $10^s - 1$ durch D teilbar macht. Es sei ihm nicht gelungen, das Gesetz für die Bestimmung des s aufzufinden, weshalb seine Tabelle wertvoll sein dürfte. In der Fortsetzung derselben könnte man sich vielleicht durch Anwendung der von Rallier des Ourmes[1]) vorgeschlagenen Divisionsmethode Zeit ersparen, welche, wenn man zum voraus weiß, daß die Division ohne Rest herauskommt, den Quotienten durch eine von rechts nach links fortschreitende Operation liefert. Bernoulli beobachtete, daß, wenn bei der Division von 1 mit D einer der Reste $D - 1$ ist, dieser der $\frac{s}{2}^{\text{te}}$ Rest ist. Dann folgen einige Beobachtungen über Brüche, worin D das Produkt zweier Primzahlen ist. Lambert machte den Bernoulli auf seine eigenen Arbeiten der Jahre 1758 und 1769 über diese Sache aufmerksam, worauf Bernoulli in Additions au mémoire précédent[2]) eine Übersicht derselben gab und sie mit einigen Bemerkungen über die Fortsetzung seiner Tafeln begleitete.

Mit den eben besprochenen Abhandlungen eng verbunden ist die folgende von Johann Bernoulli III.: Recherches sur les diviseurs de quelques nombres très grands compris dans la somme de la progression géométrique $1 + 10^t + 10^2 + 10^3 + \cdots 10^T = S$.[3]) Er zeigt, daß diese Frage sich auf die Bestimmung der primen Teiler von $10^t \pm 1$ reduziert. Er stützt sich auf Theoreme Eulers[4]) und berechnet eine Tabelle, welche die primen Teiler von S, für die Werte $1, 2, \ldots, 30$ von t angibt. Auch tabelliert er Primzahlen von der Form $16n + 1$, bis auf die Primzahl 21601, sowie Primfaktoren von Zahlen der Form $a^2 + 10b^2$. Diese Abhandlung wurde von Euler gelesen und er teilte Bernoulli brieflich Kriteria mit[5]), die zur Entscheidung dienen, welche der Zahlen, $10^p - 1$ oder $10^p + 1$, durch eine Primzahl $2p + 1$ teilbar sei. Ist $2p + 1 = 4n \pm 1$, so braucht man nur die Teiler der drei Zahlen n, $n \mp 2$, $n \mp 6$ zu betrachten. Wenn man bei diesen die zwei Faktoren 2 oder 5 oder keine derselben findet, ist $10^p - 1$ teilbar; findet man aber nur den Faktor 2 oder den Faktor 5, ist $10^p + 1$ teilbar. Ist z. B. $n = 13$, $2p + 1 = 53$, dann sind keine der Faktoren bei 13, 11, 7

[1]) Mémoires de math. et phys., présentés à l'acad. roy. des sciences, par divers savans, T. V, 1768, p. 550—574. [2]) N. Mémoires de l'acad. roy. des scien. et b. l., année 1771, Berlin 1773, p. 305—317. [3]) Ebenda, année 1771, Berlin 1773, p. 318—337. [4]) Comm. Petr. T. XIV, Theo. 31; N. Comm. Petr. T. I, § 38, T. VII, Theo. 13, § 57, T. VIII, T. IX, § 5 u. 6; Lagrange in einer damals noch ungedruckten Arbeit. [5]) N. mémoires de l'acad roy. des sciences, année 1772, Berlin 1774, p. 35, 36 = Comm. Arith. I, p. 584.

vorhanden, und $10^{26}-1$ ist durch 53 teilbar. Euler bemerkt, daß diese Regeln auf Prinzipien beruhen, deren Nachweis noch mangelt. Die größte Zahl, von der man sicher weiß, daß sie Primzahl ist, sei die Fermatsche Zahl $2^{31}-1=2147483647$. Bemerkenswert sei der Ausdruck $41-x+x^2$, weil seine ersten 40 Zahlen alle prim seien.

L. Eulers Anleitung zur Algebra sollte in den späteren Auflagen drei große Namen mit sich tragen — Euler, Bernoulli, Lagrange. Im Jahre 1774 erschien nämlich zu Lyon eine von Johann Bernoulli III. besorgte französische Übersetzung mit Zusätzen von Lagrange. Diese Zusätze[1]) beziehen sich auf die unbestimmte oder diophantische Analysis. Die methodische Behandlung dieser Sache in Eulers Algebra suchte er durch neue Zusätze zu vervollständigen. Lagrange fängt mit Kettenbrüchen an und sucht seine 1767 und 1768 in den Berliner Abhandlungen entwickelte Theorie der periodischen Kettenbrüche den Mathematikern bekannt zu machen. Dann geht er zu neuen und wichtigen Methoden zur Bestimmung der ganzen Zahlen über, die Minima der unbestimmten Formen mit zwei Unbekannten ergeben. Die Auflösung unbestimmter Gleichungen zweiten Grades wird vereinfacht, aber in nicht ganz so vollständiger Form wie in seinen früheren Abhandlungen dargestellt. Betreffs der Fermatschen Gleichung $p^2=Aq^2+1$ sagt er in § VIII: „Ich glaube mithin der erste zu sein, der eine vollständig strenge Lösung gegeben hat; man findet sie in Band IV der Miscellanea societatis taurinensis; aber sie ist sehr umständlich und sehr indirekt; die vorstehend in Nr. 37 gegebene ist den wahren Grundsätzen der Frage gemäß und läßt, wie mir scheint, nichts zu wünschen übrig.“ Am Ende beschreibt Lagrange die Art, algebraische Funktionen aller Grade zu finden, die, miteinander multipliziert, stets ähnliche Funktionen erzeugen. Diese Zusätze trugen viel dazu bei, Lagranges Untersuchungen über unbestimmte Analysis dem mathematischen Publikum genauer bekannt zu machen.

Lagranges Zusätze übten auf Euler geringen Einfluß. In einem Briefe vom 24. September (5. Oktober) 1773 an Lagrange[2]) drückt er sich über dieselben anerkennend aus, schreitet aber sogleich zur eingehenden Besprechung seiner eigenen diophantischen Probleme. Daß der blinde und greise Mathematiker sich eine Lagrangesche Strenge der Beweise aneignen würde, dürfte wohl niemand erwarten. Euler arbeitete noch immer in seiner alten naiven Weise. Sein Arbeitsverfahren in der Zahlentheorie hat öfters mit der induktiven

---

[1]) Lagrange, Oeuvres, T. VII, Paris 1877, p. 158. Deutsche Übersetz. von H. Weber in Ostwalds Klassiker, Nr. 103, Leipzig 1898. [2]) Lagrange, Oeuvres, T. 14, p. 235.

Methode eines Charles Darwin größere Ähnlichkeit als mit der strengen Deduktion eines Lagrange. Und noch in seinen letzten Jahren sollte er durch einfache Induktion zur Entdeckung eines der größten Gesetze, nämlich des Reziprozitätsgesetzes, geführt werden.

Wir erwähnen nun sechs Abhandlungen L. Eulers über diophantische Probleme, die mit großer Geschicklichkeit und Unermüdlichkeit behandelt werden, aber wegen der Abwesenheit allgemeiner Methoden dennoch geringen Einfluß auf den Fortschritt der Zahlentheorie gehabt haben. Die erste derselben[1]) gibt die Auflösung, in rationalen Werten von A und B, der simultanen Gleichungen

$$AB + A + B = \square, \quad AB + A - B = \square, \quad AB - A + B = \square,$$
$$AB - A - B = \square.$$

Die zweite[2]) löst drei Aufgaben, deren eine die Auffindung von neun rationalen Zahlen verlangt, welche zwölf Gleichungen genügen. Die zwei anderen Aufgaben sind gleicher Natur. Die Auflösungen derselben beruhen auf eleganten Kunstgriffen in Koordinatentransformationen. Die dritte Abhandlung[3]) gibt die Auflösung (1) der simultanen Gleichungen

$$(x^2 + y^2)(t^2x^2 + u^2y^2) = \square, \quad (x^2 + y^2)(u^2x^2 + t^2y^2) = \square,$$

(2) der Gleichung

$$(t^2x^2 + u^2y^2)(u^2x^2 + t^2y^2) = \square,$$

(3) der simultanen Gleichungen

$$t^2x^2 + u^2y^2 = \square, \quad t^2y^2 + u^2x^2 = \square.$$

Die vierte Abhandlung[4]) löst unter anderem die simultanen Gleichungen

$$x + y + z + s = \square, \quad xy + xz + xs + yz + ys + zs = \square,$$
$$xyz + xys + xzs + yzs = \square, \quad xyzs = \square,$$

während die fünfte[5]) die Gleichung $A^4 + B^4 = C^4 + D^4$ in rationalen sowie auch in ganzzahligen Werten erzielt. Die sechste Schrift ist geometrisch: Dreiecke zu finden, deren Seiten und Mittellinien rational sind[6]). Sind $2a$, $2b$, $2c$ die drei Seiten und f, g, h deren Mittellinien, dann fordert dieses Problem die Lösung der Gleichungen

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = f^2, \quad 2c^2 + 2a^2 - b^2 = g^2, \quad 2a^2 + 2b^2 - c^2 = h^2.$$

---

[1]) N. Comm. Petr. XV, 1770, p. 29—50 = Comm. Arith. I, p. 414. [2]) N. Comm. Petr. XV, 1770, p. 75—106 = Comm. Arith. I, p. 427. [3]) N. Comm. Petr. XX, 1775, p. 48 = Comm. Arith. I, p. 444. [4]) N. Comm. Petr. XVII, 1772, p. 24—68 = Comm. Arith. I, p. 450. [5]) N. Comm. Petr. XVII, 1772, p. 64—69 = Comm. Arith. I, p. 473. [6]) N. Comm. Petr. XVIII, 1773, p. 171 = Comm. Arith. I, p. 507.

In dem Aufsatze Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia[1]) entwickelt L. Euler Lehrsätze über die bei Division einer Progression 1, a, a^2, a^3, ... durch eine Primzahl P erhaltenen Reste, und wird zur wichtigen Frage geführt, ob es geometrische Progressionen gibt, welche eine vollständige Reihe von Resten 1, 2, 3, ..., $P-1$ liefern. Die Zahlen a, welche dieses tun, werden primitive Wurzeln (radices primitivas) von P genannt. Euler hat keinen strengen Beweis von der Existenz solcher Zahlen gegeben. Ihr Vorhandensein voraussetzend, gelingt es ihm aber, ihre Anzahl genau zu bestimmen. In Gauß' Disquisitiones arithmeticae, Art. 56, wird Eulers Existenzbeweis angegriffen.

Der Eulersche Aufsatz Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata[2]) wurde durch den Lagrangeschen Beweis (1770) des Bachetschen Satzes hervorgerufen. Euler war weder mit seinem eigenen früheren Beweise, noch mit dem Lagranges zufrieden. Letzterer war zu „abstrusus et prolixus". Deshalb wird dieser Gegenstand aufs neue bearbeitet. Die Darstellung von Zahlen durch die Formen x^2+y^2, x^2+2y^2, x^2+3y^2, $x^2+y^2+z^2+u^2$ wird auf die Eigenschaften von Divisoren dieser Ausdrücke gegründet, und Euler zeigt, daß das Produkt zweier solcher ähnlichen Funktionen eine ihnen ähnliche Funktion ist.

Eine durch die Irrationalentheorie erzielte Lösung der Gleichung[3]) $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ darf ohne weitere Erklärungen übergangen werden, da Euler noch immer die Existenz einer Lösung voraussetzt. Die gleiche Voraussetzung wird von ihm auch noch in einer durch Kettenbrüche erlangten Auflösung dieser Gleichung gemacht[4]).

In der Schrift Problema diophanteum singulare[5]) löst L. Euler die simultanen Gleichungen $xy \pm xz = \square$, $xy \pm yz = \square$. Bald nachher beschäftigte sich Euler wieder mit Primzahlen und berechnete sich eine Tafel von Primzahlen bis zur Primzahl 1001989, sowie von zusammengesetzten Zahlen mit ihren kleinsten Divisoren[6]).

Über die Zerlegung von Zahlen in Summanden haben auch

---

[1]) N. Comm. Petr. XVIII, 1773, p. 85—135 = Comm. Arith. I, p. 516—537.
[2]) Acta Erud. Lips. 1773, p. 193 = Acta Petrop. I, II, 1775, p. 48 = Comm. Arith. I, p. 538—548.
[3]) N. Comm. Petr. XVIII, 1773, p. 185—197 = Comm. Arith. I, p. 549—555.
[4]) N. Comm. Petr. XVIII, 1773, p. 218—244 = Comm. Arith. I, p. 570—583.
[5]) N. Comm. Petr. XIX, 1774, p. 112—131 = Comm. Arith. II, p. 53—63.
[6]) N. Comm. Petr. XIX, 1774, p. 132—183 = Comm. Arith. II, p. 64—91.

italienische Mathematiker geschrieben. Deren Schriften sind uns aber nicht zugänglich. Major P. A. MacMahon[1]) berichtet, daß Paoli (vor 1800?) und andere daran arbeiteten ohne große Fortschritte zu machen. Gianfrancesco Malfatti verfaßte einen Aufsatz[2]) Lotto, worin die „Soluzion d'un problema sulla partizione de' numeri" gegeben ist, welcher von Italienern hoch gepriesen wird[3]).

Nicolas de Beguelin (1714—1789), Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften, veröffentlichte Recherches sur les nombres triangulaires relativement au théorème général de Mr. Fermat concernant les nombres polygonaux[4]), worin er nachweist, daß $\frac{1}{2}(x^2+y)$ auf wenigstens zwei Weisen alle ganzen Zahlen N vorstellen kann, während $\frac{1}{2}(x^2+y)+\frac{1}{2}(y^2+z)$ dieses auf wenigstens vier Weisen und $\frac{1}{2}(x^2+y)+\frac{1}{2}(y^2+z)+\frac{1}{2}(z^2+u)$ wenigstens auf sechs Weisen erzielen kann. Der nächste Teil des Beweises, daß auch die drei Dreieckszahlen

$$\frac{1}{2}(x^2+x)+\frac{1}{2}(y^2+y)+\frac{1}{2}(z^2+z)$$

alle Zahlen vorstellen mögen, ist aber nicht klar genug auseinandergesetzt. Der Autor muß dieses selber gefühlt haben, denn er bemerkt, daß die Demonstration alle Gewißheit besitze, die eine „metaphysische" Schlußfolgerung zulasse[5]).

Gleiche Urteile müssen wir über Beguelins Ableitung des Bachetschen Satzes von obigem Fermatschen Satze, und umgekehrt des obigen Fermatschen Satzes vom Bachetschen, fällen[6]).

Beguelin schlägt für die binäre Arithmetik von Leibniz einen abgekürzten Algorithmus[7]) — einen exponential algoritmus — vor, dessen Idee aus ein paar Beispielen klar wird. Die Zahlen 48 und 60, die im gewöhnlichen binären Algorithmus 110000 und 111100 geschrieben werden, werden im exponentialen Algorithmus durch 4 · 5

---

[1]) London Math. Soc., Vol. 28, 1896/97, p. 17. [2]) Prodomo della nuova enciclopedia italiana, Siena 1779, p. 69—95. Vgl. Bullettino Boncompagni IX, p. 374. [3]) Bullettino Boncompagni VI, 1873, p. 128. [4]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1773, Berlin 1775, p. 203—216. [5]) Einen früheren Versuch, den allgemeinen Fermatschen Satz zu beweisen, daß jede Zahl die Summe von 1, 2, ... n n-Eckszahlen ist, machte Beguelin in dem Aufsatze „Application du principe de la raison suffisante à la démonstration d'un théorème de M. Fermat sur les nombres polygonaux, qui n'a point encore été démontré" in den N. Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1772, Berlin 1774, p. 387—413. [6]) Ebenda année 1774, Berlin 1776, p. 312—369. [7]) Ebenda, année 1772, Berlin 1774, p. 296—352.

und $2 \cdot 3 \cdot 4 . 5$ ausgedrückt. Es sind nämlich $100000 = 2^5$ und $10000 = 2^4$. Beguelin leitet die Operationsregeln für die neue Schreibart ab. In zwei späteren Abhandlungen[1]) wendet er seinen Algorithmus auf die Bestimmung der Faktoren von Zahlen $2^n + 1$ und $4p + 3$ an, ohne aber dadurch bedeutende Resultate zu erzielen.

In einer Solution particulière du problème sur les nombres premiers[2]) entwickelt Beguelin eine Methode, Primzahlen von der Form $4x^2 + 1$ zu finden. Das Resultat dieser Arbeit ist dem Eulerschen in den Petersburger Memoiren der Jahre 1762/63, Bd. IX, p. 99—153 ähnlich; die Methode ist aber ganz verschieden. Beguelin wählt als Grundlage den Eulerschen Satz, daß alle Zahlen, welche nur ein einziges Mal in der Formel $x^2 + y^2$ enthalten sind, wo x und y teilerfremd sind, entweder Primzahlen oder das Doppelte von Primzahlen sind. In einem an Beguelin gerichteten Briefe, datiert: Mai 1778 macht ihn Euler[3]) auf die Tatsache aufmerksam, daß die allgemeinere Formel $nx^2 + y^2$ die nämliche Eigenschaft besitze, und bei geeigneter Wahl des n nur Primzahlen liefere. Zur Wahl von n diene folgende Regel: Wenn eine Zahl in der Form $n + y^2$ enthalten ist, kleiner als $4n$ ist (wo y und n teilerfremd sind) und entweder eine Primzahl p oder $2p$ oder p^2 oder eine Potenz von 2 ist, dann ist die Zahl n, welche diesen Bedingungen genügt, eine geeignete Zahl. Z. B. 60 ist eine solche Zahl, denn $60 + 1^2$, $60 + 7^2$, $60 + 11^2$, $60 + 13^2$ sind alle Primzahlen. Euler entdeckte 65 verschiedene Zahlen n, konnte aber keine finden, welche 1848 überstieg. Die Form $1848x^2 + y^2$ ermöglichte es ihm mehrere große Primzahlen (z. B. 18518809) zu entdecken. Eine vollkommenere Mitteilung dieser Arbeit wurde nach dem Wunsche Eulers von N. Fuß in einem Briefe vom 19./30. Juni 1778 an Beguelin gemacht[4]).

In einer Abhandlung Recherches d'arithmétique[5]) untersucht Lagrange die verschiedenen Formen, welche die Teiler einer ganzen Zahl von der Form $Bt^2 + Ctu + Du^2$ annehmen können. Es stellen alle Buchstaben dieses Ausdrucks ganze Zahlen dar, die auch negativ sein dürfen; B, C, D sind zum voraus bestimmte, t und u unbestimmte, teilerfremde Zahlen. Es wird zuerst bewiesen, daß jeder Teiler A die Form $A = Ls^2 + Msx + Nx^2$ hat, wo s und x gleichfalls teilerfremd sind, und wo $4LN - M^2 = 4BD - C^2$. Um dieses

[1]) N. Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1777, Berlin 1779, p. 239 bis 264, 265—310. [2]) Ebenda, année 1775, Berlin 1777, p. 300—322.
[3]) Ebenda, année 1776, Berlin 1779, p. 337—339. [4]) Ebenda, p. 340—346.
[5]) Ebenda, année 1773, Berlin 1775, p. 265—312 = Lagrange, Oeuvres, T. III, p. 696—795.

zu beweisen, lasse man $Aa = Bt^2 + Ctu + Du^2$. Ferner setze man $a = bc$, $u = bs$, wo c und s teilerfremd sind, und es folgt aus $Abc = Bt^2 + Cbts + Db^2s^2$, daß $B = Eb$ und $Ac = Et^2 + Cts + Dbs^2$. Da $\theta s + cx$ irgend eine ganze Zahl sein kann, schreibe man $t = \theta s + cx$ und eliminiere t. Man ersieht dann, daß $E\theta^2 + C\theta + Db$ durch c teilbar, also $= Lc$ ist. Wenn $2E\theta + C = M$, $Ec = N$ genommen wird, erhält man $A = Ls^2 + Msx + Nx^2$, sowie $4LM - M^2 = 4BD - C^2$, und der grundlegende Satz der Abhandlung ist bewiesen. Ist nun M numerisch größer als L, wird durch die Annahme $s = mx + s'$ eine neue Form $A = L's'^2 + M's'x' + N'x'^2$ abgeleitet, wo numerisch $M' < M$ und $4L'N' - M'^2 = 4LN - M^2$ ist.

Durch eine endliche Anzahl von Wiederholungen dieser Operation erhält man $A = Py^2 + Qyz + Rz^2$, worin numerisch $Q \overline{\gtrless} P$, $Q \overline{\gtrless} R$, $4PR - Q^2 = 4BD - C^2$ und y und z teilerfremd sind. Wenn $4BD - C^2$ positiv ist, dann muß also $Q \overline{<} \sqrt{\frac{4BD - C^2}{3}}$ sein; wenn $4BD - C^2$ negativ ist, so muß $Q \overline{\gtrless} \sqrt{\frac{C^2 - 4BD}{5}}$ sein. Durch diese Relationen sind die möglichen Werte von Q bedeutend eingeschränkt. Überdies ist Q gerade oder ungerade, je nachdem C gerade oder ungerade ist. Sobald nun Q festgesetzt ist, erhält man PR durch die Relation $4PR - Q^2 = 4BD - C^2$, und man kann irgend zwei Faktoren von PR, welche nicht kleiner als Q sind, als Werte von P und R wählen. Aus obigem sieht man, daß die Bestimmung von P, Q, R nur von dem Werte $4BD - C^2 = \pm K$ (K positiv) abhängt. Bemerkt man überdies, daß $(Bt^2 + Ctu + Du^2)4B = (2Bt + Cu)^2 + (4BD - C^2)u^2$, so wird es klar, daß Teiler von $Bt^2 + Ctu + Du^2$ auch Teiler der einfacheren Formel $x^2 \pm Ku^2$ sind. Betrachtet man $t^2 + au^2$ (a irgend eine ganze positive Zahl) als einen Spezialfall von $Bt^2 + Ctu + Du^2$, worin $B = 1$, $C = 0$, $D = a$, wo also $K = 4a$, $Q = \pm 2q$ (q positiv), dann werden $q \overline{\gtrless} \sqrt{\frac{a}{3}}$ und $PR = a + q^2$. Ist nun $PR = pr$, wo $p \overline{>} 2q$, $r \overline{>} 2q$, dann ergibt sich $py^2 \pm 2qyz + rz^2$ als der allgemeine Ausdruck für die Teiler von $t^2 + au^2$. Für $a = 1$ wird der Teiler $y^2 + z^2$, für $a = 2$ wird er $y^2 + 2z^2$; für $a = 3$ wird jeder ungerade Teiler $y^2 + 3z^2$. Die Resultate für diese drei Werte von a hatte früher Euler durch eine ganz verschiedene, auf höhere Werte von a nicht verwendbare Methode ausgearbeitet[1]). Die Methode von Lagrange ist allgemein und wird von ihm bis auf $a = 12$ angewandt. Bei der Ausbeutung der Resultate für $t^2 - au^2$ ist das Ver-

---

[1]) N. Comm. Petr., T. IV, VI, VIII.

fahren von **Lagrange** ganz ähnlich. Er stößt aber auf die Unbequemlichkeit, daß dann und wann sich scheinbar mehr Teilungsformeln herausstellen, als wirklich existieren, daß also gewisse unter denselben einander äquivalent sind. Z. B., wenn $a = 12$, so findet man die Teiler $12z^2 - y^2$ und $3y^2 - 4z^2$. Letzterer reduziert sich auf den ersteren durch die Substitution $y = 4y' + z'$, $z = 3y' + z'$. Diese Erscheinung veranlaßt ihn zu einer Untersuchung, und diese führt zur Entdeckung einer Regel, wodurch man einander identische Formeln leicht erkennen kann. Auch konstruiert er zwei Tafeln, welche die Werte von p, q, r der ungeraden Divisoren der Zahlen $t^2 + au^2$ und $t^2 - au^2$ für die sukzessiven Werte $1, 2, 3, \ldots, 31$ der Konstanten a angeben.

Diese große Untersuchung **Lagranges** wird in den Berliner Memoiren des Jahres 1775 fortgesetzt[1]).

Für Zahlen von der Form $t \pm au^2$ wurde im eben besprochenen Teil der Abhandlung die allgemeine Divisorsformel

$$X = py^2 \pm 2qyz \pm rz^2$$

abgeleitet. Im zweiten Teil wird dieser Divisor in die einfachere Form $4na + b$ transformiert, wo n irgendwelche ganze Zahl ist, $a = pr \mp q^2$, und b durch die Zahlen p, q, r bestimmt wird. Wenn X ein ungerader Teiler ist, muß entweder p oder r ungerade sein. Es sei p ungerade. Man kann schreiben

$$pX = (py + qz)^2 \pm az^2 = y'^2 \pm az^2,$$

wo $y' = py + qz$. Ist $p = Pp'c^2$, $a = r'p'c^2$, wo P und r' teilerfremd sein sollen, dann muß $r' = Pr \mp q'^2p'$, wo $q = q'p'c$, und wo P und p' teilerfremd sind, sowie auch P und $p'r'$. Es muß also $y' = p'cx$ sein, und man erhält $PX = p'x^2 \pm r'z^2$. Setzt man weiter $p'r' = a'$, dann läßt sich PX durch eine lineare Transformation von x und z auf die Form $4a'n + b'$ reduzieren, wo b' positiv oder negativ und numerisch $\overline{\gtrless} 2a'$ ist. Nun können in der Gleichung ersten Grades $PX = 4a'n + b'$ die unbestimmten ganzen Zahlen X und n immer berechnet werden, und man erhält $X = 4a'n' \pm \alpha b'$, wo n' irgend eine ganze Zahl, und α der Zähler des vorletzten Näherungsbruches für den Wert von $\frac{4a'}{P}$ ist. Wenn nun $a' = a'c^2 = a$, dann ist $\pm \alpha b' = b$ und X hat die erwünschte Form; wenn dies nicht der Fall ist, muß man noch $n' = nc^2 + \gamma$ setzen ($\gamma < c^2$), und es wird

[1]) N. Mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1775, Berlin 1777. p. 323 bis 356 = **Lagrange**, Oeuvres III, p. 759—795.

$$X = 4an \pm ab' + 4a'y,$$

wo also $b = \pm ab' + 4a'y$. Lagrange berechnet nun zwei Tafeln, die für jeden Wert von a (< 31) und von p die passenden Werte von b für Teiler von $t^2 + au^2$ angeben, und zwei andere Tafeln, welche die Werte von b für Nichtteiler liefern. Um z. B. Teiler von 10001 zu finden, beachte man, daß $10001 = (100)^2 + 1$, daß also $a = 1$, wofür die Tafeln $b = 1$ angeben, weshalb jeder Teiler die Form $4n + 1$ hat. Es ist aber auch $10001 = (101)^2 - 2(10)^2$. Für $a = 2$ liefern die Tafeln $b = 1, -1$, weshalb die Teiler eine der zwei Formen $8n + 1$ und $8n - 1$ haben müssen. Von den Primzahlen unter 100 genügen nur 17, 41, 73, 89, 97 diesen zwei Bedingungen. Durch Division ermittelt man, daß 73 ein Teiler ist. Die Abhandlung endet mit einer Untersuchung über Primzahlen von der Form $4na + b$, welche zu gleicher Zeit die Form $u^2 \pm at^2$ annehmen. Zu diesem Zwecke braucht er sieben Lemma, welche, in Verbindung mit seinen Tafeln, ihm 36 Lehrsätze über Primzahlen von der Form $4n - 1$ und 13 Lehrsätze über Primzahlen von der Form $4n + 1$ einbringen. Man findet hier den Nachweis von sechs Fermatschen Sätzen. Der erste von diesen sagt, daß alle Primzahlen von der Form $4n + 1$ auch die Form $y^2 + z^2$ annehmen. Vier andere Fermatsche Sätze betreffen bzw. die Formenpaare

$$6n + 1,\ y^2 + 3z^2;\ 8n + 1,\ y^2 + 2z^2;\ 8n + 3,\ y^2 + 2z^2;$$
$$8n + 1,\ y^2 - 2t^2.$$

Für die zwei ersten Fermatschen Sätze hatte Euler schon früher Beweise veröffentlicht. Vier andere Sätze hatte Euler früher durch Induktion entdeckt[1]). Sie betreffen bzw. die Formen $20n + 1$, $20n + 9$ und $y^2 + 5z^2$; $24n + 1$, $24n + 7$ und $y^2 + 6z^2$; $24n + 5$, $24n + 11$ und $2y^2 + 3z^2$; $28n + 1$, $28n + 9$, $28n + 11$, $28n + 15$, $28n + 23$, $28n + 25$ und $y^2 + 7z^2$. Lagrange bemerkt, daß es ihm nicht gelungen sei, den Fermatschen Satz, daß das Doppelte einer Primzahl $8n - 1$ die Summe eines Quadrates und das Doppelte eines Quadrates sei, nachzuweisen. Auch kündigt er den von ihm durch Induktion entdeckten, aber noch unbewiesenen Satz an, daß alle Primzahlen von der Form $4n - 1$ die Summe einer Primzahl von der Form $4n + 1$ und das Doppelte einer Primzahl dieser Form sind.

Eine Methode, die vollkommenen Theiler einer gegebenen Zahl zu finden[2]) von Johann Tessanek (1728—1788), Lehrer

[1]) N. mémoires Petr. VI, p. 221, VIII, p. 127. [2]) Abh. einer Privatgesellsch. in Böhmen, 1. Bd., Prag 1775, S. 1—64.

der höheren Mathematik an der Prager Hochschule, enthält drei Regeln, je eine für Zahlen, deren rechtsstehende Ziffer 1, 3 oder 7 ist. Eine Zahl ersterer Art kann so ausgedrückt werden: $100a + 10b + 1$, wo b die Zahl der Zehner andeutet. Ist sie keine Primzahl, so ist sie entweder

$$= (100x + 10f + 1)(100z + 10g + 1) \quad \text{oder} \quad (100x + 10f + 3)(100x + 10g + 7) \quad \text{oder} \quad (100x + 10f + 9)(100z + 10g + 9).$$

Daher ist erstens

$$(100a + 10b + 1) : (100x + 10f + 1) = 100z + 10g + 1;$$

woraus man erhält

$$(10a + b - 10x - f) : (100x + 10f + 1) = 10z + g$$

und

$$(10a + b - 10x - f - 100gx - 10fg - g) : (100x + 10f + 1) = 10z,$$

weshalb $b - f - g$ mit 10 teilbar sein muß, d. h. $b = f + g$ oder aber $b + 10 = f + g$. Man erhält

$$(a - x - 10bx + 10fx - bf + f^2) : (100x + 10f + 1) = z$$

oder $z + 1$. Wenn man von der Quadratwurzel von $100a + 10b + 1$ die zwei rechtsstehenden Zahlen abschneidet, und die übrige Zahl m nennt, und man $100x + 10f + 1$ kleiner als die Quadratwurzel nimmt, kann x nicht größer und z nicht kleiner sein als m. Es folgt, daß $z + 1 - m$ und $z - m$ positive Zahlen sein müssen und daß

$$(a - m - x[100m + 10b + 1] - f[10m + b - 10x - f]) : (100x + 10f + 1) = z - m \text{ oder } z + 1 - m.$$

Aus dieser Hauptformel erhält man zehn besondere Formeln, eine für jeden Fall des Wertes von b. Auf ähnliche Weise werden die zwei anderen Faktorenformen behandelt, von denen

$$(100x + 10f + 3)(100x + 10g + 7)$$

zwei Hauptformeln liefert. Im ganzen hat man 40 besondere Formeln für Zahlen, deren rechtsstehende Ziffer 1 ist. Solche, deren Endziffer 3 oder 7 ist, werden nach der gleichen Methode behandelt.

Die 1775 gedruckte Abhandlung[1]) über diophantische Probleme

[1]) N. Comm. Petr. XX, 1775, p. 48—58 = Comm. Arith. I, p. 444—449.

wurden von L. Euler schon 1771 eingereicht. Es werden erstens die simultanen Gleichungen

$$(x^2+y^2)(t^2x^2+u^2y^2)=U^2,\quad (x^2+y^2)\cdot(u^2x^2+t^2y^2)=V^2,$$

zweitens $(t^2x^2+u^2y^2)(u^2x^2+t^2y^2)=V^2$, drittens die Gleichungen $t^2x^2+u^2y^2=U^2$, $t^2y^2+u^2x^2=V^2$ aufgelöst. Ein ähnliches Kunststück ist die Resolution jeder der zwei folgenden Gleichungen[1]):

$$x^4+y^4+z^4+v^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2$$
$$+2x^2v^2+2y^2v^2+2z^2v^2=0,$$
$$x^4+y^4+z^4+v^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2x^2v^2$$
$$-2y^2z^2-2y^2v^2-2z^2v^2=0,$$

sowie die Lösung der simultanen Gleichungen[2]):

$$x^2+y^2+z^2=u^2,\quad x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=v^2.$$

Sein ältester Sohn Johann Albrecht Euler (1734—1800), schrieb einen Kommentar über die Lösung des letzten Problems[3]).

In der Abhandlung Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante[4]) geht Lagrange von dem Fermatschen Problem aus, ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen Hypotenuse, sowie die Summe der Katheten, Quadratzahlen sind. Wenn also p und q die Katheten sind, sollen $p+q=y^2$, $p^2+q^2=x^4$. Setzt man $p-q=z$, so erhält man $p^2-2pq+q^2=z^2=2x^4-y^4$. Kennt man also Lösungen von $2x^4-y^4=z^2$, dann sind die Katheten durch die Relationen $2p=y^2+z$, $2q=y^2-z$ bestimmt. Es können $x=13$, $y=1$, $z=239$ sein, woraus sich $p=120$, $q=-119$ ergeben. Sollen aber p und q beide positive ganze Zahlen sein, dann versichere Fermat, daß keine kleineren Wertsysteme existieren als

$$x=2165017,\ y=2372159,\ z=1560590745759,$$
$$p=1061652293520,\ q=4565486027761.$$

Um diese Äußerung zu beweisen und um überhaupt eine allgemeine Auflösung der Gleichung $2x^4-y^4=z^2$ zu finden, erfindet Lagrange eine Methode, welche der berühmten Fermatschen Methode, die Unmöglichkeit von $x^4-y^4=z^2$ zu beweisen, ähnlich ist. Fermat

[1]) Acta Petrop. 1778, II, p. 85—110, eingereicht 1780 = Comm. Arith. II, p. 366—379. [2]) Ebenda, 1779, I, p. 30—39, einger. 1780 = Comm. Arith. II, p. 457—461. [3]) Ebenda, 1779, Pt. I, p. 40—48. [4]) N. mémoires de l'acad. roy. des sciences, année 1777, Berlin 1779, p. 140—154 = Lagrange, Oeuvres IV, p. 377—398.

zeigte, daß man aus der Voraussetzung, daß ganzzahlige Werte von x, y, z existieren, immer nachweisen kann, daß es noch kleinere ganzzahlige Werte von x, y, z gibt, die der Bedingung $x^4 - y^4 - z^2$ genügen. Durch Wiederholung dieser Operation kommt man auf kleine Werte von x, y, z herab, die der Gleichung genügen sollten. Da in Wirklichkeit es keine solche kleinen Werte gibt, ist die Annahme der Lösbarkeit falsch. Lagranges Modifikation dieses Kunstgriffes ist wie folgt: Aus der Voraussetzung, daß es ganzzahlige Werte von x und y gibt ($x > 1$, $y > 1$), die der Bedingung $2x^4 - y^4 = \square$ genügen, soll gezeigt werden, daß es noch kleinere Werte von x und y gibt, die dieser Bedingung genügen. Es soll zu gleicher Zeit eine allgemeine Methode entwickelt werden, um letztere Werte aus den ersteren abzuleiten. Wenn man nun für x und y ihre Minimum-Werte angibt, nämlich $x = 1$, $y = 1$, kann man durch Wiederaufsteigen alle höheren Werte in der Reihenfolge ihrer Größe berechnen. Dieses Programm wird mit großer Geschicklichkeit erfolgreich durchgeführt. Erstens wird bewiesen, daß die Auflösung von $2x^4 - y^4 = z^2$ sich auf die Auflösung von $s^4 + 8t^4 = u^2$ durch kleinere Zahlen reduziert, und daß eine Lösung letzterer Gleichung stets durch die Relationen

$$m : n = (u^2 - 3st) : (s^2 - 8t^2),$$

m und n teilerfremd, $x = ms + nt$, $y = ms - nt$ eine Lösung der ersteren einbringt. Zweitens wird die Auflösung von $s^4 + 8t^4 = u^2$ auf die Lösung von der Gleichung $2q^4 - r^4 = s^2$ oder der Gleichung $q^4 - 2r^4 = s^2$ reduziert, so daß von den Werten q, r, s, welche der einen oder der anderen dieser Gleichungen genügen, durch die Hilfsgleichung $t = qr$ Lösungen von $s^4 + 8t^4 = u^2$ abgeleitet werden können. Drittens wird die Auflösung von $q^4 - 2r^4 = s^2$ von der Lösung der Gleichung $q^2 = n^4 + 8p^4$ abhängig gemacht, wo $r = 2pn$, $s = n^4 - 8p^4$, und die ganzen Zahlen n, p kleiner sind als q, r. Die Gleichung $n^4 + 8p^4 = q^2$ hat aber die gleiche Form wie $s^4 + 8t^4 = u^2$; folglich ist das Problem gelöst. Diese Untersuchung ergibt also nicht nur die Lösung von $2x^4 - y^4 = \square$, sondern auch von $x^4 - 2y^4 = \square$ und $x^4 + 8y^4 = \square$.

Es wird nun gezeigt, wie die Auflösung aller Gleichungen von der Form $x^4 + ay^4 = z^2$, wo a irgend eine gegebene Zahl ist, durch die Lösung einer gleichförmigen Gleichung mit kleineren Zahlenwerten erzielt werden kann; es wird aber betont, daß die hier erklärte Methode nicht notwendig alle möglichen Lösungen liefert.

In der Eulerschen Abhandlung De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium[1]) werden aus dem Ausdrucke

[1]) Acta Petr. 1780, I, p. 56—75 = Comm. Arith. II, p. 105—115.

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\text{ etc.} = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \text{etc.},$$

wo die Exponenten von x in der Reihe Pentagonalzahlen von der Form $\frac{3n^2 \mp n}{2}$, d. h. die Zahlen 0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22 etc. sind, und wo $x^n = 1$ ($n = 1, 2, 3, 4$ oder 5) ist, schwankende und divergente Reihen abgeleitet. Die Summe solcher Reihen wird nach der damals noch üblichen formalen Behandlungsweise ermittelt. Euler schreibt $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \text{ etc.} = \frac{1}{2}$ und $-1^2 - 2^2 + 5^2 + 7^2 - 12^2 - \text{etc.} = 0$. Vom Standpunkte der analytischen Zahlentheorie betrachtet, enthält diese Schrift Ergebnisse, die Euler schon früher veröffentlicht hatte[1]).

Die Anzahl Zahlen, welche kleiner als N und zugleich mit N teilerfremd sind, wird von L. Euler in einer Schrift des Jahres[2]) 1780 durch die Formel $\pi N = \frac{N(p-1)(q-1)(r-1)}{pqr}$ ausgedrückt, wo $N = p^\alpha q^\beta r^\gamma$. Dies ist eine verallgemeinerte Form der Formeln, welche Euler 1760/61 in der Abhandlung Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata bekannt machte.

In dem Aufsatze De inductione ad plenam certitudinem evehenda[3]) zeigt L. Euler, daß jede Zahl sich als in vier Quadratzahlen und in drei Dreieckszahlen zerlegbar erweist, sobald man annimmt, daß jede Zahl $4n + 2$ in zwei Primzahlen der Form $4n + 1$ zerlegbar sei. Letzterer Satz wird durch Induktion untersucht und als Erfahrungssatz aufgestellt.

Im Jahre 1781 wurden Auszüge aus Briefen Eulers an Condorcet veröffentlicht[4]), worin unter anderem bewiesen wird, daß die Summe der Quadrate der Koeffizienten in der Binomialentwicklung von $(1 + x)^n$ dem Ausdrucke gleich ist

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{14}{4} \cdots \frac{4n-2}{n}.$$

Die vollständige Abhandlung Eulers erschien in St. Petersburg unter dem Titel De mirabilibus proprietatibus unciarum, quae in evolutione binomii ad potestatem quamcunque evecti occurrunt[5]). Diese Werte werden vom Integral $\frac{2}{\pi} \cdot 2^{2n} \int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1 - x \cdot x}}$ ab-

[1]) Intr. in analys. Pt. IV, Chap. 16; N. Comm. Petr. 1750/51, p. 155; ebenda, 1754/55, V, p. 59—94; Corresp. math. (Fuß) II, p. 467. [2]) Acta Petr. IV, II, 1780, p. 18—30 = Comm. Arith. II, p. 127—133. [3]) Ebenda, p. 38—48 = Comm. Arith. II, p. 134—139. [4]) Histoire de l'académie royale des sciences, année 1778, Paris 1781, p. 606. [5]) Acta Petrop. pro anno 1781 pars prior. Petropoli 1784, p. 74—111.

geleitet. Euler betrachtet auch Bruchwerte von n mit dem Nenner 2 und erhält für $n = \frac{1}{2}$ als Summe der unendlichen Reihe $\frac{4}{\pi}$, für $n = -\frac{1}{2}$, eine unendliche Zahl. Euler schreibt

$$\alpha' = \frac{n'}{2}, \quad \beta' = \frac{n'(n'-1)}{1 \cdot 2}, \ldots$$

und erhält mit Hilfe der Integralrechnung die Werte der Reihe $1 + \alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots$ für ganze und gebrochene Werte von n und n'. Diese interessante Untersuchung wird in der Schrift De insignibus proprietatibus unciarum binomii ad uncias quorumvis polynomiorum extensis[1]) auf Koeffizienten von Polynomen übergeführt, und die Resultate werden durch Induktion abgeleitet.

Ein vom Grafen Franz Schaffgotsch von Prag (1743—1809) entdecktes Gesetz, welches zur Fortsetzung der bekannten Pellischen Tafeln dienet[2]), wird am gleichen Orte von Beguelin und von Tessanek bewiesen. Schaffgotsch stand mit dem Astronomen Bernoulli in Berlin in Korrespondenz und wurde durch ihn und die Schriften von Beguelin und Lambert angeregt, die Faktorentafeln zu erweitern. Sobald er aber vernahm, daß Hindenburg in Leipzig sich mit dergleichen beschäftigte, unterbrach er die vorgenommene Arbeit. Er veröffentlichte aber sein Gesetz, wodurch er Faktorentafeln, die alle durch 2, 3, 5 teilbare Zahlen ausschließen, ohne Berechnung fortsetzen konnte. Eine solche Zahlenreihe ist von der Form

$$30r + 1,\ 30r + 7,\ 30r + 11,\ 30r + 13,\ 30r + 17,\ 30r + 19,$$
$$30r + 23,\ 30r + 29,$$

wo $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ In einer Tabelle gibt Schaffgotsch alle Primzahlen von 7—449 und für jede derselben gibt er acht Zahlen zur Anwendung seiner Methode. Z. B. für die Primzahl 7 hat er 7, 4, 7, 4, 7, 12, 3, 12. Um nun in obgenannter Zahlenreihe alle durch 7 teilbare Zahlen, die größer als 7^2 sind, zu finden, nehme man nach 49 die siebente $(30r + 17 = 77)$, die nächstfolgende vierte (91), dann die siebente (119), die vierte (133), die siebente (161), die zwölfte (203), die dritte (217), die zwölfte (259). Dann fange man von neuem an und nehme die siebente etc. Noch zu beachten ist, daß die Summe der zu einer Primzahl p gehörigen Zahlen immer $8p$ ist.

Die Abhandlung[3]) Novae demonstrationes circa divisores

---

[1]) Acta Petrop. pro anno 1781 pars posterior, Petropoli 1785, p. 76—89.
[2]) Abh. einer Privatgesellsch. in Böhmen, 5. Bd., Prag 1782, S. 354—382. Man sehe einen zweiten Aufsatz von ihm für das Jahr 1786, S. 123—159. [3]) N. Acta Petrop. I, 1783, p. 47—74 = Comm. Arith. II, p. 159—173.

numerorum formae x^2+ny^2 ist eine von drei Schriften[1]) L. Eulers, welche im 18. Jahrhundert gedruckt wurden und eine bedeutende Anzahl Lehrsätze über Teilbarkeit von $x^2 \pm ny^2$ enthalten.

Den naturgemäßen Weg, Kettenbrüche abzuleiten, sie nämlich aus trinomischen Gleichungen abzuleiten, hatte Euler schon 1739 angedeutet[2]). Er wird nun in der Schrift De formatione fractionum continuarum[3]) weiter geführt. Die rekurrierenden Gleichungen $fA = gB + hC$, $f'B = g'C + h'D, \ldots$ ergeben

$$\frac{fA}{B} = g + \frac{hC}{B} = g + \frac{f'h}{f'B:C}, \quad \frac{f'B}{C} = g' + \frac{h'D}{C} = g' + \frac{f''h'}{f''C:D}, \ldots$$

woraus sich der Kettenbruch $\frac{fA}{B} = g + \cfrac{f'h}{g' + \cfrac{f''h'}{g'' + \text{etc.}}}$ leicht herleiten läßt. Ist z. B. $s = x^n(\alpha - \beta x - \gamma x^2)$, so wird $s = 0$, wenn $\alpha = \beta x + \gamma x^2$ oder $\alpha x^n = \beta x^{n+1} + \gamma x^{n+2}$, wo $n = 1, 2, 3, \ldots$ Für die Reihe $A, B, C, \ldots$ kann man hier $1, x, x^2, \ldots$ und statt $f, g, h, \ldots$ die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ setzen. Daraus wird $\frac{\alpha}{x} = \beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \cfrac{\alpha\gamma}{\beta + \text{etc.}}}$, wo

$$\frac{2\alpha}{x} = \beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha\gamma}.$$

Im Jahre 1783, dem Todesjahre L. Eulers, erschien in St. Petersburg der erste Band seiner Opuscula analytica, wovon der zweite Band 1785 herausgegeben wurde. Diese zwei Bände enthalten mehrere Abhandlungen über Zahlentheorie, die Euler ungefähr zehn Jahre früher verfaßte. In einer derselben[4]) werden die Kriteria für die ganzzahlige Auflösung von $fx^2 + gy^2 = hz^2$ hergeleitet. Für vorgelegte Werte von f und g werden Zahlen h gefunden, wofür Lösungen der Gleichung möglich oder unmöglich sind. In einer anderen Schrift[5]) Nova subsidia pro resolutione formulae $ax^2 + 1 = y^2$ wird ein wiederholter Angriff auf die Fermatsche Gleichung, die er selber und auch Lagrange früher eingehend behandelt hatten, gemacht. Er stellt Regeln auf, welche in der Konstruktion von Tabellen zur Erleichterung der Rechnungen dienen.

In der Abhandlung Miscellanea analytica[6]), welche 1773 verfaßt wurde, gibt Euler unter anderem einen Beweis des früher von

---

[1]) Comm. Petr. XIV, 1744/46, p. 151; Opuscula analytica II, 1785, p. 275 = Comm. Arith. I, p. 35. II, p. 140. [2]) Ebenda, T. XI, ad annum 1739, Petropoli 1750, p. 32—81. [3]) Acta acad. scient. imp. Petr. pro anno 1779, pars prior, Petropoli 1782, p. 3—29. [4]) Opuscula analytica I, p. 211—241 = Comm. Arith. I, p. 556—569. [5]) Ebenda, I, p. 310—328 = Comm. Arith. II, p. 35—43. [6]) Ebenda, I, p. 329—344 = Comm. Arith. II, p. 44—52.

Lagrange demonstrierten Satzes von John Wilson[1]). Euler erzielt dieses durch die von ihm entdeckten primitiven Wurzeln. Ist g eine primitive Wurzel der Primzahl p, so enthält die Periode von g alle Zahlen $1, 2, 3, \ldots (p-1)$. Es gehört nun g zu der geraden Zahl $p-1$, weshalb

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (p-1) + 1$$

durch p teilbar ist.

Ein anderer Aufsatz[2]) L. Eulers enthält Beobachtungen über den Fermatschen Polygonalzahlsatz, welche auf der Entwicklung der Potenzen der Reihe $1 + x^\alpha + x^\beta + \cdots$, wo $\alpha, \beta, \ldots$ Polygonalzahlen sind, beruhen. Eine zu gleicher Zeit veröffentlichte kleine Schrift[3]) Eulers lehrt die kleinsten Werte von α, β, γ zu finden, die annähernd der unbestimmten Gleichung ersten Grades $\alpha A = \pm \beta B \mp \gamma C$ genügen, wo A, B, C gegebene Zahlen sind, die im allgemeinen auch irrational sein dürfen.

In der Abhandlung Speculationes super formula integrali $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx}}$ ubi simul egregiae observationes circa fractiones continuas occurrunt[4]) leitet Euler durch Integralrechnung die Werte verschiedener Kettenbrüche ab. Er erhält z. B.

$$\frac{a}{\Delta} = b + \cfrac{aac}{3b - \cfrac{4aac}{5b - \cfrac{9aac}{7b - \cdots}}},$$

wo, für $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - a^2c}}{c}$, $\Delta = \int \frac{dx}{\sqrt{(aa - 2bx + cxx)}}$, „ein Ausdruck welcher", wie er sagt, „deshalb denkwürdiger ist, weil bisher kein Weg offen stand, den Wert dieses Kettenbruchs a priori zu finden". Es werden $\log i$, $\log \frac{p}{q}$, $\log \frac{n+m}{n-m}$ in Kettenbrüche entwickelt, sowie $\operatorname{arctan} \frac{ag}{b}$.

Wir verdanken Euler die Entdeckung eines fundamentalen Lehrsatzes der Zahlentheorie, des sogenannten Reziprozitätsgesetzes. Ungefähr 140 Jahre früher hatten die binomischen Kongruenzen zweiten Grades die Aufmerksamkeit des großen Mathematikers Fermat erregt. Ohne Beweise anzugeben, hatte er die Bedingungen, unter welchen

---

[1]) Vgl. Eulers Brief an Lagrange vom 24. Sept. (5. Okt.) 1773 in Lagrange, Oeuvres XIV, p. 235, und Opera posthuma (Euler) I, p. 583.
[2]) Opuscula analytica II, p. 3 = Comm. Arith. II, p. 92—98. [3]) Ebenda, II, p. 91 = Comm. Arith. II, p. 99—104. [4]) Acta acad. scient. imp. Petr. pro anno 1782, pars posterior, Petropoli 1786, p. 62—84.

± 1, $+2$, ± 3, 5 quadratische Reste oder Nichtreste von ungeraden Primzahlen sind, aufgestellt[1]).

Euler untersuchte in zwei Abhandlungen, die wahrscheinlich beide 1772 verfaßt wurden[2]), die Reste, welche entstehen, wenn Quadrate und höhere Potenzen mit Primzahlen dividiert werden. In der ersten dieser zwei Schriften drückt er das Gesetz in vollendeter Form, aber ohne Beweis aus. Diese berühmte Abhandlung führt den Titel Observationes circa divisionem quadratorum per numeros primos.

Kronecker macht die interessante Mitteilung[3]), daß Euler beinahe 40 Jahre früher, in einer Abhandlung aus den Jahren 1744 bis 1746, als Resultat von Beobachtungen eine Reihe von Lehrsätzen und Beobachtungen gibt, welche im wesentlichen das Reziprozitätsgesetz enthalten[4]). Natürlich dürfen diese Aussprüche nicht als eine Entdeckung des Gesetzes angesehen werden.

Die entwickelte und allgemeine Auffassung des Reziprozitätsgesetzes wird von Euler in der Schrift des Jahres 1783 zuerst in vier Theoremen aufgestellt, dann in der neuen Form eines einzigen Lehrsatzes ausgesprochen. Die vier Theoreme beziehen sich auf die Division der Quadratzahlen durch Primzahlen und lauten wie folgt[5]):

Si divisor primus fuerit formae $4ns + (2x+1)^2$, existente s numero primo, tum in residuis occurrent numeri $+s$ et $-s$.

Si divisor primus fuerit formae $4ns - (2x+1)^2$, existente s numero primo, tum in residuis occurret numerus $+s$; at $-s$ erit in non-residuis.

Si divisor primus fuerit formae $4ns - 4z - 1$, excludendo omnes valores in forma $4ns - (2x+1)^2$ contentos, existente s numero primo, tum in residuis occurret $-s$, at $+s$ erit non-residuum.

Si divisor primus fuerit forma $4ns + 4z + 1$, excludendo omnes valores in forma $4ns + (2x+1)^2$ contentos, existente s numero primo, tum tam $+s$ quam $-s$ in non-residuis occurret.

Euler läßt nun die Bemerkung folgen, daß er diese Lehrsätze

---

[1]) Oswald Baumgart, Ueber das Quadratische Reciprocitätsgesetz, Leipzig 1885, S. 3. [2]) Opuscula analytica I, p. 64—84 = Comm. Arith. I, p. 477—486; ebenda. p. 122—156 = Comm. Arith. I, p. 487—506. [3]) Monatsb. d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1875, S. 268. [4]) Comm. Petr. XIV, 1744, p. 151 = Comm. Arith. I, p. 35—49. Das Reziprozitätsgesetz hätte nach Kronecker namentlich aus Theorema 27 und den Annotationes 3, 4, 7, 13, 14 und 16 geschlossen werden können. [5]) Comm. Arith. I, p. 484, 485.

hinzufüge, damit jedermann, der an Spekulationen dieser Art Vergnügen findet, ihren Beweisen nachspüren möge, denn dadurch werde die Zahlentheorie gewiß wichtige Erweiterungen erhalten. Zum Schluß sagt er dann, daß die vier Sätze in folgender Weise recht übersichtlich dargestellt werden können:

Existente s numero quocunque primo, dividantur tantum quadrata imparia 1, 9, 25, 49, etc. per divisorem $4s$, noteturque residua, quae omnia erunt formae $4q+1$, quorum quodvis littera α indicetur, reliquorum autem numerorum, formae $4q+1$, qui inter residua non occurrunt, quilibet littera A indicetur, quo facto si fuerit

divisor numerus primus formae	tum est
$4ns+\alpha$	$+s$ residuum et $-s$ residuum,
$4ns-\alpha$	$+s$ residuum et $-s$ non-residuum,
$4ns+A$	$+s$ non-residuum et $-s$ non-residuum,
$4ns-A$	$+s$ non-residuum et $-s$ residuum.

Wenn wir hier den quadratischen Charakter von $-s$ außer Betracht lassen und die Primzahlen $4ns \pm \alpha$ und $4ns \pm A$ durch p bezeichnen, so ist es nicht schwer, die Eulersche Formulierung des Reziprozitätsgesetzes mit der folgenden jetzt üblichen Form zu identifizieren: Sind p und s zwei positive Primzahlen, von denen mindestens eine die Form $4n+1$ hat, so ist s quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p quadratischer Rest oder Nichtrest von s ist; haben aber beide Primzahlen p und s die Form $4n+3$, so ist s quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p quadratischer Nichtrest oder Rest von s ist.

An die Arbeit von Johann Bernoulli III. des Jahres 1771 anknüpfend, untersucht Anton Felkel (1750—?) die Verwandlung der Bruchperioden nach den Gesetzen verschiedener Zahlensysteme[1]. Der im Dezimalsysteme $0{,}076923\cdots = \frac{1}{13}$ geschriebene Bruch heißt im Systeme von der Grundzahl 6 nach Felkel: $0{,}024340531215\cdots = \frac{2}{6^2} + \frac{4}{6^3} + \frac{3}{6^4} + \frac{4}{6^5} + \cdots$ Er nennt eine Bruchperiode eines Primteilers p eine vollständige, wenn sie $p-1$ Stellen hat (wie bei $p=7$), eine unvollständige, wenn sie

[1] Abh. d. Böhmischen Gesellsch. d. Wiss. auf das Jahr 1785, Prag, S. 135 bis 174, 1. Abteil.

weniger Stellen hat (wie bei $p = 3$), und zeigt unter anderem durch Beispiele, daß unvollständige Perioden nach verschiedenen Zahlensystemen verschiedentlich in vollständige und in unvollständige Perioden übergehen können. Felkel war Lehrer an der k. k. Normalschule in Wien, 1785 Direktor von Schul- und Armenanstalten in Böhmen, später Vorsteher einer deutschen Schule in Lissabon. Er erfand eine gemeine Rechenmaschine, und schrieb ein großes Tabellenwerk, wovon die ersten Teile gedruckt wurden. Beinahe die ganze Auflage wurde aber vor Ausbruch des Türkenkrieges 1788 zu Infanteriepatronenpapier verwendet[1]).

In den Adversaria analytica miscellanea de fractionibus continuis[2]) setzt Daniel Bernoulli den zu bestimmenden Wert eines unendlichen Kettenbruches $\cfrac{1}{m+\cfrac{1}{m+\cdots}}$ gleich S, schreibt dann

$S = \frac{1}{m+S}$ und

$$S = \frac{-m+\sqrt{4+m^2}}{2},$$

wenn m positiv ist,

$$S = \frac{-m-\sqrt{4+m^2}}{2},$$

wenn m negativ ist. Merkwürdig erscheint ihm der Fall $m = 0$, welcher $S = 1$ und auch $S = -1$ liefert. Man müsse hier zwischen der absoluten Null und dem unendlich Kleinen unterscheiden. Erstere Anschauung liefere $\frac{1}{\infty \cdot 0}$, letztere ± 1. Für den unendlichen Bruch $\cfrac{n}{m+\cfrac{n}{m+\cdots}}$ ergibt sich die Summe $\pm \frac{1}{2}(-m+\sqrt{m^2 \pm 4n})$, wo man nur für negative Werte von m $-\frac{1}{2}$ nimmt, und nur für negative Werte von n $-4n$ schreibt. Daraus ersieht man, daß die Multiplikation der einzelnen Zähler und Nenner eines Kettenbruches durch eine Zahl m dessen Wert ändert. Ist n negativ und numerisch größer als $\frac{m^2}{4}$, so liefert die Formel eine imaginäre Zahl. Für $m = 1$, $n = -1$ sind die Näherungswerte $-1, -\infty, 0, -1, -\infty, 0$, etc., die gegen keinen bestimmten Wert konvergieren, weshalb es nicht sonderbar sei, daß die Formel imaginäre Resultate ergebe. Das Bestreben, eine Darstellung des Wertes des Kettenbruches $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cdots}}}$

[1]) Allgemeine Deutsche Biographie VI, 612 (Cantor). [2]) N. Comm. Petr., Tom. XX, pro anno 1775, Petropoli 1786, p. 3—23.

zu finden, hatte seinen Ausgang in einer zweiten Abhandlung, Disquisitiones ulteriores de indole fractionum continuarum[1]) worin Bernoulli die Auffindung eines independenten Gesetzes für die Bildung eines beliebigen Näherungswertes im Auge hat, aber im Falle willkürlicher „Indices" $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \cdots$ in dem allgemeinen Kettenbruch $\cfrac{a}{\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cdots}}$ nicht weiter kommt, als aus zwei nacheinander folgenden Näherungsbrüchen $\frac{M}{N}, \frac{P}{Q}$ und dem nächsten Index $\frac{f}{\Phi}$ den hierauf folgenden Näherungswert $\frac{P\Phi + Mf}{Q\Phi + Nf}$ zu ziehen, ein Verfahren, welches er als ein vorzügliches Kompendium charakterisiert. Ohne sich des Eulerschen Algorithmus zu bedienen, vervollkommnet und vereinfacht Bernoulli die bisher angewandten Darstellungsmethoden der Näherungswerte. Er geht von einem allgemeineren Kettenbruch aus, als es bei Euler der Fall war.

In einer Schrift, Arithmetische Betrachtung[2]), behandelt Johann Tessanek die Gleichung $dn^2 + 1 = e^2$, ohne aber die Arbeiten Lagranges anzuführen.

Tessanek bestimmt den Wert von n bei gewissen Zahlen d verschiedener Formen, und zeigt, wie unendlich viele Formen gefunden und bei diesen die Werte für n allgemein bestimmt werden können. Er schreibt $d = a^2 + b$ und findet $e > an$, also $e = an + p_1$; auch findet er $n > p_1$, also $n = p_1 + p_2$. Dann betrachtet er den Fall $b > a$, $p_1 > p_2$, $p_1 < 2p_2$, und setzt $p_1 = p_2 + p_3$, $p_2 = p_3 + p_4$, $p_2 < 2p_3$, etc. Für p_i findet er einen allgemeinen Ausdruck

$$\left(p_{i+1}h_i + \sqrt{(a^2+b)p_{i+1}^2 + g_i}\right) : g_i,$$

wo $h_1 = b - a$, $g_0 = b$, $g_1 = 2a - b + 1$, und

$$h_{i+1} = g_i - h_i,\ g_{i+1} = 2h_i - g_i + g_{i-1}.$$

Nimmt man nun $g_i = 1$ und $p_{i+1} = 0$, dann wird $p_i = 1$ und man kann $p_{i-1}, p_{i-2}, \ldots, n$ ausrechnen. Z. B. nimmt man $i = 3$, dann hat man

$$p_3 = 1,\ p_4 = 0,\ p_2 = 1,\ p_1 = 2,\ n = 3,\ g_3 = 12a - 9b + 4 = 1,$$

$a = 3c - 1$, $b = 4c - 1$, wo c irgend eine positive ganze Zahl ist. Endlich folgt $\{(3c-1)^2 + 4c - 1\}\, 3^2 + 1 = (9c-1)^2$. Die Auf-

---

[1]) N. Comm. Petr., Tom. XX, pro anno 1775, Petropoli 1786, p. 24—47; vgl. S. Günther, op. cit., p. 8—10. [2]) Abh. d. Böhmischen Gesellsch. der Wiss. auf das Jahr 1786, p. 160—171.

fassung des sogenannten Pellschen Problems ist hier der von Lagrange und Euler ganz fremd. Statt d als eine gegebene Konstante zu betrachten und die dazu gehörigen Werte von n und e zu untersuchen, werden hier verschiedene Formen der Zahl d genommen und dazu passende Zahlen n gefunden.

Die Zerfällung zusammengesetzter Zahlen wird auch von G. S. Klügel zu Helmstädt besprochen. Er nimmt das Produkt

$$(30r + m)(30r + n)$$

und untersucht die Werte, die mn annehmen kann[1]). An gleicher Stelle erschien über diesen Gegenstand eine Schrift von Johann Andreas von Segner, die er schon 1777 als eine Briefbeilage an Hindenburg versandt hatte[2]). Jede Zahl, die sich nicht durch 2 oder 3 teilen läßt, besitzt die Form $6n - 1$ oder $6n + 1$. Von diesem Lehrsatze ausgehend, stellt Segner Regeln für die aufzusuchenden Faktoren der Zahlen. Wie C. F. Hindenburg in seinen Anmerkungen über diese Abhandlung[3]) sagt, werden diese Regeln immer zusammengesetzter, je mehr Teiler man von Anfang an ausschließen will.

Das 18. Jahrhundert brachte drei große Forscher im Gebiete der Zahlentheorie hervor, nämlich Euler, Lagrange und Legendre. Die erste Arbeit Legendres ist Recherches d'analyse indéterminée[4]). Diese hervorragende Leistung betrifft vier Probleme zahlentheoretischen Inhalts, wovon das erste die ganzzahlige Auflösung der linearen Gleichung $Ay = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots$ behandelt. Vom Lagrangeschen Satze[5]), daß x nicht mehr als n Werte annehmen kann, und vom Fermatschen Satze ausgehend, zeigt Legendre erst, wie man $Ay = x^n - B$ lösen kann, und wendet dann die so erhaltenen Resultate auf die allgemeine Gleichung an. Im zweiten Problem wird die unbestimmte Analysis zur Zerlegung eines Polynoms in Faktoren benutzt. Es werden aber keine Kriterien entwickelt, welche die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer Zerlegung dartun. Der dritte Abschnitt entwickelt den Satz, daß $ax^2 + by^2 = cz^2$, wo a, b, c positiv, teilerfremd und von quadratischen Faktoren frei sind, lösbar ist, wenn drei ganze Zahlen λ, μ, ν von der Art existieren, daß $\frac{a\lambda^2 + b}{c}$, $\frac{c\mu^2 - b}{a}$, $\frac{c\nu^2 - a}{b}$ ganze Zahlen sind. Der vierte Abschnitt behandelt Primzahlen und ist bei weitem der bedeutendste dieser Abhandlung. Er enthält nichts weniger als das große Reziprozitäts-

---

1) Leipziger Magazin d. r. u. a. Mathem., 1. Stück, 1787, S. 199—216.
2) Ebenda, S. 217—225. 3) Ebenda, S. 226—244. 4) Histoire de l'acad. roy. des sciences, année 1785, Paris 1788, p. 465—559. 5) Berliner Memorien 1768 und 1775.

gesetz, welches zwei Jahre früher in Eulers Schriften schon gedruckt war. Legendre ist der zweite Entdecker dieses Satzes. Obschon er damals Schriften Eulers über Zahlentheorie durchmustert und einige Teile von Eulers Opuscula analytica (Bd. I) gelesen hatte, war ihm die Arbeit des Schweizers über das Reziprozitätsgesetz nicht bekannt. Später machte Gauß eine ähnliche Erfahrung. Von ihm wurde der Satz zum drittenmal entdeckt, bevor er von Legendres Untersuchungen Kenntnis hatte. Eulers Aufstellung des Satzes haben Gauß und Legendre nie gekannt. Erst Kronecker hat die Mathematiker auf diese Leistung aufmerksam gemacht[1]).

In Legendres Untersuchung ist das Reziprozitätsgesetz auch bewiesen, aber der Beweis ist unvollständig. In dem Ausdrucke $d^{\frac{c-1}{2}}$ soll nach Legendre angenommen werden, daß alle Vielfachen der Primzahl c verworfen sind; dann hat man entweder $d^{\frac{c-1}{2}} = 1$ oder $d^{\frac{c-1}{2}} = -1$, wo d irgend eine ganze Zahl, nur kein Vielfaches von c, sein darf. Nach Legendre seien A, a Primzahlen von der Form $4n+1$, und B, b Primzahlen von der Form $4n+3$; dann stellt er[2]) acht Theoreme auf, die zusammen das große Gesetz ausmachen. Die Ausdrucksweise derselben ist aus den zwei ersten ersichtlich, nämlich

$$\text{I. Wenn } b^{\frac{a-1}{2}} = 1, \text{ dann folgt } a^{\frac{b-1}{2}} = 1.$$

$$\text{II. Wenn } a^{\frac{b-1}{2}} = -1, \text{ dann folgt } b^{\frac{a-1}{2}} = -1.$$

Legendre faßt nun alle acht Fälle in folgendem Ausspruch zusammen: „c et d étant deux nombres premiers, les expressions $c^{\frac{d-1}{2}}$, $d^{\frac{c-1}{2}}$ ne seront de différens signes que lorsque c et d seront tous deux de la forme $4n-1$; dans tous les autres cas, ces expressions auront toujours le même signe."

In seinem sinnreichen Beweise geht Legendre von der Gleichung $Ax^2 + ay^2 = bz^2$ aus. Dieselbe kann nicht durch ganze Zahlen gelöst werden, da die linke Seite von der Form $4n+1$ oder $4n+2$ und die rechte Seite von der Form $4n$ oder $4n-1$ ist. Nach einer Methode von Lagrange sollte diese Gleichung aber stets lösbar sein, wenn gleichzeitig die drei Bedingungen $a^{\frac{A-1}{2}} b^{\frac{A-1}{2}} = 1$, $A^{\frac{a-1}{2}} b^{\frac{a-1}{2}} = 1$, $A^{\frac{b-1}{2}} a^{\frac{b-1}{2}} = -1$ erfüllt wären. Wenn $A = 1$ ist, so sollte $b^{\frac{a-1}{2}} = 1$,

[1]) Monatsb. d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1875, S. 267—275. [2]) Loc. cit., S. 516, 517.

$a^{\frac{b-1}{2}} = -1$ sein. Da dies aber unmöglich ist, zieht Legendre aus der Annahme $b^{\frac{a-1}{2}} = 1$ die Folgerung $a^{\frac{b-1}{2}} = 1$, und aus der Annahme $a^{\frac{b-1}{2}} = -1$ die Folgerung $b^{\frac{a-1}{2}} = -1$. Soweit ist der Beweis vollständig; auch zieht Legendre den strengen Schluß, daß $b^{\frac{B-1}{2}} = 1$, $B^{\frac{b-1}{2}} = 1$ nicht gleichzeitig bestehen können. Was den übrigen Teil des Beweises anbelangt, sagt Legendre selbst: „Dans cette démonstration, nous avons supposé seulement qu'il y avoit un nombre premier b de la forme $4n-1$, qui pouvoit diviser la formule $x^2 + Ay^2$." Gauß hat den Legendreschen Beweis einer eingehenden Kritik unterworfen[1]) und hat hervorgehoben[2]), daß zur Vervollständigung desselben es erwiesen werden sollte, daß zu einer jeden Primzahl von der Form $4n+1$ eine Primzahl von der Form $4n+3$ gefunden werden kann, in Beziehung auf welche jene quadratischer Nichtrest ist. Dieses Postulat mag von dem Satze abhängig gemacht werden, daß jede arithmetische Reihe, in welcher nicht alle Glieder einen gemeinschaftlichen Faktor haben, notwendig Primzahlen enthalten muß. Dirichlet hat später diesen Satz bewiesen[3]).

Legendre hat die Wichtigkeit des Reziprozitätsgesetzes völlig erkannt und mehrere Sätze über Primzahlen daraus abgeleitet. Mit demselben könne man alle Sätze, die Euler durch Induktion auf S. 176, 281, 295 usw. des ersten Bandes der Opuscula analytica aufgestellt habe, beweisen; man könne zeigen, daß, wenn $fx^2 \pm gy^2 = hz^2$ lösbar ist, $fx^2 \pm gy^2 = (h + fgn)z^2$ es auch ist, solange $(h + fgn)$ prim bleibt. Letzterer Satz enthält als Spezialsatz einen ähnlichen, von Euler durch Induktion entdeckten Satz. Legendre berechnet vier Tafeln, welche die verschiedenen Formen, die Teiler von $t^2 + au^2$ annehmen können, enthalten, worin die Primzahl a, beziehungsweise die Form $8n-3$, $8n+1$, $8n+3$, $8n-1$ hat. Diese Tafeln dienten nicht nur um viele schon bewiesene Sätze deutlicher hervortreten zu lassen, sondern auch um neue Sätze zu enthüllen. Legendre nennt z. B. den von ihm durch Induktion erhaltenen Satz, daß, wenn $a = 8n-3$, es ebenso viele Teiler von der Form $4n-1$ als von der $4n+1$ gibt, und daß diese Anzahl der Anzahl verschiedener Zerlegungen von a in die Summe dreier Quadrate gleich ist. Z. B., wenn $a = 109$, so hat $t^2 + au^2$ zwei Teiler von der Form $4n+1$, nämlich $y^2 + 109z^2$, $5y^2 + 2yz + 22z^2$, und zwei ähnliche

[1]) Disq. Arith., Artikel 151, 296, 297 und Additamenta. [2]) Additamenta.
[3]) Kummer in Math. Abh. d. K. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1859, S. 19, 20.

von der Form $4n-1$; es kann nun 109 genau auf zwei Arten, $10^2+3^2+0^2$, $8^2+6^2+3^2$, in die Summe dreier Quadrate zerlegt werden. Einige Sätze über Primzahlen, welche Lagrange in den Berliner Memorien der Jahre 1773 und 1775 bewiesen hatte, werden von Legendre auf neue Art abgeleitet.

L. Euler behandelt in einem Memoir[1]) den früher von ihm und Lagrange untersuchten Gegenstand über ähnliche Funktionen und Minimalwerte. Wenn $N = a^2 + nb^2$, soll erstens N^2, N^3, ... durch die gleiche Form $x^2 + ny^2$ dargestellt werden, und zweitens sollen die Minimalwerte von x oder von y gefunden werden.

Eine andere Abhandlung[2]) L. Eulers gibt die Fälle an, in welchen die Formel $x^4 + kx^2y^2 + y^4$ ein Quadrat ist, und tabuliert die ganzzahligen Werte von k zwischen -100 und $+100$, und die dazu gehörigen Verhältniswerte von $\frac{x}{y}$, welche Quadrate liefern. Man hat z. B. $k = 16$, $\frac{x}{y} = \frac{2}{1}$ und $\frac{5}{12}$. Es ergibt sich, daß k nicht 1, 3, 4, 5, 6, 9, ... sein kann.

Die Zahl 1000009, welche L. Euler in seiner De tabula numerorum primorum des Jahres 1774 unter die Primzahlen setzte, wird von ihm 1778 in einem separaten Aufsatz[3]) untersucht und als eine zusammengesetzte Zahl mit dem kleinsten Divisor 293 erkannt. Euler findet $1000009 - x^2 = 235^2$, wo $x = -972$ ist, sowie $1000009 = 1000^2 + 3^2 = 972^2 + 235^2$. Daraus wird $1000^2 - 235^2 = 972^2 - 3^2$, $1235 \cdot 765 = 969 \cdot 975$ und $\frac{1235}{975} = \frac{969}{765} = \frac{19}{15}$. Es ist also $19^2 + 15^2 = 293$ ein Divisor von 1000009.

In der 1777 verfaßten Schrift De novo genere quaestionum arithmeticarum, pro quibus solvendis certa methodus adhuc desideratur[4]) untersucht L. Euler das Problem, alle ganzen Zahlen N zu finden, so daß $A^2 + B^2$ und $A^2 + NB^2$ zu gleicher Zeit Quadratzahlen vorstellen. Er setzt

$$A = x^2 - y^2,\quad B = 2xy,\quad A^2 + NB^2 = z^2$$

und erhält $N = \{z^2 - (x^2 - y^2)^2\} : 4x^2y^2$, wo also z so zu wählen ist, daß N ganzzahlig wird. Man nehme $z = x^2 + 2\alpha x^2y^2 + y^2$ oder $z = x^2 + 2\alpha x^2y^2 - y^2$, woraus

$$N = (\alpha x^2 + 1)(\alpha y^2 + 1) \quad \text{oder} \quad = (\alpha x^2 - 1)(\alpha y^2 + 1) + 1$$

---

[1]) N. Acta Petr. IX, 1791, p. 3—18 = Comm. Arith. II, p. 174—182.
[2]) Ebenda, X, 1792, p. 27—40 = Comm. Arith. II, p. 183—189.
[3]) Ebenda, p. 63—73 = Comm. Arith. II, p. 243—248.
[4]) Ebenda, XI, ad annum 1793 p. 78—93 = Comm. Arith. II, p. 190—197.

wird. Erhält hier α verschiedene ganzzahlige und Bruchwerte, so ergeben sich 41 ganze Zahlen N, die kleiner als 100 sind. Euler gibt nun an, daß es ihm nicht gelungen sei, das Gesetz zu entdecken, welches die Zahlen N von anderen ganzen Zahlen unterscheidet, auch sei das Problem noch nicht allgemein gelöst, alle Zahlen N zu finden, welche in den Formen $N = (x^2 + 1)(y^2 + 1)$ und $N = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$, wo x und y Integral- oder Bruchzahlen sein mögen, enthalten sind.

Dies ist die letzte Abhandlung von L. Euler über Zahlentheorie, welche vor 1800 gedruckt wurde. In den von uns öfters zitierten Leonhardi Euleri commentationes arithmeticae collectae (P. H. Fuß et Nicolaus Fuß, 1849) werden im ganzen 96 Abhandlungen angegeben, von denen 33 nach 1799 erschienen und deshalb hier nicht besprochen werden können. Weder der Verlust seines Gesichts noch sein hohes Alter vermochten Eulers Arbeitsliebe zu erschöpfen. Sein Versprechen, der Petersburger Akademie so viele Abhandlungen zu liefern, daß sie auf zwanzig Jahre nach seinem Tode hinreichen sollten, hat er gehalten. Er starb 1783 und 1830 erschien in den Petersburger Memoiren ein Aufsatz von ihm über die unbestimmte Analysis.

In einem Aufsatze De décomposer les nombres entiers non-carrés en deux, trois ou quatre carrés[1]) werden von Christian Friedrich Kausler (1760—1825) aus Tübingen Rechnungsregeln abgeleitet, um eine ganze Zahl, die keine Quadratzahl ist, in die Summe von zwei, drei oder vier ganzen Quadratzahlen zu zerlegen. Dabei spielen die pronischen Zahlen, d. h. Zahlen von der Form $m(m + 1)$, eine hervorragende Rolle. In einer Tabelle werden alle pronischen Zahlen bis 50850 aufgezählt.

Im Jahre 1798 (an VI) veröffentlichte Legendre in Paris sein berühmtes Werk Essai sur la théorie des nombres. Eine zweite Auflage erschien 1808, eine dritte, mit dem Titel Théorie des nombres, 1830. Während der zweite Teil von Eulers Algebra, mit den Lagrangeschen Zusätzen, viele der höheren Resultate der Zahlentheorie unberührt läßt, bringt Legendre alles, was er finden konnte, in seinem Werke zusammen. Seine eigenen Untersuchungen von 1785 sind hier in vollendeter Form wiedergegeben. Ein geregeltes Werk darf man es aber nicht nennen. Es fehlt der leitende Faden allgemeiner Methoden. Dessenungeachtet war es hoch geschätzt und während mehrerer Dezennien waren dieses und Gauß' Disquisitiones arithmeticae die einzigen Bücher über die höheren Teile der Zahlentheorie. Auf S. 186 führt er die jetzt als das

[1]) N. Acta Petr., ad annum 1793, Petropoli 1798. hist. p. 125 -156.

„Legendresche Symbol" bekannte Bezeichnung $\left(\frac{N}{c}\right)$ ein, die den Rest $+1$ oder -1 ausdrückt, den man bei der Division von $N^{\frac{c-1}{2}}$ durch die Primzahl c erhält. In diesem Werke wird zum erstenmal der Name „Reziprozitätsgesetz" gebraucht. Er drückt nun „la loi de réciprocité" in eleganter Form so aus (S. 214): „Quels que soient les nombres premiers m et n, s'ils ne sont pas tous deux de la forme $4x-1$, on aura toujours $\left(\frac{n}{m}\right)=\left(\frac{m}{n}\right)$, et s'ils sont tous deux de la forme $4x-1$, on aura $\left(\frac{n}{m}\right)=-\left(\frac{m}{n}\right)$. Ces deux cas généraux sont compris dans la formule $\left(\frac{n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}\left(\frac{m}{n}\right)$" Es ist Legendre hier nicht gelungen, die Mängel im Beweise dieses Satzes, den er 1785 gab, zu heben, obwohl er es möglich fand, die früheren unbewiesenen Voraussetzungen über die Existenz gewisser Primzahlen einigermaßen einzuschränken

Im Rückblick sieht man, daß durch die Untersuchungen von Euler, Lagrange und Legendre die Zahlentheorie energisch gefördert wurde. Diese Forscher richteten ihre Kräfte auf folgende Themata: Die Teilbarkeit der Zahlen, die Sonderung der Primzahlen, das Studium der quadratischen Reste (welches in der Entdeckung des Reziprozitätsgesetzes gipfelte), die Betrachtung der höheren Potenzreste, die öfters auf Grund von Identitäten erlangte Lösung oder Auflösbarkeit verschiedener unbestimmter Gleichungen oder Gleichungssysteme, die Zerfällung von Zahlen in ihre Summanden, die Betrachtung von binären, ternären und anderen quadratischen, kubischen oder quartischen Formen, die Darstellbarkeit bestimmter Zahlen in Formen dieser Art und die Auffindung der möglichen Teiler derselben.

Unter den Einzeluntersuchungen über Zahlentheorie während des Zeitraumes 1759—1799 ist erstlich eine interessante Schrift von Élie de Joncourt, betitelt De la nature et des principaux usages de la plus simple espèce de nombres trigonaux, à la Haye, 1762, zu nennen. Er war Professor der Philosophie und Prediger zu Bois-le-Duc. Er gibt eine Tafel der Trigonal- und der entsprechenden natürlichen Zahlen, zeigt wie diese zur Auffindung des Produktes zweier Zahlen der Quadrat- und Kubikwurzel einer Zahl verwendet werden kann, und bemerkt an einer Stelle, daß Logarithmen keine einfachere Rechnungsmethode liefern.

Albrecht Euler, der älteste Sohn Leonhard Eulers, veröffentlichte eine Schrift, Beantwortung einiger arithmetischen Fragen[1]), worin das Problem gelöst wird, durch eine Formel die

[1]) Abhandl. d. Churbayerisch Akad., Bd II, 2. Teil, S. 5—36, 1764

Anzahl Ziffern auszudrücken, welche erforderlich sind, eine Zahl b von einer größeren Zahl a nach der gewöhnlichen Art so oft abzuziehen, bis ein Rest übrig bleibt, welcher kleiner als b ist. Dann werden Modifikationen dieses Problems betrachtet, wie z. B., a und b so zu bestimmen, daß die Anzahl der erforderlichen Ziffern gleich a ist.

In einem Aufsatze, De proprietate numerorum divisibilium per 11, 111, 1111 etc.[1]) setzt Giannantonio Andrea Castelvetri (? —1766) von Bologna frühere Untersuchungen fort[2]) und findet für 11, 111, 1111, ... Eigenschaften, welche denen von 9 und 3 analog sind. Um zu sehen, ob 83976426643 durch 111 teilbar sei, nehme man die Summe der dreizifferigen Perioden, so $643 + 426 + 976 + 83 = 2128$, dann die Summe $128 + 2 = 130$. Da nun $130 : 111$ den Rest 19 gibt, ist die vorgelegte Zahl durch 111 nicht teilbar und 19 bleibt bei der Division übrig. Die Zahl 93297809286 ist durch 1111 teilbar, denn $9286 + 9780 + 932 = 19998$, $9998 + 1 = 9999$, und letztere Summe ist durch 1111 teilbar. Eine zweite Eigenschaft erklärt sich durch zwei Beispiele. Ob die Zahl 73486529466 durch 111 teilbar sei, kann man so ausfinden: $66 + 29 + 86 + 73 = 254$, $(4 + 5 + 4) 11 = 143$, $254 - 143 = 111$, deshalb ist die gegebene Zahl durch 111 teilbar. Die Zahl 321490128211 ist durch 1111 nicht teilbar, denn $211 + 012 + 214 = 437$, $(3 + 9 + 8) 111 = 2220$, $437 - 2220 = -1783$, $-1783 + 1111 \times 2 = 439$, und 439 ist der bei der Division erhaltene Rest. Castelvetri bemerkt, daß für die Zahl 11, der „doctissimus Pater G. H." diese Eigenschaft hergeleitet habe.

In einem Aufsatze Méthode pour résoudre plusieurs problèmes indéterminés[3]) löst De la Bottière vier Aufgaben, deren

---

[1]) De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii, T. V, Pars altera, Bononiae 1767, p. 108—119. [2]) In einer vor Anfang unserer Zeitperiode veröffentlichten Abhandlung De quadam generali numerorum proprietate (De Bononiensi Scientiarum et Artium Inst. atque Acad. Comm., T. IV, Bononiae, 1757, Opuscula, p. 242—259; Commentarii, p. 113—144) zeigt er, daß die Eigenschaften der einfachen Zahlen (d. h. der Ziffern), die Fontenelle in der Histoire de l'Académie Roy. des Sciences, Paris 1728, gefunden, und Frédéric Sanvitali, S. J., in der Storia Letteraria d'Italia, T. VI, p. 761, bewiesen habe, sich auf alle ganzen Zahlen verallgemeinern lassen. Diese Arbeiten veranlaßten Francisco Maria Zanotti, die Zahlen 9 und 3 näher zu betrachten (De Bononiensi Scientiarum etc., T. IV, Commentarii, p. 113—144), den Satz zu erweitern: Si numerus quispiam multiplex sit numeri 9, ac figurae ejus omnem in unam summam conferantur, erit haec quoque summa multiplex numeri 9, und seine Resultate, in Bezug auf 9, auf die Ziffer 3 anzuwenden. [3]) Mémoires de math. et de phys. présentés ... par divers savans, Tome IV, Paris 1763, p. 33 bis 65.

drei aus Saundersons Algebra entnommen sind und auf der Auflösung unbestimmter Gleichungen ersten Grades beruhen. In der ersten sollen Vielfache von zwei ungleichen ganzen Zahlen a, b, deren Differenz eine Minimalzahl m sei, gefunden werden. Die Minimalzahl wird durch den Algorithmus des größten gemeinschaftlichen Divisors gefunden; dann wird $ax - by = \pm m$ aufgelöst. Die zweite Aufgabe, zwei positive ganze Zahlen zu finden, die durch zwei Divisoren d' und d'' dividiert die Reste r' und r'' lassen, wird auf Kalenderfragen, betreffend Sonnen- und Mondzykeln, angewandt.

Jean Joseph Rallier des Ourmes (1701—1771) von Rennes, welcher arithmetische Artikel für die große französische Enzyklopädie schrieb und Regeln zum Aufsuchen von Primzahlen vorschlug[1], schrieb auch einen Aufsatz[2], worin er eine schnelle Methode, n ganze Zahlen zu finden, angibt, wenn man das Produkt einer jeden mit der Summe der übrigen kennt. Hat man z. B.

$$x(y+z) = 49, \quad y(x+z) = 45, \quad z(x+y) = 24,$$

wo $n = 3$ ist, soll man die $n-1$ kleineren Zahlen in Faktorenpaare zerlegen, so: für 24, $\frac{1}{24} \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{6}$; für 45, $\frac{1}{45} \cdot \frac{3}{15} \cdot \frac{5}{9}$. Nun suche man diejenigen Faktorenpaare aus, deren Faktoren eine gleiche Summe haben. Diese sind $\frac{2}{12}$, $\frac{5}{9}$. Die kleineren Faktoren 2 und 5 sind zwei der gesuchten Zahlen, und die dritte ist $14 - 2 - 5 = 7$. Man hat also $x = 7$, $y = 5$, $z = 2$.

Der Astronom Joseph Stepling (1716—1778) führt Beweise einiger Eigenschaften des Neuners[3]) an. Er zeigt z. B., daß wenn n irgend eine Ziffer ist, die Ziffern des Produktes $9n$ die Summe 9 haben.

Im Jahre 1788 veröffentlichte A. G. Kästner die Lösung der folgenden unbestimmten Aufgabe[4]: Drei Bäuerinnen (A, B, C) haben je eine gegebene, von der andern unterschiedene Anzahl Eier (a, b, c). Jede verkauft ihre Eier auf zweimal, das erstemal eine so teuer als die andere (m), und so auch das zweitemal (n). Am Ende hat eine soviel gelöst wie die andere. Wieviel von ihren Eiern hat jede das erstemal verkauft (x, y, z)? Und wie verhalten sich die Preise des ersten und des zweiten Verkaufs $\left(\frac{m}{n}\right)$? Man erhält die Gleichungen $mx + n(a - x) = my + n(b - y) = mz + n(c - z)$, wo a, b, c, x, y, z.

---

[1]) Mémoires de math. et de phys. . . Tome V, 1768, p. 485—499.
[2]) Ebenda, Tome V, Paris 1768, p. 479—484.
[3]) Abh. einer Privatgesellsch in Böhmen. 1. Bd., Prag 1775, S. 141—144.
[4]) Leipziger Magazin f. d. r. u. angew. Mathematik, Leipzig 1788, S. 215—227.

$(a - x)$, $(b - y)$, $(c - z)$ positiv und ganzzahlig sind. Kästner leitet Gleichungen ab, so daß für irgend eine Voraussetzung für x die zugehörigen Werte von y, z, m, n durchgezählt werden können. In einer zweiten Lösungsmethode braucht er die Symbole da und dx für „Änderungen von endlicher Größe", wo $\frac{dx}{da}$ positiv oder negativ ist, je nachdem der Preis wächst oder abnimmt. Diese Rechnungsaufgabe ist eine Verallgemeinerung einer Aufgabe, die Johann Prätorius in seinem Abentheuerlichen Glückstopf (1669) löste.

Ein andermal nimmt Kästner ein Exempel aus Lilles Amusemens mathématiquès, 1749, wo ein Blinder augenblicklich das Produkt von $999\ldots$ ($n-1$ Ziffern) mit $666\ldots$ ($n-1$ Ziffern) zu finden weiß, und leitet die Regel ab[1]), die das Produkt liefert. Von der rechten Hand gegen die linke hat man folgende Ziffern: $4, 33\ldots$ ($n-1$ Ziffern), $5, 66\ldots$ ($n-1$ Ziffern). Dann folgt die Regel für irgend eine Ziffer statt 6 und die Auflösung eines Problems in der arithmetica divinatoria.

In einer Jugendarbeit On the resolution of indeterminate problems[2]) sucht John Leslie (1766—1832) größere Uniformität in die Auflösung unbestimmter Probleme einzuführen. Ist $A\,B = C\,.\,D$, m eine rationale Zahl, und nimmt man in $A\,.\,mB = C\,.\,mD$, $A = mD$ an, dann folgt $mB = C$. Dieses Prinzip wird auf 14 Probleme angewandt. Das 13. heißt: Eine Kubikzahl zu finden, die dem Produkte eines Quadrats und einer gegebenen Zahl gleich sei. Man hat $x^3 = ay^2$ oder $x\,.\,x^2 = a\,.\,y^2$. Nun setze man $x = ma$ und $y^2 = mx^2$. Dann $y^2 = m^3a^2$, und $y\,.\,y = ma\,.\,m^2a$. Durch eine zweite Annahme hat man $y = pma$ und $m^2a = py$. Da aber $x = ma$, so wird $y = px = \frac{x^2}{ap}$, $x = ap^2$, $y = ap^3$. Wenn nun $a = 3$, $p = 2$, dann ist

$$x = 3(2)^2 = 12 \quad \text{und} \quad y = 3(2)^3 = 24.$$

[1]) Archiv d. r. u. angew. Mathematik, 1799, S. 204—208. [2]) Trans. Roy. Soc. of Edinburgh, Vol. II, Pt. II, 1790, p. 193—212.

Verbesserungen.

S. 39 Z. 6 v. u. statt Lons le Saulnier lies Lons le Saunier
S. 48 Z. 5 statt Ruggero lies Ruggiero.
S. 49 Z. 10 statt D'Abren lies D'Abreu
S. 53 Z. 14 statt Rekahn lies Reckahn.
S. 57 Z. 9 statt Arithmetik lies Arithmetick
S. 61 Z. 30 statt Chauncy lies Chauncey
S. 62 Z. 10 statt G. Trenchant lies J. Trenchant

ABSCHNITT XXI

KOMBINATORIK
WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG
REIHEN · IMAGINÄRES

VON

E. NETTO

Kombinatorik.

In den früheren Bänden dieser Vorlesungen wurde gezeigt, daß die Begründung der wissenschaftlichen Kombinatorik sowie die der kombinatorischen Analysis für Leibniz in Anspruch genommen werden muß, der seiner philosophischen Anlage gemäß die hohe Bedeutung und die vielversprechende Zukunft dieser im Werden begriffenen mathematischen Disziplinen, wenn auch nicht scharf erkannte, so doch mit dem sicheren Takte des Genies ahnte. Es wurden dann die Fortschritte dargelegt, die dieser neue Zweig der Wissenschaft den Arbeiten der Bernoullis, eines Moivre, eines Euler verdankt. Nach diesen Ergebnissen kommen wir zu einer merkwürdigen Epoche, zu der der sogenannten kombinatorischen Schule. Die ausgesprochene Absicht der sie begründenden und fördernden Männer war, neben die gewöhnlichen Operationen der Arithmetik, Algebra und Analysis die kombinatorischen Operationen als gleichberechtigt und gleichwertig zu stellen und für sie das Bürgerrecht zu erwerben. Durch diese Erweiterung der Hilfsmittel sollte sich, wie sie meinten, die Darstellung vereinfachen und das Forschungsgebiet vergrößern. Diese Schule faßte trotz ihrer großen Ziele und Absichten nur in Deutschland Boden und trug auch hier nur bescheidene Früchte; von großen Forschern im mathematischen Bereiche gehörte ihr keiner an. Das erklärt sich wohl daraus, daß sie ganz in Formeln und in Formalismus aufging. Zwar beherrschte sie eine Zeitlang den deutschen Markt; aber das meiste von dem, was sie brachte, sank bald in eine, nicht immer ganz gerechte Vergessenheit[1]).

Der Begründer der kombinatorischen Schule war Karl Fried-

[1]) In seinem, von Napoléon I. veranlaßten „Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789" (Paris 1810) sagt J. B. Joseph Delambre: Die kombinatorische Analysis beschäftigt noch immer die deutschen Mathematiker; aber in Frankreich hat sie keine Gunst erringen können, weil ihr Gebrauch zu beschränkt ist, und besonders weil sie auf die Zweige der Wissenschaft nicht anwendbar erscheint, deren Förderung uns vorzüglich am Herzen liegt.

rich Hindenburg, Sohn eines Kaufmanns in Dresden, am 13. Juli 1739 daselbst geboren. Nachdem er das Gymnasium zu Freiberg in Sachsen absolviert hatte, studierte er in Leipzig Medizin, Physik und Mathematik und kam dann durch Gellerts Vermittlung als Erzieher in das Haus eines Herrn von Schönberg, in dessen Sohne sich schon früh ausgesprochene mathematische Talente zeigten. Ihn begleitete Hindenburg auf die Universität Leipzig, wo er sich von da ab, ebenso wie später in Göttingen, mehr und mehr mit mathematischen Studien beschäftigte. Dort, in Göttingen schloß sich Hindenburg hauptsächlich an Abraham Gotthelf Kästner an. Im Jahre 1771 habilitierte er sich in Leipzig, ward dort 1781 außerordentlicher Professor der Philosophie, 1786 ordentlicher Professor der Physik und starb am Orte seiner Wirksamkeit am 17. März 1808. In der ersten Zeit nach seiner Ernennung zum Professor der Physik widmete er sich eingehend dieser Wissenschaft. Eine Arbeit über Wasserpumpen stammt aus dieser Periode. Seinen ersten mathematischen Untersuchungen entstammt ein im Jahre 1776 verfaßtes Büchlein: „Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden". Sie kommt im wesentlichen auf die Darlegung der Idee hinaus, durch mechanische Mittel (Abzählen oder Anlegen eines Winkelmaßes) das bekannte Schema des „Siebes des Eratosthenes", mittels dessen die Folge der Primzahlen hergestellt wird, zur Ablesung der Glieder arithmetischer Reihen zu benutzen. Hindenburgs Vorliebe für Superlative in der Abschätzung der eigenen Verdienste kommt schon hier unverhüllt zum Ausdruck. Von diesen „Hindenburgschen Zahlenbogen" ist mehrfach in Lamberts deutschem gelehrten Briefwechsel (herausgeg. von Joh. Bernoulli, Berlin 1785) die Rede, da ein österreichischer Mathematiker, Anton Felkel, der eine ähnliche Erfindung gemacht und bei der Berechnung von Faktorentafeln benutzt hatte, sie Lambert vorlegte. Zu seinen ersten kombinatorischen Arbeiten kam Hindenburg 1778; sie beziehen sich auf den polynomischen Satz, oder wie die damalige Ausdrucksweise lautete, auf die Potenzierung des Infinitinoms.

Wir müssen hier eine kleine Einschiebung machen.

Die Potenzierung des Binoms und die Beweise der binomischen Formel wurden früher bereits eingehend besprochen. Aber für unsere Zeitperiode kommen auch noch Beweise in Betracht; von ihnen seien diejenigen kombinatorischer Natur hier erwähnt.

Fr. Ulr. Theod. Aepinus, 1724 zu Rostock geboren, zuerst Privatdozent zu Rostock, dann 1755—1757 Professor der Astronomie in Berlin und später in Petersburg, zuletzt in Dorpat privatisierend,

wo er 1802 starb, beweist den binomischen Satz auf Grund folgender Beziehungen[1]): Ist

$$(1+x)^n = a_n + b_n x + c_n x^2 + d_n x^3 + e_n x^4 + \cdots,$$

so hat man, wie gezeigt wird, für die Koeffizienten die Relationen

$$c_n = \frac{b_n \cdot b_{n-1}}{1\cdot 2}, \quad d_n = \frac{b_n \; b_{n-1}\cdot b_{n-2}}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad e_n = \frac{b_n \cdot b_{n-1}\cdot b_{n-2}\cdot b_{n-3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}, \ldots;$$

und daraus folgen die Werte der Binomialkoeffizienten nach Bestimmung von b_n, wo für $b_{r+s} = b_r + b_s = (r+s)b_1 = (r+s)$ gilt.

Jan Hendrik van Swinden, 1746 im Haag geboren, zuerst Professor der Physik, dann zu Amsterdam auch Professor der Mathematik, nahm 1798 an der Beratung über die Einführung des metrischen Maß- und Gewichtssystems teil; starb 1823 zu Amsterdam. Er benutzt zum Beweise der binomischen Formel die Relationen[2])

$$a_{n-1} = a_n, \quad b_{n-1} = b_n - a_n, \quad c_{n-1} = c_n - b_n + a_n,$$
$$d_{n-1} = d_n - c_n + b_n - a_n, \ldots$$

Auch Euler beschäftigte sich mehrfach mit der Frage nach dem Gültigkeitsbereiche der Newtonschen Binomialformel. Zunächst im Jahre 1774[3]).

Hier geht er von der interessanten Bemerkung aus, daß eine Gleichung, in der ein Parameter n vorkommt, wohl für alle positiven Werte von n richtig, für die übrigen aber falsch sein könne, so daß also die Richtigkeit der binomischen Formel für ganzzahlige positive Exponenten noch keine weiteren Schlüsse auf ausgedehntere Gültigkeit erlaubt. Als Beispiel gibt er die Gleichung

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \cdots,$$

die er für ganzzahlige positive n beweist, aber für andere Werte von n als unrichtig erkennt[4]). Aus diesem Beispiele erhellt, daß die für

---

[1]) Nov. Comment. Petrop. 1760, 1761, VIII, p. 169—180. [2]) Verhandl. Maatsch. Haarlem 1770, XII, p. 334—358. [3]) Nov. Comment. Petrop. 1774, XIX, p. 103—111. [4]) Hiermit im Zusammenhange steht folgende Stelle eines Briefes von Euler an Daniel Bernoulli vom 16. Februar 1734 aus Petersburg datiert (Bibliotheca mathematica, dritte Folge, VII, p. 136; 1906): „Ich vermeinte neulich, daß nachfolgende Series

$$\frac{m-1}{9} - \frac{(m-1)(m-10)}{990} + \frac{(m-1)(m-10)(m-100)}{999000}$$
$$- \frac{(m-1)(m-10)(m-100)(m-1000)}{9999000000} + \text{etc.}$$

(alwo (!) die Anzahl der Nullen im Numeratore und Denominatore einander

ganze positive Exponenten n kombinatorisch sofort beweisbare Gleichung

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} + x\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$$

noch nicht die Gültigkeit für beliebige Exponenten n verbürgt. Nun setzt Euler

$$1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots = [n];$$

dann gilt also für positive ganze n die Gleichung $[n] = (1+x)^n$. Kombinatorisch wird nun gezeigt, daß $[n]\cdot[m] = [n+m]$ sei, und daraus ergibt sich $[an] = [n]^a$ für alle beliebigen Werte von n und alle ganzen positiven Werte a. Ist nun $\left[\frac{p}{q}\right]$ vorgelegt, wo p und q ganz und positiv sind, so findet man $\left[q\cdot\frac{p}{q}\right] = \left[\frac{p}{q}\right]^q = [p] = (1+x)^p$ und also $\left[\frac{p}{q}\right] = (1+x)^{\frac{p}{q}}$. Ähnlich wird der Beweis für negative Exponenten geliefert.

In der zweiten, auf den binomischen Satz bezüglichen Arbeit, die dreizehn Jahre später erschienen ist[1]), setzt Euler voraus, daß bei beliebigem Exponenten n Entwicklungen der Form

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots,$$
$$(1+x)^{n+1} = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 + \cdots$$

möglich seien, und daß für $n=0$ alle Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ verschwinden. Dann leitet er die Rekursionsformeln

$$A' - A = 1,\quad B' - B = A,\quad C' - C = B, \ldots,\quad N' - N = M, \ldots$$

ab. Setzt man $N = \alpha n$, also $N' = \alpha(n+1)$, so wird $M = \alpha$. Umgekehrt folgt aus $M = \alpha$ durch Integration der Funktionalgleichung $N = \alpha n + c$, wo c eine Konstante ist; da für $n=0$, $N=0$ sein muß, so ist $N = \alpha n$ die für diesen Fall allgemeine Lösung. Ebenso: ist $N = \alpha n(n-1)$, also $N' = \alpha n(n+1)n$, so ist $M = 2\alpha n$, und umgekehrt folgt aus $M = \alpha n$ allgemein $N = \frac{1}{2}\alpha n(n-1)$ usf. Auf diese Weise wird das Gesetz der Koeffizienten festgelegt; da der Anfangskoeffizient $=1$ ist, so folgt die Newtonsche Form.

Auch einer hierher gehörigen Arbeit von Joh. Andr. v. Segner

---

gleich sind, im Übrigen ist die Lex klar) den Logarithmum communem ipsius m exprimere, dann ist $m = 1$, so ist die gantze Series $= 0$, ist $m = 10$, so kommt 1, ist $m = 100$, kommt 2, und so fortan. Als ich nun daraus den Log. 9 finden wollte, bekam ich eine Zahl, welche weit zu klein war, ohngeacht diese Series sehr stark convergirte."

[1]) Nov. Act. Petrop. V, 1887, p. 52.

sei gedacht[1]), in der die Binomialform ohne Berücksichtigung der Konvergenzfrage allgemein bewiesen werden soll. Segner setzt

$$1 + \binom{n}{1} e + \binom{n}{2} e^2 + \binom{n}{3} e^3 + \cdots = S_n,$$

wo n eine ganz beliebige Größe bedeutet, beweist kombinatorisch die Gleichung $S_r \cdot S_m = S_{m+r}$, darauf direkt $S_1 = 1 + e$ und dann der Reihe nach $S_n = (1 + e)^n$ für ganze positive, für gebrochene positive, für negative und endlich als Grenzfall für irrationale Zahlen. Von e sagt Segner, er werde „im allgemeinen" kleiner als 1 angenommen. Man erkennt leicht die Ähnlichkeit seiner Schlüsse mit denen des ersten Eulerschen Beweises.

Wir kehren von dieser Einschaltung zu unserem eigentlichen Thema zurück.

Die Aufgabe der Potenzierung des Infinitinoms[2]) fordert die Bestimmung des allgemeinen Gliedes in der Entwicklung einer der Formen

$$(a + b + c + d + \cdots)^m \quad \text{und} \quad (1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots)^m,$$

deren zweite nach Potenzen von z geordnet zu denken ist. Über die Behandlung dieser Probleme durch A. de Moivre, Leibniz, Jak. Bernoulli wurde früher bereits berichtet. Die erste darauf bezügliche Untersuchung Hindenburgs bezieht sich auf die erste dieser Formen, die zweite Untersuchung auf die letzte, und die dritte Veröffentlichung ist im wesentlichen nur ein Abdruck der beiden ersten nebst einigen Erweiterungen und einer voraufgeschickten, sehr ausführlichen Geschichte des Problems[3]). Wir gehen etwas näher auf die Besprechung dieser drei Arbeiten ein.

Durch die Benutzung der Permutationen oder der Kombinationen hatte man den Ausdruck für die Polynomialkoeffizienten in

$$(a + b + c + \cdots)^m$$

für jedes Aggregat $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ ohne weiteres aufschreiben können. Aber diese Methode hatte den nicht zu unterschätzenden Nachteil im Gefolge, daß die Gültigkeit der Formel sich auf ganze positive Exponenten beschränkte. Um diesem Mangel abzuhelfen, hatte eben

---

[1]) Nouv. Mém. de Berlin 1777, p. 37. [2]) Dieser Ausdruck stammt nach Pfaff, „Bemerkungen über eine besondere Art von Gleichungen" (Der polynomische Lehrsatz, p. 150 Anm.) von Ernst Gottfried Fischer. [3]) I. Infinitinomii dignitatum indeterminarum leges ac formulae. Gotting. 1778. II. Methodus nova et facilis serierum infinitarum exhibendi dignitates exponentis indeterminati. Gotting. 1778. III. Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati historia, leges ac formulae, editio pluribus locis aucta et passim emendata. Gotting. 1779.

jener junge Mann, dessen wissenschaftliche Ausbildung Hindenburg leitete, Karl Friedrich von Schönberg, den Versuch gemacht, das Polynomialtheorem aus dem Binomialtheorem herzuleiten, um jenem den gleichen Gültigkeitsbereich zu geben, wie diesem, nämlich den für gebrochene und für negative Exponenten; weiter gingen kaum weder für das eine noch für das andere Problem die Bestrebungen jener Zeit. Hindenburg folgte seinem Schüler in seiner ersten Arbeit auf diesem Wege, aber ohne Neues oder Besseres zu bieten.

Die zweite Abhandlung beschäftigt sich mit der Form

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \cdots)^m.$$

In ihr bringt Hindenburg die Anfänge seiner komplizierten Bezeichnungsweise, die er von nun an weiter entwickelt und im Jahre 1796 abschließend einheitlich vorträgt[1]). Wir wollen zunächst auf diese Bezeichnungsart näher eingehen.

Bei Hindenburg bedeuten die Symbole

$$^m\mathfrak{A},\ ^m\mathfrak{B},\ ^m\mathfrak{C},\ ^m\mathfrak{D},\ \ldots$$

oder in der ersten Zeit auch nur

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C},\ \mathfrak{D},\ \ldots$$

die einzelnen Binomialkoeffizienten erster, zweiter, dritter, vierter, ... Ordnung von m Elementen, nämlich

$$^m\mathfrak{A} = \frac{m}{1},\quad ^m\mathfrak{B} = \frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\quad ^m\mathfrak{C} = \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \ldots$$

Hindenburg behält also, wie auch noch viel später L. Euler[2]), die von Leibniz aus guten Gründen wenigstens zum Teil verlassene Methode, die alphabetische Reihenfolge der Buchstaben als Anordnungs- und

---

[1]) „Höchst wichtiger Einfluß der Combinationslehre auf die Analysis." VI. Abhandlung mit dem vollständigen 12 Zeilen langen Titel in dem Sammelwerke: „Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis". Herausgegeben von C. F. Hindenburg, Leipzig 1796.

[2]) Euler benutzt zur Bezeichnung der Binomialkoeffizienten $\left(\frac{m}{\varrho}\right)$ und $\left[\frac{m}{\varrho}\right]$. Das erste im Jahre 1778; die Abhandlung erschien erst 1806 in den Nov. Act. Acad. Petrop. XV, 1806, p. 33; das zweite im Jahre 1781, Act. Acad. Petrop. V (1784), pars prior, p. 84. Die jetzt gebräuchliche Bezeichnung $\binom{m}{\varrho}$ stammt von Andreas von Ettingshausen (1796—1878), Vorlesungen über höhere Mathematik, Bd. I, S. 38 (Wien 1827).

Abzählungsprinzip zu verwenden, hier und später, trotz ihrer Unübersichtlichkeit und Unbequemlichkeit noch bei. Ähnlich bezeichnet er generell die Polynomialkoeffizienten durch

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},\ \mathfrak{e},\ \ldots;$$

die Buchstaben haben hier, je nach den Potenzprodukten, mit denen sie verbunden sind, verschiedene zahlenmäßige bei gleicher begrifflicher Bedeutung. So ist z. B.

$$\mathfrak{d}(x^4 + x^3y + xy^2z + xyzu + \cdots) = \frac{4!}{4!}x^4 + \frac{4!}{3!\,1!}x^3y + \frac{4!}{1!\,2!\,1!}xy^2z + \frac{4!}{1!\,1!\,1!\,1!}xyzu + \cdots,$$

$$\mathfrak{e}(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^3yz + x^2y^2z + \cdots) = \frac{5!}{5!}x^5 + \frac{5!}{4!\,1!}x^4y + \frac{5!}{3!\,2!}x^3y^2 + \frac{5!}{3!\,1!\,1!}x^3yz + \frac{5!}{2!\,2!\,1!}x^2y^2z + \cdots$$

Man sieht, daß ein Symbol wie $\mathfrak{h}$ allerlei bedeuten kann, indem z. B.

$$\mathfrak{h}x^2y^6 = {}^8\mathfrak{B}x^2y^6,\quad \mathfrak{h}x^3y^5 = {}^8\mathfrak{C}x^3y^5,\quad \mathfrak{h}x^4y^4 = {}^8\mathfrak{D}x^4y^4,\ \ldots$$

wird, so daß also eine deutliche Inkongruenz zwischen der Bezeichnung bei den Binomial- und der bei den Polynomialkoeffizienten zutage tritt.

Die Bezeichnung der verschiedenen Klassen bei Kombinationen und Variationen geschieht in ähnlicher Weise. Dabei unterscheidet Hindenburg die Kombinationen und Variationen „an sich", d. h. ihre Gesamtheit, und die „zu bestimmter Summe" der als Zahlen genommenen Elemente. Zugleich ist zu bemerken, daß es sich dabei nicht um bloße Anzahlbestimmungen handelt, sondern daß die bezeichnenden Symbole die Aufstellung aller geforderten Komplexionen selbst andeuten sollen. Darin beruht eine Ergänzung früherer Untersuchungen der Bernoullis und Eulers, die den Kombinatorikern besonders wichtig erschien.

Bei Hindenburg bedeuten

$'\mathrm{A}$, $'\mathrm{B}$, $'\mathrm{C}$, $'\mathrm{D}$, ... Kombinationen erster, zweiter, dritter, ... Klasse ohne Wiederholungen,

A', B', C', D', ... Kombinationen erster, zweiter, dritter, ... Klasse mit Wiederholungen,

$'A$, $'B$, $'C$, $'D$, ... Variationen erster, zweiter, dritter, ... Klasse ohne Wiederholungen,

A', B', C', D', ... Variationen erster, zweiter, dritter, ... Klasse mit Wiederholungen.

Es ist also zu setzen

$$'\mathrm{B} = ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,\ \ldots,$$
$$\mathrm{B}' = aa,\ ab,\ ac,\ ad,\ bb,\ bc,\ \ldots,$$
$$'B = ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ ad,\ da,\ \ldots,$$
$$B' = aa,\ ab,\ ba,\ ac,\ ca,\ bb,\ \ldots.$$

Die zugehörigen Anzahlen der Komplexionen werden durch ein vorgesetztes $n\int$ = numerus specierum = Anzahl der Komplexionen bezeichnet; das k^{te} Glied der gut geordneten Komplexionen durch nachgesetztes k. So ist bei vier Elementen a, b, c, d

$$'\mathrm{B}4 = bc, \quad \mathrm{B}'4 = ad, \quad 'B5 = ad, \quad 'B1 = aa.$$

Handelt es sich um Kombinationen oder Variationen zu bestimmter Summe m, so wird ${}^m\mathrm{A}, {}^m\mathrm{B}, \ldots, {}^mA, {}^mB, \ldots$ geschrieben. Die Elemente sind dabei als Zahlen gedacht, etwa als die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... Dabei wird z. B.

$${}^7\mathrm{C} = 115,\ 124,\ 133,\ 223;$$
$${}^7C = 115,\ 124,\ 133,\ 142,\ 151,\ 214,\ 223,\ 232,$$
$$241,\ 313,\ 322,\ 331,\ 412,\ 421,\ 511.$$

Wenn es notwendig wird, die Zahlen durch Buchstaben zu ersetzen, dann wird diese Art der Substitution durch einen Zeiger oder einen Index angegeben. Also bedeutet ${}^7\mathrm{C}$ unter Verwendung des Index

$$\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\ a\,b\,c\,d\,e\end{pmatrix}$$

die Kombinationen

$$aac,\ abd,\ acc,\ bbc;$$

und $\overset{pqr}{{}^7C}$ bedeutet bei den drei Indizes

$$p = \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\ a\,b\,c\,d\,e\end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\ \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,5\\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{e}\end{pmatrix}$$

den Komplex der Kombinationen

$$a\alpha\mathfrak{e},\ a\beta\mathfrak{d},\ a\gamma\mathfrak{c},\ b\beta\mathfrak{c}.$$

Hindenburg bezeichnet ferner gegebene Glieder und Koeffizienten (dati) durch gewöhnliche Buchstaben,

$$A + B + C + \cdots = p, \quad a + b + c + \cdots = q,$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots = r,$$

und angenommene, als unbekannt angesehene (ficti) durch Buchstaben mit darüber gesetzten Punkten[1]). Endlich werden noch

[1]) Nach Leibniz: „coefficientes ficti, qui assumuntur tamquam dati". Gegen diese Bezeichnung wendet sich Klügel (Der polynomische Lehrsatz usw herausg. von Hindenburg; Leipzig 1796, p. 61): „nicht coefficientes ficti,

Lokalausdrücke oder Lokalzeichen eingeführt; sie werden als Abkürzung des Anfangsbuchstabens von „terminus" mit t oder 1 bezeichnet, in der Weise, daß

$$p1n = ptn,\ pq1n,\ q^3 1n$$

bzw. den n^{ten} Term der Reihe p, des Produktes pq, der dritten Potenz von q bedeutet. — Ferner bedeutet $\varkappa$ den Koeffizienten, also $p\varkappa n$ den n^{ten} Koeffizienten der Reihe p; so für $p = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \cdots$

$$p\varkappa 2 = \beta,\quad p\varkappa 3 = \gamma,\quad p^3\varkappa 1 = \alpha^3, \ldots$$

Hindenburgs wissenschaftliche Bestrebungen gingen vor allem auf die Benutzung der kombinatorischen Komplexe aus, und deshalb stellte er auch, als Erster, einfache Regeln für die Bildung von Permutationen, von Kombinations-[1]) und von Variationsklassen auf, um bei der Herstellung von Tafeln die Möglichkeit von Auslassungen oder von Wiederholungen auszuschließen. Weitere Beschäftigung mit diesem für ihn grundlegenden Problem führte ihn 1794 zu seinen kombinatorischen Involutionen und Evolutionen[2]), d. h. zu demjenigen Verfahren bei der Herstellung von Tabellen, nach dem aus den niedergeschriebenen kombinatorischen Komplexionen für n Elemente durch Hinzufügung nach einfachen Regeln die Komplexionen

	c	b	a	
4	3	2	1	a
4	3	1	2	b
4	2	3	1	
4	2	1	3	
4	1	3	2	
4	1	2	3	c
3	4	2	1	
3	4	1	2	
3	2	4	1	
3	2	1	4	
3	1	4	2	
3	1	2	4	
.	.	.	.	.

für $(n+1)$ Elemente gefunden werden können, und umgekehrt durch einfaches Abstreichen jene aus diesen.

sondern incogniti oder assunti. Die unbekannte Größe in einer Gleichung ist keine erdichtete Größe".

[1]) Während man früher Kombinationen, Konternationen, ... (Con 2 ationen, Con 3 nationen, ...) unterschied, nimmt durch Hindenburg der Ausdruck „Kombination" die umfassende, jetzt übliche Bedeutung an und verdrängt das bis dahin gebräuchliche „Complexion". [2]) „Über combinatorische Involutionen und Evolutionen", Archiv f. reine u. angew. Math., herausgeg. von Hindenburg (1794), Bd. I, p. 13—46.

Bei den Permutationen stellt sich der involutorische Aufbau so dar, wie die vorstehende Probe zeigt. Im kleinsten Winkelhaken, rechts oben, steht 1. Davor wird dann 2 geschrieben und darunter die Vertauschung 2, 1. Die erlangten beiden Permutationen der Elemente 1, 2 werden in den Winkelhaken *bb* eingeschlossen. Vor jede Permutation innerhalb *bb* wird das neue Element 3 geschrieben, darunter ein zweiter Komplex von ebensovielen Zeilen, die aus dem ersten Komplexe durch Vertauschung von 2 und 3 entstehen; darunter ein dritter Komplex, der aus dem zweiten durch Vertauschung von 1 und 2 entsteht. So hat man alle Permutationen von 1, 2, 3 erlangt; sie werden in den Winkelhaken *cc* eingeschlossen. Weiter wird allen Permutationen aus *cc* das neue Element 4 vorgesetzt. Darunter schreibt man einen zweiten Komplex, der aus dem ersten durch Vertauschung von 3, 4 entsteht; darunter einen dritten, der aus dem zweiten durch Vertauschung von 2, 3 entsteht, und darunter endlich einen letzten vierten, der aus dem dritten durch Vertauschung von 1, 2 entsteht. So hat man die Gesamtheit der Permutationen aus den vier Elementen 1, 2, 3, 4 usf.

Als zweites Beispiel geben wir die Herstellung der Tabelle der Kombinationen (nicht „an sich", sondern) mit den „Lokalsummen" 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, gebildet aus den natürlichen Zahlen. In dem innersten Winkelhaken, oben rechts, steht die 1, als einzig mögliche Zerlegung der Summe 1. In die Spalte vorher, links, wird 1, 2 untereinander gesetzt; diese beiden Zerlegungen der 2 werden in den Winkelhaken *bb* eingeschlossen. Um das allgemeine Fortschrittsgesetz der involutorischen Bildung zu zeigen, denken wir uns den Winkel-

g	*f*	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*	
1	1	1	1	1	1	1	*a*
1	1	1	1	1	2		*b*
1	1	1	1	3			*c*
1	1	1	2	2			
1	1	1	4				*d*
1	1	2	3				
1	1	5					*e*
1	2	2	2				
1	2	4					
1	3	3					
1	6						*f*
2	2						
2	5						
3	4						
7							*g*

haken *ee* bereits ausgefüllt und zeigen nun die Herstellung von *ff*. Dabei enthält *ee* alle Zerlegungen von 5. Vor jede dieser Zerlegungen

in *ee* schreiben wir 1; darunter sovielmal 2, als Zerlegungen in *d* (von 4) mit 2 oder einem höheren Elemente beginnen und hinter die Zweien die erwähnten Zerlegungen der 4 selbst. In die neue Spalte schreiben wir unter die Zweien die 3 so oft, als Zerlegungen in *c* (von 3) mit 3 oder einer höheren Zahl vorkommen und hinter die Dreien diese Zerlegungen selbst usf. Das Gesetz ist leicht kenntlich.

In ähnlicher Weise werden die Variationen behandelt.

Die Auffindung solcher involutorischen Anordnungen schien Hindenburg ein ganz besonderer Ruhmestitel zu sein. Das klingt recht naiv aus seinem Aufsatze heraus: „Mehrere große Mathematiker sind der Erfindung der combinatorischen Involutionen ganz nahe gewesen“; Archiv f. reine u. angew. Mathematik I (1795), p. 319—331. Euler, Lambert, Daniel Bernoulli werden dabei mit einer gewissen herablassenden Anerkennung erwähnt, sie seien der Lösung schon hübsch nahe gekommen.

In dem Aufsatze „Die Kombinationslehre ist eine selbständige Wissenschaft usw.“ (12 Zeilen)[1]) führt Hindenburg besondere Bezeichnungen für involutorisch geordnete Kombinationen und Variationen durch seltsam geschlungene Buchstabenformen ein; das übergehen wir berechtigterweise, da es keinerlei Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik gehabt hat. Dagegen weisen wir gleich hier auf eine ähnliche involutorisch angelegte Darstellung der Zähler und der Nenner von Kettenbrüchen hin, die Hindenburg gleichfalls gegeben hat[2]). Nach dem bisher Besprochenen sieht man sofort, wie man die Nenner von $1/a_1$, $1/a_1 + 1/a_2$, $1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3, \cdots$, d. h. die Ausdrücke a_1, $a_1 a_2 + 1$, $a_1 a_2 a_3 + a_3 + a_1, \cdots$ aus der Buchstaben- und Zahlenanordnung in den einzelnen Winkelhaken entnimmt, und wie diese Anordnungen hergestellt werden können. Hindenburg bespricht a. a. O.

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
a_5	a_4	a_3	1	
a_5	a_4	a_1		
a_5	a_2			
a_5	1			
a_3	a_2	a_1		
a_3	a_1			
a_1				

die zugehörigen Regeln in der allerbreitesten und ausführlichsten Form.

Seine Resultate preist der Erfinder mit überschwenglichen Worten.

[1]) In dem Sammelwerke: „Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis“, Leipzig 1796, p. 303.
[2]) Archiv f. reine u. angew. Math. Hindenburg (1794), p. 47—69; p. 154—194.

Er ist ein Mann der Superlative; er läßt keine Gelegenheit vorübergehen, ohne sich selbst und seine Involutionen in das strahlendste Licht zu setzen; er hat die unbedingteste Hochachtung vor den Ergebnissen und den Fortschritten, die ihm die Wissenschaft verdankt.

Bei der Potenzerhebung von Reihen setzt Hindenburg

$$q^m = (1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots)^m = (1+y)^m$$
$$= 1 + {}^m\mathfrak{A}y + {}^m\mathfrak{B}y^2 + {}^m\mathfrak{C}y^3 + \cdots$$

und führt dadurch die Frage auf die Herstellung der Potenzen

$$y^n = (\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots)^n$$

zurück; denn q^m besitzt als Faktor der Potenz z^k das Aggregat

$${}^m\mathfrak{A}y^1 1k + {}^m\mathfrak{B}y^2 1(k-1) + {}^m\mathfrak{C}y^3 1(k-2) + \cdots = (1+y)^m \varkappa(k+1).$$

Das ist eine sogenannte Lokalformel, die die Lösung vermittelt. Von ihr aus muß man zu den rein kombinatorischen Formeln übergehen; denn[1]) „das Direktorium führt die Analysis. Diese läßt ihre Verordnungen durch Lokalformeln ergehen und überläßt die Vollziehung derselben den combinatorischen. Die Analysis kann nicht deutlicher und vernehmlicher sprechen als in Lokalformeln; ihre Befehle können nicht pünktlicher und prompter vollstreckt werden, als durch combinatorische". — „Die Analysis zeigt, was zu tun sei; die Kombinatorik, wie es zu tun sei."[2])

Um von der Lokalformel zur kombinatorischen Formel zu gelangen muß

$$y^n 1\lambda \parallel (y = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots)$$

hergestellt werden. Bei unserer (von der Hindenburgschen schwerfälligen etwas abweichenden) Bezeichnung wären alle Produkte

$$\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\alpha_{i_3}\ldots\alpha_{i_n},$$

bei denen

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n = \lambda$$

ist, herzustellen. Bei Hindenburg tritt wegen der Schreibweise

$$y = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \cdots$$

der Zeiger oder Index

$$\begin{pmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\ldots \\ 1\,2\,3\,4\ldots \end{pmatrix}$$

in Kraft, um die Frage auf die Kombinationen n^{ter} Klasse mit der

---

[1]) „Höchst wichtiger Einfluß" usw. siehe oben, p. 303. [2]) „Novi systematis permutationum, combinationum et variationum . . . primae lineae", Lips. 1781, p. IV: „Analysis ostendit, quae sunt agenda; ars combinatoria, quomodo sint agenda".

Lokalsumme λ zu übersetzen. So beantwortet er denn die Frage durch das auszuführende Symbol für Kombinationen, in dem N die n^{te} Klasse generell repräsentiert,

$$^{\lambda}\mathrm{N}\begin{pmatrix}1\,2\,3\,4\,\ldots\\ \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\ldots\end{pmatrix}.$$

Von diesen Kombinationen kommt er durch Hinzufügung des Zeichens für Polynomialkoeffizienten zu den Variationen, und die Lösung der Aufgabe wird durch $y^m \urcorner \lambda = u^{\lambda} \mathrm{N} s^{\lambda}$ vermittelt. Für die Koeffizienten von q^m gilt die Gleichung

$$q^m x(k+1) = {}^m\mathfrak{A}\mathfrak{a}^k\mathrm{A} + {}^m\mathfrak{B}\mathfrak{b}^k\mathrm{B} + {}^m\mathfrak{C}\mathfrak{c}^k\mathrm{C} + \cdots;$$

in ihr ist das Hauptresultat der Hindenburgschen Untersuchungen enthalten. Sie gibt also ein mechanisches Verfahren, um den Koeffizienten von z^{λ} in $(1 + \alpha z + \beta z^2 + \cdots)^m$ zu bestimmen.

Ist eine Summe $a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$ vorgelegt, in die für x zu substituieren ist $1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \cdots$, so ist nach der Bestimmung von $x^2, x^3, \ldots$ die Substitution in den einzelnen Summanden vorzunehmen. Das nennt Hindenburg „die Methode der Potenzen". Auf sie ist er besonders stolz.

Die besprochene Verwendung der Kombinatorik bei Potenzerhebung zeigt uns, wie Hindenburg zu seinen Untersuchungen geführt wurde[1]). „Bisher hatte man sich in der Kombinationslehre fast nur allein um die Menge und Anzahl der Verbindungen und Versetzungen gegebener Dinge gekümmert[2]), ihre wirkliche Darstellung aber, die für die Analysis so wichtig ist, fast ganz übergangen oder nur jener Zahlen wegen in Betrachtung gezogen. Hier war also noch viel zu tun übrig; und es ist in der Tat unbegreiflich, wie ein so großes, fruchtbares Land so lange hat unbebaut liegen bleiben können."

Zur Untersuchung der Variationen führte ihn das Problem der Multiplikation von verschiedenen Reihen, wie ihn die von gleichen Reihen auf das Studium der Kombinationen geleitet hatte. Ist etwa bei

$$p = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots,\quad q = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots,$$
$$r = \mathfrak{a}x + \mathfrak{b}x^2 + \mathfrak{c}x^3 + \cdots$$

das Produkt pqr zu bilden und nach Potenzen von x zu entwickeln, so gilt für den Koeffizienten von x^{λ} der kombinatorische Ausdruck

---

[1]) Leipz. Magazin f. reine u. angew. Math. (1786), Heft 3, p. 323. [2]) Vgl. jedoch diese Vorlesungen, Bd. III², S. 342 angeführte Tabelle des Franciscus van Schooten.

$${}_{\lambda}\overset{pqr}{C}$$

mit den Zeigern

$$p = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\ldots \\ a\,b\,c\ldots \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\ldots \\ \alpha\,\beta\,\gamma\ldots \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\ldots \\ \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\ldots \end{pmatrix},$$

deren erster, zweiter, dritter die Übersetzung der ersten, zweiten, dritten Elementenzahl der Variationen dritter Klasse zur Summe λ in die entsprechenden Lettern vermittelt.

Befremdlich mag es bei den obigen Darlegungen erscheinen, daß die kombinatorische Schule den Schritt von der Verwendung von Buchstaben zu Zahlen nur so langsam und gewissermaßen widerstrebend hat tun können; daß sie die Einführung von „Zeigern" nicht durch die Benutzung von Zahlindizes überflüssig gemacht hat. Und dabei war Hindenburg bereits 1783 zu der Erkenntnis gekommen und hatte sie im § III der oben angeführten „lineae" zum Ausdruck gebracht, daß die Verwendung von Zahlen als Elemente der von Buchstaben weit überlegen sei. Allein zu der nötigen Folgerung drang er nicht vor.

In der gleichen Abhandlung „novi systematis primae lineae" wird die Reihe der Anwendungen der Kombinatorik auf die Analysis ausführlich angegeben (§ IV). Es wird angeführt: 1) Multiplikation von Reihen; 2) Division von Reihen; 3) Potenzieren und Radizieren von Reihen; 4) Substitution von Reihen in Reihen; 5) Elimination; 6) Rationalisierung irrationaler Ausdrücke; 7) Interpolation; 8) Transformation; 9) Umkehrung von Reihen; 10) Darstellung von trigonometrischen und anderen transzendenten Funktionen durch Reihen. — Alle diese Probleme, oder genauer nur ihre formale Seite, bespricht Hindenburg l. c. ausführlich und gibt am Schlusse der Abhandlung zu jedem Problem zugehörige Tabellen mit den fertigen Resultaten der einfachsten Fälle.

Als Beispiel geben wir eine Formel von J. K. Burckhardt (1773 bis 1825), einem unter v. Zach zum Astronomen ausgebildeten Gelehrten. Sie gehört zur Anwendung 10) und lautet[1])

$$\operatorname{tang} n\alpha = \frac{{}^{n}\mathfrak{A} \operatorname{tang} \alpha - {}^{n}\mathfrak{C} \operatorname{tang}^3 \alpha + {}^{n}\mathfrak{E} \operatorname{tang}^5 \alpha - \cdots}{1 - {}^{n}\mathfrak{B} \operatorname{tang}^2 \alpha + {}^{n}\mathfrak{D} \operatorname{tang}^4 \alpha - \cdots}.$$

Das am meisten, am eingehendsten und mit dem größten Erfolge behandelte Problem war das der (formalen) Umkehrung unendlicher Reihen „reversio serierum". Ist die Reihe

$$y^{\vartheta} = a_0 x^{\alpha} + a_1 x^{\alpha+\delta} + a_2 x^{\alpha+2\delta} + \cdots \equiv p$$

---

[1]) „Nova acta Academ. electoralis Moguntiae scientiarum utilium, quae Erfurti est". I, Erf. 1799, p. 295—316.

gegeben und wird daraus die Entwicklung

$$x^\gamma = A_0 y^{\frac{\beta\gamma}{\alpha}} + A_1 y^{\frac{\beta(\gamma+\delta)}{\alpha}} + A_2 y^{\frac{\beta(\gamma+2\delta)}{\alpha}} + \cdots$$

gesucht (wobei die oben angegebene Schreibweise über den $A_0, A_1, \ldots$ als „angenommenen" Koeffizienten eigentlich noch Punkte gefordert hätte), so erhält man rekurrierende Formeln für die $A_0, A_1, A_2, \ldots$ durch die Lokalformeln

$$A_0 p\varkappa 1 = 1, \quad A_0 p\varkappa 2 + A_1 p^2\varkappa 1 = 0,$$
$$A_0 p\varkappa 3 + A_1 p^2\varkappa 2 + A_2 p^3\varkappa 1 = 0, \ldots$$

Eine independente Formel für die Lösung des Umkehrproblems fand zuerst Eschenbach. — Hieron. Christoph Eschenbach war 1764 zu Leipzig geboren; er hatte dort unter dem Einflusse der Hindenburgschen Schule gestanden; seit 1790 als Ingenieur-Kapitän im Dienste der holländisch-ostindischen Kompagnie, wurde er weit in der Welt umhergeworfen; er starb 1797 zu Madras in Vorderindien als englischer Kriegsgefangener. In seiner 1789 zu Leipzig erschienenen „Dissertatio de serierum reversione, formulis analytico-combinatoribus exhibita" stellt er das allgemeine Glied der Entwicklung von x^γ nach Potenzen von y mit Hilfe kombinatorischer Operationen her. Seine Ergebnisse waren aber insofern unbefriedigend, als diese Formel nur durch unstrenge Induktion erlangt war und eines Beweises ermangelte; dann aber auch dadurch, „daß die Harmonie in den einzelnen Gliedern der Formel vermißt wurde, wo ungleichnamige Buchstaben mit einander verbunden sind, $\mathfrak{A}$ mit bB, und $\mathfrak{B}$ mit C, u. s. w."[1]. Dem letzten Mangel half Hindenburg ab[2]), der vollkommen symmetrisch und in der geforderten harmonischen Darstellung die allgemeinere Aufgabe löst, aus der Relation

$$ax^\lambda + bx^{\lambda+d} + cx^{\lambda+2d} + \cdots = \alpha y^\lambda + \beta y^{\lambda+\delta} + \gamma y^{\lambda+2\delta} + \cdots$$

die Darstellung einer beliebigen Potenz x^σ von x als Potenzreihe von y herzuleiten. Den ersten Mangel jedoch beseitigte erst 1793 ein Schüler Hindenburgs, Heinr. August Rothe, der, 1773 zu Dresden geboren, dort die Kreuzschule besuchte, in Leipzig Dozent und a. o. Professor war, darauf von 1800—1804 als Privatmann in Freiberg lebte, dann als o. Professor der Mathematik an der Universität zu Erlangen wirkte, 1823 in den Ruhestand trat und 1842 starb. Er führt den Beweis der Formel auf doppelte Art; einmal auf rein

[1]) H. A. Töpfer, „Combinatorische Analysis und Theorie der Dimensionszeichen in Parallele gestellt". Leipzig 1793, S. 170. [2]) Problema solutum maxima universale ad serierum recursionem formulis localibus et combinatorio-analyticis absolvendum paralipomenon. Lips. 1793.

kombinatorischem Wege durch den Schluß von n auf $(n+1)$ und einmal mit Hilfe der Differentialrechnung[1]). Rothe gibt der Eschenbachschen Formel den Ausdruck in Lokalzeichen

$$q\,1(n+1) = \frac{\gamma}{\gamma + n\delta}\, p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}\, x(n+1)\, y^{\frac{\beta(\gamma+n\delta)}{\alpha}},$$

wobei

$$p \equiv y^{\beta} = ax^{\alpha} + bx^{\alpha+\delta} + cx^{\alpha+2\delta} + \cdots,$$

$$q \equiv x^{\gamma} = Ay^{\frac{\beta\gamma}{\alpha}} + By^{\frac{\beta(\gamma+\delta)}{\alpha}} + Cy^{\frac{\beta(\gamma+2\delta)}{\alpha}} + \cdots$$

zu setzen ist[2]). In Worten heißt dies: „das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied der Reihe für x^{γ} ist gleich dem Produkte des $(n+1)^{\text{ten}}$ Koeffizienten der Potenz $p^{-\frac{\gamma+n\delta}{\alpha}}$ der Reihe für y^{β} in die Größe $\frac{\gamma}{\gamma+n\delta} y^{\frac{\beta(\gamma+n\delta)}{\alpha}}$."

Dieses elegante Resultat verknüpft die Umkehrung der Reihen mit dem Polynomialtheorem. Das mag wohl den mit keinem allzu weiten Blick begabten Hindenburg zu der Meinung geführt haben, es sei „der polynomische Lehrsatz das wichtigste Theorem der ganzen Analysis".

Durch die Eschenbach-Rothesche Formel wurde für die Kombinatoriker die Untersuchung und die Benutzung der Lokalzeichen in den Mittelpunkt des Interesses gerückt. Ihnen wurde nun eine ganze Reihe von Arbeiten gewidmet. Rothe selbst versucht durch Aufstellung von Lokalformeln für Produkte aus Potenzen von Reihen diese Lokalzeichen von den kombinatorischen Zeichen unabhängig zu machen[3]). Es gelang ihm, aus seiner Formel die bekannte, von Lagrange 1768 ohne Beweis gegebene für die Umkehrung von Funktionen herzuleiten, d. h. die, durch die eine willkürliche Funktion $\varphi(x)$ der durch $x = y + sf(y)$ bestimmten Variablen x in eine nach Potenzen von s fortschreitende Reihe entwickelt wird[4]). Hier setzt eine Arbeit Pfaffs ein. Johann Friedrich Pfaff wurde 1765 zu Stuttgart geboren; er zeigte schon als Zögling der Karlsschule seine hervorragende Begabung für Mathematik; auf Veranlassung des Herzogs Karl studierte er in Göttingen, ging 1787 als Astronom zu Bode nach Berlin, von da bald darauf nach Wien und ward 1788 als Professor der Mathematik nach Helmstädt berufen. Von der westfälischen Regierung wurde er 1800 als Professor nach Halle a. S.

---

[1]) Formulae de serierum reversione, demonstratio etc., Lips. 1793.

[2]) Oder (nach Rothescher Bezeichnung), wobei die beiden Skalen gelten

$$p(a, b, c, \ldots) \quad \text{und} \quad q(A, B, C, \ldots).$$

[3]) Archiv f. reine u. angew. Mathem. I (1794), p. 220—223, 228—232. [4]) Ibid. I (1794), p. 442.

versetzt, wo er 1825 starb. Pfaff schlägt in der oben erwähnten Arbeit den umgekehrten Weg ein wie Rothe: er gibt zunächst einen Beweis für den Lagrangeschen Satz und folgert aus ihm die Lokalformel für die Umkehrung der Reihen[1]). Von Pfaff erwähnen wir hier gleich noch das Werk: „Disquisitiones analyticae maxime ad calculum integralem et doctrinam serierum pertinentes", Helmstädt 1797, I (einziger Teil). In dem hierin befindlichen „Tractatus de reversione serierum sive de resolutione aequationum" werden die Untersuchungen über die Lagrangesche Reihe und die Rothesche Formel zusammengestellt; weiter findet sich in ihm ein Überblick über die Kombinationslehre und eine Ableitung des polynomischen Satzes.

Große Aufregung wurde in den Reihen der Kombinatoriker durch das Erscheinen eines Buches hervorgerufen: „Theorie der Dimensionszeichen nebst ihrer Anwendung auf verschiedene Materien aus der Analysis endlicher Größen, Teil 1 und 2, Halle 1792". Diese Schrift stammte von Ernst Gottfried Fischer, der 1754 in Hoheneiche bei Saalfeld geboren war, zunächst in Halle a. S. Lehrer am Pädagogium der Franckeschen Stiftungen wurde, dann seit 1787 Professor der Physik und Mathematik am grauen Kloster zu Berlin und der gleichzeitig der Akademie der Wissenschaften angehörte. Er starb 1831 zu Berlin. Die durch seine Veröffentlichung hervorgerufene Aufregung grenzte an Empörung. Und das ist erklärlich; denn die Schrift enthielt, als eine Erfindung Fischers, die Theorie der kombinatorischen Analysis, wie sie von Hindenburg ausgearbeitet worden war, in, so schien es, nur oberflächlich, und nicht einmal zu ihrem Vorteile verändertem Gewande! Es kommt in ihr in der Tat wenig Neues vor, abgesehen von einer eigentümlichen Bezeichnungsweise, aus der, wie zu glauben nahe lag, die Absichtlichkeit in der Verschiedenheit allerorten herausblickte. Hindenburg selbst hielt sich dieser Veröffentlichung gegenüber mit seiner Meinung vornehm zurück und erwähnt nur ganz gelegentlich die „Dimensionszeichen"; seine Schüler, zumal Rothe und Heinrich August Töpfer traten um so entschiedener und lauter für ihren Lehrer gegen den „Plagiator" auf. Töpfer war 1758 zu Leisnig in Sachsen geboren; er wuchs in ärmlichen Verhältnissen auf und wurde Schreiber beim Appellationsrat v. Schlieben. Dieser ward auf seine hervorragende Begabung aufmerksam und setzte ihn in den Stand, an der Universität Leipzig Mathematik und Physik zu studieren. 1798—1828 lebte er als Lehrer an der Fürstenschule zu Grimma und starb im Ruhestand 1833 zu

[1]) Archiv f. reine u. angew. Math. I (1794), p. 81—84, 85—88.

Dresden. Er veröffentlichte 1793 zu Leipzig als Sachwalter Hindenburgs eine geharnischte Schrift: „Combinatorische Analytik und Theorie der Dimensionszeichen in Parallele gestellt“, in der er das Fischersche Buch als ein „Beispiel von Dreistigkeit hinstellt, wie es in den Geschichtsbüchern der Wissenschaften vielleicht ohne seines Gleichen ist“. H. A. Töpfer versucht es, Belege dafür beizubringen, daß Fischer die Hindenburgschen Untersuchungen gekannt habe.

Zu seiner Verteidigung veröffentlichte G. Fischer 1794 die Schrift: „Über den Ursprung der Theorie der Dimensionszeichen und ihr Verhältnis gegen die combinatorische Analytik des Herrn Professor Hindenburg“, in der er den Nachweis zu liefern unternimmt, daß die Übereinstimmung eine naturgemäße Folge der Behandlung von gleichen Problemen (der Umkehrung der Reihen, sowie der Potenzierung von Polynomen) sei. Über seine Kenntnis der Hindenburgschen Arbeiten äußert sich Fischer: „Ich versuchte mehr als einmal, diese Schrift“ (das Nov. Syst.) „durchzulesen, aber ich gestehe aufrichtig, daß mir immer die Geduld ausging, ehe ich noch mit den Definitionen, welche zwölf Quartseiten füllen, fertig war“[1]). In dem Sammelbande der Königlichen Bibliothek zu Berlin, der die Fischersche Antwort-Schrift enthält, sind ihr zwei Manuskripte vorgeheftet; das erste ist eine kurze Verteidigung von Fischer selbst; das zweite rührt her von Abel Bürja, Professor der Mathematik an der Académie militaire zu Berlin und Mitglied der Akademie der Wissenschaften. Er, „ayant soigneusement examiné“ Fischers Verteidigungsschrift, tritt unbedingt für ihn ein. Mancher andere tat das gleichfalls; allein die Männer der kombinatorischen Schule konnten sich weder zufrieden geben, noch mochten sie ihre Angriffe einstellen. So blieb die Angelegenheit bis zum September 1802 in der Schwebe. Da erschien in Nr. 169 des „Intelligenzblattes der allgemeinen Litteraturzeitung“ eine, durch ein anonymes Schreiben an die Redaktion vom Jahre 1800 veranlaßte Erklärung von W. Pfaff, der damit „eine erwünschte Gelegenheit ergriff, etwas zur Ehrenrettung Fischers beizutragen“. Es stellte sich heraus, daß Pfaff im Besitze mehrerer Briefe Fischers sich befand, die sich auf den Gegenstand des Streites bezogen; die Existenz dieser Briefe hatte Pfaff vergessen; durch die anonyme Anfrage wurden sie in sein Gedächtnis zurückgerufen. Und diese Briefe zeigten durch Inhalt und Datierung unwiderleglich, daß von einem Plagiat keine Rede sein konnte! Hindenburg erklärte denn auch in Nr. 193 des Intelligenzblattes: „So nehme ich nun weiter keinen Anstand, unaufgefordert, aus freier Bewegung Fischer von jenem

---

[1]) S. XIII der Einleitung.

Verdachte frei zu sprechen". Damit war die unerquickliche Angelegenheit beendet.

Unter den Vertretern der um Hindenburg gescharten kombinatorischen Schule haben wir bereits Eschenbach, Rothe, Töpfer und Pfaff angeführt. Neben ihnen sind noch Kramp und Klügel zu nennen. Christian Kramp wurde 1760 zu Straßburg i. E. geboren und starb daselbst 1826; er führte ein unstetes Leben, durchzog Deutschland und die Nachbarländer, war Mediziner, Hebammenmeister, Physikus, Professor der Chemie und Physik zu Köln und endlich, nachdem er sich als Liebhaber mit der Mathematik beschäftigt hatte, Professor der Mathematik zu Straßburg. Er schrieb eine Fieberlehre nach mechanischen Grundsätzen, eine Kristallographie des Mineralreiches, eine Geschichte der Aerostatik, über eine geometrische Analyse der Kristalle u. a.; seine Untersuchungen über Infinitinome lassen ihn als zu den Kombinatorikern gehörig erscheinen. — Georg Simon Klügel, 1739 zu Hamburg geboren, 1812 zu Halle gestorben, Professor zu Helmstädt und dann zu Halle, mehr vielseitig als tief, hat in seinem mathematischen Wörterbuche die Artikel, die der Kombinatorik gewidmet waren, besonders eingehend behandelt.

In seinen Schriften beruft sich Hindenburg oft darauf, daß Leibniz an die Entwicklung der Kombinatorik die größten Erwartungen geknüpft und von ihr weittragende Resultate erwartet und vorausgeahnt habe. In der Tat spricht sich Leibniz häufiger in diesem Sinne aus; das eine Mal (vgl. diese Vorlesungen III², S. 112) an einer Stelle, an der er sich über die Einführung eines Algorithmus äußert, den wir jetzt als Determinantenbildung bezeichnen. Er sagt dort: „Man sieht hieraus, daß die Vervollkommnung der Algebra von der Kombinatorik abhängt". Um so auffälliger ist die geringe Beteiligung der kombinatorischen Schule am Ausbau der Determinanten, des mächtigsten und wichtigsten kombinatorischen Hilfsmittels. Hindenburg ist der Einzige, der sich gelegentlich einmal mit diesem Zweige der Wissenschaft befaßt; aber freilich ohne neues zu geben. Er referiert[1]) über Cramers und Bézouts Resultate. Das einzig Selbständige dieser Arbeit war die Übertragung der Determinantenentwicklung in kombinatorische Zeichen. —

Über die weitere Entwicklung der Determinanten in unserem Zeitraum wird bei der Behandlung der linearen Gleichungen die Rede sein. —

Von Euler, dessen weit fassender Geist keinem Zweige der

---

[1]) Praefatio zum „Specimen analyticum de lineis curvis secundi ordinis", Lipsiae 1784.

Mathematik fern blieb, ist auch bei der Behandlung der Kombinatorik Erwähnung zu tun. Es gehören zwei Arbeiten hierher, die er beide im Titel als „merkwürdige Fragen“ bezeichnet; die erste: „Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse“ erschien 1766 in der Histoire de l'Acad. à Berlin für 1759; p. 310—337. Sie behandelt die zufällig an Euler herangetretene Aufgabe des Rösselsprunges, d. h. die, einen Springer in seiner eigentümlichen Fortbewegungsart so über das ganze Schachbrett von 64 Feldern zu führen, daß jedes der Felder einmal und nur einmal besetzt wird. Zu dieser einfachsten Aufgabe können noch komplizierende Forderungen treten; so etwa, daß vom letzten besetzten Felde ein einziger Springerzug wieder auf das Ausgangsfeld zurückführt; oder daß, wenn die der Reihe nach besetzten Felder mit fortlaufenden Nummern 1, 2, 3, ... 63, 64 bezeichnet werden, die Differenz der Nummern je zweier zur Mitte symmetrischer Felder stets 32 betrage. Auch an die Zahl der Felder des Schachbrettes ist das Wesentliche des Problems nicht geknüpft; die entsprechende Forderung kann für ein Rechteck von $a \cdot b$ Feldern aufgestellt werden, die sich in a Zeilen und b Spalten verteilen. Euler behandelt die Frage derart, daß er einen Rösselsprungweg aufs Geratewohl vornimmt und ihn so weit als möglich fortführt; ist eine Fortsetzung nicht mehr möglich, sind dabei aber noch freie Felder des Schachbrettes vorhanden, dann wird der Rösselsprungweg in zwei Teile zerlegt, die, anders miteinander verknüpft, einen neuen Rösselweg geben, der alle früheren Felder umfaßt und einen neuen Endpunkt hat; von ihm aus ist möglicherweise ein noch freies Feld zu erreichen. Daß durch solche Methode bei geschickter Zerlegung die Aufgabe gelöst werden kann, scheint durch die gegebenen Beispiele gewährleistet; bewiesen wird es nicht.

Die zweite „merkwürdige Frage“ wurde am 18. Oktober 1779 von Euler vor der Petersburger Akademie behandelt, aber erst 28 Jahre nach dem Tode des Verfassers veröffentlicht: „Solutio quaestionis curiosae ex doctrina combinationum“, Mém. de St. Petersburg III (1811), p. 37—64. Es ist die, bereits von P. R. de Montmort und Nicolas I. Bernoulli als „Jeu de treize“ oder „Jeu de rencontre“ untersuchte (vgl. auch diese Vorlesungen III², S. 357), die bei Euler in der Fragestellung auftritt: bei wievielen der $n!$ Permutationen unter n verschiedenen Dingen steht mindestens eins der Elemente an seiner ursprünglichen Stelle?[1]) Auf die gleiche Frage war Johann Heinrich Lambert gestoßen[2]); sie steht bei ihm im Zu-

[1]) Vgl. auch Euler, Mém. de Berlin 1751 (1753), p. 255—270. [2]) Ibid. 1771 (1773), p. 411—420.

sammenhang mit den Wetterprophezeiungen und ihrer Richtigkeit, wobei es sich darum handelt, zu untersuchen, wie oft das willkürlich prophezeite Wetter mit dem wirklich eintreffenden übereinstimmt, Waring behandelte, wie Lambert, die gleiche Aufgabe als Wahrscheinlichkeitsproblem[1]).

Endlich gehört hierher noch die Besprechung einer Arbeit von Gaspard Monge, die der Besprechung eines „Kartenkunststückes"[2]), genauer der einer Mischungsmethode für Karten gewidmet ist. Sind. m Karten gegeben, so findet eine erste Mischung so statt, daß Karte 2 auf Karte 1, Karte 3 unter 1 gelegt wird; dann 4 auf die obere 5 unter die untere; 6 auf die obere, 7 unter die untere usf. Bei 10 Karten entsteht z. B.

aus der ersten Lage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
als zweite Lage	10	8	6	4	2	1	3	5	7	9.

Von dieser neuen Anordnung kommt man auf die gleiche Weise zu einer weiteren; hier

9	5	1	4	8	10	6	2	3	7

usf. zu den aufeinander folgenden Lagen

7	2	10	4	5	9	1	8	6	3
3	8	9	4	2	7	10	5	1	6
6	5	7	4	8	3	9	2	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

Wie in diesem Beispiele, so kommt man stets zu der ursprünglichen Anordnung zurück. Monge untersucht die hierbei eintretenden Umstände und Gesetzmäßigkeiten. Er zeigt, daß wenn zwei Spalten in einem Elemente übereinstimmen, sie dann in allen übereinstimmen, und daß die Folgen in vertikaler Richtung zyklisch die gleichen sind. Dabei können kleinere Perioden eintreten, wie hier bei 2, 8, 5 und auch bei 4. Er berechnet die Anzahl der Mischungen, die notwendig sind, um die anfängliche Lage herbeizuführen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Der bisherigen, wohlbegründeten Gepflogenheit dieses Werkes gemäß wenden wir uns nach der Besprechung der Kombinatorik zur Wahrschein-

[1]) „An essay on the principles of human knowledge", Cambridge 1794 (Addenda). [2]) Mém. Acad. prés. p. div. Savans, Paris 1773 (1776), VII, p. 390—412.

lichkeitsrechnung, als dem hauptsächlichsten Anwendungsfelde kombinatorischer Methoden und Resultate. Der Zeitraum, auf den wir einzugehen haben, ist gerade in diesem Gebiete reich an bemerkenswerten Fortschritten; neue Methoden der Untersuchung werden aufgefunden, neue Forschungsgebiete erschlossen; die Wissenschaft tritt in engste Beziehung zur Praxis, zur Völkerwohlfahrt.

Gleich zu Anfang dieser Periode entbrennt ein Kampf um oder, vielleicht genauer, ein Angriff gegen die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in dem sich d'Alembert als leidenschaftlicher Rufer im Streite zeigt. Auf seine Plänkeleien in den Artikeln „croix ou pile" und „gageure" der Enzyklopädie wurde, der Zeit ihrer Entstehung gemäß, bereits eingegangen (III², S. 639). Auch in seinen späteren Schriften kommt er ausführlich auf die Frage zurück, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, mit einer Münze in zwei Würfen mindestens einmal „Kopf" zu werfen. D'Alembert hatte als Möglichkeiten angenommen: entweder es fällt auf den ersten Wurf Kopf, und dann ist das Spiel bereits entschieden; oder es fällt Schrift und dann Kopf; oder endlich zweimal Schrift. Von diesen drei Fällen sind zwei günstig, also ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal Kopf zu werfen $w = \frac{2}{3}$. Auf den Widerspruch hin, den diese Anschauung von hervorragenden Seiten erfuhr, schwankt d'Alembert zwischen der Meinung, daß diese drei Möglichkeiten gleich berechtigt seien, und der, sie seien es nicht. Im zweiten Bande seiner „Opuscules Mathématiques" heißt es auf S. 21: „Gleichwohl möchte ich die drei Fälle, um die es sich handelt, nicht in aller Strenge als gleich möglich ansehen"; dann wieder im vierten Bande, S. 289: „Je mehr ich darüber nachdenke, desto mehr scheint es mir, daß diese drei Fälle, mathematisch gesprochen, gleich möglich sind." Ebenda bestreitet er mit ganz nichtigen Behauptungen den schlagenden Einwurf, man könne statt zweimal hintereinander mit nur einem, auch gleichzeitig mit zwei Geldstücken werfen; dabei ergibt sich nämlich zweifellos $w = \frac{3}{4}$. An der ersterwähnten Stelle finden sich seine Angriffe gegen die geltende Lehre in dem Aufsatze „Réflexions sur le calcul des Probabilités", p. 7—26, Paris 1761 im Zusammenhange dargelegt. Er behandelt zuerst den Begriff der mathematischen Erwartung (diese Vorlesungen III², S. 631), demzufolge, wenn $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten des Eintretens verschiedener, mit den bezw. Gewinnen $g_1, g_2, g_3, \ldots$ verknüpften Ereignisse sind, die mathematische Erwartung den Wert $g_1p_1 + g_2p_2 + g_3p_3 + \cdots$ habe. Das Petersburger Problem (ibid. S. 633) muß als Sturmbock gegen die Regel dienen, den Einsatz dieser Größe gleich anzunehmen: Paul solle

dem Peter 1 geben, wenn dieser bei seinem ersten Wurfe mit einer Münze Kopf werfe, dagegen 2, 4, 8, 16, ..., wenn Kopf erst beim 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten}, 5^{ten}, ... Wurfe erscheine. Peters Einsatz müßte

$$1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} + \cdots$$

und so ohne Ende weiter, müßte also ∞ sein. Das widerspricht dem gesunden Verstande; wer würde selbst nur eine mäßige Summe als Einsatz bei diesem Spiele wagen? Zur Erklärung dieses Dilemmas wurden am angegebenen Orte zwei Versuche angeführt, der von Cramer und der von Daniel Bernoulli; hier stoßen wir auf einen dritten. D'Alembert schließt, daß wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sehr klein ist, sie gleich Null gesetzt werden muß; man dürfe diese Wahrscheinlichkeit also nicht, wie die Theorie es vorschrieb, mit dem erhofften Gewinne multiplizieren, um die mathematische Erwartung, d. h. die Höhe des Einsatzes zu finden. Übrigens war d'Alembert nicht der Erste, der auf diese Idee kam; Nicolas I. Bernoulli hatte 1709 ähnliches, aber vorsichtiger ausgesprochen (Vorlesungen III², S. 336, Anm. 3); und Buffon schließt in seinem „Essai d'Arithmétique morale" (Nr. VIII) aus der Betrachtung der menschlichen Handlungen im gewöhnlichen Leben, daß man jede Wahrscheinlichkeit, die nicht größer als $\frac{1}{10000}$ ist, gleich Null setzen kann und muß; für einen gesunden Mann von 56 Jahren sei die Wahrscheinlichkeit, binnen 24 Stunden zu sterben, gleich $\frac{1}{10000}$; kein Mensch aber rechne mit dieser Wahrscheinlichkeit; jeder setze sie einfach $= 0$. Diese Anschauung wird von Condorcet (Essai sur l'application etc.; Préliminaire p. CVIII) einer kritischen Prüfung unterzogen und widerlegt. Buffon teilte seine Auffassung von kleinen Wahrscheinlichkeiten 1762 Daniel Bernoulli mit, der sie unter vorsichtiger Einschränkung als „moralische Wahrscheinlichkeit" guthieß. D'Alembert ist sich selbst über die Grenze, unterhalb deren die Wahrscheinlichkeit gleich Null gesetzt werden soll, nicht im klaren.

Es mag hier gleich erwähnt werden, daß Condorcet, über dessen tragische Lebensschicksale wir später berichten werden, in der „Histoire de l'Acad. de Paris" 1781, p. 707 auf eine Analyse der mathematischen Erwartung $g_1 p_1 + g_2 p_2 + g_3 p_3 + \cdots$ genau eingeht. Zuerst macht er darauf aufmerksam, daß dieser Wert nur als Mittelwert Geltung hat. Ist $p_1 = \frac{1}{2}$, $g_1 = 1$, so ist die mathematische Erwartung $\frac{1}{2}$, trotzdem nur Gewinne 0 oder 1, aber nie $\frac{1}{2}$ vorkommen können. Die

Regelung der Einsätze muß billigerweise so geschehen, daß 1. der Fall, in dem weder Gewinn noch Verlust für einen Spieler eintrifft, der wahrscheinlichste ist; daß 2. die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen oder zu verlieren, für beide Spieler $= \frac{1}{2}$ wird. Man könnte noch fordern, daß 3. mit der Anzahl der Spiele die Wahrscheinlichkeit wächst, daß der Gewinn- oder Verlustbetrag eine gegebene Größe nicht überschreitet, oder daß 4. das Verhältnis dieses Betrages zum höchsten Gewinn oder Verlust ein beliebig kleines werde. Es zeigt sich, daß durch die Gleichsetzung der mathematischen Erwartungen beider Spieler die ersten beiden Bedingungen nebst der vierten erfüllt werden, und nur dadurch; daß dagegen 3. überhaupt durch keine Annahme erfüllbar ist. — Die Wirkung dieser Gleichsetzung tritt aber erst in der Folge vieler Spiele hervor. Ist die Wahrscheinlichkeit klein, so muß die Anzahl stark vergrößert werden. Besteht für A bei kleinerem Gewinn größere Gewinnaussicht, für B bei größerem Gewinn kleinere Aussicht, so wird bei Wiederholung des Spieles für B mit wachsender Gewinnaussicht der Gewinnbetrag sich vermindern und für A das Umgekehrte eintreten. Aus seinen Untersuchungen schließt Condorcet, daß beim Petersburger Problem die Gleichsetzung der mathematischen Erwartungen beider Spieler unstatthaft sei, weil ihre Anwendbarkeit erst bei ∞^2-maliger Wiederholung des Spieles eintrete. — Um den Unterschied eines einzelnen Falles vom Durchschnitte einer Reihe von Fällen zu illustrieren, macht Condorcet darauf aufmerksam, daß ein verständiger Mann es sehr wohl ablehnen kann, eine Summe b_1 für die Wahrscheinlichkeit p_1 eines Gewinnes von g_1 zu geben, ablehnen kann, wenngleich $b_1 < p_1 g_1$ ist; während er andererseits für eine Summe b_2 die Wahrscheinlichkeit p_2 eines Gewinnes g_2 erkauft, trotzdem $b_2 > p_2 g_2$ ist; dazu würde ausreichen, daß p_1 sehr klein und p_2 sehr groß ist. Eine kleine Wahrscheinlichkeit gleich Null zu setzen, geht nach Condorcet nicht an; es würde der gleiche Fehler sein, als wolle man eine entfernt berührende Tangente mit einer Asymptote verwechseln. — Ähnliche Darlegungen gibt Condorcet in dem Werke, auf dessen Besprechung wir bald eingehen werden, dem „Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix", Paris 1785; Discours préliminaires p. LXXII ff. und im Werke selbst p. 138 ff. In diesen kritischen Beleuchtungen beschäftigt er sich besonders mit den oben erwähnten Anschauungen Buffons, die er zurückweist. Was für die wirklichen Werte der Wahrscheinlichkeiten falsch ist, das könne nicht dadurch richtig werden, daß man den wirklichen Werten falsche substituiere.

Mit dem Petersburger Problem beschäftigt sich auch Georg Christoph Lichtenberg, jüngstes unter 18 Kindern eines Predigers bei Darmstadt, 1742 geboren. Er studierte in Göttingen unter Kästner Mathematik und wurde daselbst 1770 außerordentlicher Professor. Er betätigte sich vielfach schriftstellerisch, hauptsächlich als Satiriker. Körperliche Leiden verdüsterten seine letzten Lebensjahre; er starb am 24. Februar 1799. Im Jahre 1770 veröffentlichte er einen kleinen, populär geschriebenen Aufsatz: „Betrachtungen über einige Methoden, eine gewisse Schwierigkeit in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beim Spiele zu heben"[1]. In ihm legt er die Bedeutung und die Erklärungsversuche des Petersburger Problems dar. Er tritt ganz auf Bernoullis Seite und nimmt gegen d'Alembert Partei, über dessen Ansichten er sagt: „Herrn d'Alembert entgegensetzen, daß nach den Regeln der Combinationen kein Fall wahrscheinlicher sei als der andere, kommt mir nicht viel besser vor, als einem gelehrten Verteidiger der Dreieinigkeit die Beweise der Multiplikation entgegensetzen wollen". Neues enthält der Aufsatz nicht.

Wir kehren zu dem Berichte über d'Alemberts Anschauungen zurück: Spielt Peter mit Paul unter der Bedingung, daß Peter 2^{100} Mark gewinne, wenn beim Werfen einer Münze die Kopfseite erst auf den 100sten Wurf fällt, so müßte der Einsatz gemäß der mathematischen Erwartung gleich 1 Mark bemessen werden; trotz dieser geringen Summe wird Peter ihn nicht wagen, weil die Kopfseite nicht notwendig, aber doch sicher bereits vorher fallen wird. Deshalb muß man nach d'Alemberts Meinung zwischen dem unterscheiden, was metaphysisch möglich ist, und dem, was physisch möglich ist. Zum ersten Begriffe gehört alles, was nicht widersinnig genannt werden kann, zum zweiten alles, was nicht allzu weit aus dem gewöhnlichen Laufe der Dinge heraustritt. So gehört es zu den metaphysischen Möglichkeiten, mit zwei Würfeln hundertmal hintereinander „Sechs—sechs" zu werfen; physisch dagegen ist es unmöglich, weil es noch niemals geschehen ist und niemals geschehen wird.

Mit dieser Unterscheidung hängt folgendes zusammen. Die Theorie nimmt bei der Wiederholung von Ereignissen jede Kombination als gleich möglich und als gleich wahrscheinlich an, z. B. beim 10maligen Werfen einer Münze das 10malige Auffallen von Kopf als so wahrscheinlich wie einen beliebigen Wechsel von Kopf und Schrift. Ist das berechtigt? D'Alembert glaubt es nicht: ist schon 9mal Kopf gefallen, so ist es wahrscheinlicher, daß das nächste Mal

[1] Auch abgedruckt in Lichtenbergs physikalischen und mathematischen Schriften, Göttingen 1806, Bd. IV, S. 3—46.

Schrift fällt als wieder Kopf. Man sieht, daß dabei ein Einfluß angenommen würde, den das voraufgehende Ereignis auf das folgende ausübt. Dieser Ansicht, die d'Alembert durch Scheingründe stützt, war schon von de Montmort widersprochen worden; „die Vergangenheit entscheidet nichts für die Zukunft" (diese Vorlesungen III², S. 335). Euler drückt sich (Opuscula analytica II, 1785, p. 331 bis 346) noch drastischer aus: dann müßte auf jeden folgenden Wurf jeder vorhergehende, wenn er auch vor hundert Jahren und an irgend welchem Orte geschehen wäre, von Einfluß sein, „ungefähr das Absurdeste, was man überhaupt ausdenken kann".

Den angenommenen Einfluß früherer Würfe auf folgende kann d'Alembert natürlich nur hypothetisch angeben. Das tut er (Opuscules IV, p. 73) bei erneuter Behandlung des Petersburger Problems, indem er die Wahrscheinlichkeit dafür, erst beim n^{ten} Wurfe Kopf fallen zu sehen, nicht $=\frac{1}{2^n}$, sondern ganz willkürlich $=\frac{1}{2^n(1+\beta n^2)}$ oder auch $=\frac{1}{2^n+2^{\alpha n}}$ setzt; noch wunderlicher ist die Annahme $1:2^n\left(1+\frac{B}{(K-n)^{\frac{q}{2}}}\right)$, wo B und K Konstanten und q eine ungerade ganze Zahl bedeuten. Ein andermal (Opuscules VII, p. 39) nimmt er für das Auffallen von Kopf beim $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, 4^{\text{ten}}, \ldots$ Wurfe die Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{1}{2},\ \frac{1+a}{2},\ \frac{1+a+b}{2},\ \frac{1+a+b+c}{2},\ \ldots$$

an, wo $a, b, c, \ldots$ kleine positive Größen sein sollen, deren Summe die Einheit nicht erreicht. Diese Hypothesen sind nur darauf berechnet, den Einsatz beim Petersburger Problem zu einem endlichen zu machen. Wissenschaftlichen Wert haben sie nicht.

Noch einen anderen Punkt hebt d'Alembert kritisierend hervor. Sieht man auf einem Tische Buchstaben nebeneinander liegend, die das Wort „Constantinopolitanensibus" bilden, oder die alphabetisch aufeinander folgen, so wird kein Mensch annehmen, daß sie durch Zufall so angeordnet seien, trotzdem die Wahrscheinlichkeit der beiden Anordnungen aus den auftretenden Buchstaben nach den Schulanschauungen nicht geringer sein soll, als die einer willkürlichen, regellosen Aufeinanderfolge. In den ersten Fällen erkenne man eine Absicht, und eine solche müsse auch bei regelmäßigem Fallen der Münze angenommen werden. Mehrfaches Aufwerfen von Kopf hintereinander sei unwahrscheinlicher als Wechsel in den Flächen der Münze.

Solchen ketzerischen Ideen gegenüber verhielt sich die Mehrzahl der Mathematiker jener Zeit kühl ablehnend; sie erachtete es wohl der

Mühe nicht für wert, darauf einzugehen. D'Alembert beruft sich häufig auf die Zustimmung „bedeutender Männer“, „berühmter Gelehrten“, „hervorragender Mathematiker“, in deren Gesellschaft ihm aber selber mitunter nicht recht behaglich ist, wenn sie z. B. durch seine Einwürfe die ganze Lehre der Wahrscheinlichkeitsrechnung als „zugrunde gerichtet“ ansehen; aber Namen verschweigt er dabei. Dagegen verschweigt er nicht, daß seine revolutionären Meinungen auch vielen Widerspruch gefunden haben, daß sie „absurd“ und von Daniel Bernoulli „lächerlich“ genannt worden sind. Wuchtig absprechend drückt sich L. Euler aus in den Opuscula analytica II, 1785, p. 331: „Mich schrecken“ (bei solchen Untersuchungen) „die Einwürfe d'Alemberts nicht zurück, der diesen Kalkül zu verdächtigen versucht hat. Zuerst nämlich hat dieser bedeutende Geometer die mathematischen Studien beiseite gelegt; jetzt scheint er sie sogar zu bekämpfen, indem er unternommen hat, eine Reihe von Grundsätzen umzustürzen, die auf das sicherste begründet sind. Den Laien mögen seine Einwürfe gewichtig erscheinen, doch die Furcht liegt fern, daß die Wissenschaft selbst Schaden durch sie erleide.“

Daher ist es denn nicht verwunderlich, daß d'Alemberts Ruf so ziemlich ohne Nachklang verhallte. Von den wenigen, die seinen Bedenken geneigtes Ohr liehen, sei der Direktor der physikalischen Klasse der Berliner Akademie Nic. de Beguelin erwähnt. Er war 1714 im Kanton Basel geboren, wurde Hofmeister des nachmaligen Königs Friedrich Wilhelm II. und starb 1789 zu Berlin. Er hat sich mit den metaphysischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in zwei Aufsätzen der Mémoires de l'Acad. à Berlin 1765 (1767), p. 231, und 1767 (1769), p. 381 beschäftigt. In dem ersten spricht er seine Ansicht aus: „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört eben so sehr, ja vielleicht in höherem Maße zur Metaphysik als zur Mathematik; diese liefert die Behandlung durch Rechnung, jene die Grundlagen, auf welche die Rechnungen sich gründen“. Im zweiten Aufsatze behandelt er eingehend, aber ohne begründete Resultate das Petersburger Problem; er gibt eine ganze Reihe von Lösungen, die das Gemeinsame haben, völlig willkürlich zu sein. Daß Kopf erst beim k^{ten} Wurfe auffalle, soll beispielsweise die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{(k-1)!+1}$ haben.

Auch der Marquis de Condorcet ging, wie wir bereits erwähnt haben, auf eine Prüfung der d'Alembertschen Bedenken ein. Im zweiten Abschnitte der oben angeführten Abhandlung[1]) geht Condorcet

---

[1]) Hist. Acad. de Paris, 1781, p. 707.

auch auf die Frage nach den regulären Anordnungen gegebener Elemente ein. Er betrachtet die beiden Reihen

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10;$$
$$1,\ 3,\ 2,\ 1,\ 7,\ 13,\ 23,\ 44,\ 87,\ 167;$$

beide sind regulär; jedes Glied a_{n+2} der ersten ist nach dem Gesetze $a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} - a_n$ gebildet, jedes Glied b_{n+2} der zweiten nach dem Gesetze $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n + b_{n-1} + b_{n-2}$. Gesucht wird der Quotient der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß bei einer Fortsetzung der Reihen um q Glieder dieselben Gesetze sich zeigen werden. Wie man sieht, ist die Frage merkwürdig unbestimmt gehalten; die Behandlung des Problems durch Condorcet ist nicht minder unbestimmt. Wenn in einer Reihe je e aufeinanderfolgende Glieder einem Gesetze unterworfen sind, in einer zweiten je e_1, dann soll $\frac{(e_1+1)(e+q+1)}{(e+1)(e_1+q+1)}$ den gesuchten Quotienten geben. Fragt man nach diesem Quotienten bei $q = \infty$, d. h. bei den ins Unendliche fortgesetzten Reihen, dann soll $\frac{e_1+1}{e+1}$ herauskommen, in unserem obigen Beispiele also wegen $e = 2$, $e_1 = 4$ der Wert $\frac{5}{3}$.

Wie er, so trat Laplace, dem die Wahrscheinlichkeitsrechnung viel zu danken hat, kritisch an d'Alemberts Bedenken. Pierre Simon Marquis de Laplace, 1749 zu Beaumont-en-Auge geboren, entstammte einer einfachen Familie. Er hatte die Schwäche, sich seiner Herkunft zu schämen; nur ungern sprach er von seiner Jugend. In der École militaire zeigten sich schon früh seine mathematischen Anlagen. Er wurde zuerst Lehrer zu Beaumont, dann Professor an der École militaire und 1794 an der École normale. 1795 gehörte er dem Bureau des longitudes an. „Er bot das traurige Schauspiel politischer Schmiegsamkeit und Mantelträgerei, die an Kriecherei streifte, und deren Anzeichen bis in die Vorreden seiner Werke drangen, die bei jedem Regierungswechsel geändert wurden" (La grande Encyclopédie). Bonaparte übertrug ihm das Portefeuille des Innern, entzog es ihm wegen mangelnden Verwaltungssinnes nach sechs Monaten: „er trug in die Geschäfte den Geist des Unendlich-Kleinen" — und machte ihn zum Mitgliede des Senats. Unter Louis XVIII. wurde er Pair de France und Marquis. Er starb im März 1827 zu Paris.

In einer Abhandlung der Mémoires de math. Acad. R. Paris (année 1773), p. 37—232, deren zweiter Teil der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewidmet ist (p. 113—163) geht Laplace auf die d'Alembertschen Bedenken ein. Daß beim Würfeln frühere Ergebnisse auf fol-

gende beeinflussend wirken sollen, weist er von der Hand. Auf eine spätere, scheinbare Einschränkung kommen wir bald zurück. — Über das „Constantinopolitanensibus“, das sich bei ihm in das Wort „Infinitésimal“ umgewandelt hat, äußert er sich folgendermaßen: Wo wir Symmetrie bemerken, glauben wir an die Wirkung einer Absicht, da sie für die Hervorbringung der Symmetrie wahrscheinlicher ist als der Zufall. Ist $\frac{1}{m}$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, falls es ein Zufall, $\frac{1}{n}$ seine Wahrscheinlichkeit, falls es eine Absicht hervorgerufen hat, so ist die Wahrscheinlichkeit des Bestehens und Wirkens einer Absicht[1])

$$\frac{1:n}{1:n+1:m}=\frac{1}{1+n:m};$$

sie wächst also mit m. Nicht weil die Symmetrie geringere Wahrscheinlichkeit hat als ein unsymmetrisches Ergebnis, suchen wir eine Absicht bei Eintreffen der Symmetrie, sondern weil der Zufall unwahrscheinlicher ist, als die Absicht. Hätte das Wort „Infinitésimal“ in keiner Sprache eine Bedeutung, so würde das dazu nötige Arrangement der Buchstaben weder wahrscheinlicher, noch unwahrscheinlicher sein, als es jetzt ist; und gleichwohl würden wir bei der Zusammenstellung keine besondere Ursache vermuten. Da das Wort aber in Gebrauch bei uns ist, so ist es unvergleichlich mehr wahrscheinlich, daß eine Person die Lettern zusammengelegt hat, als daß ein Zufall sie so zusammenfügte, wie wir sie sehen.

Ein weiteres Eingehen auf die philosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung müssen wir uns versagen. —

Nach diesem Berichte über den Sturm gegen die Prinzipien gehen wir zu der Besprechung einer Bereicherung der Untersuchungsmethoden über, zumal da diese zeitlich mit der Periode beginnt, die wir behandeln. Daniel Bernoulli gehört das Verdienst, die Infinitesimalrechnung den Zwecken der Wahrscheinlichkeitsrechnung dienstbar gemacht zu haben. Bis zu ihm hatte ausschließlich das Fermatsche Vorgehen Geltung gehabt, als Wahrscheinlichkeit den Quotienten aus der Zahl der günstigen durch die Zahl der möglichen Fälle zu nehmen, wobei man bei verwickelteren Aufgaben auf bedeutende kombinatorische Schwierigkeiten stieß. Für diesen Quotienten substituiert Daniel Bernoulli den Quotienten aus den unendlich kleinen In-

[1]) Diese Rechnung benutzt die später zu behandelnde Bayessche Regel über die, aus ihren Wirkungen zu erschließenden Ursachen, die Laplace in Bd. VI der Mémoires de l'Acad. de Paris dargestellt hatte.

krementen oder Dekrementen jener beiden Größen, und ihn behandelt er dann nach den gewöhnlichen Regeln und Vorschriften der Analysis. Natürlich ist dieses Verfahren nicht allgemein bei jeder Aufgabe anwendbar. Bernoulli sagt darüber[1]): „Man kann mit Nutzen die Infinitesimalrechnung verwenden, wenn nur die Aenderung, die eintreten kann, als unendlich klein angesehen werden darf". Das tritt z. B. ein, wenn aus einer Urne, die eine große Anzahl von Kugeln enthält, einzelne gezogen werden; „denn dann kann die Einheit als unendlich kleines Element betrachtet werden; und man stützt sich auf die gleiche Hypothese, deren sich die Mathematiker vor der Entdeckung der Differential- und Integral-Rechnung bedienten". In der angeführten Abhandlung bespricht Bernoulli als Beispiel ein Problem, das er für andere Zwecke braucht. Er behandelt es zuerst nach der alten und dann nach der bequemeren neuen Methode. Es scheint uns geraten, erst später dieses etwas komplizierte Problem mitzuteilen, und die Methode lieber an einem anderen, einfacheren darzulegen[2]).

In einer Urne sind n weiße, in einer anderen n schwarze Kugeln. Aus jeder wird eine Kugel gezogen und in die andere Urne gelegt; die Ziehungen erfolgen gleichzeitig. Dieselbe Operation wird von neuem und im ganzen r mal gemacht. Wie groß ist hinterdrein die wahrscheinliche Anzahl x der weißen Kugeln in der ersten Urne? Die Verwendung der gewöhnlichen Methode gibt $x = \frac{1}{2} n \left[1 + \left(\frac{n-2}{n}\right)^r\right]$.

Für ein großes n kann man dies Resultat durch das bequemere

$$x = \frac{1}{2} n \left[1 + e^{-\frac{2r}{n}}\right]$$

ersetzen. Hierauf führt die neue Methode direkt. Es werden x und r als stetig veränderliche Größen betrachtet; dr, d. h. die Einheit, sei das Inkrement von r; es fragt sich, wie groß $dx : dr$ ist. Die, mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{x}{n}$ erfolgende Entnahme einer weißen Kugel aus der ersten Urne liefert das Dekrement (-1) für dx; das mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{n-x}{n}$ erfolgende Hineinlegen einer weißen Kugel in die erste Urne liefert das Inkrement $(+1)$ für dx; folglich wird

$$\frac{dx}{dr} = -1 \cdot \frac{x}{n} + 1 \cdot \frac{n-x}{n}, \quad \text{d. h.} \quad \frac{dx}{2x-n} = -\frac{dr}{n}.$$

Diese Differentialgleichung liefert dann bei richtiger Bestimmung der Integrationskonstante wieder den Wert

---

[1]) Novi Comment. Acad. Petrop. XII, 1766, 1767 (1768), p. 87—98. [2]) Ibid. XIV, 1769 (1770), p. 2—25.

$$x = \frac{1}{2} n \left[1 + e^{-\frac{2r}{n}}\right]$$

Die Aufgabe wird nach der Richtung hin erweitert, daß n Urnen mit je n Kugeln vorhanden sind, und daß jede gezogene Kugel in die folgende der zyklisch angeordneten Urnen gelegt wird. Durch ein Mißverständnis wurde Malfatti[1]) zu einer unberechtigten Kritik dieser Arbeit verleitet; nur in einem Punkte müssen wir ihm beipflichten, daß nämlich das angeführte Bernoullische Problem nicht mit einem anderen identisch ist, von dem Bernoulli es behauptet. Malfatti selbst behandelt 20, aus der Bernoullischen Annahme folgende Probleme auf elementarem Wege.

Es sei noch erwähnt, daß D. Bernoulli sich der gleichen Methode bedient, um näherungsweise gewisse numerische Rechnungen, die infolge der Höhe der eintretenden Zahlen unbequem und langwierig sind, durch bequemere und kürzere zu ersetzen. So verfährt er in der „Mensura sortis" usw. (Novi Comment. Acad. Petrop. XIV, für 1769, p. 26) mit dem Ausdrucke $q = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 2^n}$ und findet, je nachdem er n durch $n+1$ oder durch $n-1$ ersetzt,

$$dq = -\frac{q\,dn}{2n+2} \quad \text{und} \quad dq = -\frac{q\,dn}{2n-1};$$

er nimmt die arithmetische Mitte der rechten Seiten, erhält

$$dq = -\frac{q\,dn}{2n+\frac{1}{2}}$$

und kommt durch Integration auf

$$q = \text{cst.} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$$

Das eben erwähnte allgemeine Approximationsproblem war bei der Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie sie in unserem Zeitraum geübt wurde, ein sehr naheliegendes und notwendig zu behandelndes. Dies erkannte auch Laplace nach Bernoulli, wie es Stirling vor diesem erkannt hatte. Mit ihm beschäftigt sich Laplace eingehend in dem „Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres" (Histoire de l'Académ. à Paris 1782). Wir kommen später auf diese Arbeiten zurück.

Wenden wir uns wieder zu Daniel Bernoulli, so ist noch zu erwähnen, daß er die erste Anwendung der Infinitesimalrechnung in der Wahrscheinlichkeitslehre bereits vor der prinzipiellen, 1766 erfolgten Ankündigung und Darlegung schon 1760 in dem Aufsatze „Essai

[1]) Memorie mat. e fis. Soc. Ital. I (1782), p. 768.

d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole etc." (Histoire de l'Acad. ... à Paris 1760 [1766], p. 1—45) gegeben hat; und als Kritiker dieser Arbeit wendet auch d'Alembert (Opuscules II, p. 26—95) dieselbe Methode an.

Wir wenden unsere Aufmerksamkeit nunmehr den Arbeiten zu, die, sozusagen, noch im Pascalschen Boden wurzeln und nach elementarer kombinatorischer Methode eine Reihe von Problemen behandeln, die den Mathematikern in den Glücksspielen entgegen traten. Es ist natürlich nicht unsere Aufgabe, jede kleinste derartige Arbeit zu besprechen; es reicht aus, die bedeutenderen unter ihnen hervorzuheben.

Hinsichtlich der Spiele, die nicht allein vom Zufall, sondern auch von der Geschicklichkeit der Spieler abhängig sind, macht Laplace (Histoire de l'Académ. Paris [1778], p. 230) folgende Bemerkungen: Es sei überaus unwahrscheinlich, daß beide Spieler die gleiche Geschicklichkeit besitzen; die des einen sei $1+\alpha$, die des anderen $1-\alpha$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß der stärkere Spieler die beiden ersten Partien gewinnen wird, $=\frac{1}{4}(1+\alpha)^2$, die, daß der schwächere sie gewinne, $=\frac{1}{4}(1-\alpha)^2$. Nun weiß man von vornherein nicht, wer von den beiden Spielern der stärkere ist; danach wird die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmter unter ihnen beide ersten Partien gewinnt, gleich dem mittleren Werte, d. h.

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2\right]=\frac{1}{4}(1+\alpha^2).$$

Ohne Berücksichtigung der Geschicklichkeiten würde sich $\frac{1}{4}$ ergeben. Es ist also nach diesen Überlegungen wahrscheinlicher, daß einer der beiden Spieler beide ersten Partien gewinnt, als daß der eine die erste, der andere die zweite gewinnt.

Über den Wert von α weiß man zu Beginn der Spiele nichts. Das gibt nach mehreren Richtungen hin zu Untersuchungen Anlaß (l. c. S. 238 ff.). Kennt man für α die Grenzwerte $(0, \ldots, q)$ und zugleich die Wahrscheinlichkeit $\psi(\alpha)$ dafür, daß ein bestimmtes α auftrete, dann ist der obige Ausdruck durch das Integral

$$\int_0^q \frac{1}{4}\psi(\alpha)(1+\alpha^2)\,d\alpha$$

zu ersetzen, wobei $\psi(\alpha)$ so beschaffen sein muß, daß $\int\limits_0^q \psi(\alpha)\,d\alpha=1$ ist. Es möge ein für allemal hier daran erinnert werden, daß diese Schreibweise der Integralgrenzen in unserem Zeitraume noch nicht

eingeführt ist. — Somit weist dieses Resultat darauf hin, das „Gesetz der Fehler", d. h. die Funktion $\psi(\alpha)$ zu bestimmen. Das unternimmt Laplace im weiteren Fortgange seiner Untersuchungen. Wir werden davon bald ausführlich zu sprechen haben.

Die zweite Untersuchungsrichtung, auf die wir auch erst später eingehen können, ist die folgende: Die anfängliche Unkenntnis der Geschicklichkeiten der Spieler wird im Verlaufe der Spiele einer größeren und größeren Kenntnis dieser Geschicklichkeiten durch den Ausfall der Spiele selbst Platz machen. Hierzu gehört die Möglichkeit, aus einem Ereignis auf seine Ursachen zu schließen. Das ist ein Problem, das in unserer Epoche zum ersten Male aufgestellt und behandelt worden ist.

Es möge noch bemerkt werden, daß Laplace in diesem „Mémoire" nicht bei zwei Spielern und zwei von ihnen zu spielenden Partien stehen bleibt, sondern die Anzahl sowohl der Spieler wie der Partien beliebig groß annimmt. Wir verlassen diese Fragen und gehen auf andere hierher gehörige Probleme ein.

Schon früher wurde (Bd. III², S. 338) erwähnt, daß Moivre 1708 die Aufgabe erledigte, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß mit einem gewöhnlichen Würfel in 8 Würfen mindestens 2 mal die 1 geworfen werde. Das Problem wird in unserer Epoche wieder aufgenommen, in erweiterter Form behandelt und gelöst. Lagrange, der sich im zweiten Abschnitte seines Aufsatzes: „Recherches sur les suites recurrentes ... ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles; et sur l'usage de ces équations dans la théorie des hasards" (Nouv. Mém. de l'Acad.... à Berlin 1775 [1777], p. 183—272) mit verschiedenen Aufgaben der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt, stellt die Fragen allgemein so: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis, dessen Eintreffen bei einem Versuche die Wahrscheinlichkeit p hat, in k Einzelversuchen genau a mal eintritt? — oder mindestens a mal? Ferner: es kann bei einem Versuche dreierlei eintreffen: entweder, mit der Wahrscheinlichkeit p, das Ereignis A; oder, mit der Wahrscheinlichkeit q, das Ereignis B; oder, mit der Wahrscheinlichkeit $1-p-q$, keins von beiden; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in k Versuchen A mindestens a mal und B mindestens b mal auftritt? oder, daß A eher a mal eintritt als B seinerseits b mal? — Der Titel der Lagrangeschen Abhandlung zeigt deutlich die Hilfsmittel an, auf die sich die Lösungen der Aufgaben stützen, nämlich die rekurrierenden Reihen und die Differenzengleichungen. Hier knüpfen die Arbeiten Trembleys an. Einer angesehenen Schweizer Familie entsprossen, war er, Jean, geboren 1749 in Genf, nicht der erste unter ihren Mitgliedern, der sich

wissenschaftlich einen Namen errang. Jean sollte Jurist werden; allein, durch Mallet beeinflußt, wendete er sich dem Studium der Astronomie und der Mathematik zu, ging 1794 nach Berlin, wo er Mitglied der Akademie der Wissenschaften wurde, und starb 1811 bei Verwandten in Südfrankreich. Er empfand es als unnötige Erschwerung, daß Lagrange und Laplace bei der Behandlung relativ einfacher Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung Hilfsmittel verwendeten, die — wie er sich ausdrückt — „aus den tiefsten Eingeweiden der Integral-Rechnung" entnommen sind, und er stellt sich die Aufgabe, dieselben Fragen allgemein und elementar „methodo elementari" zu behandeln. Das tut er in der „disquisitio elementaris circa calculum probabilium", Comm. Soc. Gotting. XII, 1793—1794 (1796), p. 99—136. Wir gehen nicht näher darauf ein, da kaum etwas Neues geboten wird, und da die Nachteile elementarer Behandlung meistens ihre Vorteile überwiegen, indem sie ermüdend lang und unübersichtlich ist.

Auch das Teilungsproblem findet sich unter den Problemen wieder, an die man in unserer Epoche herantritt. Die Frage kommt schon in der Ars conjectandi vor; sie lautet allgemein: ein Spiel wird vor seiner Beendigung abgebrochen; wie sind gerechtermaßen die Einsätze zu verteilen? Bei der Untersuchung eines solchen Problems[1]) kommt Nic. Fuß zu einem Resultate, das von dem durch Jak. Bernoulli erhaltenen wesentlich abweicht. Es zeigt sich aber[2]), daß dieser Unterschied von einer nicht scharfen Fassung der Aufgabe herrührt, so daß in Wirklichkeit beide Forscher durchaus verschiedene Aufgaben behandelt hatten. Fuß selbst klärt dies auf. —

Eine andere häufig behandelte Aufgabe ist die nach der Dauer von Spielen. De Montmort gab die Anregung dazu; und auch hier ist de Moivre als erster zu nennen, der sich mit entschiedenem Erfolge des Problems annahm. Wir geben ihm folgenden Ausdruck: A besitzt a Marken, B deren b, und es besteht für A die Wahrscheinlichkeit p im Einzelspiele zu gewinnen, für B die Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$. Der im Einzelspiele Verlierende zahlt dem Gewinnenden eine Marke. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in k Spielen einem der Spieler durch den Verlust aller seiner Marken die Fortsetzung des Spiels unmöglich gemacht wird? In wieviel Spielen ist es gleich wahrscheinlich, daß diese Beendigung eingetreten, oder daß sie nicht eingetreten ist? Auch hier haben Lagrange und Laplace allgemeine Lösungen geliefert. Die Lagrangesche Arbeit, in der das geschehen ist, haben wir bereits erwähnt.

[1]) Act. Petrop. 1779, II, p. 81—92. [2]) Ibid. 1780, II, p. 91—96.

Die Entstehung des Genueser Zahlen-Lotto ist bereits oben (Bd. III[2], S. 336) besprochen und seine Einrichtung mitgeteilt; wir erwähnen dabei, daß Laplace (Mém. de Paris VI, 1774, p. 365) dieses Spiel als „Lotterie der Militär-Schule" bezeichnet, ohne einen Grund für diese Benennung anzugeben: Aus 90 mit den fortlaufenden Zahlen 1 bis 90 bezifferten Marken werden 5 Gewinnmarken herausgegriffen. An diese Einrichtung der Genueser Zahlen-Lotterie knüpfen sich mehrere interessante Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Das Erscheinen von 2 aufeinander folgenden Zahlen unter den Gewinnmarken heißt eine Sequenz oder eine Folge. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer Ziehung eine Sequenz auftritt? Euler hat dieses Problem in dem Aufsatze: „Sur la probabilité des séquences dans la loterie génoise", Histoire de l'Acad. ... à Berlin 1765 (1767), p. 191—230 aufgeworfen und erledigt. An gleichem Orte p. 271—280 und im Anschlusse an diesen Aufsatz behandelt Beguelin die gleiche Frage in der Arbeit: „Sur les suites et les séquences dans la loterie de Gênes". Der Unterschied zwischen beiden ist nur der, daß Beguelin auch die Nummern 90, 1 als Sequenz auffaßt, also eine kreisartig geschlossene Folge der Nummern annimmt. Johann III. Bernoulli nimmt in einer schon früher verfaßten, aber erst später veröffentlichten Arbeit: „Sur les suites ou séquences dans la loterie de Gênes" (ibid. 1769 [1771], p. 234—253) den gleichen Standpunkt ein wie Beguelin. Werden allgemein n Nummern angenommen, von denen r gezogen werden, so ist die Wahrscheinlichkeit bei der Eulerschen Annahme $\binom{n-r+1}{r} : \binom{n}{r}$ für das Nichtauftreten einer Sequenz und $\frac{n}{r}\binom{n-r-1}{r-1} : \binom{n}{r}$ bei der Bernoulli-Beguelinschen. Beguelin gibt eine mechanische Aufstellung der möglichen Ziehungen ohne Sequenz, die an die Hindenburgschen kombinatorischen Regeln erinnert und „involutorisch" genannt werden kann. Wir wollen an einem Beispiele zeigen, in welcher Weise Beguelin vorgeht. Für $n = 6$ und $r = 2$ seien die sequenzlosen Ziehungen gegeben. Es sind

13, 14, 15, 16, 24, 25, 26, 35, 36, 46.

Um die für $n = 7$ und $r = 3$ zu erhalten, behalten wir aus den soeben aufgestellten alle bei, die nicht mit 1 beginnen, also die sechs letzten, erhöhen jede eingehende Nummer um 1, so daß 35, 36, 37, 46, 47, 57 entsteht, und schreiben eine 1 vor jeden dieser Komplexe. Das gibt alle die sequenzlosen Kombinationen für $n = 7$, $r = 3$, die mit einer 1 beginnen:

135, 136, 137, 146, 147, 157.

Unter jede dieser, allgemein mit a, b, c bezeichneten Kombinationen

wird nun $a+1$, $b+1$, $c+1$ geschrieben; unter die so entstehenden in eine dritte Zeile $a+2$, $b+2$, $c+2$, usf. bis in der letzten, dritten Nummer des Tripels die höchste Zahl 7 erreicht wird. Die vollständige Tabelle lautet dann:

135, 136, 137, 146, 147, 157,
246, 247, 257,
357.

Das sind unter der Eulerschen Annahme die 10 sequenzlosen Kombinationen; die 7 Bernoullischen erhält man durch Tilgung der dritten, fünften und sechsten dieser 6 Spalten. Wie es sein muß, ist den obigen Formeln entsprechend

$$10 = \binom{7-3+1}{3} \quad \text{und} \quad 7 = \frac{7}{3}\binom{7-3-1}{2}.$$

Laplace hat im „Mémoire sur les suites récurrentes et leurs usages dans la théorie des hasards"[1]) Probleme behandelt, die Euler in Zusammenhang mit der Genueser Zahlenlotterie bringt und in folgender Fassung vorträgt (Opusc. analyt. II, 1785, p. 331—346): Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach Beendigung einer gegebenen Anzahl von Ziehungen alle 90 Nummern als Gewinnummern zum Vorschein gekommen sind, oder gerade 89 von ihnen, oder 88, oder weniger? Wie groß ist die Anzahl der Ziehungen, nach denen die Wahrscheinlichkeit, daß alle 90 erschienen sind, ebenso groß ist wie die, daß sie nicht erschienen sind? Bei der ersten angegebenen Problemreihe fügt Euler noch als erschwerenden Zusatz das Wörtchen „wenigstens" ein: wenigstens 89, wenigstens 88. Ist n die Anzahl der Nummern, r die Anzahl der jedesmal gezogenen, k die Anzahl der Ziehungen, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in k Ziehungen jede der n Nummern erscheint

$$\left\{\binom{n}{r}^k - n\binom{n-1}{r}^k + \binom{n}{2}\binom{n-2}{r}^k - \cdots\right\} : \binom{n}{r}^k.$$

Aus der Bedeutung dieses Ausdruckes schließt man den arithmetischen Satz, daß der Dividend den Wert Null besitzt, sobald $n > r \cdot k$ ist.

Hierher gehört auch die folgende Aufgabe: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, mit einem Würfel von n Flächen in q Würfen einmal der Reihe nach die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ zu werfen? J. Trembley behandelt diese Frage[2]) und gibt die Lösung induktiv ohne Beweis: Ist w die gesuchte Wahrscheinlichkeit, so findet er

[1]) Mém. prés. p. div. Savans à l'Acad. de Paris VI, 1775, p. 353. [2]) Arch. f. reine u. angew. Math. herausgeg. v. Hindenburg, 1799, Heft 10, S. 123 bis 137.

$1 - w = \frac{(q)}{n^q}$, wo (q) der Koeffizient von x^q in der, nach steigenden Potenzen von x fortschreitenden Entwicklung des Bruches $\frac{1}{1 - nx + x^n}$ ist. Auch Laplace hat das gleiche Problem behandelt[1]) und die Differenzengleichung hergeleitet, von der seine Lösung abhängig ist. Für $n = 2$ gibt er $w = 1 - \frac{q+1}{2^q}$ als Lösung, was mit dem Trembleyschen Resultate übereinstimmt. Der Laplacesche Aufsatz behandelt in seinem zweiten Teile noch mehrere andere auf Spiele, ihre Dauer und ihr Abbrechen bezügliche Probleme.

Von der Behandlung der Lotterien führt ein kleiner Schritt zu den sozialwissenschaftlichen Zweigen, die sich auf die Statistik stützen und der Mathematik als Hilfswissenschaft bedürfen. Wir können nur in größter Kürze auf diesen Gegenstand eingehen; behufs weiteren und tieferen Eindringens verweisen wir auf die Schrift „Histoire du calcul des probabilités depuis ses origines jusqu'à nos jours" par Charles Gouraud, Paris 1848, die gerade auf diese, der reinen Mathematik ferner liegenden Partien liebevoll eingeht.

Eine Anzahl von Abhandlungen befaßt sich mit den verderblichen Wirkungen der Pocken und mit der Schutzimpfung gegen sie. Daniel Bernoulli kommt in der Abhandlung: „Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et les avantages de l'inoculation pour la prévenir" Hist. de l'Acad. à Paris 1760 (1766), p. 1—45 auf diese, für die damalige Zeit eminent wichtigen Fragen, und der Hauptzweck seiner Arbeit ist der, die durch die Pocken hervorgerufene erhöhte Sterblichkeit in den verschiedenen Lebensaltern zahlenmäßig festzulegen. Das hätte durch eine sorgfältige Statistik ohne besondere Schwierigkeiten geschehen können; aber es mangelte gerade an den notwendigen statistischen Daten, und diese Lücke sucht D. Bernoulli durch Formeln auszufüllen, die auf Grund theoretischer Betrachtungen über Wahrscheinlichkeit aufgestellt werden. Bernoulli nimmt an, daß von je n Personen 1 von den Pocken befallen werde, und daß von je m Befallenen 1 daran sterbe. Die Zahlen m und n betrachtet er als konstant, d. h. als vom Alter der in Frage stehenden Personen unabhängig, und zwar setzt er $n = 8$ und $m = 8$. Diese Annahmen schienen besonders für das frühe Alter bis zu 25 Jahren durch die Erfahrung so ziemlich gesichert zu sein, boten aber der Kritik d'Alemberts willkommene Angriffspunkte.

Nun mögen von einer Generation ξ Personen das Alter x er-

---

[1]) Mémoires . . . Paris VII, 1773, p. 37—232.

reichen, und unter ihnen s, die nicht von den Pocken befallen waren; dann stellt Bernoulli nach der oben dargelegten Infinitesimalmethode eine Differentialgleichung zwischen ξ, x und s her, die durch Integration auf das Resultat

$$s = \frac{m\xi}{(m-1)e^{x:n}+1}$$

führt. Bedeutet z die Zahl der unter den ξ Personen im Alter x noch Lebenden unter der Annahme, daß die Pocken nicht vorhanden wären, dann folgt die Bestimmung

$$z = \frac{m\xi}{(m-1)e^{x:n}+1} \cdot e^{x:n},$$

so daß also $z = s \cdot e^{x:n}$ wird. Diese Formeln für s und z ermöglichen die Herstellung der gewünschten Tabellen, sowie den Schluß auf die Nützlichkeit der Pockenimpfung, durch die das durchschnittliche Leben der Bevölkerung verlängert werde. Auch hier setzt die Kritik d'Alemberts wieder ein und stellt, ohne den Nutzen der Impfung zu leugnen, dem Interesse der Gesamtheit das des Einzelnen entgegen, der leicht durch die Impfung geschädigt werden könne[1]).

Seinem Programm gemäß geht J. Trembley unter Aufrechterhaltung der Hypothesen Daniel Bernoullis mit elementaren Mitteln an dieselben Untersuchungen in der Arbeit „Recherches sur la mortalité de la petite vérole“ (Mém. de l'Acad. . . . à Berlin 1796 [1799], p. 17—38).

Für die Frage nach der mittleren Dauer der Ehen lag ebensowenig ausreichendes statistisches Material vor. Auch hier mußte die Theorie aushelfen. Daniel Bernoulli führt das Problem in seiner einfachsten Gestalt — gleiches Alter der Gatten und gleiche Sterblichkeit für beide Geschlechter — auf folgende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurück („De usu algorithmi infinitesimalis in arte conjectandi specimen“; Nov. comment. . . . Petrop. XII, 1766, 1767 [1768], p. 87—98): In einer Urne befinden sich $2n$ Karten; zwei von ihnen sind mit 1 bezeichnet, zwei mit 2, . . . zwei mit n. Es werden m Karten gezogen. Welches ist die wahrscheinlichste Zahl von Paaren, die vollständig in der Urne zurückbleiben? Er findet $\frac{(2n-m)(2n-m-1)}{2(2n-1)}$. Die Übertragung auf das Problem der Ehedauer ist naheliegend; Bernoulli führt es in der Arbeit: „De duratione media matrimoniorum . . .“ Nov. comment. . . . Petrop. XII, p. 99—126 in jener einfachsten, sowie in allgemeinerer Form durch. Mit

[1]) Opuscules II, p. 26—95: Sur l'application du calcul des probabilités de l'inoculation de la petite vérole. — Ibid. IV, p. 283—341: Sur les calculs relatifs à l'inoculation.

ähnlichen Gegenständen beschäftigt sich Johann III. Bernoulli in der Histoire de l'Acad.... à Berlin 1768 (1770), p. 384—403.

In ähnlicher Weise behandelt D. Bernoulli die Frage nach dem Verhältnis der Geburten von Knaben und Mädchen, der schon de Moivre in seiner „doctrine of chances", p. 243—254 näher getreten war. Bernoulli macht zuerst die Hypothese, daß das Überwiegen der Knabengeburten lediglich Wirkung des Zufalls sei; dann die, daß in ihr ein Naturgesetz in Erscheinung trete: „Mensura sortis ad fortuitam successionem rerum naturaliter contingentium applicata" Nov. comment.... Petrop. XIV, 1, 1769 (1770), p. 1—25 und „Continuatio argumenti..." ibid. XV, 1770 (1771), p. 3—28; seine Untersuchungen zeigen, daß die größere Wahrscheinlichkeit auf seiten der zweiten Annahme steht, d. h. daß eine natürliche Ursache für die größere Anzahl der Knabengeburten vorhanden sei.

Euler fragt nach der Sterblichkeit und nach der Bevölkerungszunahme (Hist. de l'Acad.... à Berlin 1760 [1767], p. 144—164); hierauf gründet er Formeln zur Berechnung von Leibrenten, ein Thema, das ihn ibid. p. 165—175 beschäftigt. Es ist nicht möglich, noch angängig, in einer Geschichte der Mathematik alle, auf diese statistischen Fragen bezüglichen Arbeiten zu besprechen, bei denen es sich hauptsächlich um die Herstellung von Tabellen handelt, die praktischen Zwecken dienen sollen. Nur ihrer Verfasser wegen erwähnen wir noch zwei Arbeiten; die eine von Lagrange: „Mémoire sur une question concernante les annuités"; Mém. de l'Acad.... à Berlin 1792, 1793 (1798), p. 225—246; sie behandelt folgende Frage: Wieviel muß ein Vater jährlich, so lange er lebt und mindestens eins seiner Kinder noch minorenn ist, als Prämie einzahlen, damit nach seinem Tode, aber nur so lange bis alle seine Kinder majorenn sind, eine bestimmte Summe jährlich den Kindern ausgezahlt werde? Die andere Arbeit, auf die wir hinweisen wollen, stammt von de Condorcet: „Suite du mémoire sur le calcul des probabilités", Histoire de l'Acad.... à Paris 1782 (1785), p. 674. Sie behandelt die folgende Frage: Auf einem Grundstück lasten Pflichten in Gestalt von Abgaben, die nicht zu bestimmten Zeiten fällig sind, sondern beim Eintritte von Ereignissen fällig werden, die in gewisser Weise vom Zufalle abhängig sind; dazu gehört z. B. der Übergang des Besitzes in andere Hände, sei es durch Verkauf, sei es durch Erbschaft. Diese Ereignisse können demnach entweder nur möglicherweise eintreten oder auch notwendigerweise. Es soll der Ablösungswert einer solchen Last bestimmt werden.

Wir kommen nun zu der Darstellung eines weiteren, wichtigen Prinzips, das der Wahrscheinlichkeitsrechnung neue Bahnen eröffnete.

Jakob Bernoulli hatte gezeigt, daß, wenn bei einem Versuche eins der beiden sich ausschließenden Ereignisse A, B eintreffen muß; wenn ferner die Wahrscheinlichkeit des ersten dabei gleich p und die des zweiten gleich $q = 1 - p$ ist; wenn endlich bei $(m + n)$ Versuchen A gerade m mal und B gerade n mal eingetroffen ist: daß dann der Quotient $\frac{m}{n}$ sich bei wachsendem $(m + n)$ dem Quotienten $\frac{p}{q}$ ohne Aufhören nähert. De Moivre hatte noch einen Schritt weiter getan, indem er die Differenz der beiden Quotienten zwischen bestimmte Grenzen einschloß, die einander um so näher rücken, je größer die Anzahl der Beobachtungen ist. Bisher war also die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses das Gegebene gewesen, aus dem Schlüsse über das Eintreffen des Ereignisses sich ziehen ließen. Jetzt wird die umgekehrte Frage aufgeworfen: kann man aus dem Eintreffen eines Ereignisses seine Wahrscheinlichkeit bestimmen? Implizite ist diese Frage bereits bei der Aufstellung von Geburtstabellen von Daniel Bernoulli (siehe oben) gestreift worden; mit vollster Klarheit wurde sie von dem Engländer Bayes aufgeworfen und behandelt. Laplace schreibt darüber[1]): „Bayes' hat direkt die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, daß die durch bereits vollzogene Versuche gegebenen Möglichkeiten zwischen gegebenen Grenzen liegen. Er gelangt dazu auf elegante und sehr geistreiche Art, die freilich ein wenig verwickelt ist." Über Thomas Bayes' Lebensumstände haben wir nichts in Erfahrung bringen können, außer daß er Mitglied der Royal Society zu London war und vor Ende November 1763 starb. Seine Abhandlung: „An essay towards solving a problem in the doctrine of chances" wurde nach seinem Tode unter hinterlassenen Papieren gefunden und durch Vermittlung seines Freundes Richard Price (1723--1791), der sich durch Aufstellung von Lebensversicherungsberechnungen als Fachmann bekannt gemacht hatte, in den P. T. LIII, 1763, p. 370[2]) veröffentlicht; Price selbst schrieb eine Einleitung, Erläuterungen und Beweise zu dieser Abhandlung.

Bayes beginnt mit der Fixierung des Problems: „Es ist bekannt, wie oft bei einer Anzahl von Versuchen ein Ereignis eingetroffen und wie oft es ausgeblieben ist; gesucht wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens in einem einzelnen Versuche zwischen zwei gegebenen Grenzen liege".

Die Behandlung des Problems geschieht auf geometrischem Wege. Auf eine rechtwinklige Tafel $ABCD$ von der Länge $AD = a$ wird eine Kugel geworfen, die in G zur Ruhe kommt; ihre Entfernung

---

[1]) Théorie analytique des probabilités, 3me édit. Paris 1820, p. CXXXVI.

[2]) Nebst Supplement P. T. LIV (1764), p. 296.

von AB sei $x = AF = BH$. Alle Werte von $x = 0$ bis $x = a$ seien für die Ruhelage der Kugel gleich wahrscheinlich. Nun wird eine zweite Kugel auf die Tafel geworfen; ihre Ruhelage habe von AB die Entfernung ξ. Der Wurf der zweiten Kugel finde $(m+n)$ mal statt. Es soll, bevor die erste Kugel geworfen ist, die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden, daß x zwischen zwei gegebene Grenzen $b = AK$ und $c = AN$ fällt, und daß sich dann m mal $\xi < x$ und n mal $\xi > x$ bei den Würfen mit der zweiten Kugel herausstellt. Bayes zeichnet über AD eine Kurve mit der Ordinate $y = x^p(a-x)^q$ und zeigt, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit, abgesehen von einem konstanten Faktor,

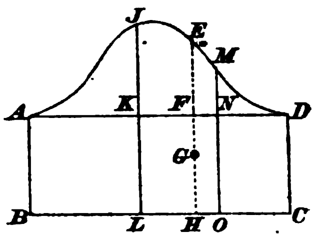


Fig. 2.

$$= KJMNK$$

wird. Nimmt man $b = 0$, $c = a$, so wird die Wahrscheinlichkeit

$$= AJEMDNKA.$$

Da diese Wahrscheinlichkeit $= 1$, d. h. Gewißheit wird, so bestimmt sich dadurch der konstante Faktor. Daraus folgert Bayes: Wissen wir, daß bei den $(m+n)$ Würfen der zweiten Kugel m mal $\xi < x$ und n mal $\xi > x$ gewesen ist, dann wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $b < x < c$ ist gleich dem Quotienten der Flächen $KJMNK$ und $AJEMDA$, oder in unserer Schreibweise

$$= \frac{\int\limits_b^c x^p (a-x)^q \, dx}{\int\limits_0^a x^p (a-x)^q \, dx}.$$

Man kann Laplace nur beistimmen, wenn er diese Schlüsse ein wenig verwickelt nennt.

Laplace stellt seinerseits das Prinzip, auf das sich die Untersuchung der Wahrscheinlichkeit von Ursachen aufbaut, an den Beginn seiner Abhandlung[1]). Er gibt ihm die Form: Ist ein Ereignis A die Folge einer der n Ursachen $B_1, B_2, \ldots, B_n$, derart daß jedes B_i dem Eintreffen von A die Wahrscheinlichkeit w_i erteilt, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B_α das Eintreffen von A hervorgerufen hat, $w_\alpha : \Sigma w_i$. Laplace erklärt dies Prinzip an einem Beispiele: Es

[1]) Mémoires ... Acad. des sciences à Paris VI (1774), p. 621.

seien zwei Urnen B_1 und B_2 vorhanden; B_1 enthalte p weiße und q schwarze Kugeln; B_2 enthalte p' weiße und q' schwarze. Aus einer, aber unbekannt aus welcher Urne werden $(f+h)$ Kugeln gezogen; dabei sind f weiße und h schwarze herausgekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie aus B_1, wie groß die, daß sie aus B_2 gezogen wurden? Das Ziehen der f weißen und h schwarzen Kugeln ist das Ereignis A; die Wahl von B_1 oder die von B_2 die Ursache; w_1 wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, wenn es aus der Wahl von B_1 stammt, und w_2, wenn es aus der von B_2 stammt; also ist, wie Laplace angibt,

$$w_1 = \frac{(f+h)!\,(p+q-f-h)!\,p!\,q!}{(p+q)!\,(p-f)!\,(q-h)!\,f!\,h!}$$

und ebenso

$$w_2 = \frac{(f+h)!\,(p'+q'-f-h)!\,p'!\,q'!}{(p'+q')!\,(p'-f)!\,(q'-h)!\,f!\,h!}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß B_1 die Ursache des Ereignisses war, ist dann $\frac{w_1}{w_1+w_2}$.

Laplace geht darauf zu der Aufgabe über: wenn eine Urne unendlich viele weiße und schwarze Bälle in unbekanntem Verhältnis enthält, und wenn bei der Ziehung von $(p+q)$ Kugeln p weiße und q schwarze erschienen sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine neue Ziehung eine weiße Kugel liefern wird? Hier ist die Anzahl der möglichen Ursachen, dem unbekannten Verhältnisse entsprechend, unendlich groß. Als Resultat ergibt sich für die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{p+1}{p+q+2}$. — Unter den gleichen Verhältnissen können die Zahlen p und q so hoch genommen werden, daß mit einer an Gewißheit streifenden Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann, das Verhältnis der weißen zu sämtlichen Kugeln der Urne liege zwischen $\frac{p}{p+q}-\omega$ und $\frac{p}{p+q}+\omega$, wo ω beliebig klein gemacht werden kann. — Auf diesen wichtigen Satz war auch Price (l. c. LIV, p. 317 Anm.) schon gekommen; da Laplace in seiner ersten Publikation 1774 weder Bayes noch Price erwähnt, läßt sich wohl annehmen, daß ihm ihre Untersuchungen damals noch unbekannt waren; zum ersten Male werden beide englische Mathematiker im Zusammenhange mit Laplace in der Inhaltsangabe erwähnt, die der Arbeit des französischen Forschers in der Histoire de l'Acad. . . . Paris 1778 (1781), p. 43 vorausgeschickt ist. Die Arbeit ist von 1780 datiert. Zu ähnlichen Resultaten gelangt auch Condorcet, auf dessen Leistungen wir bald genauer einzugehen haben werden, in einem Aufsatze der Hist. de l'Acad. . . . Paris 1783 (1786), p. 539. — J. Trembley hat sich ebenfalls mit diesen Fragen beschäftigt, wieder

in der Absicht, ohne Verwendung der höheren Mathematik die Resultate abzuleiten, wie wir das schon früher erwähnten. Seine Arbeit „De probabilitate causarum ab effectibus oriunda“ findet sich in den Comm. Soc. Reg. Gotting. XIII, 1795—1798 (1799), p. 64—119; sie vermeidet tiefer liegende Hilfsmittel nur auf Kosten der Kürze und Übersichtlichkeit.

Im vierten Abschnitt seines „Mémoire sur le calcul de probabilités“ Histoire de l'Acad. des sciences à Paris 1783 (1786), p. 539 stößt auch Condorcet auf diese Fragen. Er macht auf folgendes aufmerksam. Wenn bei 100000 Versuchen das Ereignis A 51000 mal und das Ereignis B 49000 mal eingetreten ist, so wird das Problem über die Wahrscheinlichkeit des Ausfalls der weiteren Ziehungen verschieden sein, je nachdem jene 51000 Ereignisse stattgefunden haben; wenn nämlich in je 100 aufeinander folgenden Versuchen durchschnittlich 51 mal A und 49 mal B erschienen ist, so wird der gesunde Verstand andere Erwartungen über die folgenden Ereignisse hegen, als wenn in den ersten Serien von je 100 Versuchen A stark überwogen hat, dann dieses Überwiegen aber abnahm, und dafür allmählich das Ereignis B häufiger und häufiger auftrat. Bei beiden Annahmen gibt die Bayessche Formel jedoch das gleiche Resultat. Sie erscheint daher nur dann anwendbar, wenn die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A wenigstens durchschnittlich den gleichen Wert beibehält. Auf die Fälle, in denen das nicht eintrifft, wendet Condorcet seine Aufmerksamkeit. Er stellt analog der Bayesschen Formel zwei andere auf; die eine bezieht sich auf den Fall, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A zwar veränderlich ist, jedoch nicht von der Folge der Versuchsausfälle abhängig erscheint; die zweite Formel läßt die Wahrscheinlichkeit auch von der Folge der Ereignisse abhängig sein. Die Wahrscheinlichkeiten stellen sich als Quotienten aus vielfachen Integralen dar. Sie liefern z. B. das Resultat: Ist A dreimal eingetreten, dann ist die Wahrscheinlichkeit eines vierten Eintretens $\frac{4}{5} = 0{,}8$, wenn die Wahrscheinlichkeit konstant ist; $\frac{51}{84} = 0{,}607$, wenn sie zwar veränderlich, allein von der Folge der Ereignisse unabhängig ist; $\frac{1799}{3000} = 0{,}599$, wenn die Folge des Ereignisses als auf die Wahrscheinlichkeit wirkend angesehen wird.

In der Abhandlung „Mémoire sur les probabilités“ datiert vom 19. Juli 1780 in der Hist. ... à Paris für 1778 macht Laplace darauf aufmerksam, daß in gewisser Art, aber anders als d'Alembert es sich dachte, künftige Ereignisse von früheren abhängig erscheinen, insofern nämlich als durch den Ausfall der früheren die Anschauung

und die Kenntnis der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens der späteren korrigiert und erweitert werde. Im Artikel XIV dieser Abhandlung heißt es bei der Besprechung des Ausfalles fortgesetzter Spiele zweier Personen, daß man durch die Folge der Ereignisse neue Aufschlüsse über ihre Geschicklichkeiten erhalten könne, derart daß sie bei unendlich vielen Spielen genau bekannt werden. „Unter diesem Gesichtspunkte läßt sich nicht bezweifeln, daß frühere Ereignisse auf die Wahrscheinlichkeit späterer Einfluß haben."

Das gibt Laplace Veranlassung, diesen Einfluß zu untersuchen und so zu der Bayesschen Regel zu gelangen. Die dazu nötigen Schlüsse hat Laplace wiederholt vorgetragen. Wir gehen sofort darauf ein; nur erwähnen wir erst noch, daß in Artikel XVI der besprochenen Abhandlung dieser Einfluß an dem Beispiele zweier Spieler erläutert wird: B hat die erste Partie gewonnen, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß A die beiden folgenden gewinnt? Es stellt sich heraus, daß unter Berücksichtigung der Verschiedenheiten der Geschicklichkeiten diese Wahrscheinlichkeit kleiner als $\frac{1}{4}$ ist.

Laplace kommt in seinem „Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres", Art. IV (Hist. de l'Acad. . . . à Paris 1783 [1786], p. 423), auf die Begründung der Bayesschen Regel zurück und leitet sie mit größter Einfachheit ab. Er geht dabei folgenden Weg: Bezeichnen e und E zwei Ereignisse, p und V ihre Wahrscheinlichkeiten, und hat das gleichzeitige Eintreffen von e und von E die Wahrscheinlichkeit v, so ist $v = p \cdot V$; $p = \frac{v}{V}$. „Die gesamte Theorie der Ursachen und der zukünftigen Ereignisse, erschlossen aus den bereits eingetretenen, fließt mit großer Leichtigkeit aus dieser Formel" (p. 428). Nämlich so:

Es möge E Folge eines der Ereignisse $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ sein; e_λ gebe dem Erscheinen von E die Wahrscheinlichkeit a_λ. A priori mögen alle e_λ gleiche Wahrscheinlichkeiten, d. h. jedes die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ haben; dann hat das Zusammentreffen von e_λ und E die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n} a_\lambda$ und daraus folgt für die Wahrscheinlichkeit von E

$$V = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n).$$

Bezeichnet p_λ die Wahrscheinlichkeit, daß e_λ die Ursache von E war, und bedenkt man, daß $\frac{1}{n} a_\lambda$ die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von e_λ und E, also gleich v_λ ist, so wird nach der obigen Elementarformel

$$p_\lambda = \frac{v_\lambda}{V} = \frac{\frac{1}{n} a_\lambda}{\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)} = \frac{a_\lambda}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Das ist die Bayessche Regel.

Auch hier gibt Laplace ein sehr treffendes Beispiel: Eine Urne enthält drei Kugeln, schwarze oder weiße. Es wird blindlings eine Kugel gezogen; diese wird wieder in die Urne getan und dann eine neue Ziehung vorgenommen. In m aufeinander folgenden Ziehungen sind nur weiße Kugeln zum Vorschein gekommen. Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß die Urne nur weiße, oder 2 weiße und 1 schwarze, oder 1 weiße und 2 schwarze Kugeln enthält? Nimmt man für e_1, e_2, e_3 diese 3 Möglichkeiten, so wird $a_1 = 1$, $a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^m$, $a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^m$, und

$$p_1 = \frac{3^m}{1 + 2^m + 3^m}, \quad p_2 = \frac{2^m}{1 + 2^m + 3^m}, \quad p_3 = \frac{1^m}{1 + 2^m + 3^m}.$$

Laplace bemerkt weiter, daß die genaue Wahrscheinlichkeit der meisten einfachen Ereignisse uns unbekannt, also für uns jedes Wertes zwischen 0 und 1 fähig sei. Sie heiße x; die Wahrscheinlichkeit von E unter der Geltung von x sei $f(x)dx$; dann geht die obige Formel für p_λ nach Erweiterung mit dx über in

$$p_x = \frac{f(x)\,dx}{\int_0^1 f(x)\,dx},$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß x zwischen den beiden Grenzen θ und θ_1 liegt, ist gleich dem Quotienten

$$\int_{\theta_1}^{\theta} f(x)\,dx : \int_0^1 f(x)\,dx.$$

θ und θ_1 werden nahe dem Werte a, diesen einschließend, gewählt, wo $x = a$ die Funktion $f(x)$ zu einem Maximum macht; und dann läßt sich zeigen, wie die Wiederholung einfacher Ereignisse durch ihren Ausfall Schlüsse auf ihre Wahrscheinlichkeit ermöglicht.

Laplace wendet dann die erhaltenen Theoreme auf das Problem der Knaben- und Mädchen-Geburten an (vgl. S. 239) und benutzt für die wirkliche Berechnung der unbekannten Wahrscheinlichkeiten die in dem früheren Teile des Mémoire (Hist.... Paris 1782, p. 1—88) hergeleiteten Näherungsformeln für die Integrale der angegebenen Formen.

Dann geht er auf weitere theoretische Untersuchungen darüber ein, wie aus dem Vorkommen früherer Ereignisse auf das Eintreten späterer Schlüsse möglich sind. Ist $\varphi(x)$ die Wahrscheinlichkeit des zukünftigen Ereignisses, a priori betrachtet, und P die, aus den beobachteten früheren Resultaten erschlossene Wahrscheinlichkeit, so ergibt sich

$$P = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx : \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Auch diese Formel wird auf das typische Beispiel vom Ziehen einer Kugel aus einer Urne angewendet: ist einmal eine weiße Kugel gezogen, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das weitere Erscheinen von n schwarzen Kugeln

$$P = \int_0^1 x(1-x)^n dx : \int_0^1 x\,dx = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Von der Methode der Bestimmung zukünftiger Ereignisse durch den Ausfall früherer macht Laplace auch in dem Aufsatze „Sur les naissances, les mariages et les morts à Paris“ (Hist. de l'Acad. 1773 [1776], p. 693—702) Gebrauch, um die Ergebnisse von Volkszählungen, die in einzelnen Distrikten Frankreichs vorgenommen wurden, verallgemeinernd zu verwerten. Aus ihnen sollte die Bevölkerung des ganzen Reiches bestimmt werden. Das konnte mit Hilfe von Geburtstabellen für das gesamte Gebiet geschehen, wenn das aus jenen Distrikten erhaltene Verhältnis zwischen Geburten und Lebenden für das ganze Reich Gültigkeit beanspruchen darf. Laplace erörtert, mit welcher Wahrscheinlichkeit man eine solche Annahme machen dürfe. Er reduziert sie auf das Urnenschema: In einer Urne befinden sich unendlich viele schwarze und weiße Kugeln in unbekanntem Verhältnisse. In einer ersten Ziehungsserie werden p weiße und q schwarze Kugeln gezogen; in einer zweiten q_1 schwarze, wieviel weiße ist unbekannt. Dabei ist es am naturgemäßesten, anzunehmen, daß die Zahl p_1 der weißen das Verhältnis befriedigt $p : q = p_1 : q_1$, also $p_1 = \frac{pq_1}{q}$ wird. Es wird nun die Wahrscheinlichkeit P dafür bestimmt, daß für den wahren Wert p_1 die Eingrenzung

$$\frac{pq_1}{q}(1-\omega) < p_1 < \frac{pq_1}{q}(1+\omega)$$

bei kleinem ω gilt. Bis auf Größen der Ordnung ω^4 wird

$$P = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\alpha^\infty dt e^{-t^2} \quad \left(\alpha = \frac{pqq_1\omega^2}{2(p+p_1)(q+q_1)}\right).$$

Auch in dem Aufsatze der Histoire de l'Acad.... Paris 1778, p. 227 geht Laplace auf das Problem des Geburtsverhältnisses von Knaben und Mädchen ausführlich ein.

Eine weitere Frage zieht, sowohl wegen der Untersuchungen, zu denen sie in unserem Zeitraume selbst Anlaß gab, als auch wegen ihrer praktischen Wichtigkeit unsere Aufmerksamkeit auf sich. Zudem gab sie den ersten Anstoß zur Theorie der Beobachtungsfehler. Ist eine Größe mehrfach beobachtet, dann werden die Resultate der einzelnen Beobachtungen i. a. nicht miteinander übereinstimmen, so z. B. wenn die Länge einer Strecke oder die Größe eines Winkels gemessen worden ist. Als das wahrscheinlichste Resultat hat man dann, wenn die Beobachtungen als gleichwertig eingeschätzt werden, das arithmetische Mittel der Einzelbeobachtungen angesehen. Es ist die Frage, mit welchem Rechte das geschieht. Davon war (diese Vorlesungen III², S. 640—641) im Anschluß an eine Abhandlung von Th. Simpson schon die Rede; Lagrange nimmt (Miscellanea Taurinensia V, 1770—1773, p. 167—232)[1]), wahrscheinlich ohne Kenntnis jener früheren Untersuchung zu haben, das Problem wieder auf und führt die Behandlung ähnlich wie Simpson durch. Er setzt den wahren Wert der zu beobachtenden Größe und die begangenen Beobachtungsfehler als gegeben voraus, kann daraus das Mittel der Beobachtungen berechnen und darauf hin bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Mittel den genauen Wert gibt, und mit welcher Wahrscheinlichkeit bei seiner Annahme ein Fehler von gegebener Größe begangen wird. Liegen z. B. Fehler nur von den Größen $+1, 0, -1$ vor, gilt gleiche Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von jeder der drei Sorten, und hat man n Beobachtungen gemacht, dann ist für die Annahme

$$n = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \ldots$$

$$\text{die Wahrscheinlichkeit} = \frac{243}{729}, \ \frac{243}{729}, \ \frac{189}{729}, \ \frac{171}{729}, \ \frac{153}{729}, \ \frac{141}{729}, \ldots$$

dafür, daß das Mittel den wahren Wert gibt. Es scheint auf Grund dieser Zahlen unvorteilhaft, die Anzahl der Beobachtungen über 2 steigen zu lassen; allein, wenn man nach der Wahrscheinlichkeit fragt, daß der bei der Annahme des Mittels gemachte Fehler den Betrag $\frac{1}{2}$ nicht übersteigt, dann findet sich für die Annahme

$$n = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \ldots$$

$$\text{die Wahrscheinlichkeit} = \frac{243}{729}, \ \frac{567}{729}, \ \frac{513}{729}, \ \frac{639}{729}, \ \frac{603}{729}, \ \frac{673}{729}, \ldots.$$

Es ist also in Wirklichkeit vorteilhaft, n als große und als gerade

[1]) Oeuvres publ. p. Serret, II, Paris 1868, p. 171.

Zahl anzunehmen. In den ersten acht der zehn Probleme, mit denen seine Abhandlung sich beschäftigt, behandelt Lagrange den Fall, daß eine endliche Anzahl diskreter Fehler begangen sei; von da aus macht er den Übergang zu der, in der Natur begründeten Annahme, daß unendlich viele Fehlermöglichkeiten innerhalb gewisser Grenzen vorliegen. Am Schlusse der Abhandlung geht Lagrange direkt auf diesen natürlichen Fall ein. Dabei führt er den Begriff der Fehlerwahrscheinlichkeit ein, und stützt diesen auf die gemachten Beobachtungen; ist x die Größe des Fehlers, so ist die Fehlerwahrscheinlichkeit y hierfür gleich der Anzahl der Male, in denen x aufgetreten ist, dividiert durch die Gesamtzahl der Beobachtungen. In den gegebenen Beispielen wird einmal y als Konstante, einmal als $y = \text{cst.}(p^2 - x^2)$ angenommen, so daß hier die beiden Grenzen der Fehler $-p$ und $+p$ sind. Die zweite Hypothese für y erklärt Lagrange für die einfachste und naturgemäßeste, die man erdenken könne. Ein letztes Beispiel nimmt $y = \text{cst.} \cos x$ an. Auf eine theoretische Annahme, die zu der jetzt üblichen Fehlerwahrscheinlichkeitsfunktion führen könnte, geht Lagrange nicht ein.

Von ganz anderen Gesichtspunkten läßt sich Daniel Bernoulli in seiner „Dijudicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda“ (Act. Acad. Petrop. 1777 [1778], p. 3—23) leiten. Kommen, so überlegt er, große Abweichungen unter den Beobachtungen vor, so werden mit einem gewissen Rechte die extremen Resultate weggelassen; das arithmetische Mittel verliert in solchem Falle seine Gültigkeit als wahrscheinlichster Wert. Vor allem ist ein Gesetz für die Wahrscheinlichkeit der Fehler, als eine Funktion ihrer Größe, aufzusuchen. Falls x die Größe des Fehlers und y die Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens ist, findet Bernoulli folgende Annahmen über y nötig: a) y muß für $+x$ und $-x$ gleichen Wert haben; b) mit wachsendem x muß y abnehmen; c) im höchsten Punkte der Fehlerkurve $y = f(x)$ muß die Tangente parallel der x-Achse laufen; d) $y = f(x)$ muß auf der x-Achse enden; e) die Tangenten in diesen Endpunkten müssen senkrecht auf der x-Achse stehen. Über d) und e) kann man geteilter Ansicht sein; jedenfalls haben diese Hypothesen sich im Verlaufe der weiteren Entwicklung nicht durchgesetzt. Als Fehlerfunktion $y = f(x)$ wählt der Verfasser einen Halbkreis $y = \text{c.}\sqrt{r^2 - x^2}$, dessen Radius bei jeder Untersuchung experimentell dadurch zu bestimmen ist, daß $-r$ und $+r$ als Grenzen für mögliche negative und positive Fehler genommen werden. Es kommt ferner noch auf die Lage des Halbkreises, d. h. auf die seines Mittelpunktes an, der so festgelegt wird: A, $A + a$, $A + b$, …, die nach steigender Größe

geordneten Beobachtungen sind gegeben; x ist die Entfernung des Mittelpunktes von A; dann ist die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Vorkommens der Fehler x, $x-a$, $x-b$, ... proportional zu dem Produkte $\sqrt{r^2-x^2}\cdot\sqrt{r^2-(x-a)^2}\cdot\sqrt{r^2-(x-b)^2}\ldots=\sqrt{Q}$. Nun wird folgender Schluß gewagt: Da diese Fehler ja wirklich eingetroffen sind, so ist ihre Wahrscheinlichkeit, wie Bernoulli behauptet, ein Maximum; man findet also x dadurch, daß man Q zu einem Maximum macht. Das führt bei n Beobachtungen auf eine Gleichung des Grades $(2n-1)$. Bei $n=1$ und 2 liefert diese das arithmetische Mittel; bei $n=3$ schon nicht mehr.

In seinen Bemerkungen zur eben besprochenen Abhandlung greift Euler (ibid. p. 24—33) die eben hervorgehobene gewagte Behauptung D. Bernoullis an. Er selbst umgeht durch eine geistreiche Wendung die Auflösung der Gleichung des Grades $(2n-1)$ und zeigt, wie die einer Gleichung dritten Grades in allen Fällen ausreicht.

Auch Laplace nimmt in der oben erwähnten Untersuchung (Mémoires de l'Acad. des Sciences, Paris VI [1774], p. 621) Stellung zu der Frage nach dem arithmetischen Mittel aus einer Reihe von Beobachtungen. Er erklärt (p. 639), die Annahme, die auf das arithmetische Mittel führt, sei „wenig natürlich" und hält es für notwendig, bei feineren Untersuchungen von einer anderen Methode Gebrauch zu machen. Laplace setzt die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers von der Größe x gleich $f(x)$; dabei fordert er, daß $f(+x)=f(-x)$ sei; ferner daß die x-Achse eine Asymptote der Kurve $y=f(x)$ werde, und daß die von der x-Achse und der Kurve $y=f(x)$ begrenzte Fläche die Größe 1 besitze. Mit Hilfe einer ganz willkürlichen Annahme wird $f(x)=\frac{1}{2}me^{-mx}$ gefunden. Merkwürdigerweise übersieht Laplace dabei, daß die erste seiner, für $f(x)$ aufgestellten drei Forderungen durch $y=\frac{1}{2}me^{-mx}$ nicht befriedigt wird. Zur weiteren Behandlung der Frage verwendet er das von ihm aufgestellte Prinzip über die Wahrscheinlichkeit der Ursachen und kommt auf einem, schon für drei Beobachtungen recht komplizierten Wege zum Ziele. Die Bestimmung des Mittels ist selbst in diesem so einfachen Falle von der Lösung einer Gleichung 15ten Grades abhängig. Einer kleinen von Laplace berechneten Tafel entnehmen wir folgende Resultate: Sind die drei beobachteten Punkte A, B, C; wird stets $AB=1$ gesetzt und dann $BC=q$; hat endlich das Laplacesche Mittel M die Entfernung $AM=x$ von A, so ergibt sich für

$q=0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$x=0,860$	0,894	0,916	0,932	0,944	0,955	0,965	0,975	0,984	0,992	1

Auf mehr als drei Beobachtungen geht die Abhandlung bei der Schwierigkeit der Rechnungen nicht ein.

Auch in seinem „Mémoire sur les probabilités“ vom Jahre 1785 (Histoire de l'Acad.... Paris, 1778) behandelt Laplace diese Fragen. Er löst dabei zuerst das folgende Problem: „Es seien n positive, stetige Variable $t_1, t_2, \ldots, t_n$ mit der festen Summe s gegeben. Das Gesetz der Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen jedes einzelnen t_α sei bekannt. Es soll die Summe der Produkte aller Werte einer gegebenen Funktion $\psi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ in die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des betreffenden Wertes ermittelt werden.“ Damit hängt aufs engste das, wie wir S. 248 sahen, schon von Lagrange behandelte Problem zusammen: „Die Wahrscheinlichkeit dafür zu finden, daß die Summe der Fehler bei mehreren Beobachtungen zwischen gegebenen Grenzen liegt, wenn das Fehlergesetz durch eine rationale ganze Funktion gegeben ist.“ Auf die Entdeckung dieses Fehlergesetzes geht nun Laplace (l. c. S. 254; art. XII) aus. Er nimmt an, daß keine Fehler von höherem absoluten Betrage als a vorkommen; ferner daß gleich große positive und negative Fehler mit gleich großer Wahrscheinlichkeit auftreten; endlich daß die Wahrscheinlichkeit bei stetig wachsender Fehlergröße stetig abnimmt. Hierauf teilt er die Strecke, auf der die n Fehler als Abszissen repräsentiert werden, von 0 bis a in n gleiche Teile und errichtet in der Mitte eines jeden Teils ein Lot, das die entsprechende, zur Abszisse gehörende Wahrscheinlichkeit darstellt. Da die Fehlerkurve mit der Achse eine Fläche von konstantem Inhalte 1 bildet, so muß auch die Summe der errichteten Ordinaten konstant sein: diese Summe denkt sich jetzt Laplace auf alle möglichen Weisen in n ihrer Größe nach geordnete Längenteile zerlegt; dann entspricht jeder solchen Zerlegung eine Fehlerkurve oder genauer ein Fehlerpolygon. Von allen möglichen, so konstruierbaren wird ein „mittleres“ Polygon genommen; und diese Annahme wird durch die Gleichberechtigung aller konstruierten Fehlerkurven begründet. Läßt man dann n ins Unendliche wachsen, so gelangt man zu der Kurve, die das Fehlergesetz mit der größten Wahrscheinlichkeit darstellt. Laplace findet für diese Kurve die Gleichung

$$y = \frac{1}{2a} \log \frac{a}{x}.$$

Dabei ist jedoch anzunehmen, daß für negative x in den Nenner des Logarithmus-Arguments die entgegengesetzt gleiche positive Größe eingetragen wird. Über die bei der Abszisse $x = 0$ auftauchende Schwierigkeit geht Laplace hinweg; ebensowenig stört ihn der Umstand, daß für $x > a$ reelle negative y auftreten.

Die erhaltene Lösung benutzt Laplace am Schlusse seiner um-

fangreichen Abhandlung bei der Bestimmung des vorteilhaftesten Mittelwertes, der aus mehreren Beobachtungen zu nehmen ist, also bei dem S. 248, 249 besprochenen, schon von Laplace selbst, dann von Lagrange, von D. Bernoulli und Euler behandelten Probleme. Hier macht Laplace die erschwerende Voraussetzung, daß die n einzelnen Beobachtungen eines Phänomens von n verschiedenen Personen herrühren, also auch verschiedenen Fehlergesetzen unterliegen. Diese Gesetze seien durch $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x), \ldots, y = \varphi_n(x)$ repräsentiert; die Beobachtungsresultate seien in steigender Größe angeordnet, und die Differenz des zweiten Resultats gegen das erste, des dritten gegen das zweite, usw. seien $p_2, p_3, \ldots, p_n$. Dann bezeichnet Laplace die Kurve

$$z = \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(p_2 - x) \ldots \varphi_n(p_n - x)$$

als Kurve der Wahrscheinlichkeiten, „courbe des probabilités“, und bestimmt als vorteilhaftesten Mittelwert den Wert x, der die zwischen der x-Achse und dieser Kurve gelegene Fläche halbiert. Dabei macht Laplace ausdrücklich darauf aufmerksam, daß der Begriff „Mittelwert“ durchaus nichts fest Bestimmtes ist, indem „das mittlere Resultat“ einer Reihe von Beobachtungen auf unendlich viele Arten definiert werden kann. — Die einzelnen φ unterscheiden sich nur durch die Werte des a voneinander, so daß man hat

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2a_1} \log \frac{a_1}{x}, \quad \varphi_2(x) = \frac{1}{2a_2} \log \frac{a_2}{x}, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{2a_n} \log \frac{a_n}{x}.$$

Setzt man alle a gleich ∞, so gelangt man zum arithmetischen Mittel. Das Gleiche tritt auch in einem allgemeineren Falle ein, den wir aber als zu verwickelt übergehen.

Die vorgetragene Theorie wird endlich auch noch zur Ableitung einer Regel für die Korrektion von Beobachtungsinstrumenten benutzt. —

Wir gehen nunmehr zu der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf soziale Fragen über, auf Fragen über die Richtigkeit von Urteilssprüchen, über Einführung von Gesetzen, über Einrichtung von Gerichtshöfen, über Wahlen. Dieser ganze Zweig wurde hauptsächlich von dem französischen Mathematiker Condorcet geschaffen und gepflegt, dessen wir bereits mehrere Male gedenken mußten. Da seine Leistungen hauptsächlich auf diesem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegen, so haben wir den Bericht über seinen Lebenslauf bis hierher aufgeschoben. Marie-Jean-Antoine-Nicolas-Caritat marquis de Condorcet wurde am 17. September 1743 in der Picardie als Sproß einer altadligen Familie geboren. Seine Mutter erzog ihn, nach dem frühzeitigen Tode des Vaters, in frömmsten

Anschauungen; acht Jahre hindurch trug er zu Ehren der Jungfrau Maria Mädchenkleider; sein Erzieher war ein Jesuit. Im Collège von Navarra widmete er sich mathematischen Studien und erhielt, sechzehnjährig, in Paris seinen akademischen Grad. Durch seinen „Essai sur le calcul intégral“ (1765) und sein „Mémoire sur le problème des trois corps“ (1768) gelangte er zu hohem Ansehen. 1769 wurde er zum Mitglied der Académie des sciences gewählt. Turgot und Voltaire waren ihm eng befreundet; mit dem ersten betrieb er nationalökonomische Untersuchungen; mit dem zweiten behandelte er literarische Fragen. 1782 wurde er Mitglied der Académie française. Es beseelte ihn eine durchaus liberale, für die Fortschritte der Menschheit begeisterte, für die Verbesserung ihrer Lage eintretende Gesinnung. Unter und mit Turgot hatte er für Reformideen gekämpft, hatte gegen die Sklaverei der Neger, gegen die Zurücksetzung der Calvinisten geschrieben; er hatte öffentlich gegen ungerechte Entscheidungen des Parlaments, gegen ungerechte Verurteilungen der Gerichte protestiert. 1789 schloß er sich der Revolutionspartei an. Er wurde 1791 zum Kommissar der Schatzkammer ernannt, dann in die gesetzgebende Versammlung gewählt und 1792 sogar Präsident derselben. Im Prozeß gegen den König stimmte Condorcet für die härteste Strafe nach der Todesstrafe. Er stand auf der Seite der Girondisten und flüchtete, um der Verhaftung zu entgehen, 1793 nach ihrem Sturze. Acht Monate hindurch lebte er in einem Verstecke in Paris und verfaßte dort mehrere sozial-wissenschaftliche Schriften. Durch einen anonymen Brief gewarnt, verließ er sein Asyl im April 1794, fand den Schutz, den er erhofft hatte, nicht, irrte zwei Tage lang umher und wurde als verdächtig in Clamart angehalten. Im Verhör legte er sich einen falschen Namen bei. Unerkannt wurde er nach Bourg la Reine transportiert und dort im Gefängnisse am nächsten Tage tot aufgefunden; wahrscheinlich hatte er Gift genommen. Mehrere Monate hindurch blieb infolge des falschen Namens seiner Familie sein Geschick unbekannt; nur dank einer, beim Gestorbenen aufgefundenen Uhr konnte seine Person festgestellt werden.

Charakteristisch für ihn ist das Wort d'Alemberts, das ihn als „un volcan couvert de neige“ bezeichnete. Auch für seine wissenschaftlichen Bestrebungen gilt d'Alemberts Ausspruch. Condorcet war von heiligem Eifer für das Wohl der gesamten Menschheit durchglüht und von ihrer unbeschränkten Vervollkommnungsfähigkeit überzeugt, auf ethischem wie auf wissenschaftlichem Gebiete. Von diesen Gesichtspunkten aus ist sein Hauptwerk zu betrachten und zu beurteilen; ihm dient die Mathematik darin als Mittel, die Wohlfahrt und die Wahrheit zu fördern. Es trägt den Titel: „Essai sur l'appli-

cation de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix" und ist im Jahre 1785 zu Paris erschienen. Es besteht aus einem „Discours préliminaire" von 191 Seiten und dem eigentlichen Werke von 304 Seiten. Der „Discours" liefert eine, dem Werke parallel laufende, eingehende und erläuternde Inhaltsangabe unter Ausschaltung der mathematischen Ableitungen, die das Werk selbst gibt. Eine kurze Einführung in die Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung bildet den Anfang des Discours. Das eigentliche Werk zerfällt in vier Teile.

Bei der Wahrscheinlichkeit von Entscheidungen beachtet Condorcet folgende Hauptpunkte: 1) die Wahrscheinlichkeit, daß eine Versammlung keine falsche Entscheidung abgibt; 2) die, daß sie eine richtige abgibt; 3) die, daß sie überhaupt eine abgibt; 4) die, daß eine abgegebene Entscheidung richtig ist. Der Unterschied von 1) und 2) liegt darin, daß 1) auch den Fall umfaßt, in dem keine Entscheidung erfolgt.

Im ersten Teile werden diese Fragen unter verschiedenen Annahmen über den Abstimmungsmodus untersucht. Es wird der Reihe nach vorausgesetzt: 1) die Anzahl der Abstimmenden ist ungerade; man sucht die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des Urteils, wenn nach absoluter Majorität beschlossen wird; 2) wenn eine vorgeschriebene Majorität von $(2q_1 + 1)$ Stimmen zum Beschluß nötig ist; 3) wenn bei gerader Anzahl der Abstimmenden eine Majorität von $2q_1$ Stimmen gefordert wird; 4) wenn die Majorität einen vorgeschriebenen Prozentsatz der Anzahl der Abstimmenden erreichen, oder 5) wenn die Majorität die Minorität um eine vorgeschriebene Anzahl übertreffen muß; 6) wenn die Abstimmung so lange wiederholt wird, bis man eine vorgeschriebene Majorität erhalten hat; 7) wenn die Entscheidung von den aufeinander folgenden Abstimmungen einer Anzahl von Körperschaften abhängig gemacht wird, usw.

Um ein Bild dieser Untersuchungen zu geben, knüpfen wir an die erste Annahme an. Es sind $(2q + 1)$ Abstimmende vorhanden; alle haben gleiche Geistesschärfe, sind von gleichem Gerechtigkeitsgefühle beseelt und die Abstimmung jedes einzelnen geschieht unbeeinflußt von der der übrigen. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Urteil des einzelnen mit der Wahrheit übereinstimmt, sei gleich v (vérité); daß es falsch sei, gleich e (erreur); also $v + e = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei der Abstimmung mindestens $(q + 1)$ Stimme sich für die Wahrheit ausspricht, sei V_q; daß das Gegenteil eintrete, E_q. Dann wird, wie sofort ersichtlich ist, der Wert von V_q bestimmt als

$$V_q = v^{2q+1} + \binom{2q+1}{1} v^{2q} e + \binom{2q+1}{2} v^{2q-1} e^2 + \cdots + \binom{2q+1}{q} v^{q+1} e^q;$$

und daraus leitet Condorcet den Ausdruck her

$$V_q = v + (v-e)\left[ve + \binom{3}{1} v^2 e^2 + \binom{5}{2} v^3 e^3 + \cdots + \binom{2q-1}{q-1} v^q e^q\right].$$

Ist $v > e$, so wächst V_q zugleich mit q und wird gleich 1 für $q = \infty$. Ist $v < e$, so nimmt V_q bei wachsendem q ab und wird gleich 0 für $q = \infty$. Das rechtfertigt den Schluß: „eine rein demokratische Verfassung ist bei Abstimmungen über Dinge, die den Horizont gewöhnlicher Leute übersteigen, unter allen Verfassungen die schlechteste“; denn bei der Mehrzahl des Volkes ist ja $e > v$. — Für $v = e$ wird $V_q = E_q = \frac{1}{2}$.

V_q und E_q geben die Wahrscheinlichkeiten für die Richtigkeit und die Unrichtigkeit eines abzugebenden Urteils. Ist die Entscheidung aber schon gefällt und die Majorität, mit der sie eintrat $= 2q_1 + 1$ bekannt, dann berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit des abgegebenen Urteils folgendermaßen: für die Richtigkeit sprechen

$$\binom{2q+1}{q-q_1} v^{q+q_1+1} e^{q-q_1},$$

dagegen sprechen

$$\binom{2q+1}{q-q_1} v^{q-q_1} e^{q+q_1+1}$$

Chancen, also ist die Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit und die Unrichtigkeit des gefällten Urteils bezw.

$$\frac{v^{2q_1+1}}{v^{2q_1+1} + e^{2q_1+1}} \quad \text{und} \quad \frac{e^{2q_1+1}}{v^{2q_1+1} + e^{2q_1+1}}.$$

In ähnlicher Art wird das Problem unter der zweiten Annahme behandelt, daß eine Majorität von $2q_1 + 1$ Stimme zum Beschluß nötig ist. Dabei stellt sich heraus, daß bei $v > e$ die Werte von V_q zwar im allgemeinen mit wachsendem q zunehmen, daß aber bei kleinen Werten von q Abweichungen von dieser Regel vorkommen können. So liefert bei $v = \frac{2}{3}$, $e = \frac{1}{3}$ und $q_1 = 3$ der Wert $q = 19$ den kleinsten Betrag für V_q; diesen kleinsten Betrag, der eine Funktion von q ist, bezeichnet Condorcet durch M. Es ist bei diesem Abstimmungsmodus also nicht stets geraten, die Anzahl der Abstimmenden zu vermehren.

Im ersten Teile geht Condorcet auch auf Untersuchungen über die Richtigkeit von Wahlen ein und zeigt, daß eine durch Stimmzettel erfolgende Wahl eines unter drei Kandidaten sehr wohl den

Ansichten der Majorität der Abstimmenden direkt entgegengesetzt sein kann. Condorcet war nicht der erste, der auf diese Komplikationen hinwies; Jean Charles de Borda hatte seinen Ideen darüber schon 1770 vor der Akademie Ausdruck gegeben. In der Histoire de l'Acad. . . . à Paris wurde 1781 eine von ihm verfaßte, darauf bezügliche Abhandlung gedruckt (S. 617: Mémoire sur les élections au scrutin). Das folgende Beispiel mag die Schwierigkeiten, die bei der Wahl auftreten können, erläutern. Von den drei Kandidaten A, B, C soll durch Abstimmung einer gewählt werden. Es sind 12 Wähler vorhanden, die einzeln die drei Kandidaten in folgende Reihenfolge der Würdigkeit bringen

Wähler	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
	A	A	A	A	A	B	B	B	B	C	C	C
	B	B	C	C	C	C	C	C	C	A	B	B
	C	C	B	B	B	A	A	A	A	B	A	A

Hat jeder der Wähler nur einem der Kandidaten seine Stimme zu geben, so erhält A 5 Stimmen, B 4 und C 3; somit ist A gewählt. Legt man aber der dritten Stelle das Gewicht α bei, der zweiten das Gewicht $\alpha + \beta$ und der ersten das Gewicht $\alpha + \beta + \gamma$, so besitzt A das Gewicht $12\alpha + 6\beta + 5\gamma$; B das Gewicht $12\alpha + 8\beta + 4\gamma$ und C endlich das Gewicht $12\alpha + 10\beta + 3\gamma$. Je nach den Werten, die α, β, γ erhalten, kann man A oder C an erste Stelle bringen. So müßte für $\beta = \gamma$ der Kandidat C gewählt sein. $\beta = \gamma$ ist Bordas Annahme, die offenbar ihrer Willkür halber die Schwierigkeit nicht beseitigt. Condorcet beschäftigt sich eingehender mit der Hebung der Schwierigkeit, indem er die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeiten der Gruppierungen heranzieht. Aber auch er scheitert an der Lösung des vollkommenen Widerspruches, der bei solchen Abstimmungen auftreten kann; wenn sich z. B. bei der Abschätzung von je 2 der 4 Kandidaten unter sich eine Majorität für jede der 6 Anordnungen findet, in denen das $>$ Zeichen die Überlegenheit andeuten soll:

$$A > B;\; A > C;\; A > D;\; B > C;\; D > B;\; C > D,$$

so sind die drei letzten Beziehungen unvereinbar.

Der zweite Teil des Essay liefert eine Umkehrung der Aufgaben des ersten Teils; dort waren v, q, q_1 bekannt, und es wurden V_q und M gesucht. Hier nimmt man die letzten Größen als bekannt an und bestimmt aus ihnen die ersten. Um diesem Zwecke zu genügen, werden die Formeln des ersten Teils näherungsweise aufgelöst. Der Verfasser beschäftigt sich dann eingehend mit philosophischen Fragen über die Grundgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung und wiederholt seine Kritik S. 223, 244 der Buffonschen Annahmen.

Im dritten Teile werden zwei Probleme behandelt: durch Versuche soll die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit abgegebener Urteile bestimmt werden; und zweitens soll die Wahrscheinlichkeit festgelegt werden, die notwendig zu fordern ist, damit ein Urteil als gerecht angesehen werden könne. Für die Erledigung des ersten Punktes ist es nötig, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das eintreten soll, aus dem vorhergehenden Verlaufe des Eintretens dieses Ereignisses zu bestimmen; und dies führt direkt auf die Bayessche Theorie. Sie findet sich denn auch in dreizehn Problemen erläutert. Wir führen die ersten derselben an. Von zwei Ereignissen, die so beschaffen sind, daß bei jedem Versuche immer nur eins eintreten kann, aber auch eins eintreten muß, ist bei $(m + n)$ Versuchen das erste A m mal, das zweite B n mal eingetreten; mit welcher Wahrscheinlichkeit ist bei einem neuen Versuche A zu erwarten, wenn die unbekannten Wahrscheinlichkeiten x und $1 - x$ von A und B entweder I. konstant; oder II. veränderlich sind; oder III. wenn über ihre Konstanz oder Veränderlichkeit nichts bekannt ist? — Bei der Besprechung des zweiten Punktes stellt Condorcet, ähnlich wie Buffon, ein Maß auf für die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit von Urteilen, mit der man sich begnügen müsse; er kommt durch merkwürdig verzwickte, an die Lebenshoffnung geknüpfte Betrachtungen zu dem Werte $\frac{144767}{144768} = M$. Setzt man eine Versammlung von $2q + 1 = 61$ Abstimmenden voraus, für deren jeden $v = \frac{4}{5}$ ist, so reicht eine Mehrheit von $2q_1 + 1 = 9$ Stimmen, um die Wahrscheinlichkeit des Spruches $> M$ zu machen.

In der Einleitung zum vierten Teile des Werkes gesteht Condorcet ein, daß die für Abstimmungen gemachten allgemeinen Annahmen: unverändertes v, gleiche geistige Stellung, gleiche Wahrheitsliebe, Freiheit von Beeinflussungen der Abstimmenden untereinander — sich allzuweit von der Wirklichkeit entfernen, und er unternimmt es, die wirklichen Verhältnisse mehr, als dies bis dahin geschehen war, in die Rechnung zu bringen.

An vier ausführlich besprochenen Beispielen versucht endlich der fünfte und letzte Teil die Anwendung der aufgestellten Grundsätze zu zeigen. Die Durchführung ist so wenig mathematisch, daß eine weitere Darlegung zu sehr aus dem Rahmen dieser Vorlesungen heraustreten würde.

Es ist schwer, zu dem Werke Condorcets gerechte Stellung zu nehmen: „Bewundert viel und viel gescholten". Rein mathematisch betrachtet bietet es schon so manchen Angriffspunkt; sein Hauptmangel aber liegt in der Grundansicht, es könne das verwickelte

Leben sich unter so einfache Annahmen einschnüren lassen, wie sie hier aufgestellt werden; einen anderen Mangel finden wir in der Dunkelheit seines Stils und in der Unklarheit seiner Ideen. Manche Beurteiler haben gemeint, Condorcet sei es gelungen, die Lücke auszufüllen, die der vierte Abschnitt der „ars conjectandi" Jakob Bernoullis aufweist. Dieser geniale Mann wurde durch den Tod gehindert, die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechung auf bürgerliche, moralische und wirtschaftliche Verhältnisse zu liefern, was er beabsichtigte; Condorcet habe nach 72 Jahren die Gedanken Bernoullis durchgeführt. Andere Beurteiler finden Condorcet eher phantastisch als streng, eher enthusiastisch als wissenschaftlich scharf.

Wir müssen noch einen Blick auf die letzten beiden Artikel eines Condorcetschen Aufsatzes über die Wahrscheinlichkeitsrechnung werfen, deren erste Artikel bereits S. 243 besprochen sind. Diese beiden übrigen Artikel handeln über die Wahrscheinlichkeit außerordentlicher Ereignisse (Histoire de l'Acad. des sciences ... à Paris 1783, p. 553, und 1784, p. 454) und über die Glaubwürdigkeit dahin gehender Zeugenaussagen. Die Ausführungen des ersten werden im zweiten zurückgenommen, weil sie zu hypothetisch, zu schwierig, zu wenig dem gesunden Verstande entsprechend seien. Neue, ziemlich unverständliche Betrachtungen werden an ihre Stelle gesetzt und zu einer Untersuchung über die wahrscheinliche Regierungsdauer der sieben Könige von Rom benutzt! Man könnte es wirklich verstehen, wenn jemand solche Anwendungen als einen recht schlechten Scherz auffaßte, nur dazu angetan, die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu diskreditieren.

Reihen.

Wir gehen jetzt zur Theorie der Reihen über. Dabei macht sich eine, in der Natur der Sache liegende Schwierigkeit fühlbar, mehr als in den früheren Epochen. Sie betrifft die Anordnung des Stoffes. Die Verwendung der unendlichen Reihen findet jetzt nämlich nahezu in allen Gebieten der Analysis statt und nimmt an prinzipieller Wichtigkeit mehr und mehr zu; Differential- und Integralrechnung, Differenzenrechnung, Funktionentheorie, Algebra wären ohne die Theorie und die Praxis der unendlichen Reihen eines weittragenden Hilfsmittels beraubt. Eine Darstellung dieser Gebiete, die die Reihen gänzlich ausschlösse und auf eine Sonderdarstellung verwiese, wäre kaum denkbar. So muß es denn in gewissem Maße dem Belieben überlassen bleiben, ob die eine oder die andere Arbeit hier

unter der Theorie der Reihen oder an einer anderen Stelle besprochen wird, wohin sie dem Stoffe nach oder aus anderen Gründen gehört.

Ein Beispiel für das soeben Gesagte möge genügen: Lagrange hat 1768[1]) eine „neue Methode“ gegeben, um die literalen Gleichungen mit Hilfe von Reihen aufzulösen. Dabei gelangt er, ohne einen Beweis für sein Resultat zu geben, zu der wichtigen Formel, die als „Lagrangesche Umkehrungsformel“ seinen Namen trägt. Er bringt die Gleichung mit der Unbekannten x auf die Form $a - x + \varphi(x) = 0$. Ist dann p eine Wurzel dieser Gleichung, $\psi(p)$ eine Funktion von p und $\psi'(x)$ die Ableitung von $\psi(x)$, dann wird nach seiner Formel

$$\psi(p) = \psi(x) + \psi'(x)\varphi(x) + \frac{d[\psi'(x)\varphi(x)^2]}{2!\,dx} + \frac{d^2[\psi'(x)\varphi(x)^3]}{3!\,dx^2} + \frac{d^3[\psi'(x)\varphi(x)^4]}{4!\,dx^3} + \cdots,$$

falls nach dem Differenzieren x überall durch a ersetzt wird. Diese Formel gehört ihrem Wesen nach zur Infinitesimalrechnung, ihrer Anwendung und Entstehung nach zur Algebra, ihrer Form nach zur Reihentheorie und ihrer Herleitung nach (wie wir früher S. 216 sahen) auch wohl zur Kombinatorik. — Dies mag gleichzeitig zur Erklärung dafür dienen, daß wir die, auf den binomischen Satz bezüglichen Untersuchungen vereint an den Beginn der Besprechung über die Kombinatorik gesetzt haben; daß dort auf die Potenzierung des Polynoms und auf die formelle Umkehrung der Reihen eingegangen wurde.

Was die Grundlegung der Theorie der unendlichen Reihen betrifft, so können wir uns, ebenso wie im 109. Kapitel des dritten Bandes der Überzeugung nicht verschließen, daß bei außerordentlich angewachsenem Reihenmaterial die Begründung der Reihentheorie und zwar besonders die Begriffe von Konvergenz und Divergenz in Hinsicht auf Strenge noch fast alles zu wünschen lassen. Selbst Geistern wie Euler und Daniel Bernoulli war es nicht vergönnt, sich zu korrekten Anschauungen durchzuarbeiten; sie gerieten auf die seltsamsten Abwege.

Hinsichtlich des Stoffes mag gleich hier erwähnt werden, daß in unserer Epoche die Reihen, die nach dem Sinus oder dem Kosinus der Vielfachen eines Winkels fortschreiten, besonders die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich ziehen und ein bevorzugtes Objekt der Untersuchungen werden: wir stehen eben in der vorbereitenden Epoche für die Entdeckungen Fouriers.

Es möge nun die Besprechung der einzelnen, wichtigeren Arbeiten

---

[1]) Histoire de l'Acad. de Berlin 1768, p. 251, insbesondere p. 274.

folgen. — Wir beginnen mit einer Arbeit von John Landen[1]), der 1760 eine Methode angibt, gewisse Reihen zu summieren. Sie beruht auf der gliedweisen Integration einer Reihe, deren Summe bekannt ist, nebst zugehöriger Bestimmung der Integrationskonstanten. Landen knüpft dabei an die bekannte Entwicklung von

$$\log(1+x)$$

an. Er findet Beziehungen zwischen Reihen von der Form

$$x + \frac{x^2}{2^\varkappa} + \frac{x^3}{3^\varkappa} + \frac{x^4}{4^\varkappa} + \cdots$$

bei verschiedenen $\varkappa$. Bezeichnet wird

$$P^{(\varkappa)} = 1 + \frac{1}{2^\varkappa} + \frac{1}{3^\varkappa} + \frac{1}{4^\varkappa} + \cdots; \quad Q^{(\varkappa)} = 1 + \frac{1}{3^\varkappa} + \frac{1}{5^\varkappa} + \frac{1}{7^\varkappa} + \cdots;$$
$$q^{(\varkappa)} = 1 - \frac{1}{3^\varkappa} + \frac{1}{5^\varkappa} - \frac{1}{7^\varkappa} + \cdots;$$

dann beweist Landen, was Euler schon auf anderem Wege in der „Introductio in analysin" hergeleitet hatte, daß $P^{(\mathrm{II})} = \frac{\pi^2}{6}$, $Q^{(\mathrm{II})} = \frac{\pi^2}{8}$, $q^{(\mathrm{III})} = \frac{\pi^3}{32}$ ist. Weiter liefert er Formeln wie

$$-P^{(\mathrm{IV})} = \frac{2}{3} b^2 P^{(\mathrm{II})} + \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 4 \cdot 5} b^4;$$
$$-P^{(\mathrm{VI})} = \frac{2}{3} b^2 P^{(\mathrm{IV})} + \frac{8}{3 \cdot 4 \cdot 5} b^4 P^{(\mathrm{II})} + \frac{8 \cdot 32}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} b^6 + \cdots,$$

worin $b^2 = -\frac{\pi^2}{4}$ ist. Auch Reihen von der Gestalt

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2};$$
$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2} + \cdots = \frac{3\pi^2}{256} - \frac{1}{9}$$

werden bestimmt.

Eine große Anzahl von Abhandlungen mehr oder weniger bedeutenden Inhalts über Reihen liefert Euler in seiner Unermüdlichkeit und seinem nie versiegenden Ideenreichtum.

Durch einen gewissen geometrisch-asymptotischen Prozeß hatte Descartes die Quadratur des Kreises konstruktiv geliefert. Euler überträgt ihn ins Gebiet der Analysis[2]) und gelangt dabei zur Summation der Reihe

$$\operatorname{tang}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{1}{4}\varphi + \cdots = \frac{1}{\varphi} - 2\operatorname{cotg}2\varphi,$$

---

[1]) Ph. Tr. (London), Vol. 51; part II; p. 553. [2]) Nov. Comment. Petrop. VIII, pro 1760, 1761, p. 157.

die er dann auch, wie ähnliche Formeln, rein rechnerisch und elementar herleitet.

In einem anderen kleineren Aufsatze entwickelt Euler[1]) Beziehungen wie

$$A \operatorname{tang}\frac{1}{2} + A \operatorname{tang}\frac{1}{8} + A \operatorname{tang}\frac{1}{18} + \cdots + A \operatorname{tang}\frac{1}{2n^2} + \cdots$$
$$= A \operatorname{tang}\frac{1}{3} + A \operatorname{tang}\frac{1}{7} + A \operatorname{tang}\frac{1}{13} + \cdots$$
$$+ A \operatorname{tang}\frac{1}{n^2+n+1} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

In diesen Formeln bedeutet, wie auch anderswo zu dieser Zeit, $A \operatorname{tang}\varphi$ so viel wie unser $\operatorname{arctang}\varphi$.

Im Jahre 1765 beschäftigte sich Euler[2]) mit der Entwicklung der Potenz $(1+x+x^2)^n$ und insbesondere mit dem darin auftretenden Koeffizienten der Potenz x^n. Bezeichnen wir ihn durch a_n, so ist $a_n = 1 + \binom{n}{1}\binom{n-1}{1} + \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} + \binom{n}{3}\binom{n-3}{3} + \cdots$, wo die Klammern die Binomialkoeffizienten in moderner Schreibweise angeben. Es gilt die Rekursionsformel $(n+1)a_{n+2} = (2n+1)a_{n+1} + 3na_n$. Daraus folgt $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = (1-2x+3x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Endlich wird die allgemeinere Potenz $(a+bx+cx^2)^n$ in ähnlicher Weise behandelt und auch bei ihr der Koeffizient von x^n untersucht.

Im Jahre 1767 veröffentlichte der Italiener Francesco Luino oder Luini zwei Werke: „Delle progressioni e serie“ und „Sulla interpolazione delle serie e suo uso all' astronomia“[3]), die mehr ihrem Titel als ihrem Inhalte nach hierher gehören. Das erste beschäftigt sich eingehend mit der elementaren Arithmetik und Algebra, führt die Behandlung der positiven und negativen, der reellen und der imaginären Größen durch, löst die Gleichungen der niederen Grade, bespricht die endlichen arithmetischen und geometrischen Reihen und geht dann zu den unendlichen Reihen über. Dabei verwertet Luino eine von Vincenzo Riccati stammende Idee[4]). Die Summe der m ersten Glieder einer unendlichen Reihe sei S, die Summe ihrer $(m-1)$ ersten Glieder s, und das allgemeine m^{te} Glied heiße T.. Dann ist $T = S - s$. Hat man andererseits $T = A - a$, wo A dieselbe Funktion von m, wie a von $(m-1)$ ist, so braucht A noch nicht gleich S zu sein, man kann aber leicht S finden. Bedeuten nämlich T' und A'

[1]) Nov. Comment. Petrop. IX, pro 1763, p. 40. [2]) Ibid. XI, pro 1765, p. 124; vgl. den Aufsatz in den Opuscula analytica I; Petrop. 1783, p. 48. [3]) Luino oder Luini (1740—1792). Beide Werke erschienen 1767 zu Mailand. [4]) Annali dei letterati d'Italia; vol. I. Modena 1756.

die Werte, die T und A für $m = 1$ annehmen, und setzt man $T' - A' = b$, dann ist $S = A + b$. Riccati und Luino nehmen nun S als gegebene Funktion und bilden daraus das allgemeine Glied $T = S - s$. Dies gehört dann als allgemeines Glied zu einer Reihe mit bekannter Summe. Als die praktisch wichtigsten Reihen werden die arithmetischen mit $T = a + bm + cm^2 + \cdots + dm^x$, die geometrischen mit $T = e^m$ und die gemischten mit $T = (a + bm + \cdots + dm^x)e^m$ behandelt. Die Methode trägt aber weiter, wie an dem Beispiele

$$S = \frac{Lm + Mm^2 + \cdots + Rm^p}{(A + Bm)(A + B(m-1))\ldots(A + B(m-p+1))}$$

gezeigt wird.

Nahm Luino die Riccatische frühere Arbeit als besonders wichtig in seine Darstellung auf, so veröffentlichte Riccati selber im gleichen Jahre neue Untersuchungen über rekurrente Reihen[1]). Schon 1756 hatte er das allgemeine Glied einer rekurrenten Reihe aus der zwischen ihren Gliedern geltenden Rekursionsformel bestimmt. Hier erledigt er das gleiche Problem für allgemeinere Reihen, für „rekurrente mit Appendix". Bei solchen unterscheidet sich die Rekursionsformel dadurch von der für gewöhnliche rekurrierende Reihen, daß eine additive Konstante als Appendix hinzutritt. So gehört die Reihe 0, 1, 1, 2, 4, 9, 21, 50, 120, ... zu den rekurrenten Reihen mit Appendix, da für sie $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 1$ ist; das Glied -1 ist der Appendix. Auch für solche Reihen bestimmt Riccati das allgemeine Glied. Dabei geht er schrittweise vor, indem er zuerst Reihen „erster Ordnung" oder „ersten Grades", d. h. solche behandelt, bei denen die Rekursionsformel $a_n = ta_{n-1} + a$ ist. Für sie findet er als allgemeines Glied $a_n = a_1 t^{n-1} + a\frac{t^{n-1} - 1}{t - 1}$. Dann geht Riccati zu Reihen zweiter Ordnung oder zweiten Grades über, d. h. zu solchen, bei denen $a_n = ta_{n-1} + sa_{n-2} + a$ gilt, wo t, s, a konstant sind, so daß jedes Glied aus den beiden vorhergehenden berechnet werden kann. Die Bestimmung von a_n in independenter Weise wird auf die bei gewöhnlichen rekurrenten Reihen zurückgeführt, wobei dann eine quadratische Gleichung zu lösen ist. Induktiv ergeben sich weiter die Resultate für rekurrente Reihen mit Appendix beliebigen Grades.

Im ersten Teile des zweiten Bandes der „Opuscules mathématiques" von d'Alembert[2]) findet sich als 35. Mémoire ein Aufsatz über die Reihen, deren erster Paragraph von Konvergenz und Divergenz unendlicher Reihen handelt, und sich insbesondere auf die Entwick-

---

[1]) Mém. présentés p. div. Sav. Paris 1768, V, p. 153—174 und auch Comment. Bonon. V, 1767. [2]) Paris 1768, p. 171.

lung von $(1+\mu)^m$ für willkürliche m bezieht. Nach d'Alembert konvergiert (divergiert) eine Reihe an einer Stelle, wenn der Betrag jedes folgenden Gliedes kleiner (größer) ist, als der des vorhergehenden; er bemerkt dabei aber ganz zutreffend, daß die Reihe im Unendlichen konvergieren müsse, um richtige Resultate zu geben, und gibt für diese eigentliche Konvergenz als Kriterium an, daß der Betrag von μ kleiner als 1 sein müsse; „sonst liefert sie falsche Resultate, auch wenn sie bei $|\mu|>1$ anfänglich konvergiert. Eine solche anfängliche Konvergenz kann sehr weit hinaus bestehen, z. B. bei $\left(1+\frac{200}{199}\right)^{\frac{1}{2}}$, wo die Divergenz erst mit dem 300sten Gliede beginnt". Er betrachtet eine Reihe als „vollkommen", wenn ihre Glieder gleich vom ersten an abnehmen, und wenn sie sämtlich das gleiche Vorzeichen haben. Er zeigt, wie man bei $(1+\mu)^m$ stets die erste Forderung verwirklichen kann, indem man z. B. $(1+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}}$ setzt; oder indem man bei der Reihe $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$ für große x besser $(x-2n\pi)$ einsetzt, wo n so gewählt wird, daß der Klammerwert möglichst klein ist.

Im Jahre 1769 beschäftigte sich Euler mit der Summation von Reihen, deren Koeffizienten mit den Bernoullischen Zahlen eng zusammenhängen[1]). Statt der Bernoullischen Zahlen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \frac{691}{2730}, \frac{7}{6}, \cdots$ betrachtet Euler ihre Produkte mit bez. den Zahlen 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, ...; er benennt diese Produkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \ldots$, so daß

$$\mathfrak{A}=1,\ \mathfrak{B}=\frac{1}{3},\ \mathfrak{C}=\frac{1}{3},\ \mathfrak{D}=\frac{3}{5},\ \mathfrak{E}=\frac{5}{3},\ \mathfrak{F}=\frac{691}{105},\ \mathfrak{G}=35, \ldots$$

wird, und geht von ihnen zu einer neuen Reihe von Zahlen

$$A=\frac{1}{3!}\mathfrak{A},\ B=\frac{2^2}{5!}\mathfrak{B},\ C=\frac{2^4}{7!}\mathfrak{C},\ D=\frac{2^6}{9!}\mathfrak{D},\ E=\frac{2^8}{11!}\mathfrak{E}, \ldots$$

über. Für $A, B, C, \ldots$ bestehen zwei Sorten von Rekursionsformeln; einmal

$$A=\frac{1}{3!},\ B=\frac{1}{3!}A-\frac{2}{5!},\ C=\frac{1}{3!}B-\frac{1}{5!}A+\frac{3}{7!},$$
$$D=\frac{1}{3!}C-\frac{1}{5!}B+\frac{1}{7!}A-\frac{4}{9!}, \ldots$$

und andererseits auch $5B=2A^2,\ 7C=4AB,\ 9D=4AC+2B^2,$

[1]) Nov. Comment. Petrop. XIV, pro 1769, p. 129—167. (Auf dem Titelblatt steht irrtümlich 1759.)

$11E = 4AD + 4BC, \ldots$ Euler sucht nun die Summe Σ von Reihen zu bestimmen, die die Form haben

$$\alpha A x^2 + \beta B x^4 + \gamma C x^6 + \delta D x^8 + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ gegebene Größen sind. Nimmt man z. B.

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \cdots = 1,$$

so folgt

$$\Sigma = Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + \cdots = \left(\frac{1}{3!}x^2 - \frac{2}{5!}x^4 + \frac{3}{7!}x^6 - \cdots\right)$$
$$: \left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \cdots\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \operatorname{cotg} x,$$

und daraus erhält man $A - B + C - D + \cdots = \frac{1}{e^2 - 1}$.

Ferner gibt dieselbe Formel durch Differentiation das Resultat

$$\frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{4}Bx^4 + \frac{1}{6}Cx^6 + \cdots = \frac{1}{2}\log\frac{x}{\sin x}.$$

Eine andere Quelle für summierbare Reihen liefert die Formel (Bd. III, S. 678 dieser Vorlesungen)

$$2S = 2\int X dx + X + \frac{A}{1}\frac{dX}{dx} - \frac{B}{2^2}\frac{d^3X}{dx^3} + \frac{C}{2^4}\frac{d^5X}{dx^5} - \cdots;$$

hier ist „das summatorische Glied“ X (ibid. S. 657) eine Funktion von x, und S ist $= \Sigma X$, wo die Summe über die Werte $x = 1, 2, 3, \ldots x$ erstreckt wird. Zunächst setzt Euler $X = \frac{1}{x^n}$ bei $n > 1$; dann wird $S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots + \frac{1}{x^n}$ und man erhält

$$S - \frac{1}{2x^n} + \frac{1}{(n-1)x^{n-1}} - O = -\frac{nA}{2x^{n+1}} + \frac{n(n+1)(n+2)B}{2^3 x^{n+3}}$$
$$- \frac{n(n+1)\cdots(n+4)C}{2^5 x^{n+5}} + \frac{n(n+1)\ldots(n+6)D}{2^7 x^{n+7}} - \cdots$$

In dieser Formel ist O die Integrationskonstante, die durch besondere Annahmen bestimmt wird. Für $n = 2$ z. B. erhält man

$$\frac{2!A}{2x^1} - \frac{4!B}{2^3x^3} + \frac{6!C}{2^5x^5} - \cdots = Ox^2 - x + \frac{1}{2} - x^2 S$$
$$= \frac{\pi^2}{6}x^2 - x + \frac{1}{2} - x^2\left(\sum_1^x \frac{1}{x^2}\right).$$

Für $n = 4$ ergibt sich

$$\frac{4!A}{2x} - \frac{6!B}{2^3x^3} + \frac{8!C}{2^5x^5} - \cdots = 3!B\pi^4x^4 - 3 - 2x^2 - 6x^2\left(\sum_1^x \frac{1}{x^4}\right).$$

Setzt man den „terminus summatorius“ $X = \log x$, so ergibt sich

$$\frac{A}{2^1} - \frac{2!\,B}{2^3} + \frac{4!\,C}{2^5} - \frac{6!\,D}{2^7} + \cdots = 1 - \frac{1}{2}\log 2\pi.$$

Dies dürfte zur Charakterisierung der Abhandlung ausreichen. —

Euler hatte bereits in Kap. XIV der „Introductio“ Reihen von der Form

$$\sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \cdots + \sin(a + nb)$$

oder

$$\cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \cdots + \cos(a + nb)$$

summiert. Der Abbé Charles Bossut[1]) löste im Jahre 1769 vierzehn derartige Aufgaben wie $\sum_{\nu=1}^{n}(\cos \nu q)^x$ für $x = 1, 2, 3, 4$; $\sum_{\nu=1}^{n}(\cos \nu q \sin \nu q)^x$ usw. Diese Arbeit würde kaum erwähnenswert sein, wenn sich nicht weitere, wichtigere Untersuchungen an sie angeschlossen hätten, auf die wir bald eingehen werden.

Condorcet veröffentlichte im gleichen Jahre und im gleichen Bande[2]) einen Artikel „sur la nature des suites infinies“. Bedürfte es noch der Bestätigung für unsere, oben (S. 257) ausgesprochene Ansicht, daß Condorcet ein zwar ideenreicher, aber unklarer Kopf gewesen sei, so würde diese Arbeit sie liefern können. Es gibt, wie der Verfasser meint, drei Arten von Reihen, solche wie

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots$$

für $x < 1$, bei denen der Rest unendlich klein wird; die gleichen für $x > 1$, bei denen der Rest unendlich groß wird, und solche wie

$$a + b\cos x + c\cos 2x + d\cos 3x + \cdots,$$

bei denen der Rest endlich bleibt. Im ersten Falle ist die Reihe gleich der Funktion, aus deren Entwicklung sie entsteht, im zweiten Falle nicht[3]). Für diesen zweiten Fall gibt Condorcet als Beispiel, daß $(1 + x + x^2 + \cdots) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots\right)$ nicht durch

$$\frac{1}{1-x} + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}} - 1\right) = 0$$

ersetzbar ist, sondern nur durch

$$\frac{x^{\infty+1}-1}{x-1} + \frac{\frac{1}{x^{\infty+1}}-1}{\frac{1}{x}-1} - 1 = \frac{x^{\infty+1}-x^{-\infty}}{x-1}.$$

---

[1]) Histoire de l'Acad. à Paris 1769, p. 453. [2]) Ibid. p. 83. [3]) Die erste Anschauung trifft sich mit der Eulers, der sie aber auf alle Reihen be-

Der dritte Fall ist der, daß eine gewisse endliche Anzahl von Funktionen durch ihre Entwicklung die Reihe gibt; ihre Summe dividiert durch ihre Anzahl liefert den Wert der Reihe. — Vollkommen unklar sind die Darlegungen über Transformation divergenter Reihen in konvergente. — Des weiteren integriert Condorcet Differentialgleichungen wie $dy\sqrt{1-x^2} = dx$ oder Funktionalgleichungen wie $\varphi(x+q) = \varphi(x)$ in Reihenform durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten, wobei er darauf aufmerksam macht, daß die als Lösung vorausgesetzten Reihen mit den zu bestimmenden Koeffizienten die allgemeinste Form der Lösung haben müssen, wenn man die Aufgabe umfassend behandeln will. Hat eine Differential- oder eine Funktional-Gleichung mehrere, ihrer Form nach verschiedene Lösungen, so müssen alle diese Formen berücksichtigt werden.

Wir knüpfen hieran die Erwähnung, daß Condorcet 1770 einen kurzen Beweis für die oben (S. 216, 258) besprochene Lagrangesche Umkehrungsformel gab[1]). Eine Verifikation des gleichen Satzes stammt von Andr. Joh. Lexell[2]).

Wir kommen nun zu drei Arbeiten von Daniel Bernoulli[3]), die gleichfalls die Prinzipien der Reihentheorie behandeln. Der Titel der ersten lautet: „De summationibus serierum quarundam incongrue veris earumque interpretatione atque usu". Dieses „incongrue verum" ist ein charakteristischer Verlegenheitsbegriff, der sich glücklicherweise nicht adäquat ins Deutsche übersetzen läßt. Reihensummen können „in concreto" falsch, „in abstracto" richtig sein, indem sie durch legitime Schlüsse hergeleitet werden. So kann die Gleichung

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

als falsch aufgefaßt werden, da bei fortlaufender Summierung immer nur 1 oder 0 herauskommt; — aber auch als richtig, da aus der richtigen Gleichung $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ für $x = 1$ jenes Resultat entspringt; genau wie bei der, ohne Determination als richtig angenommenen Gleichung $-\frac{1}{2} = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots$ für $x = \pi$. Setzt man endlich $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = S$, so wird $1 - S = S$ also wieder $S = \frac{1}{2}$. Unterstützt wird der Glaube an die Richtigkeit dieser

---

zieht; die dritte mit der sofort zu besprechenden Daniel Bernoullis (vgl. Band III², S. 693).

1) Miscell. Taurin. V, 1770, p. 7—9. 2) Nov. Comment. Petrop. XVI pro 1771, p. 220. 3) Nov. Comment. Petrop. XVI pro 1771, p. 71; ibid. XVII pro 1772, p. 3; ibid. XVIII pro 1773, p. 3.

Überlegungen dadurch, daß man aus solchen Reihen richtige Resultate herleiten kann, wie die Reihe für $\frac{1}{1+x}$ z. B. nach Integration bei $x=1$ den richtigen Wert von $\log 2$ gibt, und da „ex falso verum numquam legitime deduci potest". Bernoulli leitet dann

$$1-1+0+1-1+0+\cdots=\frac{1}{3},$$

dagegen

$$1+0-1+1+0-1+\cdots=\frac{2}{3}$$

her; aus der Entwicklung

$$\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots$$

bestimmt er

$$1-2+3-4+\cdots=\frac{1}{4},$$

usf.

Im zweiten Aufsatze geht Bernoulli von der Reihe, wie Euler sie summiert hatte (siehe Band III², S. 717)

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots=-\frac{1}{2}$$

aus, kommt durch Integration auf

$$\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots=C-\frac{1}{2}x$$

und bestimmt die Konstante der Leibnizschen Reihe für $x=\frac{\pi}{2}$ als $C=\frac{\pi}{2}$; ($x=0$ liefert einen unrichtigen Wert für C). In ähnlicher Art geht es weiter auf

$$\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\cdots=\frac{1}{6}\pi^2-\frac{1}{2}\pi x+\frac{1}{4}x^2,$$

usw. Die a. a. O. erwähnte Reihe

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\cdots=\frac{\frac{1}{2}\sin x}{1-\cos x}$$

liefert durch Integration

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 3x+\cdots=\frac{1}{2}\,l\,\frac{x}{2(1-\cos x)},$$

usw.

Erst nach der Veröffentlichung dieser Arbeit hatte Daniel Bernoulli die oben (S. 264) besprochene Arbeit Bossuts kennen gelernt, in der die Summen $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos xq$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin xq$, ... abgeleitet waren, und untersucht in der dritten Arbeit, wie man vom Resultate Bossuts

$$\sin q + \sin 2q + \cdots + \sin nq = \frac{\sin q\,[1 + \cos q - \cos nq - \cos(n+1)q]}{1 - \cos 2q}$$

bei der Annahme $n = \infty$ zu dem Eulerschen Resultate

$$\sin q + \sin 2q + \cdots = \frac{\frac{1}{2}\sin q}{1 - \cos q}$$

kommen könne. Er fragt sich: Was ist für $\sin\infty q$, was für $\cos\infty q$, usw. zu setzen, wo doch kein bestimmter Wert mit Notwendigkeit sich darbietet? Und er antwortet: „Gemäß der Natur des Unendlichen muß ein Wert genommen werden durch die Forderung, die gesunden metaphysischen Grundsätzen entspricht, daß alle möglichen Werte in der gleichen Weise berücksichtigt werden: der wahre Wert muß daher gleich der Summe aller möglichen Werte, dividiert durch ihre Anzahl, sein, also $= 0$. Das ist rein metaphysisch, nicht geometrisch." In der Tat geht durch diese Annahme der Bossutsche Wert in den Eulerschen über. Diese Theorie beruht nach Bernoulli auf zwei Voraussetzungen; zuerst, daß die Glieder der unendlichen Reihe in Perioden geteilt werden können, die sich unendlich oft in gleicher Gliederfolge wiederholen; zweitens, daß die Summe der Glieder einer, also jeder Periode gleich 0 ist. Die erste Annahme ist bei den Reihen $\sum(\sin xq)^\lambda$, $\sum(\cos xq)^\lambda$ erfüllt; denn wenn auch φ kein aliquoter Teil eines Vielfachen der Peripherie ist, „so kann doch die Periode als aus unendlich vielen Gliedern bestehend angesehen werden". Die zweite Annahme ist nicht immer erfüllt, z. B. dann nicht, wenn $(\sin\infty q)^2$, $(\cos\infty q)^2$ auftritt. Bernoulli stützt sein Vorgehen auf die Analogie mit der Wahl eines Mittelwertes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

In einer unmittelbar sich anschließenden Abhandlung[1]) behandelt auch Euler, aber von anderem Standpunkte aus die Summen

$$(\sin\varphi)^\lambda + (\sin 2\varphi)^\lambda + \cdots + (\sin n\varphi)^\lambda$$

und

$$(\cos\varphi)^\lambda + (\cos 2\varphi)^\lambda + \cdots + (\cos n\varphi)^\lambda,$$

die er durch Einführung von Exponentialgrößen statt der Winkelfunktionen umformt und für $\lambda = 1, 2, 3, 4$ wirklich herstellt. Dann (§ 9) geht auch er zu $n = \infty$ über. Dabei wahrt er Bernoulli gegenüber seine eigenen Anschauungen über die unendlichen Reihen. „Der berühmte Verfasser der vorstehenden Abhandlung gibt in diesem Falle die Summen sehr geistvoll auf Grund metaphysischer Überlegungen an, bei denen wir uns in der Analysis durchaus beruhigen könnten. Ich habe schon früher, auf allerstärkste Gründe gestützt,

[1]) Nov. Comment. Petrop. XVIII, 1773, p. 24.

darauf hingewiesen, daß in diesen Fällen dem Ausdrucke „Summe" eine andere, der Analysis angemessenere Bedeutung beigelegt werden müsse. Diese neue Bedeutung muß meiner Ansicht nach so festgestellt werden, daß als Summe jeder unendlichen, konvergenten oder divergenten Reihe die analytische Formel angesehen wird, aus deren Entwicklung die Reihe entspringt." Auf die Fragen, ob stets eine und ob auch nur eine solche analytische Formel vorhanden ist, geht Euler nicht ein. Daß übrigens Euler doch nicht so ganz von der Richtigkeit seiner Anschauungen über die Reihen überzeugt war, läßt sich aus einer Stelle einer anderen Arbeit[1]) entnehmen, in der er $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\sqrt{5}-\cdots=0{,}380317\ldots$ berechnet. Da heißt es dann, „daß diese Gleichungen absolut richtig seien, möchte ich weder hartnäckig noch mit Zuversicht behaupten".

Am Schlusse zeigt Euler, wie man aus der bekannten Summe einer Reihe $az+bz^2+cz^3+\cdots+hz^n$ durch Einführung von

$$z=x(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

die Summen

$$ax\cos\varphi+bx^2\cos 2\varphi+\cdots+hx^n\cos n\varphi$$

und

$$ax\sin\varphi+bx^2\sin 2\varphi+\cdots+hx^n\sin n\varphi$$

herleiten kann und wendet dies Verfahren auf $a=b=c=\cdots=h=1$ und auf $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{3}$, $\ldots$, $h=\frac{1}{n}$ an.

Wie Euler, so richtete sich auch Anders Johann Lexell, der gleichfalls Mitglied der Petersburger Akademie war, gegen die Ansichten D. Bernoullis[2]). Er bestreitet, daß von Perioden die Rede sein könne, wenn q zu π in irrationalem Verhältnis stehe, und meint, daß selbst wenn $\cos nq$ für $n=\infty$ gleich Null gesetzt werden dürfe, doch $\cos nq+\cos(n+1)q$ nicht auch gleich Null sei, wie Bernoulli es angenommen hatte. Im letzten Punkte übersieht er aber wohl die Begründung, die Bernoulli seiner Annahme beifügte.

Aus dem gleichen Jahre stammt noch eine Abhandlung Eulers, die erwähnt werden mag[3]). Euler setzt

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p+q\sqrt{k})^n+\frac{1}{2}\left(a-\frac{b}{\sqrt{k}}\right)(p-q\sqrt{k})^n=[n]$$

und stellt dann den Ausdruck $[n+2\nu]$ durch $[n+\nu]$ und $[n]$ her; ferner den von $[2n]$ durch $[n]$ usf. Ist $[n]'$ der Wert, der aus $[n]$ entsteht, wenn a und b durch andere Werte a' und b' ersetzt werden, dann besteht eine quadratische Beziehung zwischen $[n]$ und $[n]'$.

---

[1]) Nov. Comment. Petrop. XVII, 1772, p. 173. [2]) Ibid. XVIII, 1773, p. 37. [3]) Ibid. XVIII, 1773, p. 198.

Der italienische Mathematiker Ant. Mar. Lorgna veröffentlichte[1]) 1775 eine Arbeit, in der er eine große Anzahl von Reihen gewissen Charakters summieren lehrte. Die Reihenglieder bestehen nämlich aus Brüchen, deren Zähler und Nenner Produkte aus Faktoren von der Form $(a + bz)$ sind; dabei sind a und b für alle Glieder der Reihe konstant, während z die Ordnungsziffer des Gliedes bedeutet, so daß also $z = 1, 2, 3, \ldots$ zu setzen ist. Die Abhandlung teilt sich in fünf Kapitel. Das erste beschäftigt sich mit Reihen von der Form

$$\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta+1} + \frac{1}{\delta+2} + \frac{1}{\delta+3} + \cdots;$$

das zweite mit Reihen

$$\sum_{z=1}^{\infty} \frac{\beta^{-z}}{(\delta_1 + z)\cdots(\delta_r + z)},$$

wobei nacheinander $r = 2, 3, 4, \ldots$ gesetzt wird. Als Beispiel diene die Reihe $\frac{1}{3 \cdot 8} + \frac{1}{6 \cdot 12} + \frac{1}{9 \cdot 16} + \cdots + \frac{1}{3z(4z+4)} + \cdots$. Im dritten Kapitel handelt es sich um $\sum\limits_{z=1}^{\infty} \frac{(a+z)\beta^{-z}}{(\delta_1 + z)\cdots(\delta_r + z)}$; im vierten Kapitel tritt noch ein zweiter linearer Faktor $(b + z)$ in den letzten Zähler. Das fünfte Kapitel behandelt die Summen $1 \pm \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \pm \cdots$. Die Berechnung seiner Summen gründet Lorgna darauf, daß er das allgemeine Glied der Reihe als Integral darstellt, die Summe der Integrale bildet und das Resultat nach Möglichkeit vereinfacht. Dieser Methode werden wir noch mehrfach begegnen.

Im gleichen Jahre 1775 gibt Euler die Summation gewisser Reihen von besonderer Gestalt[2]). Es sind dies Reihen

$$1 + \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{3^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{4^m}\left(1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}\right) + \cdots,$$

die er der Abkürzung wegen durch $\int \frac{1}{z^m}\left(\frac{1}{y^n}\right)$ bezeichnet. Ähnlich setzt er auch $\int \frac{1}{z^m} = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \cdots$. Es gelten für sie Relationen von der Form

$$\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y}\right) = 2\int \frac{1}{z^3}; \qquad \int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^2};$$

$$\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{y^3}\right) + \int \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y^2}\right) - \int \frac{1}{z^4}\left(\frac{1}{y}\right) = 2\int \frac{1}{z^2} \cdot \int \frac{1}{z^3} - \int \frac{1}{z^5}; \cdots$$

---

[1]) Specimen de seriebus convergentibus. Verona 1775. — Giornale dei Letterati d'Italia XXIV, p. 79. [2]) Nov. Comment. Petrop. XX. 1775, p. 140.

Zum Teil beweist Euler diese Formeln, zum Teil stützt er sie nur auf unstrenge Induktion.

Da früher die Behandlung der Kettenbrüche mit der der Reihen zusammengenommen wurde (III[2], S. 693), so müssen wir uns, diesem Prinzipe treu, jetzt zu einer Abhandlung von Lagrange wenden[1]), die sich auf die Verwertung der Kettenbrüche bei der Integration von Differentialgleichungen bezieht. Die Verwertung von unendlichen Reihen zu diesem Zwecke ist näherliegend; Lagrange benutzte sie schon früher; sie hat aber den Übelstand, daß auch rationale Lösungen in die Form unendlicher Reihen treten. Das fällt bei Kettenbrüchen fort. Ist eine Differentialgleichung zwischen x und y gegeben, so bestimmt Lagrange zunächst das Anfangsglied ξ der Entwicklung von y nach Potenzen vom x bei kleinen Werten dieser Variablen; dann setzt er $y = \frac{\xi}{1+y_1}$ in die vorgelegte Gleichung ein und erhält dadurch eine Gleichung zwischen x und y_1; diese wird in gleicher Weise behandelt; sie führt auf $y_1 = \frac{\xi_1}{1+y_2}$ usf. Man kommt sonach zu $y = \xi / 1 + \xi_1 / 1 + \xi_2 / 1 + \xi_3 / \cdots$. Die ξ treten in der Form ax^α auf; der Exponent α wird durch eine Methode bestimmt, die als analytische Form des Newtonschen Parallelogramms bezeichnet werden kann; a wird durch Lösung einer i. A. linearen Gleichung gefunden. Als Beispiel behandelt Lagrange die Integration von $my + (1+x)\frac{dy}{dx} = 0$ und kommt zur Kettenbruch-Entwicklung

$$(1+x)^m = 1 + mx\Big/ 1 - \frac{(m-1)x}{1\cdot 2}\Big/ 1 + \frac{(m+1)x}{2\cdot 3}\Big/ 1 - \frac{(m-2)x}{2\cdot 3}\Big/ 1$$
$$+ \frac{(m+2)x}{2\cdot 5}\Big/ 1 - \frac{(m-3)x}{2\cdot 5}\Big/ 1 + \frac{(m+3)x}{2\cdot 7}\Big/ 1 - \cdots.$$

Daraus ergeben sich weiter Kettenbrüche für $l(1+x)$, e^x usw. Das Beispiel $1 = (1+x^2)\frac{dy}{dx}$ führt auf

$$\operatorname{arc\,tang} x = x\Big/ 1 + \frac{x^2}{3}\Big/ 1 + \frac{4\cdot x^2}{3\cdot 5}\Big/ 1 + \frac{9x^2}{5\cdot 7}\Big/ 1 + \frac{16x^2}{7\cdot 9}\Big/ 1 + \cdots.$$

Wenden wir den Blick nach England auf die Veröffentlichungen in den Philosophical Transactions der Londoner Royal Society, so stoßen wir auf drei Arbeiten über Reihen, die der Zeit nach hierher gehören. Ch. Hutton[2]) gibt bequeme, schnell konvergierende Entwicklungen zum Zwecke der Berechnung von π, die sich auf die Formel $\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ stützen und die Zerlegungen

[1]) Mém. de Berlin 1776, p. 236. [2]) Phil. Trans. London 1776, VI, part II, p. 476.

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = 2\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{7} = \cdots$$

benutzen. Diese Art von Zerlegungen wird eingehend untersucht; sie hängt von den Werten $\frac{u \pm v}{1 \mp uv}$ ab.

Fr. Maseres[1]) wandelt die Reihe $a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \cdots$ in die Form $a - \frac{bx}{1+x} - \frac{D'x^2}{(1+x)^2} - \frac{D''x^3}{(1+x^3)} - \frac{D'''x^4}{(1+x^4)} - \cdots$ mit unbekannten $D', D'', D''', \ldots$ um; er will damit, wenn $a > b > c > d > \ldots$; $a - b > b - c > c - d, \ldots$; $a - 2b + c > b - 2c + d > \ldots$ usf., und $x < 1$ ist, eine raschere Konvergenz der Reihe erzielen. Für die $D', D'', D''', \ldots$ findet er die Differenzen erster, zweiter, dritter, ... Ordnung

$$b - c,\ b - 2c + d,\ b - 3c + 3d - e, \cdots.$$

Von dieser Umformung macht er eine Anwendung auf die eben besprochene arc tang-Reihe, sowie auf die Pendel-Schwingungsdauer.

Eine zweite Arbeit[2]) von Fr. Maseres läuft darauf hinaus, daß er für die harmonische Reihe $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots$ als Annäherung den Wert $b[(1-x)^{\frac{-1}{b}} - 1]$ bei sehr großen b benutzt. Für b setzt der Verfasser der Abhandlung 10^{12} ein.

Bossut gibt[3]) ohne theoretische Begründung eine praktische Anweisung für die angenäherte Umkehrung von Reihen. Ein Beispiel wird am besten sein Verfahren erläutern: aus der Gleichung $t = x + n \sin x$ soll x durch eine Reihe

$$x = t + A \sin t + B \sin 2t + C \sin 3t + D \sin 4t + \cdots$$

dargestellt werden. Bossut bricht die Reihe nach den hingeschriebenen 5 Gliedern ab und bildet von der so entstehenden, als angenähert richtig angenommenen Gleichung die 1., 3., 5. und 7. Ableitung; dieselben Ableitungen erhält er aus der vorgelegten Gleichung als

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + n\cos x} = 1 - n\cos x + n^2\cos^2 x - n^3\cos^3 x + n^4\cos^4 x - \cdots,$$

. . . .

wo auch die weiteren Glieder unterdrückt werden. Dann liefert $t = x = 0$ vier lineare Gleichungen, die zur Berechnung von A, B, C, D ausreichen.

In dem gleichen Bande der Histoire de l'Acad. Paris[4]) findet sich eine Abhandlung von Laplace, die sich mit Differenzenrechnung und mit Reihen beschäftigt. Ist u eine Funktion von α, α_1, $\alpha_2 \ldots$, und

---

[1]) Phil. Trans. London 1777, vol. 67, part I, p. 187. [2]) Ibid. 1778, vol. 68, p. 895. [3]) Hist. de l'Acad. Paris 1777, p. 52. [4]) Ibid., p. 99.

wird $u = (u) + \alpha q_{100} + \alpha^2 q_{200} + \cdots + \alpha_1 q_{010} \cdots + \alpha_1 \alpha q_{110} + \cdots$ gesetzt, wo (u) den Wert von u für $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = 0$ angibt, so findet man durch Differentiationen den Wert

$$q_{n n_1 n_2 \ldots} = \frac{1}{n!\, n_1!\, n_2! \ldots} \left(\frac{d^{n+n_1+n_2+\cdots} u}{d\alpha^n d\alpha_1^{n_1} d\alpha_2^{n_2} \ldots} \right).$$

Wenn dann etwa $u = \varphi(\alpha + t,\ \alpha_1 + t_1,\ \alpha_2 + t_2, \ldots)$ genommen wird, so ist offenbar die letzte Klammergröße gleich

$$\left(\frac{d^{n+n_1+n_2+\cdots} u}{dt^n dt_1^{n_1} dt_2^{n_2} \ldots} \right) = \frac{d^{n+n_1+n_2+\cdots} \varphi(t, t_1, \ldots)}{dt^n dt_1^{n_1} dt_2^{n_2} \ldots};$$

man kommt somit auf die Taylorsche Reihenentwicklung.

Nimmt man u als Funktion einer Größe x an, die durch die Differentialgleichung $\frac{dx}{d\alpha} = s \frac{dx}{dt}$ definiert wird, in der s eine beliebige Funktion von x bedeutet, dann kommt man auf ähnliche Art zu der Lagrangeschen Reversionsformel. Nach derselben Methode lassen sich viele andere, zur Differenzenrechnung gehörige Formeln herleiten, die bereits Lagrange aufgestellt[1]) und zum Teil bewiesen hatte.

Das Studium der Lambertschen algebraischen Arbeiten führte Euler zu der Aufgabe, die Lambertsche Reihenentwicklung der Wurzel einer trinomischen Gleichung zu verifizieren[2]).

Es mußte dabei folgendes gezeigt werden: Wenn x eine Wurzel der trinomischen Gleichung $(\alpha - \beta) v \cdot x^{\alpha+\beta} = x^\alpha - x^\beta$ bedeutet, so gilt für jedes n die Gleichung

$$x^n = 1 + nv + \frac{1}{2!} n(n + \alpha + \beta) v^2 + \frac{1}{3!} n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta) v^3$$
$$+ \frac{1}{4!} n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta) v^4 + \cdots.$$

Euler geht bei dem Beweise folgendermaßen vor. Er betrachtet die rechte Seite der zu beweisenden Gleichung als Funktion von n, setzt sie gleich $S(n)$ und zeigt, daß $S(n - \beta) - S(n - \alpha) = (\alpha - \beta) v S(n)$ wird. Diese Funktionalgleichung läßt sich integrieren und führt zu dem Schlußergebnis, daß $S(n) = x^n$ ist.

Für $\alpha = \beta$ geht die trinomische Gleichung über in $\log x = vx$. Man erhält für $\alpha = 1$

$$\frac{x^n - 1}{n} = v + \frac{n+2}{2!} v^2 + \frac{(n+3)^2}{3!} v^3 + \frac{(n+4)^3}{4!} v^4 + \cdots \quad \text{und}$$

$$\frac{x^n}{1 - lx} = 1 + \frac{n+1}{1!} v + \frac{(n+2)^2}{2!} v^2 + \frac{(n+3)^3}{3!} v^3 + \cdots.$$

---

[1]) Mém. Acad. Berlin 1772. [2]) Nov. Comment. Act. Petrop. XX, 1775, pars II, p. 29.

Aus dem Jahre 1779 stammt eine umfangreiche, das Gebiet der Differenzenrechnung nahe berührende Arbeit von Laplace[1]). Ist y_x eine Funktion von x, so heißt $u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \cdots + y_x t^x + \cdots$ die erzeugende Funktion von y_x. Bezeichnen wir die Differenzen $y_{x+1} - y_x = \Delta y_x$; $\Delta y_{x+1} - \Delta y_x = \Delta^2 y_x$; ... und setzen

$$\nabla y_x = a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} \cdots + q y_{x+n},$$
$$s = a + b \cdot \frac{1}{t} + c \cdot \frac{1}{t^2} + \cdots + q \cdot \frac{1}{t^n};$$

dann ist $u t^r s^k \left(\frac{1}{t}\right)^i$ die erzeugende Funktion von $\Delta^i \nabla^k y_{x-r}$. Insbesondere gehört $\nabla^i y_x$ zur erzeugenden Funktion $u s^i$. Wird i negativ, so treten Summen $\sum^i$ statt der Differenzen Δ^i auf; $u\left(1 - \frac{1}{t}\right)^i$ ist die erzeugende Funktion von $\sum^i y_x$. Hieraus folgt, daß $\nabla^i y_x$ durch einfache Entwicklung algebraischer Funktionen gefunden werden kann. Bildet man z. B. $u : t^i = u\left(\left(1 + \frac{1}{t}\right) - 1\right)^i$ und entwickelt die rechte Seite, so entsteht

$$y_{x+i} = y_x + i \Delta y_x + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y_x + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y_x + \cdots.$$

Dadurch, daß der Wert von y_{x+i} auf diese Reihen-Form gebracht ist, hat man die Möglichkeit, für i gebrochene Werte einzuführen; das gibt also die Lösung der Interpolationsaufgabe für y_x. Laplace leitet auf diese Art sowohl bekannte, wie auch neue Formeln her. — In großer Ausführlichkeit werden in den Nummern III bis VIII besonders wichtige Fälle behandelt. In Nummer IX folgt die Transformation von Reihen; ihre Besprechung würde uns zu weit führen. — Auch auf Reihen von zwei Variablen geht Laplace ein. Er nimmt $y_{u,v}$ als Funktion von u und v an und behandelt die „rekurro-rekurrenten" Reihen in ähnlicher Weise, wie er die von einer Variablen behandelt hatte.

Die nächste, der Zeit wie dem Stoffe nach zu erwähnende Arbeit stammt wieder von Euler[2]). Sie beschäftigt sich mit der Reihenentwicklung des Produktes

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots$$
$$= 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots.$$

Hierin haben auf der rechten Seite die Exponenten die Form

$$\frac{1}{2}(3n^2 \pm n);$$

und der zugehörige Koeffizient ist gleich $(-1)^n$. Diese merkwürdige Be-

---

[1]) Hist. de l'Acad. Paris 1779 (1782), p. 207. [2]) Act. Petrop. IV, 1780, pars I, p. 47.

ziehung hatte Euler schon früher in den Nov. Comment. Acad. Petrop. III, 1750—1751, p. 155 induktiv hergeleitet und das Resultat in das Kap. XVI, § 323 der „Introductio in Analysin" aufgenommen. Später hat er es in den Nov. Comment. Acad. Petrop. pro 1754, 1755, p. 75 bis 83 bewiesen. Jetzt, 25 Jahre später, modifiziert er jenen Beweis. Jacobi beschäftigte sich 1840 eingehend mit derartigen Reihen, bei denen die Exponenten eine arithmetische Folge zweiter Ordnung bilden. Er stieß auf solche Entwicklungen in der Theorie der elliptischen Funktionen. Jacobi nimmt dabei[1]) ausdrücklich Bezug auf diese Eulerschen Untersuchungen, und gibt als interessante Ergänzung zu dem Eulerschen Satze noch die folgende Entwicklung der dritten Potenz der rechten Seite unserer letzten Gleichung

$$(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots)^3$$
$$= 1 - 3x + 5x^3 - 7x^6 + 9x^{10} - 11x^{15} + \cdots;$$

hier haben die Exponenten der rechten Seite die Gestalt $\frac{1}{2}(n^2 + n)$; die zugehörigen Koeffizienten sind $(-1)^n(2n + 1)$.

In einer anderen Arbeit des gleichen Jahres[2]) dehnt Euler die Formel

$$S(n) \equiv \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \ldots (4n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$$

auf gebrochene Werte von n aus; es handelt sich also dabei um eine Interpolationsaufgabe. Er findet mit Hilfe der Integrale, die von Legendre als Eulersche Integrale zweiter Gattung bezeichnet worden sind,

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\pi}; \quad S\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{8}{3}; \quad S\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{8 \cdot 16}{3 \cdot 5}; \quad S\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{8 \cdot 16 \cdot 24}{3 \cdot 5 \cdot 7}; \ldots$$

Ebenso wird für gebrochene n, p, q auch

$$\binom{n}{0}\binom{p}{q} + \binom{n}{1}\binom{p}{q+1} + \cdots = \binom{p+n}{q+n}.$$

behandelt. Das behandelte Problem gehört als Interpolationsproblem einer Reihe von Aufgaben an, die den meisten Forschern der damaligen Zeit sehr am Herzen lag.

Von den „Mathematical Memoirs" von J. Landen[3]) haben wir das fünfte „eine neue Methode, um die Summen gewisser Reihen zu erhalten" in unsere Besprechungen zu ziehen. Nach einigen analytischen Vorbereitungen geht Landen so vor: Aus den Entwicklungen von $l(1 + u)$ und $l\left(1 + \frac{1}{u}\right)$ folgert er ohne Konvergenz-Bedenken

$$lu = (u - u^{-1}) - \frac{1}{2}(u^2 - u^{-2}) + \frac{1}{3}(u^3 - u^{-3}) - \cdots;$$

---

[1]) Jacobis Werke VI, p. 281. [2]) Act. Petrop. IV, 1780, pars I, p. 74.
[3]) London 1780.

hierin trägt er $lu = z\sqrt{-1}$ ein und erhält

$$\frac{z}{2} = \frac{\sin z}{1} - \frac{\sin 2z}{2} + \frac{\sin 3z}{3} - \cdots.$$

In diese Formel setzt er zur Herleitung spezieller Resultate

$$z = \frac{\pi}{3},\ z = \frac{\pi}{4},$$

usw. Die Integration der Formel liefert

$$-\frac{z^2}{4} = \frac{\cos z}{1^2} - \frac{\cos 2z}{2^2} + \frac{\cos 3z}{3^2} - \cdots - p'',$$

wo $p'' = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$ ist; dies wird mittels eines Kunstgriffes $= \frac{\pi^2}{12}$ bestimmt. In entsprechender Art leitet Landen die Formeln

$$\frac{\sin\frac{3}{2}z}{1^2\cdot 2^2} - \frac{\sin\frac{5}{2}z}{2^2\cdot 3^2} + \frac{\sin\frac{7}{2}z}{3^2\cdot 4^2} - \cdots = \left(\frac{\pi^2}{6} + 3 - \frac{z^2}{8}\right)\sin\frac{1}{2}z - 2z\cdot\cos\frac{1}{2}z$$

und

$$\frac{\cos\frac{3}{2}z}{1^2\cdot 2^2} + \frac{\cos\frac{5}{2}z}{2^2\cdot 3^2} + \frac{\cos\frac{7}{2}z}{3^2\cdot 4^2} + \cdots = 2(\pi - z)\sin\frac{1}{2}z + \left(\frac{\pi^2}{3} - \pi z + \frac{1}{2}z^2 - 3\right)$$

her. Aus diesem letzten Resultate folgt

$$\frac{\pi^2}{3} - 3 = \frac{1}{1^2\cdot 2^2} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 4^2} + \cdots.$$

Im folgenden Jahre veröffentlichte Ed. Waring[1]) seine „Meditationes analyticae", deren drittes und viertes Buch uns hier interessiert. Waring zeigt zum Teil schon moderne Anschauungen über Konvergenz und Divergenz; er sagt: „streben in $a + b + c + d + e + \cdots$ die Summen $a + b$, $a + b + c$, $a + b + c + d$, ... einer endlichen Größe zu, an die sie näher herankommen als eine beliebig gegebene Differenz, so konvergiert die Reihe". — „Die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

konvergiert für $n > 1$, und für $n < 1$ divergiert die Reihe. Ist für beliebige endliche x und $n = \infty$ das unendlich ferne Glied $a_n < \frac{1}{xn}$, dann und nur dann konvergiert die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$. Wenn für unendlich großes n der Quotient $a_n : a_{n+1}$ kleiner (größer) als 1 ist, so divergiert (konvergiert) die Reihe." Wir stoßen also hier auf das bekannte Konvergenz-Kriterium. In die Reihen

---

[1]) Cantabrigiae 1781.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 - x^7 + \cdots$$

$$\frac{1}{1+x+x^2+x^3} = 1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \cdots$$

setzt Waring zwar $x = 1$ und erhält dabei verschiedene Werte für $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$; aber er setzt bei diesen Herleitungen ausdrücklich hinzu (S. 355): „in Wahrheit kann diesen Reihen keine Summe zugesprochen werden".

Waring ist in erster Linie Algebraiker; das zeigt sich auch hier darin, daß die Untersuchung gern auf das Gebiet der Gleichungen übertritt. So werden die Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ der „infiniten" Gleichung für x von der Gestalt $0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \cdots$ in Zusammenhang mit den Koeffizienten gebracht:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \cdots; \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \cdots + \frac{1}{\beta\gamma} + \cdots$$

und die Reihe liefert in Faktoren aufgelöst

$$a \cdot \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\beta}\right)\left(1 - \frac{x}{\gamma}\right) \cdots = 0,$$

wie das schon in den Eulerschen Untersuchungen benutzt ist. — Im vierten Buche geht Waring ausführlich auf Beziehungen ein, die zwischen dem n^{ten} Reihengliede, der Summe der n ersten Glieder und der Ordnungsziffer n selbst bestehen können; ebenso vergleicht er Reihen, zwischen deren Partialsummen vorgeschriebene Relationen bestehen. Ausgiebigen Gebrauch zur Herstellung summierbarer Reihen macht er von dem Kunstgriff, die Summe zu geben und die Reihen daraus herzustellen. Auf weitere Einzelheiten des umfassenden Werkes hier einzugehen, müssen wir uns versagen; über einige Nachträge zu den „Meditationes algebraicae" werden wir an gehöriger Stelle zu berichten haben.

Aus dem Jahre 1781 sind noch zwei Eulersche Arbeiten zu besprechen. Des besseren Zusammenhanges wegen behandeln wir sie in der umgekehrten Folge ihres Erscheinens.

Die zweite, kleinere Arbeit Eulers[1]) dehnt die S. 274 behandelte Summations-Formel für

$$\left(\frac{n}{0}\right)\left(\frac{p}{q}\right) + \left(\frac{n}{1}\right)\left(\frac{p}{q+1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{p}{q+2}\right) + \cdots = \left(\frac{p+n}{q+n}\right)$$

auf andere Symbole

$$\left[\frac{n}{0}\right]\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{p}{q+1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{p}{q+2}\right] + \cdots = \left[\frac{n+p}{\lambda m+p}\right]$$

[1]) Act. Petrop. IV, 1781, II, p. 76.

aus, wo $\left[\frac{a}{b}\right]$ durch die Gleichung

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^\lambda)^n = 1 + \left[\frac{n}{1}\right]x + \left[\frac{n}{2}\right]x^2 + \left[\frac{n}{3}\right]x^3 + \cdots$$

erklärt wird.

Die erste, größere Arbeit[1]) beschäftigt sich mit Umwandlungen der harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x} = C + lx + \frac{1}{2x} - \frac{\mathfrak{A}}{2x^2} + \frac{\mathfrak{B}}{4x^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6x^6} + \frac{\mathfrak{D}}{8x^8} - \cdots,$$

in der, verschieden von früherer Bezeichnung (vgl. S. 262),

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{6}, \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{30}, \quad \mathfrak{C} = \frac{1}{42}, \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{30}, \quad \mathfrak{E} = \frac{5}{66}, \ \cdots$$

die Bernoullischen Zahlen sind, und $C = 0{,}5772156649\ldots$ die Konstante bedeutet, die später die Bezeichnung „Eulersche Konstante" erhalten hat. Setzt man

$$\sum \frac{1}{n^2} = \alpha, \quad \sum \frac{1}{n^3} = \beta, \quad \sum \frac{1}{n^4} = \gamma, \ldots$$

wobei die Summen von $n = 1$ bis $n = \infty$ erstreckt werden, dann findet Euler

$$1 - C = \frac{1}{2}(\alpha - 1) + \frac{1}{3}(\beta - 1) + \frac{1}{4}(\gamma - 1) + \cdots;$$

ferner

$$C = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{3}\beta + \frac{1}{4}\gamma - \frac{1}{5}\delta + \cdots;$$

ebenso

$$l2 - C = \frac{1}{3\cdot 2^2}\beta + \frac{1}{5\cdot 2^4}\delta + \frac{1}{7\cdot 2^6}\zeta + \cdots$$

und andere Beziehungen mehr. Euler gewinnt dabei den Anschluß an bereits früher von ihm angestellte Untersuchungen (Band III[2], S. 657) und liefert hier den Beweis für die, dort in der Gestalt

$$S = -\int X dx + \alpha X + \beta \frac{dX}{dx} + \gamma \frac{d^2X}{dx^2} + \cdots$$

gegebene Summenformel. Dabei ist X eine Funktion von x etwa $X(x)$ und $S(x) = X(x) + X(x+1) + X(x+2) + \cdots$ oder, wie Euler kürzer schreibt, $S = X + X' + X'' + X''' + \cdots$.

Ein ähnliches Problem beschäftigt Euler auch weiterhin.[2]) Er fragt nach der Summe $S = X - X' + X'' - X''' + \cdots$. Ist S' dieselbe Summe, in der nur x durch $(x+1)$ ersetzt wird, so hat man $S + S' = X$ und erkennt daraus, daß in erster Näherung $S = \frac{1}{2}X$ und, bei noch unbekannten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, weiter

---

[1]) Act. Petrop. IV, 1781, II, p. 45. [2]) Nov. Act. Acad. Petrop. II pro 1784, p. 46.

$$S = \frac{1}{2}X + \alpha\frac{dX}{dx} + \beta\frac{d^2X}{dx^2} + \gamma\frac{d^3X}{dx^3} + \cdots$$

wird. Die $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ kann man nun mit Hilfe von Reduktionsformeln bestimmen, und zwar am bequemsten durch die Einführung einer Funktion

$$s = \frac{1}{2} + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta t^4 + \cdots.$$

Euler bezeichnet $s - \frac{1}{2} = v$ und findet als Bestimmungs-Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = v^2 - \frac{1}{4}; \qquad v = \frac{1}{1+e^t} - \frac{1}{2}.$$

Hieraus ergeben sich dann die gesuchten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, die in enger Beziehung zu den Bernoullischen Zahlen stehen. Ist

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{1}{3}, \quad d = \frac{3}{5}, \quad e = \frac{5}{3}, \quad f = \frac{691}{105}, \cdots$$

(Introductio in analysin infin. Cap. X, § 168), dann wird

$$S = \frac{1}{2}X - \frac{2^2-1}{3!}\frac{a}{2}\frac{dX}{dx} + \frac{2^4-1}{5!}\frac{b}{2}\frac{d^3X}{dx^3} - \frac{2^6-1}{7!}\frac{c}{2}\frac{d^5X}{dx^5} + \frac{2^8-1}{9!}\frac{d}{2}\frac{d^7X}{dx^7} - \cdots.$$

Für diese Entwicklung gibt Euler dann noch einen zweiten Beweis. Ferner behandelt er die Summationen der beiden Reihen

$$n^x X - n^{x+1}X' + n^{x+2}X'' - n^{x+3}X''' + \cdots$$

und

$$x!X - (x+1)!X' + (x+2)!X'' - (x+3)!X''' + \cdots.$$

Die Arbeit wurde erst nach dem am 7. September 1783 (A. St.) zu Petersburg erfolgten Tode Eulers publiziert. Bei seinen Lebzeiten waren von ihm allein 473 Abhandlungen erschienen; über 200 andere hinterließ er. Bis zum Jahre 1830, also beinahe noch 50 Jahre, nachdem Euler die Augen geschlossen hatte, dauerten die Publikationen ihres größten Mitgliedes seitens der Petersburger Akademie fort.

Wir kehren zum Jahre 1782 zurück und erwähnen einen Aufsatz von Nic. Fuß[1]), der sich auf folgendes stützt. Es seien $A, B, C, D, \ldots X, \ldots$ beliebige Größen $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \ldots$ die Reihe ihrer ersten Differenzen, $\Delta^2 A, \Delta^2 B, \Delta^2 C, \ldots$ die ihrer zweiten Differenzen usf.; dann hat man bekanntlich

$$X = A + \Delta A \cdot x + \Delta^2 A \cdot \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + \Delta^3 A \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots.$$

Daraus folgt

[1]) Act. Petrop. 1782, II, p. 96.

$$\lim_{x=0} \frac{X-A}{x} = \Delta A - \frac{1}{2}\Delta^2 A + \frac{1}{3}\Delta^3 A - \frac{1}{4}\Delta^4 A + \cdots;$$

die linke Seite tritt dabei unter der Form $0:0$ auf. Gelingt es, den wahren Wert dieses Quotienten zu bestimmen, so liefert derselbe die Summe der rechtsstehenden Reihe. So findet Fuß

$$l(1+x) = l1 + l\frac{2}{1}\cdot x + l\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{x(x-1)}{1\cdot 2} + l\frac{2^3\cdot 4}{1\cdot 3}\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

aus der Annahme $X = l(1+x)$; und

$$2\varphi\cos\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos 2\varphi + \frac{1}{2}2^2\sin^2\varphi\sin 3\varphi - \frac{1}{3}2^3\sin^3\varphi\cos 4\varphi$$
$$- \frac{1}{4}2^4\sin^4\varphi\sin 5\varphi + \frac{1}{5}2^5\sin^5\varphi\cos 6\varphi + \cdots$$

aus der Annahme $X = \sin(1+2x)\varphi$.

Von dem schon erwähnten Italiener Lorgna stammt eine umfangreiche Untersuchung über Reihensummen.[1]) Wir können sie aber gleichwohl kurz behandeln, da ihr Inhalt im wesentlichen mit dem der früheren Arbeit übereinstimmt. In zehn Kapiteln werden verschiedene Arten von summierbaren Reihen besprochen. Als neu heben wir hervor aus Kap. VI die Reihe $1!+2!+3!+4!+\cdots+x!$, allgemeiner

$$(a+b)! + (a+2b)! + (a+3b)! + \cdots$$

und

$$(m+1)(m+2)^2 + (m+1)(m+2)(m+3)^2$$
$$+ (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+4)^2 + \cdots;$$

aus Kap. VII

$$l2 + (l3 - 2l2) + (l4 - 3\cdot l3 + 3l2) + (l5 - 4l4 + 6l3 - 4l2) + \cdots;$$

aus Kap. VIII

$$\frac{p}{a}\cdot\frac{2(ap+b)}{(a+b)(1+p)}\cdot\frac{3(ap+bp+b)}{(a+2b)(1+2p)}\cdot\frac{4(ap+2bp+b)}{(a+3b)(1+3p)}\cdots$$
$$+\frac{p}{2a}\cdot\frac{2(ap+2b)}{(a+b)(2+p)}\cdot\frac{3(ap+bp+2b)}{(a+2b)(2+2p)}\cdot\frac{4(ap+2bp+2b)}{(a+3b)(2+3p)}\cdots + \cdots;$$

aus Kap. IX die Doppelreihe

$$\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1^2}{3^3} - \frac{1^3}{4^4} + \cdots\right) + \left(1 - \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{3^3} - \frac{2^3}{4^4} + \cdots\right)$$
$$+ \left(1 - \frac{3}{2^2} + \frac{3^2}{3^3} - \frac{3^3}{4^4} + \cdots\right) + \cdots.$$

Die benutzten Summationsmethoden sind die gleichen wie in dem

---

[1]) Memor. mat. fis. Soc. Ital. I, 1782, p. 268.

oben (S. 269) besprochenen Aufsatze des Verfassers. — Wir wollen gleich hier eine dritte Abhandlung Lorgnas erwähnen, trotzdem sie erst 1784, also zwei Jahre später erschienen ist.[1] In ihr handelt es sich um die Summierung der Reihe

$$\frac{1}{aK \pm b} \mp \frac{1}{aK^2 \pm b} + \frac{1}{aK^3 \pm b} \mp \cdots,$$

wo K die Basis der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet. Sie wird durch die Substitution

$$\sin m\pi = \frac{1}{2\omega}(K^{m\pi\omega} - K^{-m\pi\omega})/(\omega = \sqrt{-1})$$

geleistet. Dadurch wird

$$K^x + 1 = 2\omega K^x \sin\frac{x}{\omega} : (K^x - 1)$$

und

$$K^x - 1 = 2\omega K^x \sin\frac{x}{\omega} : (K^x + 1),$$

so daß in jedem Reihengliede die Summe aus dem Nenner in den Zähler geschafft werden kann. — Weiter beschäftigt sich Lorgna mit anderen Reihen und erhält z. B. die Resultate

$$\frac{11}{6 \cdot 12} = \frac{1}{-5} + \frac{1}{4 \cdot 4 - 9} + \frac{1}{4 \cdot 9 - 9} + \frac{1}{4 \cdot 16 - 9} + \cdots;$$

$$\frac{1}{6} l2 - \frac{5}{5 \cdot 12} = \frac{1}{-5} - \frac{1}{4 \cdot 4 - 9} + \frac{1}{4 \cdot 9 - 9} - \frac{1}{4 \cdot 16 - 9} + \cdots.$$

Wir gehen nunmehr zu einer, ganz anderen Anschauungskreisen angehörigen Arbeit von Laplace über.[2] Bei seinen eingehenden Forschungen im Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihrer praktischen Verwertung bei national-ökonomische Fragen war Laplace häufig auf Formeln gestoßen, die zur Berechnung ganz ungeeignet sich zeigten, weil sehr große oder sehr viele Zahlen in sie eintraten. Handelt es sich z. B. bei hohem Werte des s um die Berechnung von

$$\frac{2s \cdot (2s - 1) \cdot (2s - 2) \ldots (s + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s},$$

so wird dies selbst bei der Benutzung von Logarithmen sehr mühselig. In diesem Falle hatte Stirling eine bequeme Formel zur angenäherten Berechnung jenes Binomialkoeffizienten aufgestellt; in anderen Fällen war, wie wir oben sahen, D. Bernoulli in ähnlicher Weise vorgegangen (vgl. S. 231). Laplace greift hier die Frage fundamental an und bringt sie zur Lösung. Seine umfangreiche Ab-

[1]) Memor. mat. fis. Soc. Ital. II, 1784, p. 210. [2]) Hist. Acad. Paris, 1782, p. 1, und 1783, p. 428 (vgl. S. 231).

handlung ist aber in derartigem Maße von Formeln durchsetzt, daß eine Darlegung der Entwicklung hier nicht möglich erscheint. Wir müssen uns auf die Angabe des Zieles der Untersuchung und auf die Mitteilung einiger Resultate beschränken. Das Problem, dem Laplace seinen Scharfsinn widmet, zerfällt in zwei Teile. Zunächst wird eine Integration durch unendliche Reihen für solche Integranden hergeleitet, die in hohe Potenzen erhobene Faktoren enthalten. Die hierfür gegebenen Reihen konvergieren äußerst schnell. An zweiter Stelle werden Funktionen, von welchen man angenäherte Werte sucht, auf die angegebene Integralgestalt gebracht, deren Entwicklung soeben besprochen wurde. Diese Behandlung umfaßt alle Funktionen, die durch gewöhnliche oder partielle Differenzen- oder Differentialgleichungen definiert werden.

Bei solchen Untersuchungen treten Integrale von der Gestalt

$$\int_0^\infty t^{2x} e^{-t^{\mu+1}} dt$$

auf. Laplace bestimmt außer dem schon vor ihm bekannten Integrale

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

noch andere wie z. B.

$$\int_0^\infty t^2 e^{-t^4} dt = \pi^{\frac{3}{4}} : \left(4\sqrt{2\sqrt{2}\cdot \pi^{\mathrm{I}}}\right),$$

wo π^{I} die Stirlingsche Konstante 1,311028777 ... bedeutet, die zur Länge der elastischen Kurve in enger Beziehung steht. Der dritte Abschnitt der Laplaceschen Abhandlung liefert Anwendungen der erhaltenen Resultate auf schwierigere Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Ein Aufsatz, der vielfach an die Arbeiten von Lorgna erinnert, stammt von dem Engländer Samuel Vince.[1]) Im ersten Teile geht der Verfasser von der Bemerkung aus, daß die Integration von $\frac{1}{1+x^r}$ durch Logarithmen und Kreisfunktionen ausführbar sei, und daß andererseits die Reihenentwicklung des Bruches mit nachfolgender, von 0 bis 1 erstreckter Integration die Summe

$$1 - \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} - \frac{1}{r+3} + \cdots$$

ergebe. Daher kann die Summe S dieser Reihe durch die angegebenen Transzendenten ausgedrückt werden; S wird als bekannt angesehen.

[1]) Phil. Transact. London, for 1782, p. 389.

Auf diese Reihe werden andere dadurch reduziert, daß Glieder zerlegt oder in eins zusammengezogen werden. So findet Vince

$$\frac{a}{1\cdot(r+1)}-\frac{a+b}{(r+1)(2r+1)}+\frac{a+2b}{(2r+1)(3r+1)}-\frac{a+3b}{(3r+1)(4r+1)}+\cdots$$
$$=\frac{1}{r^2}\{[2ra-(r+2)b]S-ra+(r+1)b\}.$$

Bei der Annahme $2ra=(r+2)b$ fällt S weg. So erhält man z. B.

$$\frac{5}{3\cdot 7}-\frac{9}{7\cdot 11}+\frac{13}{11\cdot 15}-\cdots=\frac{1}{6}.$$

Andere, in ähnlicher Art summierte Reihen sind

$$\frac{m}{1(r+1)(2r+1)}+\frac{m+n}{(2r+1)(3r+1)(4r+1)}+\frac{m+2n}{(4r+1)(5r+1)(6r+1)}+\cdots;$$

ferner

$$\frac{m}{(r+1)(2r+1)(3r+1)}+\frac{m+n}{(3r+1)(4r+1)(5r+1)}$$
$$+\frac{m+2n}{(5r+1)(6r+1)(7r+1)}+\cdots;$$
$$\frac{m}{(2r+1)(3r+1)(4r+1)}+\frac{m+n}{(4r+1)(5r+1)(6r+1)}$$
$$+\frac{m+2n}{(6r+1)(7r+1)(8r+1)}+\cdots.$$

Dann folgen solche, deren Nenner vier derartige Faktoren enthält usw. Durch Spezialisierung kann man auch mitunter das transzendente S aus den Formeln entfernen. Man findet u. a.

$$\frac{1}{1\cdot(2r+1)}+\frac{1}{(2r+1)(4r+1)}+\frac{1}{(4r+1)(6r+1)}+\cdots=\frac{1}{2r}.$$

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Summierung von Reihen, die die Form haben

$$\frac{p}{n(n+m)\ldots(n+rm)}+\frac{q}{(n+m)(n+2m)\ldots(n+[r+1]m)}$$
$$+\frac{r}{(n+2m)(n+3m)\ldots(n+[r+2]m)}+\cdots;$$

in der $p, q, r, \ldots$ eine arithmetische Reihe beliebiger Ordnung bilden Von den erlangten Resultaten führen wir an

$$\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{6}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{10}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{15}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+\cdots=\frac{11}{36};$$
$$\frac{1\cdot2}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\frac{2\cdot3}{3\cdot5\cdot7\cdot9}+\frac{3\cdot4}{5\cdot7\cdot9\cdot11}+\frac{4\cdot5}{7\cdot9\cdot11\cdot13}+\cdots=\frac{1}{24};$$
$$\frac{1^2}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\frac{3^2}{4\cdot7\cdot10\cdot13}+\frac{5^2}{7\cdot10\cdot13\cdot16}+\frac{7^2}{10\cdot13\cdot16\cdot19}+\cdots=\frac{37}{2268}.$$

Im dritten Teile geht Vince von der Bemerkung aus, daß in einer unendlichen Reihe, deren Glieder nach Null konvergieren und abwechselnde Vorzeichen haben, aufeinander folgende Glieder in eins zusammengefaßt werden dürfen, wie bei

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{6\cdot 7}-\cdots;$$

daß dies aber bei Reihen, deren Glieder nach einer endlichen Größe $\neq 0$ konvergieren, nicht erlaubt sei; daß also nicht

$$\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+\cdots=-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{6\cdot 7}-\cdots$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots.$$

Es müssen also bei solcher Zusammenfassung noch Ergänzungsglieder beigefügt werden. Das erklärt sich (an den obigen Beispielen) so: Die Reihe $-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{6\cdot 7}-\cdots$ „hört im Unendlichen auf", da ihre Glieder $0, 0, \cdots$ werden; die Reihe $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}-\cdots$ „geht im Unendlichen noch fort", da sie die Gestalt $1-1+1-1\cdots$ annimmt. Die Wahrung der Gleichheit fordert also, daß man zum Ausdrucke $-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}-\cdots$ noch $1-1+1-1+\cdots$ hinzufüge. Und das hat „bekanntlich" den Wert $\frac{1}{2}$. Genau aus den gleichen Gründen wird bei $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots$ das Ergänzungsglied

$$-1+1-1+1-\cdots=-\frac{1}{2}$$

sein. Es ist interessant zu sehen, welche wilden Schößlinge die Lehre von den divergenten Reihen treibt, und wieviel Scharfsinn auf das Dogma von der Summe solcher Reihen aufgewendet wurde.

In dem Eulerschen Werke, dessen erster Teil 1783, in des Verfassers Todesjahr, dessen zweiter 1785 zu Petersburg erschien und den Titel „Opuscula analytica" trägt, finden wir Reihen-Untersuchungen. Gleich die erste Abhandlung (p. 3) des ersten Bandes gehört hierher. Das in ihr behandelte Problem ist etwas unbestimmt gedacht und ausgedrückt: Eine Reihe von Zahlen $A, B, C, D, E, F, \cdots$ ist gegeben, und eine andere $a, b, c, d, e, f, g, \cdots$ soll gefunden werden, so daß $ab=A$; $bc=B$; $cd=C$; $de=D$; $ef=E$; $fg=G$; $\cdots$ wird. Offenbar hängt alles von der Bestimmung des a ab, und dies a bleibt ganz willkürlich. Euler sucht nun, ohne es ausdrücklich anzugeben,

einen solchen Wert des a, für den die Reihe $a, b, c, d, \cdots$ möglichst einfach sich gestaltet. Er findet für diese, auch so noch unbestimmte Aufgabe, da der Begriff der „Einfachheit" unbestimmt ist,

$$a^2 = A\,\frac{A \cdot C}{B \cdot B}\,\frac{C \cdot E}{D \cdot D}\,\frac{E \cdot G}{F \cdot F} \cdots$$

und stellt daraus bei besonderen Annahmen über $A, B, C, \cdots$ das a^2 durch Integrale dar. Andererseits entwickelt er a^2 in einen Kettenbruch und erhält durch Gleichsetzung beider Lösungen merkwürdige Beziehungen, von denen wir wenigstens eine anführen wollen, nämlich

$$\frac{\pi}{2} = 1 + 2/3 + 1 \cdot 3/4 + 3 \cdot 5/4 + 5 \cdot 7/4 + 7 \cdot 9/4 + \cdots.$$

Die zweite Abhandlung dieses Bandes führt Eulers frühe Untersuchungen (S. 260) über die Potenzerhebung von $(1 + x + x^2)^n$, insbesondere über den Koeffizienten von x^n in diesem entwickelten Polynome weiter, in der ausgesprochenen Absicht, verschiedene analytische Kunstgriffe darzulegen, und andererseits zu zeigen, wie vorsichtig man mit Induktionsschlüssen sein müsse.

Der vierte Aufsatz (p. 85) beschäftigt sich mit Kettenbrüchen und steht in gewissem Zusammenhange mit dem zweiten Teile des ersten Aufsatzes. Mit Hilfe eigentümlicher Relationen werden Gleichungen zwischen gewissen Kettenbrüchen hergestellt, aus denen durch Spezialisierung folgendes Resultat hervorgeht. Setzt man

$$p = m + n/(m+1) + (n+1)/(m+2) + (n+2)/(m+3) + \cdots,$$

so wird

$$(n-1) : p = 1 + (n-m-2)/(m+2) + (n-m-3)/(m+3) + \cdots.$$

Daraus folgt der Wert von p für $n = m+2,\ m+3,\ m+4, \cdots$. Auch für $n = m+1$ gelingt, freilich auf andere Weise, die Bestimmung. Setzt man in diesem Falle $p = \frac{1}{\omega} - 1$, so wird

$$\omega = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \cdots$$
$$= \frac{1}{e}\int_0^1 e^z z^m\,dz.$$

Im sechsten Aufsatze (p. 157) wird die Aufgabe behandelt, die Koeffizienten der Reihe

$$y = Ax + Bx(x^2 - a^2) + Cx(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)$$
$$+ Dx(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2) + \cdots$$

so zu bestimmen, daß y für $x = a, b, c, d, \cdots$ die Werte $p, q, r, s, \cdots$ annimmt. Für $a, b, c, d, \cdots$ werden dann irgendwelche Kreisbögen

(beim Kreis-Radius 1) und für $p, q, r, s, \cdots$ ihre Sinus eingetragen; dabei wird allgemein $y = \sin x$. Das liefert

$$1 = \frac{p}{a}\left(1 + \frac{a^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)} + \cdots\right)$$
$$- \frac{a^2 q}{b(b^2 - a^2)}\left(1 + \frac{b^2}{c^2 - b^2} + \frac{b^2 c^2}{(c^2 - b^2)(d^2 - b^2)} + \cdots\right) + \cdots$$

und führt durch Spezialisierung auf interessante Formeln.

Auch der zweite Band der Opuscula liefert Bemerkenswertes. Im siebenten Aufsatze (p. 102) wird die Zerlegung transzendenter Brüche in unendliche Reihen geliefert. Ist $\frac{P}{Q}$ dieser Bruch, dessen Nenner eine transzendente Funktion von z ist; ist a eine Wurzel des gleich Null gesetzten Nenners, so wird der Zähler α des Gliedes $\frac{\alpha}{z - a}$, das in $\frac{P}{Q}$ als Partialbruch eingeht, durch

$$\alpha = \frac{P dz + (z - a) dP}{dQ}$$

gegeben. Diese Bestimmung der Zähler wird auf $\frac{1}{\sin z}$, auf

$$\frac{z}{\sin z}, \quad \frac{z^2}{\sin z}, \quad \frac{z^3}{\sin z}, \quad \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \frac{1}{\cos \xi - \cos z}, \quad \cdots, \quad \frac{1}{\sin z^2}, \quad \frac{1}{\sin z^3} \quad \text{usw.}$$

angewendet.

Die nächste Abhandlung beschäftigt sich mit der Umwandlung von Reihen in Kettenbrüche (p. 138) in der Gestalt

$$\beta/b + \gamma/c + \delta/d + \cdots = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} - \frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}} - \frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{E}} + \cdots.$$

So wird aus der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = l2$ hergeleitet

$$1 : l2 = 1 + 1^2/1 + 2^2/1 + 3^2/1 + \cdots,$$

und aus $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$ folgt die Brounckersche Entwicklung $4 : \pi = 1 + 1^2/2 + 3^2/2 + 5^2/2 + \cdots$. Hier mag gleich bemerkt werden, daß Euler auch[1]) die umgekehrte Aufgabe löste: den Brounckerschen Kettenbruch in die Leibnizsche Formel umzuwandeln. Ferner folgt für $s = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} - \cdots$ der reziproke Wert

$$\frac{1}{s} = \alpha + \alpha/(\beta - 1) + \beta/(\gamma - 1) + \gamma/(\delta - 1) + \cdots;$$

und aus $s = \frac{x}{\alpha} - \frac{x^2}{\alpha\beta} + \frac{x^3}{\alpha\beta\gamma} - \cdots$ ergibt sich allgemeiner

---

[1]) Nov. Act. Petrop. II, 1784, p. 38.

$$\frac{x}{s} = \alpha + \alpha x/(\beta - x) + \beta x/(\gamma - x) + \gamma x/(\delta - x) + \cdots$$

und dgl. mehr.

Das gleiche Thema wird in einer späteren Abhandlung (p. 217) fortgesetzt. Euler erledigt dabei den Fall, der den früheren Methoden nicht zugänglich war, daß alle Teilzähler gleich 1 sind, während die Teilnenner eine arithmetische Reihe bilden. Die Lösung wird durch die Integration einer Differentialgleichung vermittelt.

In der zehnten dieser Arbeiten (p. 240) handelt es sich, ohne daß erwähnenswerte Resultate zutage gefördert werden, um die Summe der Reihe

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} + \cdots.$$

Die elfte Arbeit des zweiten Bandes (p. 257) gibt eine neue Ableitung der Summen $1 \mp \frac{1}{2^{2k}} + \frac{1}{3^{2k}} \mp \frac{1}{4^{2k}} + \frac{1}{5^{2k}} \mp \cdots$, die sich auf die Entwicklung der beiden Formeln

$$\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} = 1 + \frac{2}{n^2 - 1} - \frac{2}{4n^2 - 1} + \frac{2}{9n^2 - 1} - \cdots$$

und

$$\frac{\pi}{n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}} = 1 - \frac{2}{n^2 - 1} - \frac{2}{4n^2 - 1} - \frac{2}{9n^2 - 1} - \cdots$$

stützt.

Nach der Besprechung der auf Reihen bezüglichen Arbeiten in Eulers Sammelwerke „Opuscula analytica“ gehen wir zu einem Aufsatze von E. Waring über.[1]) Waring betrachtet hauptsächlich Reihen, deren allgemeines Glied eine rationale Funktion des Stellenzeigers oder, wie sein Ausdruck lautet, der Entfernung vom Anfangsgliede ist. Er geht davon aus, eine gegebene Summe $A(x)$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende Reihe sich entwickelt zu denken.

Setzt man den Nenner von $A(x)$ gleich Null, so liefert die, ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel dieser Gleichung die obere Grenze für die Konvergenz der Reihe. Das ist also eine bereits vollkommen moderne Auffassung; bemerkenswert ist, daß hier bei einer komplexen Wurzel $a + b\sqrt{-1}$ statt des absoluten Betrages $\sqrt{a^2 + b^2}$ die kleinere der beiden Größen $|a - b|$, $|a + b|$ genommen wird. — Hat das allgemeine Glied die Form $\frac{az^m + bz^{m-1} + \cdots}{(z+e)(z+e+1)\cdots(z+e+n-1)}$ mit $m \leq n - 2$, so kann es in ein Aggregat

$$\frac{\gamma}{(z+e)(z+e+1)} + \frac{\delta}{(z+e)\cdots(z+e+2)} + \frac{\varepsilon}{(z+e)\cdots(z+e+3)} + \cdots$$

---

[1]) Phil. Transact. R. Soc. London 74 (1784), p. 385.

umgewandelt werden, und als Reihensumme ergibt sich daher

$$\frac{\gamma}{z+e} + \frac{\delta}{2(z+e)(z+e+1)} + \frac{\varepsilon}{3(z+e)\cdots(z+e+2)} + \cdots.$$

In ähnlicher Weise werden Reihen behandelt, deren Glieder mit Nennern der verwickelteren Form

$$(z+e)\cdots(z+e+n-1)\cdot(z+f)\cdots(z+f+n-1)\cdot(z+g)\cdots (z+g+n-1)\cdots$$

behaftet sind. Die Bestimmung der Reihensumme kann auch mit Hilfe der Methode der unbestimmten Koeffizienten geliefert werden, da durch die eben besprochene Überlegung die Form der Summe bekannt ist; zum allgemeinen Gliede $\frac{az^m + bz^{m-1} + \cdots}{(z+e)(z+e+1)\cdots(z+e+n-1)}$ z. B. gehört nämlich eine Summe $\frac{\alpha z^\mu + \beta z^{\mu-1} + \cdots}{(z+e)(z+e+1)\cdots(z+e+n-2)}$. — Waring behandelt dann auch den Fall, daß zum angegebenen allgemeinen Gliede ein Exponentialfaktor g^z hinzutritt. — Des weiteren bespricht er das folgende Verfahren zur Herstellung summierbarer Reihen: Ist $u_0, u_1, u_2, \cdots$ eine unendliche Reihe von, nach der Null als Grenze konvergierenden Zahlen, so hat die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $(\alpha u_z + \beta u_{z+a} + \gamma u_{z+b} + \cdots)$, falls $\alpha + \beta + \gamma + \cdots = 0$ ist, eine leicht angebbare Summe. — Ferner bildet Waring aus einer Reihe mit bekannter Summe $t = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ durch Multiplikation mit x^r und Differentiation

$$u = x\frac{d(tx^r)}{dx} = ra_0 x^r + (r+1)a_1 x^{r+1} + (r+2)a_1 x^{r+2} + \cdots;$$

$$v = x\frac{d(ux^{s-r})}{dx} = rsa_0 x^s + (r+1)(s+1)a_1 x^{s+1} + \cdots$$

usf. — Wie man sieht, geht Warings Absicht darauf hinaus, Regeln zu bilden, die zur Herstellung summierbarer Reihen führen. — Den Schluß des Aufsatzes bilden Prioritätsreklamationen gegenüber Euler und Lagrange hinsichtlich algebraischer Entdeckungen. So nimmt Waring die Behandlung der Wurzeln einer auflösbaren Gleichung in der Gestalt $y = a\sqrt[n]{p} + b\sqrt[n]{p^2} + c\sqrt[n]{p^3} + \cdots$ gegen Euler für sich in Anspruch; Bestimmungen der Anzahl komplexer Wurzelpaare einer Gleichung gegen Lagrange. Für die damalige Zeit, die noch nicht im Zeichen des Verkehrs stand, sind derartige Fälle durchaus nicht überraschend; Waring behandelt sie auch demgemäß: „er habe an Euler eine Arbeit geschickt; ob der sie je empfangen habe, könne er nicht sagen“.

Die zeitliche Folge leitet uns nunmehr zu einem Aufsatze von Carlo Gianella über[1]). In vier Paragraphen werden Fragen besprochen, die sich auf die Theorie der Reihen beziehen. Im ersten Paragraphen wird $Z = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots$ zur n^{ten} Potenz erhoben. Dabei findet sich die Relation, deren Richtigkeit evident ist,

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nxZ}{1!} + \frac{n^2x^2Z^2}{2!} + \frac{n^3x^3Z^3}{3!} + \cdots.$$

Im zweiten Paragraphen wird die Reihe $A + B + C + \cdots = \lg \frac{e}{\sqrt{2\pi}}$ summiert, wo die einzelnen Glieder $A, B, C, \ldots$ durch die Gleichung

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}n^m + mAn^{m-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1}Bn^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2}Cn^{m-3} + \cdots$$

bestimmt sind. Der dritte Paragraph beschäftigt sich mit einem Symbole d, für das $da^n = na^{n-1}$ ist. Dadurch kürzen sich manche Formeln in ihrer Schreibweise wesentlich ab; man erhält z. B.

$$n = 2^{n-1} - d2^{n-2} + \frac{1}{2!}d^2 2^{n-3} - \frac{1}{3!}d^3 2^{n-4} + \cdots;$$

und im vierten Paragraphen wird das gleiche Symbol d für die Transformation und die Iteration von Reihen ausgenützt.

Ein kleiner Streit spielt sich um diese Zeit ab. Euler hatte, unbekümmert um Konvergenz-Notwendigkeiten, die Gleichung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = \lg\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\right)$$

aufgestellt[2]). Greg. Fontana[3]) greift die Ableitung der Gleichung an; Nik. Fuß verteidigt sie[4]). Auch über die Eulersche Behauptung, daß $\frac{1}{\varkappa n+1} + \frac{1}{\varkappa n+2} + \cdots + \frac{1}{(\varkappa+1)n} = \lg\frac{\varkappa+1}{\varkappa}$ für $n = \infty$ werde, herrschen verschiedene Meinungen. G. Fontana erwähnt übrigens den bereits verstorbenen Euler bei seinen Angriffen nirgend. Es ist ein „Verfahren gegen Unbekannt", das er einschlägt. Fuß weist aber nach, daß nur Euler bei den Angriffen gemeint sein kann. Aus der Fußschen Abhandlung heben wir hier gleich noch eine interessante Formel heraus, die in den letzten Paragraphen der Arbeit

---

[1]) Mém. Acad. Turin I, 1784—1785, p. 391. [2]) Comm. Petrop. IX (1737), 1744, p. 188. [3]) Mem. mat. fis. Soc. Ital. II, 1784, p. 133. [4]) Nov. Act. Petrop. VIII, 1790, p. 201

abgeleitet wird; es ist $\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu^2-1}=1-l2$. Ihr Beweis ist ja sehr einfach.

Aus demselben Jahre 1784 stammt von dem eben erwähnten G. Fontana eine zweite Arbeit[1]) über unendliche Reihen, in der er wiederum gelegentlich Eulers Schlüsse angreift. Der Hauptinhalt der Abhandlung liegt in der Benutzung der Integralrechnung für die Summierung von Reihen. Als Beispiel möge folgendes dienen: um $S=1+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots$ zu finden, leitet er $\frac{d^4S}{dx^4}=S$ her und integriert diese Differentialgleichung. Ähnlich behandelt er

$$1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots;\quad \frac{x^3}{3!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^{11}}{11!}+\frac{x^{15}}{15!}+\cdots;$$

$$\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4}+\frac{x^5}{3\cdot4\cdot5}+\cdots;\quad \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{3\cdot4\cdot5}+\frac{x^7}{5\cdot6\cdot7}+\cdots;$$

er kommt auch auf Bossuts Theoreme (vgl. S. 264).

Aus dem im Jahre 1785 erschienenen letzten Bande des Briefwechsels Lamberts interessieren uns hier zwei Stellen[2]), in denen Ludwig Oberreit über eine Reihentransformation berichtet, die er und schon vor ihm Lambert gefunden hatte. Von Oberreit werde erwähnt, daß er 1734 zu Lindau geboren wurde und 1803 zu Dresden als Finanzbeamter starb. Die erwähnte Transformation von

$$y=ax^m-bx^{m+n}+cx^{m+2n}+\cdots$$

geht so vor sich, daß die Gleichung zunächst mit $a+bx^n$ multipliziert wird. Dadurch fällt das Glied mit x^{m+n} fort, und man hat

$$(a+bx^n)y-a^2x^m=a'x^{m+2n}-b'x^{m+3n}+c'x^{m+4n}-\cdots;$$

durch Multiplikation mit $(a'+b'x^n)$ wird das Glied mit x^{m+3n} weggeschafft usw. Dieses Vorgehen liefert

$$y=\frac{a^2x^m}{a+bx^n}+\frac{a'^2x^{m+2n}}{(a+bx^n)(a'+b'x^n)}+\frac{a''^2x^{m+4n}}{(a+bx^n)(a'+b'x^n)(a''+b''x^n)}+\cdots.$$

Wendet man diese Transformation auf die Reihen für die Logarithmen, für die Quadrat- und die Kubikwurzeln an, so erhält man sehr schnell konvergierende Entwicklungen.

Im Jahre 1786 veröffentlicht A. M. Lorgna wieder eine Reihenuntersuchung[3]). Er summiert

[1]) Mem. mat. fis. Soc. Ital. II, 1784, p. 886. [2]) Lamberts gelehrter deutscher Briefwechsel, herausgeg. von Joh Bernoulli, Band V (1785), p. 304 und p. 354. [3]) Mém. Acad. sci. Turin III, 1786—1787.

$$\frac{1}{\sin(p+q)\varphi} \pm \frac{1}{\sin(p+2q)\varphi} + \frac{1}{\sin(p+3q)\varphi} \pm \cdots \pm \frac{1}{\sin(p+nq)\varphi}$$

(und die entsprechende Reihe für die Kosinus) durch Benutzung des Integrals $\int\limits_0^1 \frac{x^{\frac{m}{n}}\,dx}{1+x}$ für endliche und für unendlich große n. Beispielsweise wird für $\varphi = \frac{\pi}{3}$ gefunden

$$\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{1}{\sin 2\varphi} + \frac{1}{\sin 3\varphi} + \cdots = \sqrt{3} + \frac{12}{\pi}.$$

G. Fontana gibt ohne Beweise[1]) 37 Theoreme über Reihensummen; wir führen, um eine Anschauung zu vermitteln, einige an:

$$\frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + \cdots = 1;$$

$$1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2} - \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} - \cdots = \frac{2}{\pi};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1^2}{2^2\cdot 4} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6} + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8} + \cdots = \frac{2}{\pi}.$$

Das genüge!

Mit rekurrenten Reihen beschäftigt sich Gian. Franc. Malfatti[2]). Er knüpft an Lagranges grundlegende Untersuchungen an. Ist $Ay_x + By_{x+1} + \cdots + Ny_{x+n} = 0$ die Relation, die je $(n+1)$ aufeinander folgende Reihenglieder verbindet, dann ist

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + \cdots$$

das allgemeine Reihenglied, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Wurzeln der Gleichung $A + Bt + \cdots + Nt^n = 0$ sind. Dabei werden $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ voneinander verschieden angenommen. Die Behandlung gleicher Wurzeln hatte Lagrange geliefert; aber Malfatti findet sein Verfahren inkorrekt, zeigt den Fehler an einem Beispiele und ersetzt es durch ein anderes, das er im Falle zweier und dreier gleichen Wurzeln erläutert (vgl. aber auch S. 295). —

Eine eigentümliche, der Differentiation, und eine andere der Integration ähnliche Rechnungsart bespricht Euler[3]) in einem kurzen Aufsatze. Ihm ist aufgefallen, daß die Formeln für die Reihensummen $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + x^n$ bei aufeinander folgenden ganzzahligen Werten von n in engem Zusammenhange stehen. So kann man aus $1^4 + 2^4 + \cdots + x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 0\cdot x^2 - \frac{1}{30}x$ durch Inte-

[1]) Mem. mat. fis. Soc. Ital. III, 1786—1787, p. 174. [2]) Ibid. III, 1786, p. 571. [3]) Nov. Act. Acad. Petrop. VI, 1788, p. 3.

gration der rechten Seite und gleichzeitige Multiplikation mit 5 herleiten $1^5 + 2^5 + \cdots + x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 + 0 \cdot x^3 - \frac{1}{12}x^2 + \text{cst}.$ In ähnlicher Weise geht er von n auf $(n-1)$ zurück. Größere Wichtigkeit können wir dieser gelegentlichen Bemerkung nicht zusprechen. —

Aus dem Jahre 1787 ist kaum etwas beizubringen. Denn die Arbeit von E. Waring[1]), deren Titel auf Reihen hinweist: „Werte algebraischer Größen ausgedrückt durch konvergente Reihen", ist in Wahrheit algebraischer Natur; sie rechtfertigt ihren Titel nur durch eine ungerechtfertigte Benutzung des binomischen Lehrsatzes für gebrochene Exponenten. Am Schlusse gibt sie eine historische Übersicht über die bis zur damaligen Zeit unternommenen Versuche, die Anzahl der positiven und der negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung zu bestimmen.

Wir haben jetzt auf eine umfangreiche, in Buchform erschienene Schrift von Johann Friedrich Pfaff einzugehen[2]): „Versuch einer neuen Summationsmethode nebst anderen damit zusammenhängenden analytischen Bemerkungen".

Pfaff beginnt mit einer Reihe literarischer Notizen. Im zweiten Abschnitte setzt er seine Methode auseinander, die als Hilfssätze die bedenklichen Gleichungen

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad 1^m - 2^m + 3^m - 4^m + \cdots = 0$$

benutzt. Handelt es sich nun z. B. um die Reihe

$$\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots,$$

so setzt Pfaff für jedes Glied die Potenzentwicklung nach dem Bogen ein und faßt die Glieder von gleichen Exponenten in φ zusammen. So entsteht mit Benutzung der obigen fragwürdigen Resultate

$$\varphi \cdot (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) - \frac{\varphi^3}{3!}(1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots)$$
$$+ \frac{\varphi^5}{5!}(1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \cdots) - \cdots = \frac{1}{2}\varphi,$$

also merkwürdigerweise etwas Richtiges. Ähnlich wird

$$\sin\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2^{2n-1}} + \frac{\sin 3\varphi}{3^{2n-1}} - \cdots \quad \text{und} \quad \frac{\sin\varphi^r}{1^m} - \frac{\sin 2\varphi^r}{2^m} + \frac{\sin 3\varphi^r}{3^m} + \cdots$$

behandelt. Im letzten Falle ist die Summe nur dann angebbar, wenn

[1]) Phil. Transact. Lond. 1787, p. 71. [2]) Berlin 1788.

r und m zugleich gerade oder zugleich ungerade sind. Pfaff findet für die letzte Summe 0, wenn $m < r$; dagegen $\pm \frac{1}{2}\varphi^m$, wenn $m = r$ ist. Ebenso werden Reihen

$$\sum_n \pm \frac{n^{2q-1} \sin n\varphi^r}{n^2 - \lambda^2} \quad \text{und} \quad \sum_n \pm \frac{n^{2q} \cos n\varphi^r}{n^2 - \lambda^2}$$

untersucht und mittels der Substitution $\lambda = \mu\sqrt{-1}$ umgeformt. Auf weitere Einzelheiten gehen wir nicht ein, da die Grundlagen seiner Beweisführung zu wenig fest sind.

Aus dem Jahre 1789 haben wir eine kleinere Arbeit Eulers zu erwähnen[1]), in der er darauf aufmerksam macht, daß die Substitution $x = r(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)$ von der Summe der Reihe

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots$$

auf die Summen der beiden Reihen führt

$$A + Br\cos\varphi + Cr^2\cos 2\varphi + Dr^3\cos 3\varphi + \cdots$$

und

$$Br\sin\varphi + Cr^2\sin 2\varphi + Dr\sin 3\varphi + \cdots$$

(vgl. S. 268). Diese Methode verwendet Euler auf die binomische Formel. Unter Vernachlässigung der Konvergenzfrage stößt er dabei auf Resultate wie

$$1 - 4\cos\varphi + 10\cos 2\varphi - 20\cos 3\varphi + \cdots = \cos 2\varphi : \left(16 \cos \frac{\varphi^4}{2}\right)$$

und $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \cdots = 0$.

Unter den Veröffentlichungen der Petersburger Akademie im Jahre 1790 befinden sich zwei Abhandlungen Eulers[2]), deren erste an eine frühere des Jahres 1781 anknüpft (vgl. S. 276). Es handelt sich um die Summen

$$\binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p+1} + \binom{m}{2}\binom{n}{p+2} + \cdots = \binom{m+n}{n-p},$$

die für ganze Werte von m, n, p bewiesen werden und die auf beliebige Werte von m, n, p ausgedehnt werden sollen; also auch hier wieder um eine Interpolationsaufgabe. Der Wert von $\left(\frac{p}{q}\right)$ für beliebige p, q wird mit Hilfe von $\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^p dx = p!$ definiert, und dann

[1]) Nov. Act. Petrop. VII, 1789, p. 87. [2]) Ibid. VIII, 1790, p. 32.

die vorgelegte Summe als ein bestimmtes Integral dargestellt. Setzt man $\int_0^1 x^{a-1}(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}dx = \Delta$, so wird

$$\int_0^1 x^{a+b\nu-1}(1-x^b)^{\frac{c}{b}-1}dx = \frac{a}{c}\,\frac{a+b}{a+b+c}\,\frac{a+2b}{a+2b+c}\cdots\frac{a+(\nu-1)b}{a+(\nu-1)b+c}\Delta;$$

und das leitet zur Lösung hin. Auch mit Aufgaben folgender Art beschäftigt sich Euler in dieser Arbeit: Er setzt

$$(1-x^b)^{-\frac{a}{b}} = 1 + Ax^b + Bx^{2b} + Cx^{3b} + \cdots$$

und

$$(1-x^b)^{-\frac{\alpha}{\beta}} = 1 + \mathfrak{A}x^b + \mathfrak{B}x^{2b} + \mathfrak{C}x^{3b} + \cdots$$

und bestimmt die Summen der Koeffizienten-Aggregate

$$1 + \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \cdots,\ A + \mathfrak{A}B + \mathfrak{B}C + \cdots,\ B + \mathfrak{A}C + \mathfrak{B}D + \cdots.$$

Sebastiano Canterzani untersucht[1]) die Umkehrung der Reihe $y = a'x + a''x^2 + a'''x^3 + \cdots$, mag die rechte Seite dabei bis ins Unendliche gehen oder im Endlichen abbrechen. Er findet

$$x = b'y + b''y^2 + b'''y^3 + \cdots$$

mit $b' = \frac{1}{a'}$, $b'' = -\frac{b'^2a''}{a'}$, $b''' = \frac{-2b'b''a'' - b'^3a'''}{a'}$, $\cdots$ und gibt die Regel für die Bildung der Zähler an. Die erhaltenen Resultate verwendet der Verfasser bei der Lösung der Gleichung

$$0 = -y + a'x + a''x^2 + \cdots.$$

Konvergiert die Reihe für x, dann konvergiert sie, wie dem Verfasser „scheint", nach der, dem absoluten Werte nach, kleinsten Gleichungswurzel, falls diese reell ist; das hatte bereits E. Waring angegeben.

Von den Eulerschen Untersuchungen über Reihen gehören zwei ins Jahr 1791. Die eine[2]) liefert für das, durch Rektifikation der gleichseitigen Hyperbel geometrisch erlangte Resultat

$$\frac{1}{7} + \frac{1\cdot 5}{7\cdot 11} + \frac{1\cdot 5\cdot 9}{7\cdot 11\cdot 15} + \cdots = \frac{1}{2}$$

einen sehr einfachen direkten Beweis. Euler leitet auf dem gleichen Wege $\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta} + \frac{a}{b}\cdot\frac{a+\theta}{b+\theta}\cdot\frac{a+2\theta}{b+2\theta}\cdots = \frac{a}{b-a-\theta}$ sowie

[1]) Mem. mat. fis. Soc. Ital. V, 1790 [2]) Nov. Act. Petrop. IX, 1791, p. 41.

$$\frac{a}{b+\theta}+\frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}+\frac{a}{b+\theta}\cdot\frac{b}{c+\theta}\cdot\frac{c}{d+\theta}+\cdots=\frac{a}{\theta}$$

her.

Die andere[1]) knüpft an folgende Tatsache an. Setzt man $2\cos\varphi = x$, so wird für positive ganze n, die > 2 sind

$$2\cos n\varphi = x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-6}$$
$$+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-8}-\ldots,$$

falls man sich auf die nicht negativen Potenzen von x beschränkt. Für $n = 0, 1$ und alle negativen und gebrochenen n ist die Formel aber falsch. Wie erklärt sich das? Euler setzt $\cos\varphi$ oder $\sin\varphi$ gleich z und $\cos n\varphi$ bezw. $\sin n\varphi = s$. Dann gilt

$$d^2s(1-z^2) - zdzds + n^2sdz^2 = 0.$$

Die Integration liefert, wenn f, g willkürliche Konstanten bedeuten,

$$s = f\cdot(z+\sqrt{z^2-1})^n + g\cdot(z-\sqrt{z^2-1})^n.$$

Die dem Problem entsprechenden Werte von f, g werden durch Reihenentwicklungen gefunden. So erhält man

$$s = \left(z^n - \frac{n}{1}z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}z^{n-4} - \ldots\right)$$
$$+\left(z^{-n} + \frac{n}{1}z^{-n-2} + \frac{n(n+3)}{1\cdot 2}z^{-n-4} + \ldots\right)$$

als richtige und allgemein gültige Formel; bei positivem, ganzen $n > 2$ fallen die Potenzen mit negativen Exponenten von selbst fort.

An diese Arbeit knüpft Nik. Fuß einige Untersuchungen[2]), in denen er die Eulersche Formel herleitet durch Entwicklung von

$$(y+\sqrt{y^2-1})^n = Ay^n - By^{n-2} + Cy^{n-4} - Dy^{n-6} + \cdots.$$

Eine andere Arbeit Eulers aus dem Jahre 1760 (siehe S. 259) gab Pfaff, der sich mit der Herausgabe von Eulers hinterlassenen Schriften beschäftigte, Veranlassung zu weiteren Forschungen.[3]) Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{x} \operatorname{arc\,tang} t^{(x)}$ oder in damaliger Schreibart $SA\operatorname{tang} t^{(x)}$ läßt sich leicht unter der Annahme $t^{(x)} = \dfrac{f(x) - f(x+1)}{1+f(x)\cdot f(x+1)}$ durch Zerlegung der einzelnen Summanden in $(A\operatorname{tang} f(x) - A\operatorname{tang} f(x+1))$ summieren. Man erhält dabei als Summe $A\operatorname{tang} f(1) - A\operatorname{tang} f(x+1)$. Wird $4c = b^2 + 4a^2 - 1$ und $t^{(x)} = \dfrac{a}{x^2+bx+c}$ gesetzt, dann ist eine solche Darstellung von $t^{(x)}$ möglich, und man erhält

1) Nov. Act. Petrop. IX, 1791, p. 54. 2) Ibid. p. 205. 3) Ibid. X, 1792, p. 123.

$$\sum_1^x A \operatorname{tang} \frac{a}{x^2+bx+c} = A \operatorname{tang} \frac{2ax}{(b+1)(x+1)+2c}.$$

Ähnlich läßt sich die Form $t^{(x)} = \frac{f(x)-f(x+r)}{1-f(x)f(x+r)}$ bei ganzzahligem r behandeln. Hierbei kann z. B. $t^{(x)} = \frac{a}{x^2+bx+c}$ genommen werden, falls $4c = b^2 + \frac{4a^2}{r^2} - r^2$ gesetzt wird. Pfaff wendet diese Methode noch weiter an, um im zweiten Kapitel allgemeinere Fälle summierbarer Reihen aufzustellen. So berechnet er $\sum \frac{a}{E^x + b\cdot E^{-x} + c}$, wenn $\frac{b}{E} = \frac{c^2}{(E+1)^2} + \frac{a^2}{(E-1)^2}$ ist; die Größen $\frac{E^x + b\cdot E^{-x}+c}{a}$ bilden dabei nach Riccatischer Bezeichnung (S. 261) eine „rekurrente Reihe mit Appendix".

Wir besprachen oben (S. 290) eine Arbeit Malfattis, der einen Punkt in Lagranges Untersuchungen über rekurrente Reihen als falsch erkannt und verbessert hatte. Lagrange selber war auf diesen Fehler schon bei der Drucklegung seines Aufsatzes gestoßen; er gibt nun jetzt[1]) eine neue Bearbeitung der Frage nach gleichen Wurzeln, und gestaltet sie direkter und übersichtlicher als Malfatti. Seine Resultate für Wurzeln zweiter, dritter, vierter Multiplizität treten in verschiedener Form auf; am Schlusse der Abhandlung wird eine für alle Wurzel-Multiplizitäten gemeinsame Form den Mathematikern zum Beweise vorgelegt.

Eine wunderliche Arbeit Jean Trembleys stammt aus dem Jahre 1794.[2]) Der Verfasser knüpft an den vierten, über Kettenbrüche handelnden Aufsatz der Opuscula Eulers (vgl. S. 284) an, und bringt zunächst eine Reihe Eulerscher Resultate auf die elegante Form

$$1/-n + 2/(-n+1) + 3/(-n+2) + 4/(-n+3) + \cdots = n+1.$$

Für den Beleg der Gültigkeit aber begnügt er sich mit einem unstrengen Induktionsbeweise; und er macht sogar eine Methode aus dieser Art von Beweisen. Er setzt z. B. als Annäherung

$$(1+x)^m = \frac{1+Ax+Bx^2+Cx^3}{1+ax+bx^2+cx^3},$$

wobei er die Konstanten in Zähler und Nenner der rechten Seite dazu benutzt, die Glieder der rechten Entwicklung so weit als möglich mit denen der linken Seite in Übereinstimmung zu bringen. Dann wandelt er den Bruch rechts durch sukzessive Divisionen in einen Kettenbruch um und kommt vermutungsweise so auf das Gesetz,

[1]) Mém. de Berlin 1792, p. 247. [2]) Ibid. 1794, p. 109.

nach dem wohl die Kettenbruch-Entwicklung der linken Seite fortschreiten kann. Auf diese Art leitet er voller Stolz, immer mit Betonung der Einfachheit seiner Methode, Lagrangesche und Lambertsche Resultate her, die natürlich auf minder einfachem Wege von ihren Entdeckern erhalten worden waren.

Pietro Paoli (Petrus Paulus) beginnt eine zur Reihentheorie gehörige Abhandlung[1]) mit folgender Angabe: „Lagrange hat bemerkt, daß das allgemeine Glied rekurrenter Reihen von der Integration einer (endlichen) Differenzen-Gleichung abhängt. Bisher hat niemand wahrgenommen, daß auch die Summation einer rekurrenten Reihe durch die Integration einer ähnlichen Differenzen-Gleichung geleistet werden kann." Kennt man das allgemeine Glied einer rekurrenten Reihe, so kann man auf verschiedene Arten ihre Summe finden; die Paolische Methode kann aber auch ohne diese Kenntnis auskommen. Die Reihe sei $y_0, y_1, y_2, \cdots, y_x, \cdots$; es bestehe für jedes x die Relation $ay_x + by_{x-1} + \cdots + py_{x-n} = 0$. Dann ist

$$y_x = Am^x + A_1 m_1^x + A_2 m_2^x + \cdots,$$

wo $m, m_1, m_2, \cdots$ die Wurzeln von $at^m + bt^{m-1} + \cdots + p = 0$ sind. Setzen wir die Summe $z_x = y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_x$, so folgt

$$z_x = z_{x-1} + y_x, \quad z_{x-1} = z_{x-2} + y_{x-1}, \cdots,$$

und wenn man diese letzten Gleichungen der Reihe nach mit $a, b, c, \ldots$ multipliziert und zueinander addiert, so entsteht

$$az_x + (b-a) z_{x-1} + (c-b) z_{x-2} + \cdots - pz_{x-m-1} = 0.$$

Demnach bilden auch die z_x eine rekurrente Reihe; man hat also die Gleichung $au^{m+1} + (b-a)u^m + (c-b)u^{m-1} + \cdots - p = 0$ aufzulösen; aber offenbar sind ihre Wurzeln gleich $1, m, m_1, m_2, \cdots$, und daher ist $z_x = C_0 + Cm^x + C_1 m_1^x + C_2 m_2^x + \cdots$. Die C lassen sich nun leicht aus linearen Gleichungen bestimmen, die aus den Anfangswerten $z_1, z_2, \cdots$ hervorgehen. —

Hier ist vielleicht der beste Platz für die Besprechung einer Arbeit, die sich zwar nicht auf Reihen, sondern auf fortgesetzte Produkte bezieht, aber doch wegen deren Umwandlung in unendliche Reihen nicht ganz unangemessen an dieser Stelle untergebracht werden kann. Es handelt sich um einen Aufsatz von Chr. Kramp über die Wallisschen Brüche[2]); sie ist der Ausgangspunkt der Untersuchungen über „Fakultäten". Kramp setzt

$$a(a+r)(a+2r)\cdots(a+[n-1]r) = a^{n|r};$$

[1]) Mem. Acad. Mantova I, 1795, p. 121. [2]) Nov. Act. Acad. Elect. Mogunt. sci. quae Erfurti est; I, 1797 (1799), p. 257.

dann gelten die Formeln

$$a^{(m+n)\pi r} = a^{m\pi r} \cdot (a + mr)^{n\pi r}$$

und

$$a^{m\pi r} : (a + nr)^{m\pi r} = a^{n\pi r} : (a + mr)^{n\pi r}$$

Wenn man hierin $n = \frac{b-a}{r}$ setzt, so ergibt sich

$$a^{m\pi r} : b^{m\pi r} = a^{\frac{b-a}{r}\pi r} : (a + mr)^{\frac{b-a}{r}\pi r};$$

für $m = \infty$ wird jeder Faktor des letzten Divisors gleich $(\infty \cdot r)$, und bei $b - a = d$ entsteht daher die Gleichung

$$\frac{a(a+r)(a+2r)(a+3r)\cdots}{(a \pm d)(a \pm d + r)(a \pm d + 2r)(a \pm d + 3r)\cdots} = \frac{a^{\pm \frac{d}{r}\pi r}}{(\infty r)^{\pm \frac{d}{r}}}.$$

Durch diese Formel meint Kramp den Wert der linken Seite bestimmt zu haben; er übersieht dabei, daß die rechte Seite nur eine Bezeichnung ist. Er geht dann zur Umwandlung der Fakultät

$$a^{m\pi r} = a^m + Aa^{m-1}r + Ba^{m-2}r^2 + Ca^{m-3}r^3 + \cdots$$

in eine Reihe über und bestimmt die ersten Koeffizienten

$$\frac{A}{m(m+1)} = \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{1}{2}, \quad \frac{2B}{(m-1)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{1}{2} A - \frac{m}{12};$$

$$\frac{3C}{(m-2)(m+1)} = \frac{m-1}{m+1} \cdot \frac{1}{2} B - \frac{m-1}{12} A, \ldots.$$

Die erhaltenen Resultate werden auf die Entwicklungen

$$\frac{\sin m\pi}{\sin n\pi} = \frac{m(1-m)(1+m)(2-m)(2+m)\cdots}{n(1-n)(1+n)(2-n)(2+n)\cdots};$$

$$\frac{\sin n\pi}{\cos n\pi} = \frac{2n(2-2n)(2+2n)\cdots}{(1-2n)(1+2n)(3-2n)\cdots}; \ldots$$

angewendet. An und für sich bedeutet die Arbeit nicht viel; sie ist jedoch historisch interessant als Ausgangspunkt der Fakultäten-Lehre.

Im Jahre 1798 wurden die letzten Eulerschen Arbeiten über Reihen, die in unsere Epoche fallen, von der Petersburger Akademie veröffentlicht. Die beiden ersten dieser Abhandlungen[1]) beschäftigen sich mit der Entwicklung einer Funktion, die er in der damaligen Funktional-Bezeichnung $\Gamma : \varphi$ schreibt, in eine Reihe von der Form $A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi + \cdots$ oder, nach Euler, um

$$\Gamma : \varphi = (0) + (1)\cos\varphi + (2)\cos 2\varphi + (3)\cos 3\varphi + \cdots.$$

Die zweite Bezeichnungsweise wählt er, weil bei der ersten „bald das ganze Alphabet erschöpft sein würde". Soll die Funktion $\Gamma : \varphi$ stetig sein, so müssen, wie Euler behauptet, die Koeffizienten sehr

[1]) Nov. Act. Petrop. XI, 1793 (1798), p. 94 und p. 114.

schnell abnehmen, da sonst z. B. bei der Vermehrung des Arguments φ um die kleine Größe $\frac{\pi}{1000}$ das Glied $(1000)\cos 1000\varphi$ in

$$(1000)\cos(\pi + 1000\varphi) = -(1000)\cos(1000\varphi)$$

übergehen würde, was die Stetigkeit gefährden könnte. Die späteren Koeffizienten dürfen demnach gegen die früheren vernachlässigt werden. Nun bildet Euler, um A zu bestimmen,

$$\frac{1}{2}\Gamma:0 + \frac{1}{2}\Gamma:\pi = A + C + E + G + J + \cdots$$
$$= (0) + (2) + (4) + (6), \cdots;$$

dann

$$\frac{1}{4}\Gamma:0 + \frac{1}{2}\Gamma:\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\Gamma:\pi = A + E + J + N + \cdots$$
$$= (0) + (4) + (8) + \cdots;$$

und

$$\frac{1}{8}\Gamma:0 + \frac{1}{4}\Gamma:\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\Gamma:\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\Gamma:\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{8}\Gamma:\pi$$
$$= A + J + R + \cdots = (0) + (8) + (16) + \cdots.$$

Im letzten Resultat ist (0) schon als hinreichend genauer Wert der rechten Seite anzusehen, so daß die Summe der linken Seite $= A = (0)$ gesetzt werden kann. Die weiteren Koeffizienten in ähnlicher Art zu berechnen, würde viele Mühe machen. Euler wendet daher andere Methoden an, die sich auf die Summation von

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi$$

stützen, wo $n\varphi$ ein Vielfaches von π sein soll. Dabei erlangt er das Resultat, daß, wenn

$$\sum = \frac{1}{2}\Gamma:0 + \cos\frac{\lambda\pi}{n}\Gamma:\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\lambda\pi}{n}\Gamma:\frac{2\pi}{n} + \cdots + \frac{1}{2}\cos\lambda\pi\Gamma:\pi$$

gesetzt wird, die Bestimmung

$$\frac{2}{n}\sum = (\lambda) + (2n-\lambda) + (2n+\lambda) + (4n-\lambda) + (4n+\lambda) + \cdots$$

folgt.

So interessant diese Arbeit auch ist, so können wir uns doch nicht gegen ihre Mängel verschließen, die zum Teil in unbewiesenen Annahmen über die Konvergenz sowie über die Größe der Koeffizienten, dann über die nur näherungsweise erfolgende Auflösung des Problems beruht. Für die Zwecke der Astronomie, die bei der Untersuchung an erster Stelle in Betracht kommen, bedeutet das Resultat eine beträchtliche Rechnungs-Vereinfachung.

Ein ungemeiner Fortschritt wird durch die unmittelbar folgende Abhandlung repräsentiert, die am gleichen Tage, dem 26. Mai 1777, wie die erste Arbeit der Akademie vorgelegt wurde. Hier tritt

zum ersten Male die gebräuchlich gebliebene Koeffizienten-Bestimmung durch Integrale

$$A = (0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Gamma \cdot d\varphi \quad \text{und} \quad (n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Gamma \cdot d\varphi \cdot \cos n\varphi$$

auf. Dieses Resultat benutzt Euler dann zur Transformation von

$$\Gamma : \varphi = (0) + (1)\cos\varphi + (2)\cos 2\varphi + \cdots$$

in die Reihe, die nach Potenzen von $\cos\varphi$ fortschreitet, und die wir etwas abweichend von der Bezeichnung der Original-Arbeit

$$= [0] + [1]\cos\varphi + [2](\cos\varphi)^2 + [3](\cos\varphi)^3 + \cdots$$

schreiben. Dabei kommt es natürlich auf die Berechnung von Integralen $\int_0^\pi \cos\varkappa\varphi \cdot (\cos\varphi)^\lambda d\varphi$ an. Es ergibt sich:

$$(0) = [0] + \frac{2}{4}[2] + \frac{4\cdot 3}{4\cdot 8}[4] + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{4\cdot 8\cdot 12}[6] + \cdots,$$

und wenn $n > 0$ ist:

$$2^{n-1}(n) = [n] + \frac{n+2}{4}[n+2] + \frac{(n+4)(n+3)}{4\cdot 8}[n+4]$$
$$+ \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{4\cdot 8\cdot 12}[n+6] + \cdots.$$

Die beiden letzten Aufsätze Eulers[1]) beschäftigen sich mit Zyklometrie, d. h. mit der Frage nach expediter Berechnung des Wertes der Zahl π. Euler gibt zunächst eine kurze historische Übersicht über die Resultate von A. Sharp, J. Machin und G. de Lagny (vgl. Band III[2], S. 668—669); dabei erklärt er die Arbeit des letzteren, der die Berechnung auf 100 Stellen durchführte, für eine mehr als herkulische Leistung.[2]) Danach stellt er eine neue Formel auf, die bedeutende Vorzüge gegen die Leibnizsche Formel hat. Bedeutet s den zur Tangente t gehörigen Bogen, so wird

$$s = \frac{t}{1+t^2}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3 + \cdots\right].$$

Auf verschiedenen Wegen, einmal durch eine Reduktionsformel, einmal durch eine Integral-Transformation, wird die Richtigkeit dieser Beziehung nachgewiesen. Die einzelnen Glieder lassen sich deswegen

---

[1]) Nov. Act. Petrop. XI, 1793 (1798), p. 133 und p. 150. [2]) Euler übersieht hierbei eine Arbeit, auf die im Briefwechsel von Lambert IV, p. 480 (Schreiben von Wolfram an Lambert) aufmerksam gemacht wird: B. Lamy hat π bis auf 128 Ziffern geliefert.

bequemer entwickeln als bei der Leibnizschen Formel, weil jedes durch eine einfache Multiplikation aus dem vorhergehenden abgeleitet werden kann. Ein weiterer Vorzug liegt darin, daß alle Glieder von gleichem Vorzeichen sind, so daß eine Addition der Glieder genügt. Wird die neue Formel bei $\pi = 4A\operatorname{tang}\frac{1}{2} + 4A\operatorname{tang}\frac{1}{3}$ verwendet, so entsteht

$$\pi = \frac{16}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{10}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$+ \frac{12}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \cdots\right];$$

noch bessere Formeln erhält man für $\pi = 8A\operatorname{tang}\frac{1}{3} + 4A\operatorname{tang}\frac{1}{7}$, da die auf den zweiten Summanden bezügliche Reihe nach Potenzen von $\frac{2}{100}$ fortschreitet, und für $\pi = 20A\operatorname{tang}\frac{1}{7} + 8A\operatorname{tang}\frac{3}{79}$, wo die entsprechende Entwicklung nach Potenzen von $\frac{144}{100000}$ erfolgt.

Der Ausgangspunkt der letzten Abhandlung (ibid., p. 150) ist die Integralgleichung

$$\int\frac{2+2x+x^2}{4+x^4}\,dx = \int\frac{dx}{2-2x+x^2} = \int d\,A\operatorname{tang}\frac{x}{2-x}$$
$$= 2\int\frac{dx}{4+x^4} + 2\int\frac{x\,dx}{4+x^4} + \int\frac{x^2dx}{4+x^4}.$$

Nimmt man die Grenzen der Integrale gleich 0 und x, so wird ihr Wert gleich $A\operatorname{tang}\frac{x}{2-x}$; dies Integral bezeichnet Euler mit dem astronomischen Zeichen für die Sonne und ähnlich die drei Integrale rechts mit den Zeichen für Saturn, Jupiter und Mars:

$$\int\frac{dx}{4+x^4} = \text{♄},\quad \int\frac{x\,dx}{4+x^4} = \text{♃},\quad \int\frac{x^2dx}{4+x^4} = \text{♂}.$$

Er schreibt also $\odot = 2\text{♄} + 2\text{♃} + \text{♂} = A\operatorname{tang}\frac{x}{2-x}$. Nun ist die Entwicklung des Nenners der Integrale nach Potenzen von $\frac{x^4}{4}$ leicht. Die erlangten Reihen werden für $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = \frac{1}{4}$ benutzt, wodurch man auf $A\operatorname{tang}1$, $A\operatorname{tang}\frac{1}{3}$ und $A\operatorname{tang}\frac{1}{7}$ kommt. Die beiden letzten Reihen, die nach Potenzen von $\frac{1}{64}$ bezw. $\frac{1}{1024}$ fortschreiten, konvergieren recht gut und liefern den Wert für

$$\frac{\pi}{4} = 2A\operatorname{tang}\frac{1}{3} + A\operatorname{tang}\frac{1}{7}$$

mit ziemlicher Leichtigkeit als Aggregat von sechs unendlichen Reihen.

Im gleichen Bande der Petersburger Veröffentlichungen kommt Nik. Fuß[1]) auf ein, früher von Euler behandeltes Thema zurück (s. S. 294). Es handelt sich um die Entwicklung von $\cos n\varphi = s$ nach Potenzen von $\cos\varphi = z$, und bei $\sin n\varphi = v\sqrt{1-z^2}$ um die von v nach Potenzen von z. Fuß stellt die schon von Euler angegebene Differentialgleichung $d^2s(z^2-1) + zdzds - n^2sdz^2 = 0$ auf und integriert sie mit Hilfe unbestimmter Koeffizienten in Gestalt einer Reihe, die nach steigenden Potenzen von z fortschreitet, statt nach fallenden, wie bei Euler. Dabei wird das Eintreten von Ausnahmefällen vermieden.

Wir haben unsere Blicke jetzt wieder nach England zu richten, wo uns die Transactions von Edinburgh und die von London einiges Bemerkenswerte bieten. Da sei kurz einer Arbeit von James Ivory[2]) gedacht, der eine Formel schneller Konvergenz für den Umfang einer Ellipse aus der Entwicklung der Potenz $(a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi)^n$ herleitet. Auf den Kreis angewendet liefert diese Formel

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2^2} + \frac{1^2 \cdot 1^2}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{1^2 \cdot 1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \frac{1^2 \cdot 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} + \cdots$$

als besonderen Fall.

Vier Aufsätze von John Hellins[3]) beschäftigen sich mit konvergenten Reihen. Der erste leitet eine Hilfsformel für die Transformation gewisser Reihen her. Durch zwei verschiedene Integrations-Ausführungen von $\frac{x^{m-1}dx}{1-x^n}$ wird die Gleichung

$$\frac{x^m}{m} + \frac{x^{m+n}}{m+n} + \frac{x^{m+2n}}{m+2n} + \cdots = \frac{x^m}{m(1-x^n)} - \frac{nx^{m+n}}{n(m+n)(1-x^n)^2}$$
$$+ \frac{n \cdot 2n \cdot x^{m+2n}}{m(m+n)(m+2n)(1-x^n)^3} - \frac{n \cdot 2n \cdot 3nx^{m+3n}}{m(m+n)\ldots(m+3n)(1-x^n)^4} + \cdots$$

gefunden; durch sie wird dann die zyklometrische Formel

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 + \frac{1}{9 \cdot 81} + \frac{1}{17 \cdot 81} + \cdots\right) + \frac{1}{9\sqrt{3}}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13 \cdot 81} + \cdots\right)$$
$$- \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{11 \cdot 81} + \cdots\right) - \frac{1}{27 \cdot \sqrt{3}}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{15 \cdot 81} + \cdots\right)$$

umgestaltet, indem die Hilfsgleichung sich auf jede der vier Klammer-

---

1) Nov. Act. Petrop. XI, 1793 (1798), p. 155. 2) Transact. R. Soc. of Edinburgh IV (1798), p. 177. 3) Transact. R. Soc. of London 84 (1794), p. 217; 86 (1796), p. 135; 88 (1798), p. 183 und p. 527.

reihen anwenden läßt. Die entstehenden Reihen schreiten etwa wie die Potenzen von $\frac{1}{80}$ fort.

Die gleiche Transformation wird in dem zweiten Aufsatze verwertet, der sich die Aufgabe stellt, den $\log 10$ möglichst expedit zu berechnen. Es wird $\log 10 = 3\log 2 + \log\frac{5}{4}$ durch drei Reihen hergestellt, die ungefähr nach Potenzen von $\frac{1}{80}$ fortschreiten. Noch bequemere Reihen werden durch $\log 10 = 10\log\frac{5}{4} + 3\log\frac{1024}{1000}$ erlangt.

Im dritten Aufsatze wird die Reihe

$$ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \cdots,$$

die bei mäßig abnehmenden positiven Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ und einem x, welches nur wenig kleiner ist als 1, sehr gering konvergiert, in die Summe zweier Reihen

$$(ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 - \cdots) + 2(bx^2 + dx^4 + fx^6 + \cdots)$$

zerlegt. Die erste Reihe kann nach der Methode von F. Maseres (vgl. S. 271) behandelt werden; und die zweite Reihe, die offenbar schon für sich besser konvergiert, gestattet die gleiche weitere Behandlung, wie sie bei der ursprünglichen Reihe vorgenommen wurde. Die Wirksamkeit dieser Methode soll durch das Beispiel

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots \quad \text{für} \quad x = \frac{9}{10},$$

das recht ausführlich behandelt wird, klar gestellt werden.

Der letzte Aufsatz von Hellins beschäftigt sich mit einer Aufgabe der Störungstheorie: Der reziproke Wert von $(a - b\cos x)^n$ ist in die Reihe $A + B\cos x + C\cos 2x + D\cos 3x + \cdots$ zu entwickeln. Der Weg führt über Summationen mäßig konvergierender Reihen. Der Verfasser bemüht sich, sie in besser konvergierende umzuwandeln.

Im Bande 86 (1796) der Ph. Tr. Lond. befindet sich auch ein französisch geschriebener Aufsatz von Simon L'Huilier[1], in dem die Reihen für die Exponentialfunktionen, für die Logarithmen und für die Kreisfunktionen auf elementarem Wege abgeleitet werden; vor allem wird die Verwendung des Unendlichen dabei vermieden. Bei den Herleitungen fällt dem Verf. die Analogie zwischen den Logarithmen und den trigonometrischen Funktionen in die Augen.

[1] Transact. R. Soc. of London 86 (1796), p. 142.

Imaginäres.

Man hätte der Ansicht sein können, daß über die Meinungsverschiedenheit, die zwischen Leibniz und Johann Bernoulli in betreff der Natur der Logarithmen negativer Größen bestand, durch die geniale Arbeit Eulers, die im Band III[2], S. 722 ausführlich besprochen wurde, endgültig entschieden sei. Dem war nicht so! Und der Grund dafür lag nicht zum mindesten in der freien Art und Weise, mit der Euler in der Sitte seiner Zeit das unendlich Große und das unendlich Kleine verwendet hatte; freilich auch darin, daß er in seiner Arbeit nicht darauf eingegangen war, alle früheren falschen Behauptungen auf ihren wahren Wert zurückzuführen, und alle aufgestellten Paradoxa aufzuklären. Diese tauchten daher wieder und immer wieder auf. —

D'Alembert veröffentlichte 1761 in seinen „Opuscules mathématiques" I, Paris, einen schon mehrere Jahre früher geschriebenen Aufsatz „Sur les logarithmes des quantités négatives", in dem er für Bernoullis und gegen Leibniz' Anschauungen eintrat. Er führt eine Reihe von Gründen dafür an, daß $\log(-a) = \log(+a)$, oder nach der damaligen Schreibweise, daß $l \cdot -a = l \cdot +a$ sei. In erster Linie beutet d'Alembert dabei eine etwas unbestimmte, von Neper herrührende Definition des Logarithmenbegriffs aus: „Logarithmen sind eine beliebige Folge von Zahlen in arithmetischer Progression, die einer beliebigen Folge von Zahlen in geometrischer Progression entsprechend zugeordnet sind; nur mit der Einschränkung, daß der Null der arithmetischen Progression stets die Einheit der geometrischen entspricht". Man hat also nach dieser Auffassung als

$$\text{Logarithmen} \ldots, -2a, -a, 0, a, 2a, 3a, \ldots, na, \ldots$$

$$\text{Numeri} \ldots, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b}, 1, b, b^2, b^3, \ldots, b^n, \ldots$$

bei beliebigen positiven oder negativen Zahlen a und b. Davon macht d'Alembert häufig nicht ganz einwandfreien Gebrauch: Behauptet Euler unter der stillschweigenden Voraussetzung einer positiven Basis, die Logarithmen negativer Größen seien „unmöglich", d. h. komplex, so nimmt d'Alembert b negativ an und erhält dabei für gewisse negative Zahlen auch reelle Logarithmen. Schließt Euler, aus der Bernoullischen Annahme $\log(+a) = \log(-a)$ müsse notwendig für jedes a folgen $\log(a) = 0$, so erklärt d'Alembert, das berge keinen Widerspruch, denn man brauche ja in dem oben gegebenen Systeme nur $a = 0$ zu setzen, um ein Logarithmensystem zu

haben, das aus lauter Nullen bestehe. Ja! d'Alembert faßt (l. c. p. 185) das Schema

$$\begin{array}{l} \ldots,\ 3a,\ 2a,\ a,\ 0,\ -a,\ -2a,\ \ldots,\ -na,\ \ldots, \\ \ldots,\ -b^3,\ -b^2,\ -b,\ -1,\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{b^2},\ \ldots,\ \frac{1}{b^n},\ \ldots, \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \ldots,\ -\infty,\ \ldots,\ -na,\ \ldots,\ -2a,\ -a,\ 0,\ a,\ 2a,\ \ldots, \\ \ldots,\ 0,\ \ldots,\ \frac{1}{b^n},\ \ldots,\ \frac{1}{b^2},\ \frac{1}{b},\ 1,\ b,\ b^2,\ \ldots \end{array}$$

als einheitliches logarithmisches System auf, trotzdem es in der Mitte der Beziehungsreihe die Basis wechselt; und das, um $\log(+k) = \log(-k)$ zu erhalten. — Aus $(+1)^2 = (-1)^2$ wird $\log(+1) = \log(-1)$ erschlossen. — In der Eulerschen Gleichung, die zur Berechnung von $y = \log(-1)$ führt (vgl. Vorles. III², S. 725 Z. 9 v. u.),

$$1 + \frac{y}{n} = \cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{n}$$

setzt d'Alembert $\lambda = n$ und kommt zu

$$1 + \frac{y}{n} = \cos\left(2 - \frac{1}{n}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\sin\left(2 - \frac{1}{n}\right)\pi = 1,$$

also zu $\log(-1) = 0$, statt daß er auf beiden Seiten gleichzeitig $\frac{1}{n}$ nach Null führt und dann die richtige Gleichung $\log(-1) = \pm\sqrt{-1}\cdot\pi$ erlangt.

Muß d'Alembert zugeben, daß man im ersten, oben angeführten Schema für Logarithmen und Numeri durch keine Fortsetzung oder Interpolation auf $(-b), (-b^2), (-b^3), \ldots$ kommen könne, so schiebt er metaphysische Gründe vor, um diesen Übergang herzustellen. Er behauptet, es sei nicht zu verstehen, wie der Logarithmus einer, vom Positiven durch Null zum Negativen gehenden Veränderlichen durch negative Werte und das negative Unendliche ins imaginäre Größengebiet übertreten könne. Er seinerseits läßt deshalb die Logarithmen vom negativ Unendlichen ins positive Gebiet treten. Wir können nicht auf alle Einzelheiten eingehen, müssen aber jedenfalls zwei Punkte hervorheben, um die sich vielfach der Streit drehte. Es handelt sich dabei um die geometrische Fassung der Frage nach den Logarithmen negativer Zahlen.

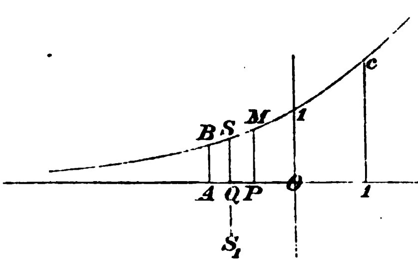


Fig. 5.

Ist $y = c^x$, also $x = \log y : \log c$, so heißt die hierdurch repräsentierte Kurve die „Logistica" oder die „logarithmische Linie". Der Bequemlichkeit wegen setzen wir $\log c = 1$.

Zur Abszisse $x = 0$ gehört die Ordinate $y = 1$ und zu $x = 1$

gehört $y = c$. Die von O aus gerechnete Abszisse ist also der Logarithmus der zugehörigen Ordinate. Bernoulli behauptete nun, die Logistica habe noch einen zweiten Linienzug $y = -c^x$, eine „Gefährtin" (comes), das Spiegelbild des ersten Zuges an der x-Achse. Leibniz leugnet dies. D'Alembert tritt auf die Seite Bernoullis und gibt folgenden Beweis: Ist in der obigen Figur $AQ = QP$, so ist die zu Q gehörige Ordinate $= \sqrt{AB \cdot PM} = \pm QS$. Hier stoßen wir also auf den oben erwähnten Fehlschluß, daß aus $a^2 = b^2$ auch $a = b$ folge. Das Gleiche beweist d'Alembert analytisch auch folgendermaßen: Die Gleichung $y = c^x$ gibt für unendlich viele Werte von x einen doppelten Wert von y, sobald nämlich x ein rationaler Bruch mit geradem Nenner ist; also hat die Logarithmica auf der negativen Seite der Achse unendlich viele, vielleicht diskrete Punkte

An zweiter Stelle handelt es sich um die Bernoullische Darstellung der Logarithmen mittels einer gleichseitigen Hyberbel $y = \frac{1}{x}$, die auf ihre Asymptoten als Achsen bezogen wird. Ist $AN = 1$, $AR = y$, dann wird die Fläche

$$NPSR = \log y.$$

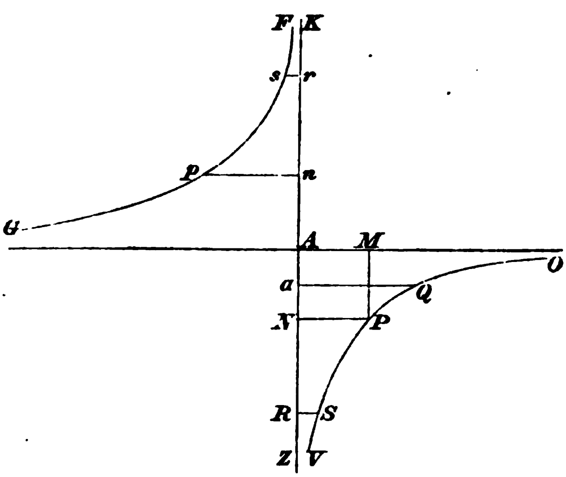


Fig. 4.

Diese Beziehung zwischen der Ordinate AR und der trapezartigen Fläche $NPSR$ wird jetzt auch für den oberen Teil der Hyperbel als gültig angesehen, so daß z. B. zu der Ordinate Ar als Fläche

$$NPQOA + AGpn + npsr$$

gehört. Dann wird behauptet, es sei $AGpn$ bei $An = AN$ gleich dem negativen Betrage von $NPQOA$ und $npsr$ gleich $NPSR$; daraus folge dann, daß zu Ar die Fläche $NPSR$ gehöre, d. h. das gleiche Flächenstück wie zu AR; somit sei

$$\log(AR) = \log(Ar) = \log(-AR).$$

Es ist auffallend, daß diese Schlüsse auf alle möglichen Weisen bekämpft worden sind, nur nicht dadurch, daß die Gleichung

$$AGpn = -NPQOA$$

der Behauptung $\infty - \infty = 0$ äquivalent wäre.

Gegen die d'Alembertschen Anschauungen und Behauptungen erhob ein italienischer Chevalier, Daviet de Foncenex seine Stimme[1]). Sein Aufsatz ist hauptsächlich durch den Versuch eines Beweises der Wurzel-Existenz algebraischer Gleichungen bekannt, den C. F. Gauß in seiner Inaugural-Dissertation eingehend kritisierte. Wir wollen einem früher (Band IV, S. 119) gegebenen Hinweise folgen, und neben dem weiteren Inhalte des Foncenexschen Aufsatzes über die imaginären Größen auch diesen besonderen Beweis in den Bereich unserer Besprechungen ziehen; dazu sind wir um so mehr berechtigt, als es sich beim Foncenexschen Beweise nicht eigentlich um die Existenz der Wurzeln, als vielmehr darum handelt, zu zeigen, daß die als existierend vorausgesetzten Wurzeln einer jeden algebraischen Gleichung die Gestalt $A + B\sqrt{-1}$ besitzen. Die Frage nach der Existenz der Wurzeln selbst war zu damaliger Zeit noch nicht mit der nötigen Schärfe gefaßt worden.

In § 5 der Abhandlung zeigt Foncenex zunächst, daß die Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit reellen oder komplexen Koeffizienten in die Form $c + d\sqrt{-1}$ bei reellen c und d gebracht werden können. Dann betrachtet er eine algebraische Gleichung in z des Grades r, wo r in seine verschiedenen Primzahl-Potenz-Faktoren zerlegt

$$= 2^m p \cdot q \cdot s \cdot t \cdots = 2^m \cdot P$$

ist; er versucht nun einen quadratischen Faktor $(z^2 - uz + M)$ des vorgelegten Gleichungspolynoms herzustellen. Dabei hängt u von einer Gleichung des Grades $2^{m-1}P \cdot (2^m P - 1)$ ab, da u die Summe je zweier Wurzeln der vorgelegten Gleichung darstellt, also $\frac{1}{2} r \cdot (r - 1)$ Werte hat. Die Gleichung in u ist daher vom Grade $2^{m-1}P_1$, wo P ungerade wird. Für dieses neue Gleichungspolynom in u wird wieder ein quadratischer Faktor $(u^2 - u_1 u + M_1)$ gesucht; dabei hängt u_1 von einer Gleichung des Grades $2^{m-2}P_1 \cdot (P_1 2^{m-1} - 1)$ ab. So geht man weiter, bis man nach m Schritten auf eine Gleihung ungeraden Grades für u_{m-1} in dem Faktor

$$(u_{m-2}^2 - u_{m-1} \cdot u_{m-2} + M_{m-1})$$

des vorhergehenden Polynoms stößt. Eine solche Gleichung ungeraden Grades hat, wie Foncenex aus Stetigkeitsbetrachtungen her-

---

[1]) Miscellanea Philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis I, 1759, p. 113 (der zweiten Numerierung).

leitet, immer mindestens eine reelle Wurzel; u_{m-1} ist also reell. Aber auch M_{m-1}; Foncenex sagt nämlich: „M_{m-1} ist, wie man weiß, durch u_{m-1} und durch die Koeffizienten der gegebenen Gleichung in z ohne Wurzelausziehung darstellbar“. Folglich hat

$$u_{m-2}^2 - u_{m-1} \cdot u_{m-2} + M_{m-1} = 0$$

eine Wurzel $m + n\sqrt{-1}$ bei reellen m und n. Setzt man sie in

$$u_{m-3}^2 - u_{m-2} \cdot u_{m-3} + M_{m-2} = 0$$

ein, so bestimmt sich M_{m-2} durch rationale Operationen[1]; also hat auch diese Gleichung Wurzeln von der Form $p + q\sqrt{-1}$ usw. bis man zu $z^2 - uz + M = 0$ kommt, deren Wurzeln dann auch die Form $A + B\sqrt{-1}$ haben. Damit wäre gezeigt, daß die vorgelegte algebraische Gleichung r^{ten} Grades in z das Trinom $(z^2 - 2Az + A^2 + B^2)$ als Faktor besitzt, also die Wurzel $A + B\sqrt{-1}$ hat.

Wir haben schon hervorgehoben, daß diese Folgerungen die Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen nicht beweisen, sondern voraussetzen; daß sie also nur den Zweck haben könnten, den Satz zu begründen, jede algebraische Größe stehe unter der Form $A + B\sqrt{-1}$. Aber selbst dieser Zweck wird nicht erreicht. Denn, wie Gauß in § 11 seiner Dissertation zeigt, ist die Behauptung, die Größe M_{m-1} sei durch u_{m-1} und die Koeffizienten rational darstellbar, nicht allgemein richtig. Gauß faßt sein Urteil dahin zusammen, es wäre ein bei weitem tieferes Eindringen in die Theorie der Elimination nötig, um den Foncenexschen Beweis zu einem strengen zu machen.

Gehen wir zur Besprechung des weiteren Inhalts der Arbeit über! Hinsichtlich der imaginären Gleichungslösungen äußert sich der Verfasser noch nicht sehr weitblickend (§ 6): „Die imaginären Wurzeln haben keine geometrische Darstellung. In welchem Sinne man sie auch nehme, man kann keinen Nutzen aus ihnen ziehen. Man muß bestrebt sein, sie soviel als möglich aus den Endgleichungen zu entfernen.“

Foncenex unternimmt es, die Eulerschen Resultate auf neuem und sichererem Wege herzuleiten und zugleich die Schwierigkeiten, die Bernoulli in der Theorie der Logarithmen gefunden hatte, zu beseitigen. Sein erstes Ziel erreicht er leicht mit Hilfe der Gleichungen des Kreises und der Hyperbel; er fügt hinzu, daß der gegebene Beweis von Lagrange ihm mitgeteilt sei.

Hinsichtlich der Schlüsse, die Bernoulli an die Betrachtung der Flächen gleichseitiger Hyperbeln geknüpft hatte, wendet Foncenex

---

[1]) „par de pures préparations algébriques“

ein, daß zwar die beiden entgegengesetzten Zweige der Hyperbel gemäß dem Gesetze der Stetigkeit miteinander im Unendlichen zusammenhingen, daß dies jedoch für die oben konstruierten Flächen der Hyperbel nicht gelte. Denn das Differential der Fläche für eine unendlich kleine Strecke Aa sei ja $xdy = \frac{dy}{y} = \frac{dy}{dy} = 1$ für ein positives y und gleich $\frac{dy}{-dy} = -1$ für ein negatives y. Es geschehe also beim Übergange von positivem unendlich Kleinen zu negativem unendlich Kleinen ein endlicher Sprung, der sich mit stetiger Fortsetzung der Flächen nicht verträgt. Foncenex gibt den Anhängern Bernoullis die Existenz eines zweiten Zweiges der Logarithmica zwar zu, sagt aber, daß beide reell, voneinander isoliert, zwar transzendent miteinander verbunden, dagegen algebraisch voneinander unabhängig seien.

Diese Ansichten bekämpft nun wieder d'Alembert in dem „Supplément"[1] des oben erwähnten „Mémoire". Auf den Einwurf betreffs der Unstetigkeit des Flächenübergangs erwiderte d'Alembert mit Recht, daß für negative, unendlich kleine y folge $\frac{d(-y)}{-y} = 1$. Auch seine übrigen Behauptungen verteidigte er mit Beharrlichkeit.

Die Schrift hatte den Erfolg, daß Foncenex sich in einigen Punkten für überzeugt erklärte.[2] Er trat der Anschauung bei, daß die Logistica aus zwei, algebraisch zusammenhängenden Zweigen bestehe; andererseits versucht er die Eulersche Formel mit den d'Alembertschen Ansichten zu verknüpfen. Für die Existenz zweier Zweige der Logistica bringt Foncenex jetzt selbst einen neuen Beleg bei: bedeuten t und u Abszisse und Ordinate der Evolute der Logistica, so gilt $u = \pm \sqrt{(t-1)^{-1}}$; das doppelte Zeichen führe mit Notwendigkeit auf die beiden Zweige.

Hier möge noch folgendes im Anschluß an die besprochenen Aufsätze von Daviet de Foncenex erwähnt werden. J. B. J. Delambre teilt in seinem „Eloge de Lagrange" mit und wiederholt es in seiner, den Werken Lagranges vorgedruckten „Notice sur la vie etc." p. XI, daß Lagrange seinem Schüler und späteren Freunde Foncenex eigene Forschungen in der Form fertiger Resultate überließ, die dann dieser, weiter ausgeführt und begründet, unter eigenem Namen veröffentlichte. Ob diese Mitteilung richtig ist, mag dahingestellt bleiben; jedenfalls stand die Abhandlung „sur les logarithmes des quantités imaginaires" (Misc. Taur. I), wie Foncenex selbst angibt, unter Lagranges Einfluß. Das Verlassen des hierin eingenom-

[1] Opuscules I, 1761, p. 210. [2] Miscell. Taurin. III, p. 337.

menen Standpunktes in den „Éclaircissements" (Misc. Taur. III) spricht dagegen weniger für eine Mitwirkung von Lagrange.

Um die Arbeiten d'Alemberts auf diesem Gebiete gleich hier zu erledigen, erwähnen wir einen im fünften Bande der „Opuscules" gegebenen Aufsatz[1]) über die Mehrdeutigkeit der Ausdrücke von der Form $\sqrt[n]{a + b\sqrt{-1}}$. Seine Darstellung der Wurzeln ist völlig korrekt. — Ferner stammt aus dem Jahre 1778 ein Artikel über Logarithmen[2]) von ihm; er vertritt durchaus noch seinen früheren, von uns oben dargelegten Standpunkt. —

Im Jahre 1768 erschien unter dem Titel „Von den Logarithmen verneinter Größen" eine sehr umfangreiche Arbeit von W. J. G. Karsten.[3]) Sie liefert eine gute historische Darstellung der Frage und eine eingehende mitunter etwas breit gehaltene Kritik der Darlegungen und Beweise d'Alenberts (sic!). Karsten steht völlig auf der Seite Eulers. Den Hyperbel-Beweis, durch den Bernoulli die Existenz der beiden Zweige der Logarithmica dartun will, sucht Karsten dadurch zu entkräftigen, daß er die dabei benutzten Begriffe der positiven und der negativen Flächenstücke kritisch prüft und ihre Anwendung auf das vorliegende Problem als unstatthaft erklärt. Die Unhaltbarkeit des ersten oben gegebenen Beweises (S. 304) tut Karsten dadurch dar, daß er ihn auf eine beliebige Kurve anwendet, indem er deren Gleichung $y = f(x)$ durch $y^2 = f(x)^2$ ersetzt. — Im ersten Teile seines Aufsatzes geht Karsten auch ausführlich auf die Natur und den Begriff der negativen Zahlen ein. Er erklärt sie als Richtungs-Größen und bekämpft die Meinung, es seien negative Größen solche, die „kleiner als die Null" seien. Sonst würde ja (vgl. Bd. III[2], S. 367) aus der unzweifelhaft richtigen Proportion $1 : (-1) = (-1) : 1$ folgen, daß sich das Größere zum Kleineren verhalte, wie das Kleinere zum Größeren.

Die Zeitenfolge nötigt uns, auf eine andere Frage einzugehen, die auch ein wesentlicher Bestandteil der Theorie des Imaginären ist. Es ist die Frage, ob alle imaginären Größen in der Gestalt

$$A + B\sqrt{-1}$$

darstellbar sind, wo A und B reelle Größen bedeuten. Über die Unbestimmtheit, um nicht zu sagen die Unklarheit der Fragestellung setzten sich die Mathematiker der damaligen Zeit um so leichter hinweg, als die Begriffe des Imaginären und des Unmöglichen noch immer ineinander spielen. D'Alembert hatte 1747 durch die Benutzung

---

1) Opucules V, 1768, p. 183. 2) Encyclopédie XX, Genève 1778, p. 234.
3) Abbandl. der churfürstl. Baierischen Akad. d. W. V, 1768, p 3.

unendlich kleiner Größen den Beweis dafür zu liefern gesucht, daß sich die „unmöglichen" Wurzeln algebraischer Gleichungen in der Form $A + B\sqrt{-1}$ darstellen lassen; Bougainville hatte in seinem „Traité du calcul integral", Paris 1752, diesen Beweis recht übersichtlich reproduziert. Auch Foncenex lieferte (l. c.) einen Beweis dieses besonderen Satzes zugleich mit einer Kritik des d'Alembertschen Versuches; d'Alembert kritisiert dann seinerseits den Foncenexschen Beweis in dem „Supplément" (siehe S. 308). Euler hatte 1749 durch eine Reihe von Beispielen den allgemeineren Satz überaus wahrscheinlich gemacht.

Nach gleicher Richtung geht eine Arbeit des italienischen Gelehrten Pietro Paoli; sie findet sich als drittes „Opusculum" seiner Opuscula analytica[1]). Paoli legt Gewicht darauf, seine Ableitungen unter Vermeidung der Infinitesimal-Rechnung zu geben, und benutzt, um das zu ermöglichen, durchgehend das Prinzip der unbestimmten Koeffizienten als Hilfsmittel für die Herleitung der nötigen Formeln. So liefert er die Entwicklungen von a^x, $\log(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc\,tang} x$. Nach diesen Vorbereitungen geht der Verfasser zu einer Reihe von Beispielen über. Er beginnt mit dem Logarithmus von $(a + b\cdot\sqrt{-1})$; diesen stellt er mit Hilfe der zuerst vorgenommenen Entwicklung in der Form einer unendlichen Reihe dar und findet

$$\log(a + b\sqrt{-1}) = \log\sqrt{a^2 + b^2} + \beta\sqrt{-1}, \quad \text{wo} \quad \beta = \operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a} \text{ ist.}$$

Für $a = 0$ gibt er noch als besonders erwähnenswert das J. Bernoullische Resultat

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\log(-1)}{\sqrt{-1}}$$

an. Dann folgt die Behandlung von

$$\log[\log(a + b\cdot\sqrt{-1})], \quad \log\{\log[\log(a + b\cdot\sqrt{-1})]\},$$

usw. In gleicher Weise wird

$$p^{a+b\cdot\sqrt{-1}}, \quad p^{q^{(a+b\cdot\sqrt{-1})}}, \ldots$$

auf die Form $A + B\sqrt{-1}$ gebracht; dann

$$(a + b\cdot\sqrt{-1})^m, \quad (a + b\cdot\sqrt{-1})^{m+n\cdot\sqrt{-1}},$$

usf. Hierauf kommen die goniometrischen und die zu ihnen inversen Funktionen an die Reihe. Und den Schluß bilden die Kettenbrüche mit imaginären Teilzählern und Teilnennern. Die abbrechenden lassen sich sofort durch Aufrechnung erledigen; die ins Unendliche fortlaufenden werden zunächst in unendliche Reihen verwandelt.

---

[1]) Liburnum (Livorno) 1780, p. 131.

Auch Nik. Fuß beschäftigt sich[1]) mit der Frage nach der Darstellung imaginärer Größen. Dabei macht er ganz wunderliche Sprünge. Wenn z eine variable imaginäre Größe, $a, b, c, \ldots$ reelle Konstanten bedeuten, dann umfassen die beiden Formen $a + z$ und $b \cdot z$ bei der willkürlichen Bedeutung von a, b, z unendlich viele imaginäre Größen. Die Größen der beiden Formen $a + z$ und bz können einander nur gleich sein, wenn $a = 0$ und $b = 1$ ist. Die allgemeinere Größenform $a \pm bz$ umfaßt unendlich vielmal mehr Größen als $a + z$, da in ihr auch b alle reellen Zahlen durchlaufen kann; deshalb umfaßt sie „wahrscheinlich" alle imaginären Größen; somit auch jede von der Form $\frac{c}{z}$. „Demnach kann man, wie es scheint, als sicher annehmen, daß jedes $\frac{c}{z}$ gleich einem $a + bz$ sei, und zwar nur auf eine Art." Aus $a + bz = \frac{c}{z}$ folgt die Gleichung

$$bz^2 + az - c = 0 \quad \text{und} \quad z = \alpha \pm \beta \sqrt{-1},$$

wo α und β reell sind; dadurch wäre der Satz über die Darstellung imaginärer Größen allgemein bewiesen.

Euler wird diesen Beweis von Fuß schwerlich als vollgültig und überzeugend anerkannt haben; sonst hätte er wohl kaum 1783 im zweiten Teile der „Opuscula analytica" p. 81 unter anderen Forderungen an die Forschung auch die eines strengen Beweises für diesen Fundamentalsatz aufgestellt.

Mehrere andere Mathematiker versuchten sich, wie d'Alembert und D. de Foncenex, um das Theorem in der Weise, daß sie es mit dem Problem der Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen verquickten, sich also die Aufgabe stellten, die Form der, noch nicht als vorhanden bewiesenen Wurzeln festzustellen. Wir können solche verfehlten Untersuchungen, wie die von Seb. Canterzani[2]) hier übergehen. —

An dem Leibniz-Bernoullischen oder, wenn man will, dem Euler-d'Alembertschen Widerstreite der Meinungen beteiligte sich auch der Italiener Greg. Fontana.[3]) Er steht auf Eulers Seite, findet aber, daß Eulers Herleitung der unendlich vielen Werte von $\log(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$ durch die Benutzung des Unendlich-Großen und des Unendlich-Kleinen an Übersichtlichkeit und an Überzeugungskraft verliert. Deswegen schlägt Fontana einen anderen Weg ein. Er beweist die entscheidenden Formeln einmal durch Integration von

[1]) Act. Petrop. 1781, pars II, p. 118. [2]) Mem. Soc. ital. II, 1784.
[3]) Ibid. I, 1782, p. 183.

Differential-Ausdrücken, dann aber auch ohne Integrierung durch Substitution von $x = \operatorname{tang}\varphi \cdot \sqrt{-1}$ in die Entwicklung

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \cdots\right);$$

dadurch gelangt er zu der gewünschten Eulerschen Formel

$$\varphi\sqrt{-1} = \log\left(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}\right),$$

die die unendlich vielen Werte des Logarithmus vermittelt.

In aller Kürze sei noch ein Aufsatz von Fr. Mallet erwähnt[1]), der den Zwist schlichten will, aber in seinem elenden Küchenlatein kaum über die historische Darstellung der Meinungsverschiedenheiten hinauskommt.

Einige Darlegungen von J. A. Chr. Michelsen führen uns zu der Logarithmenfrage zurück. Michelsen gab 1788 die Übersetzung der „Analysis infinitorum" Eulers heraus und versah sie mit Anmerkungen zweifelhaften Wertes. Die zum siebenten Kapitel gehörigen beschäftigen sich mit der Eulerschen Logarithmen-Theorie und bekämpfen sie. Natürlich knüpft Michelsen an die Verwendung des Unendlichen an. Er sagt S. 500—501: „Euler betrachtet die Formel

$$\log x = \lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

als allgemein gültig. Setzt man für x irgendeine negative Zahl und für n nach und nach immer größere positive ungerade Zahlen, so findet man für $\sqrt[n]{x}$ außer den unmöglichen Werten auch allemal einen reellen negativen Wert, und es sollte folglich jede negative Zahl außer den imaginären auch einen reellen und zwar negativen Logarithmen haben, der mit dem Logarithmen der gleichgroßen positiven Zahl verglichen, größer sein würde. Ferner setze man für n nach und nach immer größere positive aber gerade Zahlen und lasse x positiv sein. Alsdann hat $\sqrt[n]{x}$ zwei einander entgegengesetzte sonst gleiche Werte, und es müßte demnach $\log x$ einen doppelten, sowohl den Zeichen als der Größe nach verschiedenen Wert haben." Zu weiteren Angriffspunkten führt die Allgemeingültigkeit der Gleichung $a^m = a^{\frac{mn}{n}}$, wie dies ja schon bei Bernoulli und d'Alembert zu verzeichnen war, die ihre darauf gegründeten Einwände geometrisch formuliert hatten.

Seine Ansicht ist (S. 503) die folgende: „Zu jeder Größe,

[1]) Nov. Act. Upsal. IV, 1784, p. 205.

sie mag nun positiv oder negativ, reell oder imaginär sein, gehört ein möglicher Logarithmus und nicht mehrere."

Ferner sei noch erwähnt, daß Pietro Franchini in seiner „Teoria dell' Analisi" Roma 1792, I fünf Beweise für die Richtigkeit der Formel $\log(-z) = \log(+z)$ publiziert, freilich ohne neue Ideen beizubringen; und daß Malfatti[1]) eingehend untersucht, ob die Logistica einen oder zwei Zweige besitze.

Auch Kästner findet, wie so mancher vor und nach ihm, daß die von Euler beliebte Benutzung der höheren Analysis das Eindringen in die Natur der Logarithmen erschwere. Kästner erkennt an[2]), daß Hilfsmittel der höheren Mathematik notwendig seien, um „die Mannigfaltigkeit der unmöglichen Logarithmen zu kennen und zu brauchen", aber er meint, daß sich schon „aus den ersten gemeinen Lehren von den Logarithmen dartun lasse, daß jede bejahte Zahl einen möglichen Logarithmen hat und nur einen möglichen, und daß verneinte Zahlen keinen möglichen Logarithmen haben". Der Standpunkt ist, wie man sieht, ein noch ziemlich beschränkter. Um den Nachweis elementar zu liefern, erklärt Kästner jede „bejahte" Zahl als abgekürzten Ausdruck ihres Verhältnisses zur Einheit und setzt, um das anzudeuten, $+a = (1:a)$. Dann wird für ganze positive m die Potenz $a^m = m\cdot(1:a)$, d. h. das Resultat des m-fachen Verhältnisses $(1:a)$, $(a:a^2)$, $\ldots$ $(a^{m-1}:a^m)$; die gleiche Erklärung soll für gebrochene positive Exponenten $m = \frac{p}{q}$ gelten, „da das Verhältnis $(1:a)$ in q Teile geteilt werden könne, von denen dann p genommen werden, um $\frac{p}{q}\cdot(1:a)$ zu geben". So sei $(1:8) = 3\cdot(1:2)$, also

$$\frac{1}{3}(1:8) = (1:2) \quad \text{und} \quad \frac{2}{3}(1:8) = (1:4).$$

„Das Verhältnis $(1:-a)$ läßt sich mit keinem Verhältnis zwischen ein Paar bejahter Zahlen vergleichen." Ist bei konstantem positiven c und bei positivem y das Verhältnis $(1:y)$ das x-fache des Verhältnisses $(1:c)$, also $(1:y) = x\cdot(1:c)$ oder $c^x = y$, so liefert das ein logarithmisches System mit der Basis c. Ist x ein Bruch $\frac{2p+1}{2q}$, dann könnte y zwar einen verneinten Wert annehmen; aber diese Annahme würde besagen, das Verhältnis zwischen 1 und einer verneinten Zahl sei ein Vielfaches des Verhältnisses $(1:c)$. „Und das findet nicht statt." Den Grund bleibt Kästner uns schuldig. Denn das soeben

[1]) Mem. R. Acad. Mantova, 1795. p. 3. [2]) Leipz. Magaz. f. r. u. a. Mathem., Stück IV, 1786, p. 531.

in Anführungszeichen Gesetzte ist doch sicher kein Grund für diese Behauptung.

Paolo Frisi hatte in seiner Algebra[1]) eine Unterscheidung zwischen der reellen und der imaginären Null gemacht und die Behauptung aufgestellt, es sei nicht $0\cdot\sqrt{-1}=0$; denn daraus würde die unrichtige Proportion folgen

$$1:\sqrt{-1}=0:0.$$

Er meint, die imaginäre Null zeige eine reelle Größe an.

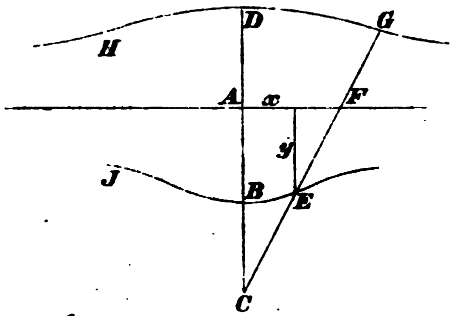


Fig. 5.

Diesen vermeinten Unterschied hatte G. Riccati[2]) durch geometrische Gründe zu stützen versucht. Es sei $HDG\ldots JBE\ldots$ eine Konchoide; $AB=FE=AD=FG=\cdots=a$; $CA=c$ und $c>a$. Dann bestehe zwischen den Koordinaten x, y jedes Kurvenpunktes $E=(x\,|\,y)$ die Gleichung $x=\dfrac{(c-y)\sqrt{a^2-y^2}}{y}$. Für $y=c$ ergebe das

$$x=0\cdot\sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}.$$

Aber für $y=c$ existiere nach der Definition der Kurve kein Kurvenpunkt; demnach könne x nicht gleich Null sein.

F. Th. Schubert[3]) weist diesen Einwurf ganz richtig zurück: Der Punkt C besteht tatsächlich als isolierter Kurvenpunkt, als „punctum conjugatum".

Ohne Kenntnis von dem Aufsatze Schuberts zu haben, auf den er sonst hingewiesen hätte, tut Greg. Fontana das Gleiche.[4]) Dabei wendet er sich polemisierend gegen die soeben besprochenen Ausführungen Frisis: Wäre $0\cdot\sqrt{-1}$ von 0 verschieden und etwa $=a+b\sqrt{-1}$, wo a, b reelle Größen bedeuten, so würde daraus das offenbar unrichtige Resultat $\sqrt{-1}=-\frac{a}{b}$ folgen; die von Frisi beanstandete Proportion $1:\sqrt{-1}=0:0$ weise wegen der Unbestimmtheit der rechten Seite gar nichts Widersinniges auf.

Franc. Pezzi[5]) sucht die Frage zu beantworten, warum Euler in seinen Formeln stets die Gestaltung $\cos\varphi+\sin\varphi\cdot\sqrt{-1}$ statt der ebenso naheliegenden und scheinbar ebenso berechtigten

[1]) Mailand 1782. [2]) Memorie mat. fis. Soc. Ital. IV, 1788, p. 116. [3]) Nov. Act. Petrop. VIII, 1790, p. 171. [4]) Memorie mat. fis. Soc. Ital. 1799, VIII, p. 174. [5]) Ibid. 1790, V.

$$\sin\varphi + \cos\varphi \cdot \sqrt{-1}$$

genommen habe. Er kommt zu dem Schlusse, dies sei erfolgt, weil die Darstellung der Potenzen des Ausdrucks bei der ersteren Form einem einfacheren Gesetze unterworfen sei, als bei der zweiten.

B. Fr. Thibaut[1]) gibt in einer historischen Arbeit eine kurze, gedrängte Übersicht über die wichtigsten Phasen der Entwicklung der Lehre von den imaginären Größen. Er fügt einige kritische Bemerkungen an, mit denen er sich in dieser Frage ganz auf die Seite von L. Euler stellt.

Wir nahen uns dem Schlusse; haben aber zunächst eine historische Bemerkung zu machen, die sich auf die Bezeichnung der imaginären Einheit bezieht. Im vorhergehenden haben wir diese, dem Gebrauche der damaligen Zeit entsprechend, mit $\sqrt{-1}$ bezeichnet; das jetzt meist übliche „i" hatte noch kein Bürgerrecht erlangt. Von wem stammt die Einführung dieses „i"? Wohl von Euler! Im vierten Bande der zweiten Auflage der Eulerschen „Institutiones Calculi integralis"[2]) findet sich als viertes „Supplementum" erstmalig gedruckt eine Abhandlung des Verfassers „De integratione formularum angulos sinusve angulorum implicantium" und als ihre erste Nummer: „1. De formulis differentialibus ... M. S. Academiae exhibit. die 5 Maii 1777". Darin heißt es: „Problema 1: ‚Proposita formula differentiali $\frac{\partial\varphi\cos\varphi}{\sqrt[n]{\cos n\varphi}}$, ejus integrale per logarithmos et arcus circulares investigare'. Solutio: Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud praestandi, nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posteriorem designabo, ita ut sit $ii = -1$, ideoque $\frac{1}{i} = -i$." Auf einen früheren Gebrauch des Zeichens i sind wir nirgends gestoßen.

Den Schluß unserer Darlegungen liefert eine Abhandlung von großer Bedeutung, der wir das Motto geben möchten: „habent sua fata libelli". Sie eilte ihrer Zeit voraus; sie blieb unbeachtet; sie wurde nach 100 Jahren der Vergessenheit entrissen und anerkannt. Die Abhandlung trägt den Titel: „Om direktionens analytiske Betegning"; ihr Autor ist Caspar Wessel.[3]) Zunächst heben wir aus einer Besprechung seitens des Herrn Valentiner einleitend folgendes heraus.[4])

---

[1]) Dissertat. inaugur. Gotting. 1797. [2]) Petropol. 1792—1794, 4 vol. 4°, (während die erste Auflage nur 3 Volumina aufweist). [3]) Danske Selsk. Skr. N. Samml. V, 1799. [4]) Jahrb. Fortschr. Math. 28 (1897), p. 499.

Diese Abhandlung, welche vermutlich die älteste ist, die eine vollständige Theorie der imaginären Zahlen enthält, wurde am 10. März 1797 der Kgl. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen vorgelegt. Der Verfasser, 1745 in Norwegen geboren, kam 1763 nach Dänemark, wo er später sein ganzes Leben als Feldmesser verbrachte. Er starb 1818. In seinem Berufe war er sehr geschätzt; einen großen Teil der Triangulation und der genauen Aufnahme des Königreichs hat er besorgt. Im Jahre 1815 wurde er Ritter des Danebrog; dies wird nur deshalb angeführt, weil es sicher damals für einen Feldmesser eine außergewöhnliche Ehrenbeweisung gewesen ist. Von seinen Fähigkeiten als Mathematiker haben wir gar keine Nachrichten. Die Tradition schweigt ganz davon. Nichtsdestoweniger ist das in Rede stehende Werk eine sehr bemerkenswerte Leistung.

Mit den eigenen Worten des Verfassers werde der Zweck des Werkes angegeben. Er sagt:

Diese Abhandlung hat zum Gegenstande die Frage, wie kann die Richtung analytisch dargestellt werden, das heißt, wie kann man die Abschnitte von Geraden darstellen, wenn man mittels einer einzigen Gleichung zwischen einer unbekannten Strecke und anderen bekannten Strecken einen Ausdruck finden wollte, welcher auf einmal die Länge und die Richtung der unbekannten Strecke darstellt.

Weiter sagt er: Was mir die Veranlassung gegeben hat, diese Abhandlung zu schreiben, ist, daß ich eine Methode suchte, welche mir erlaubte, die unmöglichen Rechnungen zu vermeiden. Nachdem ich sie gefunden habe, habe ich sie dazu verwendet, mich der allgemeinen Gültigkeit einiger wohlbekannten Formeln zu versichern.

— Soweit Valentiner. —

Wessel geht von geometrischen Betrachtungen aus und definiert die Addition zweier Strecken folgendermaßen: „man läßt die eine von dem Punkte ausgehen, in dem die andere endet; dann verbindet man durch eine neue Strecke die beiden Endpunkte der so erhaltenen gebrochenen Linie; die neue Strecke heißt dann die Summe der beiden gegebenen" (§ 1). „Das Produkt zweier Strecken muß in jeder Hinsicht aus dem einen Faktor in der gleichen Weise gebildet werden, wie der andere Faktor aus der positiv oder absolut genommenen Einheitsstrecke gebildet ist" (§ 4). Dabei ist es notwendig, daß die Faktoren solche Richtungen haben, die mit der Einheitsstrecke in einer Ebene liegen, und die Worte „in jeder Hinsicht" beziehen sich auf die Länge sowie auf die Richtung des Produktes. „Durch $+1$ wird die geradlinige positive Einheitsstrecke bezeichnet, durch ε eine andere, auf der ersten senkrechte, mit gleichem Anfangspunkte" (§ 5). Aus der Definition der Multiplikation folgt so-

fort $\varepsilon = \sqrt{-1}$. Es werden dann Strecken $a + \varepsilon b$ eingeführt und mit ihnen die Operationen der Addition, der Multiplikation, der Potenzierung und der Radizierung vorgenommen. Als Anwendung wird der Beweis des Satzes von Cotes gegeben (Bd. III², S. 410—411) und die Bestimmung aller Elemente eines Polygons geliefert, von dem die nötige Anzahl von Bestimmungsstücken bekannt ist.

Um zu einer analytischen Bestimmung der Lage von Punkten im drei-dimensionalen Raume zu gelangen, nimmt Wessel zu den beiden Einheitsstrecken $+1$ und $+\varepsilon$ eine dritte mit gleichem Anfangspunkte, auf 1 und ε senkrecht stehende $+\eta$ an, für die auch $\eta^2 = -1$ ist, und gibt die Form $x + \eta y + \varepsilon z$ als allgemeiner Ausdruck einer „Geraden", d. h. eines Strahles vom Anfangspunkte bis zum Punkte mit den Koordinaten x, y, z. Das Hauptproblem besteht in der analytischen Bestimmung der Rotation. Wessel zerlegt eine beliebige Rotation in zwei, deren eine die η-Achse, die andere die ε-Achse zur festen Drehungs-Achse hat. Soll sich $(x + \eta y + \varepsilon z)$ um die η-Achse durch einen Winkel a drehen, so drückt er dies durch die Bezeichnung

$$(x + \eta y + \varepsilon z) \,{}^{\prime\prime}\, (\cos a + \varepsilon \sin a)$$

aus, und ähnlich die Drehung um die ε-Achse durch den Winkel b durch die Bezeichnung $(x + \eta y + \varepsilon z) \,{}^{\prime\prime}\, (\cos b + \eta \sin b)$. Es ist, wie Wessel zeigt,

$$\begin{aligned}(x + \eta y + \varepsilon z) \,{}^{\prime\prime}\, (\cos a + \varepsilon \sin a) &= (x \cos a - z \sin a) \\ &\quad + \eta y + \varepsilon(x \sin a + z \cos a);\\ (x + \eta y + \varepsilon z) \,{}^{\prime\prime}\, (\cos b + \eta \sin b) &= (x \cos b - y \sin b) \\ &\quad + \eta(x \sin b + y \cos b) + \varepsilon z;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x + \eta y + \varepsilon z) \,{}^{\prime\prime}\, (\cos a + \varepsilon \sin a) \,{}^{\prime\prime}\, (\cos c + \varepsilon \sin c)\\ &\qquad = (x + \eta y + \varepsilon z) \,{}^{\prime\prime}\, (\cos[a + c] + \varepsilon \sin[a + c]).\end{aligned}$$

Auf die kurz gefaßte Theorie der Drehungen um die Achsen der η und ε folgt als Anwendung die Behandlung der sphärischen Polygone, die im wesentlichen auf eine sphärische Trigonometrie hinausläuft. T.-N. Thiele, einer der beiden Herausgeber der ins Französische übersetzten Abhandlung[1]), macht auf den merkwürdigen Umstand aufmerksam, daß Wessel bei seinen Untersuchungen nicht auf die Gleichungen von Gauß oder Delambre gestoßen sei, denen er doch so nahe war. Ebenso bedauert Thiele, daß der Verfasser die Behandlung der Drehung um die reelle Achse unterlassen hat; dieser eine Schritt hätte ihn ohne Zweifel zur Entdeckung der Quaternionen geführt. Wenngleich

[1]) Essai sur la représentation analytique de la direction par C. Wessel avec préface de H. Valentiner et T. N. Thiele. Copenhague 1897.

der Gedanke Wessels also nicht vollkommen von ihm selbst ausgeschöpft erscheint, so genügt doch der Inhalt der Arbeit, um die Priorität der Darstellung komplexer Größen Argand zu entziehen und Wessel zuzuerkennen. Argand, der 1806 seinen „Essai sur une manière de représenter des quantités imaginaires" veröffentlichte, hat zweifellos von der Idee des dänischen Mathematikers nichts gewußt — wie die ganze damalige wissenschaftliche Welt nichts mehr von ihr wußte; auch der „Essai" Argands wurde vergessen, hatte aber den „Direktionens analytiske Betegning" gegenüber das Glück, früher[1]) wieder entdeckt zu werden; so konnte Argand langezeit für den Entdecker gelten.

[1]) Annales de Gergonne 1813.

ABSCHNITT XXII

ELEMENTARE GEOMETRIE

VON

V. BOBYNIN

Lehrbücher der Elementargeometrie.

Ihre schon längst begonnene sowohl quantitative als auch qualitative Entwicklung fortsetzend, bereicherte sich im Laufe der zu betrachtenden 40 Jahre die lehrende elementargeometrische Literatur mit einer sehr ansehnlichen Anzahl neuer Errungenschaften. Infolge des unvollständigen bibliographischen Materials, das uns zu Gebote stand, sind die deshalb zum Teil verminderten und nur annähernd richtigen Ziffern, die die oben erwähnte Anzahl ausdrücken, folgende: 55 Gesamtlehrbücher, welche neben den Teilen, welche allen oder auch einigen Abteilungen der elementaren Mathematik gewidmet sind, auch Teile, die ausschließlich die elementare Geometrie betrachten, enthalten, 35 spezielle elementargeometrische Lehrbücher, 35 Übersetzungen der Elemente des Euklid und 10 Übersetzungen der Werke, die im Laufe der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts erschienen sind. Folgende Tabelle stellt die Verteilung dieser Ziffern in den Hauptländern Europas dar:

Länder	Sammlungen von Lehrbüchern	Lehrbücher der Elementargeometrie	Euklids Elemente	Übersetzungen der Schriften der 1. Hälfte d. 18. Jahrh.	Übersetzungen der Schriften der 2. Hälfte d. 18. Jahrh.
Deutschland	24	10	13	—	1
England	1	3	8	—	—
Frankreich	13	4	3	—	—
Italien	5	3	2	1	1
Niederlande	2	9	3	2	—
Polen	8	—	1	2	3
Rußland	2	6	2	3	6
Schweden	—	—	3	2	—

Einige der hier angegebenen Bücher sind mehrmals verlegt worden. Zur Ergänzung und Erklärung dieser Tabelle ist folgendes zu bemerken. Werke der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts, deren Übersetzungen in der Tabelle angegeben sind, waren folgende: Christian Wolffs Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften (Halle 1710) waren ins Holländische, Polnische, Russische und Schwedische übersetzt. Clairaut, Éléments de géometrie (Paris 1741) waren ins Schwedische, Holländische und Polnische übersetzt. Georg Wolf-

gang Krafft, Kurtze Einleitung zur theoretischen Geometrie, zum Gebrauche der studirenden Jugend in dem Gymnasio bey der Academie der Wissenschaften in St. Petersburg (1740). Weidlers Institutiones mathematicae (Wittenberg 1718). Diese beiden Werke waren nur ins Russische übersetzt. Das letzte Werk, ebenso auch das obengenannte Buch Wolffs sind mehrmals auch bei sich in Deutschland verlegt worden. Zu den Übersetzungen des Werkes Wolffs in der Tabelle ist auch die 2. italienische Auflage des Buches Christiani Wolfii[1]) Elementa Matheseos universae[2]) mit eingerechnet. Als Werke, die in einiger Beziehung zu den Elementen des Euklid stehen, obwohl sie in die Tabelle nicht eingeführt sind, sind folgende anzugeben: in England R. Simson, The Elements of Euclid. Notes critical and geometrical (Glasgow 1762 und 1781) und The philosophical and mathematical Commentaries of Proclus, surnamed Plato's Successor, on the I Book of Euclids Elements and his life by Marinus etc. (London 1788); in Deutschland Euclid's Data verbessert und vermehrt von R. Simson, übersetzt von Ch. Schwab (Stuttgart 1780, 8⁰). In England, Deutschland und Frankreich beansprucht die vollständige Abwesenheit der übersetzten Werke aus anderen Sprachen besondere Beachtung. In Frankreich und England war nicht eine einzige Übersetzung vorhanden. In Deutschland nur eine, nämlich die Übersetzung aus dem Holländischen des Werkes von Swinden, Anfangsgründe der Meßkunde. Die größte Zahl der Übersetzungen erschien in den am wenigsten zivilisierten Ländern, nämlich in Rußland, und schon in geringerem Maße in Polen. In diesen beiden Ländern trifft der Forscher wohl fast zum erstenmal Übersetzungen an, die nicht nach gedruckten Ausgaben, sondern nach Handschriften angefertigt sind. Als derartige Übersetzungen sind anzugeben: in Rußland Eulers Geometrie[3]) und das bereits oben angeführte Werk Kraffts und in Polen „Geometrie" von Lhuilier[4]).

Die wichtigste der Angaben, die die angeführte Tabelle dem Forscher liefern, ist diejenige, welche die Beziehung der „Elemente" des Euklid zu dem Fache des Unterrichts der Geometrie in den verschiedenen Ländern Europas bezeichnet. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß die „Elemente" des Euklid ihre uralte Stellung, als der einzigen Lehrbücher der Elementargeometrie, nur in England in der

[1]) Diese Vorlesungen III², S. 529—531. [2]) Editio secunda veronensis. Veronae 1788—98, vol. 5; 4⁰. [3]) Leonh. Eulers Geometrie, zum Gebrauche in dem Gymnasio bei der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Aus dem Lateinischen. 1765. [4]) Geometrie für die Volksschulen. 1. Teil. Warschau 1780. 2. Teil Krakau 1781.

zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts behalten haben. Ungeachtet dessen, daß Deutschland nach der Anzahl der Ausgaben der Werke des Euklid alle anderen Länder übertrifft, kann dennoch von dem vorherrschenden, geschweige dem ausschließlichen Gebrauch beim Unterricht der Elementargeometrie keine Rede sein. Das bezeugen uns mit voller Deutlichkeit die noch viel bedeutenderen Zahlen der Lehrbücher, die von einheimischen Autoren verfaßt und verlegt worden sind. Was Frankreich anbetrifft, kann der direkte Gebrauch der „Elemente" des Euklid beim Unterricht der Elementargeometrie jetzt als vollständig aufgehoben betrachtet werden. Die übrigen Hauptländer Europas endlich nehmen Mittelstellungen zwischen Deutschland und Frankreich ein, dennoch näher an Frankreich stehend. Auf diese Weise erreichte das Bestreben, die „Elemente" des Euklid beim Unterricht der Elementargeometrie durch zweckentsprechendere Lehrbücher zu ersetzen, was der Philosoph Ramus als erster ausgesprochen und im Laufe der Zeit sich immer verstärkt hatte, in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts bedeutende Resultate. Zur selben Zeit macht auch das Verständnis der Ursachen des obengenannten Bestrebens Fortschritte, obgleich in geringerem Maße. Da die hauptsächlichsten dieser Gründe sehr tief im Wesen der Sache selbst liegen, war das Verständnis derselben in der zu betrachtenden Zeit noch nicht erreicht. Man hatte bloß Zeit, diejenigen ihrer Folgen kennen zu lernen, die ohne tiefe und umfassende historische Kenntnisse dem unmittelbaren Beobachter zugänglich waren.

In demjenigen Lande, wo die zu betrachtende Strömung sich am meisten kundgegeben hat, und deshalb beinahe ihr Ziel voll erreicht ist, nämlich in Frankreich begegnet der Forscher der Angabe dieser oder jener Ursache bei vielen Schriftstellern. Nach den Worten d'Alemberts[1]) sind die Beweise des Euklid, ungeachtet ihrer Genauigkeit, dem Verständnis so schwer zugänglich, daß es vielen berühmten Mathematikern nicht gelungen ist, ihrer vollständig Herr zu werden. Bouillau z. B. gestand offen, daß er sie niemals gut verstand, und der noch berühmtere Vieta verdächtigte ihn des Paralogismus, was nur aus mangelhaftem Verständnis zu erklären ist. Im Discours préliminaire zu derselben Ausgabe[2]) sagt Bossut, daß viele, vollkommen die Vorzüge des prachtvollen Werkes des Euklid anerkennend, ihm doch Vorwürfe machen wegen zu großer Anzahl von Bestimmungen und scholastischen Einteilungen, wegen zu strenger und verfeinerter Beweisführung von Wahrheiten, die schon an und

---

[1]) Encyclopédie méthodique. Mathématiques, Tome II, p. 129. [2]) Ebenda, Tome I, p. IX.

für sich vollkommen klar sind. Man ist geneigt, anzunehmen, bemerkt er weiterhin, daß es den spitzfindigen und kleinlichen Methoden griechischer Sophisten gelungen ist, auch in die exakten Wissenschaften einzudringen. Später, in seiner Histoire générale des mathématiques[1]), die den erweiterten und ergänzten Discours darstellt, spricht derselbe Autor vom Charakter und den Eigenschaften der Beweise des Euklid. Letztere verursachen nach seinen Worten Anfängern große Schwierigkeiten, weil sie indirekt, nicht selten lang und verwickelt sind. Gerade diese Eigenschaften zwangen viele der neuesten Gelehrten bei der Herausgabe der „Elemente" des Euklid leichtere und einfachere Beweise anzuführen. Andere jedoch fanden es am nützlichsten, in ihren eigenen Aufsätzen sich ganz und gar von der Methode des Euklid zu entfernen. Die bedeutendsten aus der Zahl der ersten, die Bossut beim Namen nicht anführt, waren selbstverständlich in England: Robert Simson mit seinem Werk The Elements of Euclid. Notes critical and geometrical[2]) und James Williamson mit seiner Ausgabe The Elements of Euclid, with dissertations[3]) und in Deutschland Lorenz mit seiner vollen Ausgabe der „Elemente" des Euklid[4]) und der teilweisen: der sechs ersten Bücher[5]), des elften und zwölften[6]), und der ersten acht Bücher mit dem elften und zwölften[7]). Montucla, dieser überzeugte Anhänger der „Elemente" des Euklid, verweilt besonders in der ihnen geweihten Apologie bei der Unzufriedenheit vieler Geometer über die Verteilung des Gegenstandes[8]). Die Verteidigerrolle, die Montucla in bezug auf die „Elemente" des Euklid auf sich genommen hatte, verhinderte ihn jedoch nicht, am Ende seiner Apologie den Nutzen der Werke, die von den neuesten Autoren als Ersatz derselben verfaßt worden sind, anzuerkennen. Sich der Meinung der Gelehrten, daß die Erlernung der Geometrie nach den „Elementen" des Euklid für Anfänger sehr schwierig sei, anschließend, findet er es für nötig, die Geometrie für Anfänger zugänglicher zu machen, hauptsächlich denjenigen, die nicht beabsichtigen, Geometer von Fach zu werden.

Von den Geometern der 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts, die besonders scharf ihre Unzufriedenheit über die Verteilung des Materials in den Elementen aussprachen, genügt es auf Lacroix hinzuweisen, welcher in seinem Werk „Essais sur l'enseignement" diese Verteilung als unordentlich kennzeichnet. Als Beispiel nimmt er übrigens nur

---

[1]) Hist. gén. d. math., Tome I, p. 29. [2]) Glasgow 1762, 1781 usw., 8 Auflagen, 8°. [3]) Oxford 1781—90; 2. vol. 4°. [4]) In 15 Büchern, Halle 1781; 2. Aufl. 1798, 8°. [5]) Halle 1773. [6]) Halle 1781, 8°. [7]) Halle 1798, 8°. [8]) Histoire des mathématiques I, p. 218—222.

eines, dafür jedoch besonders wichtiges, nämlich Euklids Folgerung des Grundsatzes der Theorie der proportionalen Linien aus der Vergleichung der Flächen der Dreiecke.

Womit Lacroix in unmittelbare Berührung kam, und was ihn dabei besonders unangenehm berührte, waren die durch die „Elemente" des Euklid und durch ihre seit Jahrhunderten erworbene Autorität in der Wissenschaft und im Unterricht hervorgerufenen Schwierigkeiten für die neueren Autoren der Elemente der Geometrie. Diese Schwierigkeiten sieht er erstens in der Konkurrenz mit den Werken des Euklid, welche immer sehr gefährlich für die neuesten Autoren ist, ungeachtet jeden Beweises ihrerseits zugunsten des gewählten Planes; zweitens in der Notwendigkeit, nach dem Beispiel des Euklid und überhaupt der griechischen Geometer sich der synthetischen Methode zu bedienen auf einem Gebiete, wo alle anderen Teile sich der analytischen bedienen, wodurch sie dem Lernenden zugänglicher und geläufiger werden; und drittens in der drohenden Möglichkeit, zu jeder Zeit Vorwürfe sowohl von den Anhängern als auch den Gegnern des Euklid zu erhalten. Von ersteren für die Unzulänglichkeit in der Strenge der Beweise, die von den Alten festgesetzt sind, und von letzteren für die Unterwerfung dieser Forderung, welche kleinliche, nur den Verstand verwirrende Formen verursachen, als auch für die Beseitigung der analytischen Prozesse, welche die Methode der Erfindung darstellen.

Das kritische Verhalten zu den „Elementen" des Euklid, welches sich in den Kreisen der Mathematiker festgestellt hatte, und welches eine große Anzahl Arbeiten, die der Erörterung der Elemente der Geometrie gewidmet sind, hervorgerufen hatte, mußte vor jeden philosophischen Denker die Frage stellen, was eigentlich die Elemente der Geometrie seien. Woraus soll sich ihr Inhalt bilden? Die Aufsätze d'Alemberts in der Encyclopédie méthodique[1]) waren in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wohl nahezu die bedeutendsten Versuche, diese Frage zu lösen.

D'Alembert unterscheidet in jeder Wissenschaft, darunter auch in der Geometrie, zwei Arten von Elementen. Wenn man in einer Wissenschaft alle Sätze oder Wahrheiten, welche die Grundlage zu allen anderen bilden, absondert, und sie in ein Ganzes vereinigt, erhält man die Elemente der ersten Art. Sie bilden sozusagen den Keim, aus welchem alle Teile samt ihren Details entwickelt werden können, was daraus folgt, daß sie alle allgemeinen Wahrheiten und

---

[1]) Élémens des sciences. Mathématiques, Tome I, p. 617—625. Des élémens de Géometrie. Ebenda, Tome II, p. 133—136.

Sätze, welche die Elemente bilden, wenn auch nicht augenscheinlich, alle anderen Wahrheiten enthalten. Daraus folgt also, daß in ihren Elementen erster Art jede Wissenschaft in ihrem vollen Umfang enthalten ist. In der Geometrie würden nicht nur diejenigen Sätze solche Elemente sein, die die Prinzipien der Ausmessung und der Eigenschaften der ebenen Figuren enthalten, sondern auch diejenigen, die die Prinzipien der Anwendung der Algebra auf Geometrie und der Differential- und Integralrechnung bei krummen Linien enthalten.

Wahrheiten oder Sätze, die die Wissenschaft bilden, können auch von einem anderen Standpunkt aus betrachtet werden. Einige von ihnen können in sich selbst oder auch in ihren Folgerungen den Gegenstand auf die einfachste Art betrachten. Die Gesamtheit solcher Wahrheiten oder Sätze samt ihren genau angeführten Folgerungen stellen die Elemente der zweiten Art dar, zwar allgemein gebräuchlicher, jedoch vom Standpunkt der Philosophie aus den Elementen der ersten Art viel nachstehend. Dieselben stellen folglich die detailliertere Betrachtung der einfachsten Teile des Gegenstandes dar. In der Literatur der Geometrie bilden sie die Elemente der gewöhnlichen Geometrie, welche nichts weiter betrachtet, als die Eigenschaften der ebenen Figuren und des Kreises, und deshalb, wenn auch mit allen Einzelheiten, dennoch den einfachsten Teil des Gegenstandes enthalten.

Weiterhin die einzelnen Stadien der Entwicklung jeder Wissenschaft betrachtend, dargestellt erstens durch die Anhäufung neuer Kenntnisse, und zweitens der sie ablösenden Systematisierung dieser Kenntnisse, erklärt d'Alembert das Unzureichende der Traktate, die die ersten Versuche genannter Systematisierung darstellen, damit, daß die Autoren gewöhnlich nicht zu den Erfindern und Erschaffern der Wissenschaften gehören. Jeder Traktat einer Wissenschaft, ob voll oder bloß ihre Elemente darstellend, muß nach seiner Meinung derjenigen Richtung folgen, nach der der Erfinder ging, da einzig nur diese Richtung als fähig erklärt werden kann, den Zusammenhang der Wahrheiten oder Sätze der Wissenschaft in ihrem natürlichen Zustand darzustellen. D'Alembert vergißt dabei nicht, auch auf diejenigen Fälle hinzuweisen, in denen der Erfinder selbst nicht imstande erscheint, den schon durchgegangenen Weg wieder einzuschlagen, was jedesmal geschieht, wenn er während seiner Forschungen sich einer gewissen Art Instinkt überläßt, anstatt der Spekulation[1]). Nach weiteren vier Seiten[2]) kehrt d'Alembert zu dem gleichen

[1]) Élémens des sciences, p. 618—619. [2]) Ebenda, p. 622—623.

Gegenstand zurück. Nachdem er die Frage stellt, ob es ratsam ist, sich beim Auslegen der Elemente der Reihenfolge, an welche sich die Erfinder hielten, anzuschließen, spricht er folgende Gedanken aus: Zweifellos ist diese Reihenfolge überhaupt die vorteilhafteste, als die am meisten dem Gedankengang entsprechende. Die Vernunft lehrend, klärt sie auf, weist den Weg, welcher weiter zu verfolgen ist, und gibt die Möglichkeit, auf diesem Wege jeden folgenden Schritt vorauszusehen. Diese Reihenfolge ist es nämlich, die als analytische Methode bezeichnet wird, die von zusammengesetzten zu abstrakten Ideen führt, aufsteigend von bewußten Schlußfolgerungen zu unbewußten Prinzipien, und die Entwicklung der letzten durch die Verallgemeinerungen der ersten erreicht.

Für die Elemente der Geometrie schlägt d'Alembert folgenden Plan vor. Indem er ihre gewöhnliche Teilung in Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie als nicht zutreffend erklärt, weil sie neben der Betrachtung der geraden Linien und der Ebene die Betrachtung der Kreislinie und der sphärischen Figuren vergißt, teilt er sie in die Geometrie der geraden Linien und der Kreislinie, Geometrie der Flächen und Geometrie der Körper. Der erste dieser drei Teile zerfällt in zwei Abteilungen. In deren erster werden die Linien ihrer Lage nach betrachtet, und in der zweiten ihre Beziehungen zueinander. Ungeachtet dessen, daß die gerade Linie unvergleichlich einfacher ist, als die Kreislinie, müssen beide in den Elementen dennoch zusammen betrachtet werden, und nicht jede besonders, da die Eigenschaften der Kreislinie ungemein nützlich sind beim Beweise dessen, was zur Vergleichung der geraden Linien ihrer Lage nach dient. Der Satz von der Ausmessung des Winkels mittels des Kreisbogens, beschrieben aus seinem Scheitel als Zentrum, und das Prinzip der Kongruenz bilden zusammengenommen die Basis des ganzen ersten Teils der Geometrie der Linien in den Elementen, da mit ihrer Hilfe alle ihre Sätze bewiesen werden können. Die Erörterung dieses ersten Teiles abschließend, muß der Verfasser zur Auslegung des zweiten Teiles übergehen, als dessen Grundsatz, nach d'Alemberts Meinung, das Theorem von der Teilung der Seiten des Dreiecks in proportionale Teile durch eine seiner Basis parallele Linie dient. Um dieses Theorem zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß wenn die erwähnte Parallele durch die Mitte einer der beiden Seiten des Dreicks geht, sie auch durch die Mitte der anderen geht, weil danach leicht zu beweisen sein wird, daß im Falle der Kommensurabilität des Abschnittes mit der ganzen Seite die erhaltenen Abschnitte proportional sind. Was den entgegengesetzten Fall anbetrifft, bleibt nur übrig, mittels der apagogischen

Methode zu beweisen, daß das eine von den betrachteten Verhältnissen weder kleiner noch größer sein kann als das andere, es ihm folglich gleich sein muß. Die apagogische Methode sowohl in diesem als auch in den meisten anderen Fällen, wo es sich um inkommensurabele Größen handelt, wird an Stelle der direkten Beweise, welche hier nicht anwendbar sind, aus folgenden Gründen gebraucht. In den Begriff der inkommensurabelen Größen gehört, wenn auch nicht augenscheinlich, auch die Idee der Unendlichkeit, welche sich uns immer als negativer Begriff der Endlichkeit darstellt, was auch als natürliche Folge hat, daß alles, was die mathematische Unendlichkeit anbetrifft, unmöglich direkt und a priori zu beweisen ist. In vollkommener Anerkennung der Schwierigkeiten, welche die inkommensurabelen Größen Anfängern verursachen, gibt d'Alembert den Rat, sie wegen ihrer Wichtigkeit in der Geometrie und besonders in der Theorie der Proportionen der Linien lieber früher als später in die Elemente einzuführen. Dabei ist es unmöglich, ohne den einzigen Satz auszukommen, den die Theorie der inkommensurabelen Größen verlangt und der die Grenzen der Größen behandelt. Dieser Satz lautet folgendermaßen: Größen, welche die Grenzen einer und derselben Größe bilden, oder Größen, welche eine und dieselbe Grenze haben, sind einander gleich.

Die Geometrie der Flächen behandelt, nach d'Alemberts Ansicht, ihre Ausmessung, ebenso wie die Geometrie der Körper die Ausmessung des Rauminhalts behandelt. Als Grundprinzip beim Ausmessen der ersten dient das Prinzip der Ausmessung des Rechtecks, und in der zweiten das Prinzip der Ausmessung des rechtwinkligen Parallelepipedons. Die Schwierigkeit, die wir in der Geometrie der Körper antreffen und der keine in der Geometrie der Flächen entspricht, liegt in dem Satze von dem Inhalte der Pyramide, der den dritten Teil des Inhalts eines Parallelepipedons darstellt, welches mit der Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat. Um diesen Satz zu beweisen, ist es notwendig, zuerst den Satz von der Volumengleichheit der Pyramiden, die gleiche Grundfläche und Höhe haben, zu beweisen, was leicht zu bewerkstelligen ist mittels der Exhaustionsmethode. Der gleichen Methode oder der Methode der Grenzen muß man sich in der Geometrie der Flächen bedienen, beim Messen des Flächeninhalts des Kreises und in der Geometrie der Körper beim Berechnen der Oberfläche und des Inhalts der Kugel. Zu diesem Zweck muß man z. B. im ersten Fall zeigen, daß die Grenze des Flächeninhalts beim eingeschriebenen oder umgeschriebenen Vieleck das Produkt des Umfanges in die Hälfte des Radius ist, und danach, weil augenscheinlich die Fläche des Kreises als dieselbe

Grenze erscheint, endgültig daraus schließen, daß die Fläche des Kreises das Produkt des Umfanges mit dem halben Radius ist, oder des Radius mit dem halben Umfang.

Von der Methode der Grenzen spricht d'Alembert auch in den Abhandlungen Différentiel[1]) und Limite[2]). In der zweiten Abhandlung, deren Hauptteil dem Abbé de la Chapelle[3]) gehört, bemüht sich d'Alembert, dessen Definition der Grenzen klarer und strenger zu machen. De la Chapelle gab folgende Definition: Eine Größe ist dann die Grenze einer anderen Größe, wenn die zweite der ersten näher als jede gegebene Größe kommen kann, wie klein der Abstand auch vorausgesetzt würde, dabei aber auf solche Weise, daß die sich annähernde Größe niemals diejenige übertreffe, der sie sich nähert; die Differenz zwischen einer solchen Größe und der Grenze erscheint auf diese Weise absolut undefinierbar. D'Alembert ergänzt diese Definition dahin, daß die Grenze niemals zusammenfällt, oder niemals gleich wird mit derjenigen Größe, als deren Grenze sie erscheint; daß sie jedoch, sich ihr immer mehr nähernd, sich von ihr so wenig als nur möglich unterscheiden kann. Der Kreis z. B. ist die Grenze der eingeschriebenen und umschriebenen Vielecke, weil er niemals mit ihnen zusammenfällt, obgleich dieselben sich ihm bis zur Unendlichkeit nähern können. Danach, um an einem Beispiel die Bedeutung dieser Bemerkung zur Beleuchtung einiger mathematischen Sätze zu zeigen, verweilt er bei der Untersuchung des Ausdruckes der Summe der unendlich abnehmenden geometrischen Progression. Überhaupt räumt d'Alembert der Theorie der Grenzen wichtige Bedeutung ein, weil er in ihr die Grundlage der wahren Metaphysik der Differentialrechnung sieht. In der Abhandlung Différentiel führt d'Alembert, sich des ersten der beiden von de la Chapelle angeführten Grundsätze der Methode der Grenzen bedienend, zugleich auch seinen Beweis an, in welchem er sich der apagogischen Methode bedient. Dieser Satz und der ihm beigefügte Satz von de la Chapelle sind in seiner Schrift folgendermaßen dargestellt: 1. Wenn jede von zwei Größen die Grenze ein und derselben Größen darstellt, so sind diese Größen einander gleich. 2. Wir nehmen an, daß $A \times B$ das Produkt zweier Größen A, B ist. Nehmen wir ferner an, daß C die Grenze der Größe A, und D die Grenze der Größe B ist, so folgt weiter, daß das Produkt $C \times D$ unbedingt die Grenze von $A \times B$, dem Produkt zweier Größen A, B, sein wird. Den Beweis dieser Sätze führt der Verfasser nicht an, den Leser an

---

[1]) Encyclopédie méthodique. Mathématiques I, p. 520—526. [2]) Ebenda II, p. 309—310. [3]) Ebenda I, p. 521.

sein Werk „Institutions de Géométrie“ verweisend, um sich mit ihm vertraut zu machen. Was jedoch den erwähnten Beweis d'Alemberts des ersten Satzes anbetrifft, so besteht er aus folgendem: Wir nehmen an, daß Z und X die Grenzen ein und derselben Größe Y sind, ich sage $X = Z$, denn wenn zwischen ihnen irgend eine Differenz V wäre, so wäre $X = Z \pm V$. Aber nach Voraussetzung kann die Größe Y sich beliebig an X nähern, d. h. die Differenz zwischen X und Y kann beliebig klein sein. Da jedoch Z sich von X um die Größe V unterscheidet, so folgt daraus, daß Y sich nicht mehr als bis zur Größe V dem Z nähern kann, und folglich ist Z nicht die Grenze von Y, was der Voraussetzung widerspricht[1]).

Dem Abbé de la Chapelle gehört auch in der Encyclopédie der Artikel über die Exhaustionsmethode an[2]). Er definiert sie als Mittel zum Beweise der Gleichheit zweier Größen, indem man aufdeckt, daß ihre Differenz kleiner als jede darstellbare Größe ist, und ebenso beim Gebrauch der apagogischen Methode. Aus dem Grunde, daß ungeachtet der Einfachheit des Prinzips der Exhaustionsmethode deren Anwendung nicht selten die Beweise sehr lang und kompliziert macht, schlägt d'Alembert vor, sie durch das Prinzip des unendlich Kleinen zu ersetzen, indem er die völlige Identität der beiden Prinzipien zeigt, von denen das zweite bloß der verkürzte Ausdruck des ersten ist.

Um beim Verteilen des Materials strenger in der Reihenfolge und dem System zu sein, sollte die Behandlung der Kugelfläche zur Geometrie der Flächen gerechnet werden. Gleichzeitig gibt d'Alembert den Rat, die Theorie der Proportionen der Linien mittels des geometrisch bewiesenen Satzes, daß bei vier proportionalen Linien das Produkt der beiden äußeren dem Produkt der beiden inneren gleich ist, ebenfalls der Geometrie der Flächen näher zu bringen. Den Gebrauch der algebraischen Rechnung beim Beweis dieses Satzes, ebenso wie auch in allen anderen Fällen findet d'Alembert für die Elemente der Geometrie vollständig überflüssig, wegen der völligen Unfähigkeit dieser Rechnung, in irgend einem Maße bei deren Darstellung zur Erleichterung beizutragen. Als ein sehr nützliches, zur Entwicklung und Stärkung des Verstandes des Lernenden dienendes Resultat der zu betrachtenden Annäherung erscheint die Beobachtung, wie zwei einzeln betrachtete Theorien im Beweise verschiedener Sätze zusammentreffen, wie z. B. der Satz von dem Quadrate der Hypotenuse.

Nachdem d'Alembert seinen Plan für die Elemente der Geo-

---

[1]) Encycl. méth. I, p. 521. [2]) Ebenda I, p. 703—704.

metrie dargelegt hat, bemerkt er, daß sowohl diese Darlegung als auch die allgemeinen Erwägungen, die im Artikel Éléments des Sciences ausgesprochen sind, alle beweisen, daß es nicht einen Geometer gibt, von dem gesagt werden könne, daß er erhaben über die Aufgabe sei, die Elemente der Geometrie zu verfassen; daß diese Zusammenstellung nur von einem Mathematiker ersten Ranges gut verfaßt werden kann, und daß endlich diese Aufgabe der Verfassung der bestmöglichen Elemente der Geometrie als würdig solcher Kräfte erscheine wie Descartes, Newton, Leibniz, Bernoulli und anderer. Als Gegensatz zu diesen idealen Forderungen spricht d'Alembert folgende unerbittliche Kritik der traurigen Gegenwart aus: Es gibt womöglich keine einzige Wissenschaft in der Gegenwart, von der Zukunft schon nicht zu reden, in der so viele den Elementen gewidmete Arbeiten erschienen sind als in der Geometrie. Und diese Werke sind größtenteils von mittelmäßigen Mathematikern verfaßt, deren geometrische Kenntnisse nicht über die Grenzen des Inhalts ihrer Schriften gehen, und die deshalb absolut nicht imstande sind, ihrem Gegenstande gerecht zu werden. Zu alledem ist es notwendig, noch hinzuzufügen, daß es beinahe keinen einzigen Autor der Elemente der Geometrie gibt, der in seinem Vorwort nicht mehr oder weniger schlecht spreche über seine Vorgänger in diesem Fache.

Die Bemerkungen, die dazu dienen, die Elemente der Geometrie nach Möglichkeit zu vervollkommnen, treffen sich nicht nur in der Darlegung des Planes derselben an, sondern auch im Schlußteil des ihnen gewidmeten Aufsatzes, ebenso auch in einigen anderen Aufsätzen von d'Alembert, die sich in der Encyclopédie méthodique befinden (z. B. „Axiome", „Courbe"). Axiome sind vollständig nutzlos, sowohl für alle Wissenschaften im allgemeinen, als auch im einzelnen für die Geometrie. Was für eine Notwendigkeit z. B. kann in dem Axiom vom Ganzen und seinen Teilen sein, um zu sehen, daß die Hälfte einer Linie kleiner als die ganze Linie ist? Das Festlegen von Axiomen soll überhaupt nicht in den Elementen der Geometrie stattfinden. Völlig verboten soll auch die Auslegung von Definitionen werden, dieses besonders notwendigen Teiles. Definitionen sofort im Anfang anzuführen ohne besondere Art der Analyse bedeutet nicht nur gegen die gesunde Philosophie handeln, sondern auch vollständig entgegen dem natürlichen Gang der Gedanken. Ist es z. B. am Platze, direkt zu sagen: Die Fläche ist die Grenze eines Körpers, der keine Dicke hat? Ist es nicht besser, anfangs den Körper zu betrachten so wie er wirklich ist, und erst darnach zu zeigen, wie man mit Hilfe einer Reihenfolge von Abstraktionen zur

Vorstellung von einem Körper, als von einem räumlichen Gebilde, und danach erst durch eine neue Reihe von Abstraktionen zur aufeinander folgenden Betrachtung von Oberfläche, Linie und Punkt kommen kann? Endlich sind auch solche Fälle anzutreffen, besonders in vollen Kursen der Geometrie, bei welchen die Definition eines Gegenstandes erst nach seiner Analyse gegeben werden kann, d. h. wenn sie als Resultat derselben erscheint. Die gerade und die krumme Linie dürfen überhaupt nicht in den Elementen definiert werden, hauptsächlich aus dem Grunde, weil ihre Begriffe gar nicht auf noch einfachere Ideen zurückgeführt werden können. Das Streben zur Genauigkeit darf niemals zu einem Hasten nach pseudoidealer Genauigkeit werden. Den Raum z. B. soll man als solchen darstellen, wie ihn alle Menschen verstehen. Sich seinethalben nach Beispiel der Sophisten Schwierigkeit erschaffen, ist vollständig unnütz. Auch um nur gewöhnlich scheinende Genauigkeit zu erlangen, soll man sich nicht grober unvollkommener physischer Formen bedienen, zum Ersatz abstrakter mathematischer Hypothesen, wie z. B. ein Zeitgenosse d'Alemberts zum Ersatze des Begriffes einer geraden Linie sich der Vorstellung eines straff gespannten Fadens bediente.

Außer d'Alembert beschäftigten sich mit der Vervollkommnung der Elemente der Geometrie auch viele andere Gelehrte, sowohl in separaten Werken, als auch in Aufsätzen in Zeitschriften. Louis Bertrand[1]) (1731—1812), in Genf geboren, war bis zur Revolution Professor der Mathematik an der Akademie zu Genf, und vor diesem Amte lebte er längere Zeit in Berlin, wo er Mitglied der dortigen Akademie der Wissenschaften geworden war. In den Sitzungen derselben verlas er einige von seinen mathematischen Arbeiten und von den Mitgliedern stand er Euler am nächsten. In seinem für Anfänger bestimmten Kursus der elementaren Mathematik, Dévéloppement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques, prise dans toute son étendue[2]), macht er sie zum Hilfsgegenstand für die Theorie des Kreises und der geraden Linie, als dem Hauptgebiet der Elemente der Mathematik. Den ganzen ersten Band[3]) der Arithmetik und der Algebra bestimmend, widmet er den größten Teil[4]) des zweiten Bandes[5]) den Elementen der Geometrie, die er ebenso wie d'Alembert in drei Teile teilt: der erste „Von der geraden Linie und Kreislinien"[6]), der zweite „Vom Ausmessen der Stücke der Ebene, die von geraden Linien und Kreisen begrenzt sind"[7])

---

[1]) Poggendorff, I, S. 171. [2]) 2 vol. Genève 1778. 4°. [3]) 1 + XXXII + 676 S. [4]) 388 S. [5]) 1 + 646 S. und XIX Tafeln. [6]) 160 S. [7]) 161—194 S.

und der dritte Teil, der sich mit dem Ausmessen krummer Flächen und Körper beschäftigt, die vom Kreise und von der geraden Linie abhängen[1]). Sieben Kapitel bilden den ersten Teil. Das erste handelt von der Ebene, von geraden Linien und von Winkeln; das zweite von den Bedingungen, die die Dreiecke bestimmen; das dritte von der Ähnlichkeit der Dreiecke und einiger ebener Figuren; das vierte von der relativen Lage der Geraden und der Kreislinie, ebenso auch von zwei Kreislinien; das fünfte von der Lösung von 19 Aufgaben auf Grund der Prinzipien, die in den vorhergehenden Kapiteln dargelegt sind; das sechste von den eingeschriebenen und umschriebenen Vielecken und von der Rektifikation der Kreislinie und das siebente von der Krümmung der Kurven und Kreislinien. Zwei Kapitel, die den zweiten Teil bilden, enthalten folgendes: das erste die ebenen geradlinigen Flächen, und das zweite den Flächeninhalt des Kreises und seiner Teile. Endlich von den sechs Kapiteln, die den dritten Teil bilden, handelt das erste von der Begegnung der geraden Linien und Ebenen; das zweite von den Körpern, regulären Körpern und von der Kugel; das dritte von den Prismen, Pyramiden, Kegeln und Zylindern, ebenso auch von einigen Definitionen, die die Kugel betreffen; das vierte vom Ausmessen der Oberflächen der Zylinder, geraden Kegel, der Kugel und ihrer Teile; das fünfte von den Volumen der Prismen, Pyramiden, Kegel, der Kugel und ihrer Teile und das sechste von der Ähnlichkeit der Körper. Bezüglich des zweiten Teiles bemerkt Bertrand, daß man das Kapitel aus dem dritten Teil von den krummen Oberflächen, zu deren Ausmessung die Kenntnisse von den Eigenschaften des Kreises und der geraden Linie genügen, übertragen könne. Mit demselben Rechte müßte man es aus dem dritten Teil in den ersten übertragen, der da handelt von der Begegnung gerader Linien und Ebenen mit alle dem, was sich zur Konstruktion regelmäßiger Körper und den Abständen ihrer Mittelpunkte von den Seiten und Scheiteln der Ecken, ebenso auch den Querschnitten der Prismen, Zylinder, Pyramiden usw. von Ebenen, welche zu ihren Grundflächen parallel sind, bezieht. Er unternimmt aber weder das eine, noch das andere, weil er dadurch mit der anerkannten Sitte in Widerspruch geraten würde, und welches vollständig dadurch gerechtfertigt ist, daß beide erste Teile nichts weiter enthalten, als die Ebene.

Die Idee d'Alemberts von der gleichzeitigen Behandlung der geraden Linie und der Kreislinie in dem ersten Teil der Elemente der Geometrie finden wir im Buch von Bertrand vollkommen verwirk-

---

[1]) 195—388 S.

licht, besonders im ersten Kapitel. Was jedoch seine andere Idee anbetrifft, nämlich die der Einteilung desselben ersten Teiles in zwei Abteilungen, so ist sie vollkommen bloß in den ersten drei Kapiteln anzutreffen, von denen die beiden ersten vollkommen der ersten Abteilung angehören, und das dritte der zweiten. In den nächsten drei Kapiteln sind die beiden Abteilungen schon in gemischtem Zustand vorhanden. So enthalten von den drei Teilen, die das vierte Kapitel bilden, der erste Teil die Sätze von der relativen Lage der Geraden und der Kreislinie und zweier Kreislinien, der zweite das Vermessen der Winkel im Kreise, und der dritte die sich mit dem Kreise in Beziehung befindenden proportionalen Linien. Ebenso auch in der Sammlung der Aufgaben, welche das fünfte Kapitel bilden, gehören die einen zur einen Abteilung, die anderen zur anderen.

Das Bestreben, die Elemente der Geometrie zu vervollkommnen, welches das Werk Bertrands durchdringt, äußert sich vor allem in den von ihm gegebenen Definitionen der Ebene und der geraden Linie. Der Raum ist unendlich und homogen oder mit anderen Worten, ist sich selbst gleich zu jeder Zeit und an jedem Ort. Und wirklich, wenn wir seiner Ausdehnung Grenzen angeben wollten, so müßten wir es auf seiner ganzen Ausdehnung tun, das würde aber bedeuten, daß die angegebenen Grenzen ihn nicht begrenzen. Was seine Homogenität anbetrifft, so äußert sie sich darin, daß der Teil des Raumes, der von einem Körper an irgend einer Stelle eingenommen wird, sich in nichts unterscheidet von einem anderen Teil, welcher von demselben Körper an einer beliebigen anderen Stelle eingenommen wird; dazu ist hinzuzufügen, daß der Raum, welcher den Körper an einer Stelle umgibt, derselbe ist wie der Raum, der denselben Körper an einer anderen Stelle umgibt. Aus diesem Begriff vom Raum folgt, daß man sich den Raum in zwei solche Teile geteilt vorstellen kann, von denen man nichts von dem einen sagen kann, was nicht auch von dem anderen gesagt werden könnte, und daß ihre allgemeine Grenze zu einem jeden von ihnen ein und dasselbe Verhältnis hat, mag man sie im ganzen oder in ihren Teilen betrachten. Diese Grenze, die den Raum in zwei Teile teilt, ist dasjenige, was man die Ebene nennt. Die Ebene wie auch den Raum kann man sich in zwei solche Teile geteilt vorstellen, von denen man nichts von einem sagen kann, was nicht auch vom anderen gesagt werden könnte, und daß ihre allgemeine Grenze außerdem zu einem jeden von ihnen ein und dieselben Verhältnisse hat, beliebig betrachtet im ganzen oder in seinen Teilen. Diese Grenze, die die Ebene in zwei Teile teilt, ist das, was man die gerade Linie nennt. Mit Hilfe dieser Definitionen beweist Bertrand folgende Sätze von geraden Linien, die ohne sie nicht

bewiesen werden können und deshalb gewöhnlich als Axiome angenommen werden: „Aus einem Punkt der Ebene zum anderen kann man nur eine gerade Linie führen.“ „Zwei Punkte der Ebene bestimmen die gerade Linie.“ „Zwei sich auf einer Ebene schneidende Linien schneiden sich nur in einem Punkte.“ Späterhin werden dieselben Sätze auch auf eine andere Weise bewiesen mit Hilfe der von Laplace im Journal des séances de l'École Normale gegebenen Definition der geraden Linie.

Indem Bertrand im allgemeinen mit d'Alembert ziemlich übereinstimmt in der Beweisführung von Sätzen, welche von Übergängen von den kommensurabelen Größen zu den inkommensurabelen und von den geraden Linien zu den krummen handeln, gibt er bloß einer größeren Verbreitung der apagogischen Methode Platz. Er bedient sich dieser Methode in allen Sätzen nicht nur in der ersten von den angegebenen zwei Gruppen, sondern auch in den beiden der zweiten Gruppe, welche sich mit der Bestimmung des Flächeninhalts des Kreises und der Oberflächen des Zylinders und des Kegels beschäftigen, obwohl dank ihrer Eigenschaften er auch dabei nicht ohne die Exhaustionsmethode auskommen kann. Der Exhaustionsmethode bedienen sich alle anderen Beweise der Sätze in der zweiten Gruppe und ebenso auch der Satz von der Gleichheit der dreiseitigen Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen.

Das Bestreben Bertrands zur größtmöglichen Verkürzung der Anzahl einzelner Sätze tritt besonders stark in dem 5. Kapitel des 3. Teiles hervor, wo eine ganze Reihe von Sätzen durch eine Reihe entsprechender Aufgaben ersetzt erscheint, die in folgendem einen Satze vereinigt sind: Es sollen ausgemessen werden das Prisma, die Pyramide, die abgestumpfte Pyramide, der Zylinder, der Kegel, der abgestumpfte Kegel, die Kugel, der Kugelsektor, das Kugelsegment, das abgekürzte Kugelsegment. Der Rauminhalt der abgestumpften Pyramide (bez. des abgestumpften Kegels) wird hier als Differenz zwischen den Rauminhalten der vollen Pyramide (bez. des Kegels) und der Ergänzungspyramide (bez. des Ergänzungskegels) gekennzeichnet. Der Rauminhalt des Zylinders wird ausgemessen mit Hilfe des Theorems: Das Verhältnis der Zylinder zu den Prismen ist gleich dem zusammengesetzten Verhältnis ihrer Höhen und Grundflächen, und das Ausmessen des Inhalts des Kegels und der Kugel wird auf das Ausmessen des Inhalts des Zylinders zurückgeführt.

Indem das Buch Bertrands in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts als eines der inhaltsreichsten und tiefsinnigsten Werke in der elementaren Mathematik im allgemeinen und der Geometrie im besonderen erscheint, ist es trotz seiner geringen Verbreitung nicht

ohne wesentliche Wirkung auf die nachfolgende Literatur in diesem Fache geblieben, was aus der von Lacroix gerichteten Einladung an diejenigen seiner Leser, welche sich in die Prinzipien der Analysis und der Elementargeometrie zu vertiefen wünschen, zu ersehen ist, sich an das Werk Bertrands zu wenden, welchem Lacroix selbst viele wichtige Ideen verdankt.

Außer den betrachteten sind noch zwei Werke Bertrands im Druck erschienen: Rénouvellements périodiques des continents terrestres[1]) und Sur une question du calcul des probabilités.[2]) Aus den Memoiren, die er in der Berliner Akademie der Wissenschaften verlesen hatte und die nicht im Druck erschienen sind, ist bekannt Sur le développement des puissances d'un binome, dont les exposans sont des fractions ou des nombres négatifs.

Aus den Schriften der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, die den Elementen der Geometrie gewidmet sind, waren am allerverbreitetsten, besonders während des ganzen nachfolgenden 19. Jahrhunderts, die Eléments de géométrie; par A. M. Legendre, die in Paris im Jahre 1794 erschienen waren. Im 19. Jahrhundert hatten sie viele Ausgaben, in Frankreich und Belgien, und außerdem waren sie fast in alle europäische Sprachen übersetzt worden. Die Einkünfte aus denselben waren so bedeutend, daß sie vollständig ihrem Autor die Existenz sicherten. Sie würden noch in einer größeren Anzahl von Exemplaren erschienen sein, wenn sie daran nicht gehindert worden wären durch die in großer Anzahl erschienenen Lehrbücher, die nach ihnen in allen Sprachen zusammengestellt waren und oft nur ihre Wiederholung darstellten. Ihr Verfasser, Adrien Marie Legendre (1752—1833), von Geburt ein Pariser, lernte in dem Collège Mazarin, wo er nach Beendigung der Humanitätsstudien die Vorlesungen über Mathematik des zu seiner Zeit sehr bekannten Lehrers, des Abbé Marie, besuchte. Die Fähigkeiten Legendres lenkten auf ihn die Aufmerksamkeit des Lehrers, der zu seiner wissenschaftlichen Entwicklung viel beigetragen hat. Die Resultate im Studium der Mathematik, die Legendre zu jener Zeit erreicht hatte, äußerten sich in einzelnen Kapiteln, die er im Auftrage seines Lehrers für dessen Werk Traité de mécanique aus dem Jahre 1774 geschrieben hat. Indem sie zu den bemerkenswertesten des Buches gehörten, traten sie besonders im Kapitel von den beschleunigenden Kräften in der Klarheit und Strenge der Darstellung hervor, so daß sie den Beifall von Lagrange ernteten. Sowohl in praktischer, als auch in wissenschaftlicher Beziehung war

[1]) Hamburg 1799. [2]) Mémoires présentés par divers Savans étrangers.

wichtig seine Bekanntschaft mit d'Alembert, die er zu dieser Zeit geschlossen hatte, und der ihn als Gelehrten richtig zu schätzen wußte. Mit dem Beistand d'Alemberts gelang es ihm im Jahre 1775 eine Lehrstelle der Mathematik an der Pariser Kriegsschule zu erhalten, welche er alsdann bis 1780 inne hatte. Durch diese Stellung in materieller Hinsicht gesichert, begann Legendre mit großem Fleiße die Werke berühmter Geometer zu studieren, hauptsächlich Eulers, der ihm seitdem als Muster in allen Arbeiten und Forschungen diente. Als erstes wissenschaftliches Werk Legendres erschien im Druck im Jahre 1782 und erhielt die volle Prämie der Berliner Akademie der Wissenschaften sein Memoire: Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants.[1]) Nach diesem Aufsatze folgte bald ein anderer mit dem Titel Sur l'attraction des sphéroïdes homogènes[2]), der der Pariser Akademie der Wissenschaften im Jahre 1783 vorgelegt wurde. Die günstige Meinung, die Laplace von diesem Werke, welches ihm und d'Alembert zur Beurteilung übergeben wurde, aussprach, veranlaßte die Pariser Akademie der Wissenschaften den Verfasser in demselben Jahre 1783 zum Adjunkten der Akademie zu ernennen an Stelle von Laplace, der den nächsten höheren akademischen Grad erhielt. Im Jahre 1787 wurde Legendre zum Mitglied der Kommission ernannt, deren Aufgabe es war, die geodätischen Arbeiten zu verrichten, um das Pariser Observatorium und das Observatorium zu Greenwich in Zusammenhang zu bringen. Sich mit der tätigen Beteiligung an der praktischen Seite dieser Operationen, welche aus täglichen Beobachtungen und logarithmischen Berechnungen bestanden, nicht begnügend, trug Legendre auch zu deren Theorie viel bei. Als er bemerkte, daß die Dreiecke auf der Erdoberfläche, die zum Bau des geodätischen Netzes gehörten, nicht als eben angesehen werden konnten, wie es früher geschah, entdeckte er den wichtigen Satz, der unter dem Namen des Legendreschen Theorems bekannt ist. In diesen seinen Arbeiten führte er zum erstenmal in die Wissenschaft ein die Definition der geodätischen Linien, als den kürzesten von allen, die auf einer Oberfläche gezogen werden können. Zum Studium dieses Gegenstandes und im einzelnen zur Theorie der geodätischen Linien auf den Flächen zweiter Ordnung kehrte er öfters zurück nach mehr oder weniger bedeutenden Zeitabschnitten. Sowohl diese als auch andere weniger bedeutende Entdeckungen und Neuerungen waren im berühmten Werke

---

[1]) Berlin. [2]) Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers Savans, et lûs dans ses Assemblées, T. X, 1785.

des Autors Sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la terre[1]) dargestellt, zu der auch seine Suite du calcul des triangles qui servent à déterminer la différence de longitude entre l'Observatoire de Paris et celui de Greenwich[2]) in unmittelbarer Beziehung stand. In seiner Teilnahme an den Arbeiten der Kommission ging Legendre viel weiter als es verlangt wurde. Er berechnete nicht nur alle Dreiecke, die sich in Frankreich befanden, sondern auch die, welche das Ufer Englands mit Greenwich verbanden. Um diesen letzten Teil seiner Arbeit auszuführen, mußte er sich nach London begeben, wo er mit großen Ehren empfangen und sofort zum Mitglied der Royal Society ernannt wurde. Dem Bericht über die praktischen Arbeiten Legendres und der anderen Mitglieder der Kommission ist das Buch Exposé des opérations faites en France en 1787 pour la jonction des observatoires de Paris et de Greenwich par Cassini, Méchain et Legendre[3]) gewidmet.

Im Jahre 1791 wurde Legendre zum Mitglied der Kommission ernannt, welche zur Bestimmung der Grundlagen des neuen Systems der Maße und Gewichte gebildet wurde, und zur Berichtigung der Ausmessung des Bogens des Meridians zwischen Dünkirchen und Barcelona, was mit ersterem in Zusammenhang stand. Nach Beendigung der Arbeiten dieser Kommission hörte die unmittelbare Teilnahme Legendres beim Erschaffen des neuen Systems der Maße und Gewichte auf, bis zu seinem Eintritt in die internationale Kommission, welche zur Berichtigung der Arbeiten auf diesem Gebiete bestimmt war. Er unterschrieb im Jahre 1799 den Bericht, welcher von der Kommission der Akademie erstattet wurde, worauf diese endgültig beschloß, das metrische Maßsystem anzunehmen.

Auch nach Beendigung der praktischen geodätischen Arbeiten setzte Legendre die Bearbeitung des theoretischen Teils der Geodäsie fort. So druckte er im Jahre 1798 sein Mémoire analytique pour la détermination d'un arc du méridien bei der Herausgabe des gleichnamigen Werkes Delambres. In dem Memoire Analyse des triangles tracés sur la surface d'un sphéroïde[4]) verallgemeinerte er die von ihm früher angegebenen Methoden und besprach im allgemeinen Überblick alle hauptsächlichsten geodätischen Operationen.

Die Beschäftigung mit der Theorie der Anziehung führte Legendre zur Himmelsmechanik und die geodätischen Arbeiten zur Astronomie. Der ersten widmete er zwei Memoiren mit dem gemeinsamen Titel Sur la figure des planètes[5]), in welchen er das Theorem

[1]) Histoire de l'Académie Royale des Sciences 1787, p. 352 et suiv.
[2]) Ebenda 1788. [3]) Paris 1791, 4°. [4]) Mémoires de l'Institut 1806.
[5]) Histoire de l'Académie des Sciences, 1784 et 1789.

bewies, daß, wenn die Figur einer flüssigen Masse sich wenig von einer sphärischen unterscheidet, sie bloß ein Umdrehungsellipsoid sein kann. Von den homogenen Sphäroiden, für die der Satz im Jahre 1784 bewiesen wurde, erweiterte er ihn im Memoire des Jahres 1789 auf die ungleichartigen Sphäroïde. Am Schluß dieses zweiten Memoires bestimmte er die Dichtigkeit der Erde, die er als fünfmal die Dichtigkeit des Meerwassers übertreffend bezeichnete.

Mit dem Verlassen der Pariser Kriegsschule hörte die direkte und indirekte Beteiligung Legendres am Unterricht der mathematischen Wissenschaften nicht auf. Nach dem Eröffnen der Pariser Normalschule im Jahre 1795 wurde er, wenn auch nicht sofort, dort zum Professor ernannt. Noch später wurde er dem Lehrpersonal der polytechnischen Schule als Examinator einverleibt. Bei Eröffnung der Universität im Jahre 1809 wurde Legendre zum Ehrenrat ernannt und noch später zum Mitglied der Kommission des öffentlichen Unterrichts. Im Jahre 1812 trat Legendre an Stelle von Lagrange ins Bureau des Longitudes ein.

Die Abfassung der Éléments de géométrie von Legendre wurde durch das Bestreben, das Fach dieses Werkes zu vervollkommnen, hervorgerufen. Wie das lange Vorwort zeigt, welches seiner ersten Auflage vorausgeschickt ist, erkennt Legendre nur einen von den zahlreichen und verschiedenen Vorwürfen an, welche den existierenden Lehrbüchern der Elementargeometrie gemacht werden, nämlich den Mangel an Genauigkeit. Auf die Beseitigung dieses Mangels konzentrierte er sein ganzes Bestreben, alles andere übersehend. Dieses Verhalten zu seiner Aufgabe blieb vor allem nicht ohne Wirkung auf die Anordnung des Gegenstandes, welche in ihrer Unordnung den zum Muster genommenen Elementen des Euklid nicht nachsteht. Im Buche von Legendre ist auch nicht die Spur von der Sorge um die Harmonie und das System des Planes der Elemente der Geometrie, die die soeben betrachteten Werke d'Alemberts und Bertrands kennzeichnen, anzutreffen. Nicht nur, daß er den ganzen Gegenstand in Teile nicht teilt, er erwähnt auch darüber nichts. Dieser Gegenstand zerfällt bei ihm von selbst, seiner Natur gemäß, in zwei Teile: die Geometrie der Ebene und die Geometrie des Raumes. Ganz äußerlich ist sein Werk in acht Bücher geteilt. Das erste, „Die Prinzipien" betitelt, beginnt nach Beispiel der Elemente des Euklid mit einer Sammlung von Definitionen und Axiomen, zu denen der Verfasser noch die Erklärung der Ausdrücke und Zeichen beifügt. Weiter folgen die Betrachtungen der Eigenschaften der sich schneidenden geraden Linien, der Gleichheit und der anderen Eigenschaften der Dreiecke, der Eigenschaften der senkrechten, schiefen und

parallelen Linien, und am Schlusse der Parallelogramme. Den Inhalt des zweiten Buches bilden der Kreis und die Ausmessung der Winkel; des dritten die Proportionalität von Figuren; des vierten die regelmäßigen Vielecke und das Ausmessen des Kreises; des fünften die Ebenen und die körperlichen Winkel; des sechsten die Polyeder; des siebenten die Kugel und die sphärischen Dreiecke und des achten die drei runden Körper: der Zylinder, die Kugel und der Kegel. Den Schlußteil des Buches unter dem Titel „Notes sur les éléments de géométrie" bilden eine Menge von Ergänzungsartikeln. Die Unordnung und besonders, nach seinem eigenen Ausdruck, das „Verwechseln der Eigenschaften der Linien mit den Eigenschaften der Flächen" gesteht er selbst ein, sich mit dem Beispiel des Euklid entschuldigend, sowie mit der Behauptung, daß eine Anordnung nicht als schlecht angesehen werden kann, wenn die einzelnen Sätze darin gut miteinander verbunden sind.

Der von Euklid eingeführte Gebrauch, jedem Buch der Elemente eine Sammlung der darin enthaltenen Definitionen vorauszuschicken, wurde von Legendre nicht nur in seinem ersten Buche der Elemente, wie oben angeführt, sondern auch in allen anderen beibehalten, ungeachtet der strengen Verurteilung seitens der philosophischen Kritik. Die Definitionen der Linie und der Fläche sind bei ihm dieselben, wie bei Euklid. „Die Linie ist eine Länge ohne Breite." „Die Fläche ist das, was Länge und Breite hat, jedoch ohne Höhe oder Dicke." Die gerade Linie, die Ebene und der Winkel werden von ihm schon anders definiert. „Die gerade Linie ist die kürzeste Entfernung von einem Punkte zu einem anderen." „Die Ebene ist eine solche Fläche, auf der jede gerade Linie vollkommen aufliegt, welche zwei beliebig auf dieser Fläche genommene Punkte verbindet." „Wenn zwei gerade Linien AB und AC sich begegnen, so wird jede mehr oder weniger bedeutende Größe, um die sie gegenseitig voneinander entfernt sind, der Winkel genannt."

Beim Beweise der Theoreme, die von dem Übergang von den kommensurabelen Größen zu den inkommensurabelen handeln, bedient sich Legendre der apagogischen Methode, zeigend, daß das eine der beiden Verhältnisse, deren Gleichheit zu beweisen ist, weder größer noch kleiner sein kann, als das andere.

Beim Beweise der Sätze, die vom Übergang von den geraden Linien zu den krummen handeln, gebraucht Legendre die von Archimedes angegebene Form der Exhaustionsmethode in etwas verändertem Zustande. Die wenig bedeutende Änderung dieser Form, die er sich erlaubt, bestand im Gebrauch der zwei folgenden Hilfssätze: Wenn die Fläche eines Kreises größer ist, als irgend eine andere

Fläche, so kann in diesen Kreis immer ein regelmäßiges Vieleck eingeschrieben werden, dessen Fläche ebenfalls größer sein wird als die gegebene Fläche. Wenn die Fläche eines Kreises kleiner ist, als irgend eine andere Fläche, so kann man diesem Kreis immer ein regelmäßiges Vieleck umschreiben, dessen Fläche ebenfalls kleiner sein wird als die genannte Fläche. Anstatt diese beiden Hilfssätze einzeln zu entwickeln, führt Legendre in seinem Buche folgenden sie zusammenfassenden Hilfssatz an: Wenn zwei konzentrische Kreise gegeben sind, kann man immer in den größeren von ihnen ein regelmäßiges Vieleck einschreiben, ohne daß seine Seiten den kleineren schneiden, ebenso kann man auch um den kleineren Kreis ein regelmäßiges Vieleck umschreiben, dessen Seiten den größeren Kreis nicht schneiden; auf diese Weise werden im einen sowohl wie im anderen Falle die Seiten des konstruierten Vielecks zwischen den beiden Kreisen eingeschlossen sein. Dieser Hilfssatz sowohl als dessen scharfsinnige Benutzung in der Exhaustionsmethode stellen nicht die Erfindung von Legendre dar. Er befindet sich im 16. Satze des 12. Buches der Elemente des Euklid, und dessen erste Benutzung in der Exhaustionsmethode gehört Maurolycus an, wie aus der Ausgabe seiner Übersetzung der Werke des Archimedes zu ersehen ist.[1])

In seinem Vorwort sagt Legendre, daß er im Anfang, an Stelle der Exhaustionsmethode, oder, nach seinen Worten, der Methode des Archimedes, die Methode der Grenzen anwenden wollte, weil sie als vorzügliche Vorbereitung zur Erlernung der Differentialrechnung erscheine. Später aber ließ er dies Vorhaben fallen, weil in die Theorie der Grenzen einige allgemeine Anfangsgründe, die eher den Gegenstand der Algebra, als der Geometrie bilden, hineingehören, und weil zweitens die Anwendung dieser Theorie zum Besprechen einer unendlichen Reihe von eingeschriebenen und umschriebenen Figuren führt, was Länge der Auseinandersetzung und verschiedene Schwierigkeiten nach sich zieht. Es ist übrigens zu bemerken, daß der erste dieser Gründe mit der Aussage des Verfassers in demselben Vorwort, daß er beim Leser seines Buches Kenntnisse der Arithmetik, und wenigstens des anfänglichen Teils der Algebra, voraussetzt, im Widerspruch steht.

Aus den Neuerungen, die Legendre in den Elementen der Geometrie gemacht hat, ist das Heranziehen des Prinzips der Symmetrie in die Zahl der Prinzipien der Elementargeometrie hervorzuheben. Die direkte Anwendung dieses Prinzips finden wir bei ihm

---

[1]) Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica quae extant, ex traditione D. Franc. Maurolici, etc. Panormi 1685, in-fol., p. 5 et suiv.

dort, wo zum Beweise der Gleichheit das Prinzip der Kongruenz sich als unzulänglich erweist, nämlich beim Betrachten der Körper. Er nennt zwei solche Polyeder symmetrisch,[1]) von denen bei gemeinschaftlicher Basis der eine unter und der andere über dieser Basis konstruiert sind, bei der Bedingung, daß die Scheitel der homologen körperlichen Winkel auf gleicher Entfernung von der Grundfläche und auf dem Perpendikel zur selben Grundfläche gelegen sind. Diese Definition erklärt er am Beispiel zweier Pyramiden $SABC$ und $TABC$, die eine gemeinschaftliche Basis ABC haben und deren Spitzen S und T auf dem Perpendikel ST zur selben Basis gelegen sind, wobei der Perpendikel sich im Schnittpunkt O mit der Basis in zwei gleiche Teile teilt. Nachdem er alsdann im II. Satz des sechsten Buches bewiesen hat, daß jedes Polyeder nur ein symmetrisches Polyeder haben kann, führt er in die Elemente der Geometrie eine neue Art von Gleichheit ein, die manches Mal die Gleichheit von Körpern durch Symmetrie genannt wird. Sie ist im folgenden Satz erhalten: Wenn zwei Körper a und b symmetrisch dem dritten c sind, so sind sie kongruent.

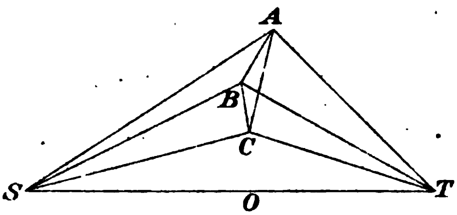


Fig. 6.

Das Einschlagen des Weges, der ihn zu dieser Neuerung führte, verdankt er Robert Simson, welcher in seinen „Kritischen und geometrischen Bemerkungen" zu seiner Ausgabe der Elemente des Euklid[2]), als erster auf die 9. und 10. Definitionen im XI. Buche der Elemente des Euklid hinwies (die Definition ähnlicher Körper; die Definition gleicher und ähnlicher Körper), als auf solche, die nicht als Definitionen angesehen werden können und deshalb als Theoreme bewiesen werden müssen. Die Richtigkeit dieser Bemerkung anerkennend, und zu gleicher Zeit diese Definitionen in die Zahl der Theoreme nicht einführend, mußte Legendre, ebenso wie Robert Simson, zum Auffinden neuer Beweise zu solchen Theoremen sich anschicken, die Euklid auf die oben erwähnten Definitionen gründete. Dabei mußte auf den 28. Satz des XI. Buches der Elemente des Euklid acht gegeben werden, der aus dem Theorem über die Teilung eines Parallelepipedons in zwei gleiche Teile bestand. Robert Simson betrachtete diesen Satz als Folge des von ihm vorher be-

[1]) S. livre VI, XVI. définition. [2]) The Elements of Euclid by Robert Simson, p. 388 sqq.

wiesenen Theorems: die n-seitigen Prismen, welche von gleichen, ähnlichen und entsprechend gelegenen Seiten begrenzt sind, sind einander gleich. Was jedoch Legendre anbetrifft, so beweist er in seinen Elementen vor diesem Satz folgendes Theorem[1]): eine Ebene, welche durch zwei entgegengesetzte und parallele Kanten geht, teilt das Parallelepipedon in zwei dreiseitige, einander symmetrische Prismen. Diesen Satz selbst jedoch faßt er in Form eines Theorems zusammen[2]): zwei symmetrische dreiseitige Prismen, in die ein Parallelepipedon sich teilen läßt, sind volumengleich.

Aus allem Gesagten über die Elemente von Legendre folgt, daß sie durchaus den Forderungen der Zeit, die die philosophische Kritik stellte, nicht entsprachen. Indem sie sich als Vorbild Euklid und Archimedes nahmen, hauptsächlich den ersteren, teilten sie mit ihm auch alle seine Mängel. Wie soll man aber in diesem Fall ihren kolossalen Erfolg erklären? Die Erklärung dazu finden wir teils in einigen Bedingungen jener Epoche, hauptsächlich aber im Vorhandensein wirklicher wichtiger Verdienste neben den Mängeln. Aus den Bedingungen der Epoche, die zum Erfolg des Buches von Legendre beitrugen und hauptsächlich im Anfang, sind folgende aufzuweisen: Die Anforderungen seitens der philosophischen Kritik in bezug auf Elemente der Geometrie wurden lange nicht von allen Zeitgenossen gestellt. Viele von ihnen, wie wir es schon früher gesehen, hielten es als unbedingte Pflicht der Autoren solcher Werke, die den Elementen der Geometrie gewidmet waren, den Werken der alten Griechen als Vorbildern zu folgen. Was die erwähnten Verdienste des Buches von Legendre anbetrifft, äußerten sie sich in der bemerkenswerten Klarheit der Darstellung und der vom Autor erreichten außerordentlichen Genauigkeit. Zum Erfolg des Buches von Legendre trugen auch viel die beigefügten Noten bei, von denen viele sogar in Beziehung zur Wissenschaft sich als wertvoll erwiesen. Mit einigen von ihnen werden wir noch späterhin zu tun haben.

Obwohl Legendre im Zusammenstellen der Elemente der Geometrie nicht auf der Höhe derjenigen Forderungen der zeitgemäßen Wissenschaft stand, die die voranschreitenden Kräfte der Wissenschaft ihnen stellten, mußte er dennoch Kind seiner Zeit bleiben. Und wirklich war er nicht imstande, die Methode der alten Griechen in der Elementargeometrie in ihrem reinen Zustand vollständig frei von dem Einfluß der arithmetisch-algebraischen Richtung wiederherzustellen. Schon die Forderung der arithmetischen und algebraischen Kenntnisse, die er den Lesern seines Buches stellt, beweist seine

[1]) Der 6. Satz des VI. Buches. [2]) Der 8. Satz desselben Buches.

Absicht, die Darstellung der Elemente der Geometrie von den arithmetischen Prozessen der neuesten Analysis abhängig zu machen. Diese Absicht wurde auch von ihm in vollem Maße ausgeführt. Überall in seinem Buche setzte er die geometrische Größe, als durch eine Zahl ersetzt, voraus. In seiner Darstellung spricht er z. B. vom Produkt der Linien oder vom Produkt der Linien und Flächen. In den Beweisen, welche die Anwendung der Proportionen fordern, wendet er zur Proportion der Linien direkt arithmetische Theoreme an, die nur für die Proportion der rationalen Zahlen bewiesen sind. Auf diese Weise erscheint d'Alembert, dieser beste Darsteller der den Elementen der Geometrie gestellten zeitgemäßen Forderungen in der von ihm ausgesprochenen Ansicht über die Unnützlichkeit der Algebra für die Beweise in dem Gebiet der Elementargeometrie, als dem wahren Verständnis des Geistes der altgriechischen Methoden der Geometrie viel näher stehend, als Legendre, der sich die genaue Befolgung dieser Methoden als Ziel setzte.

Von den Lehrbüchern der Elementargeometrie in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts stand seiner Verbreitung nach neben den „Éléments de géométrie" von Legendre ein gleichnamiges Lehrbuch, dessen Autor Sylvestre François Lacroix[1]) (1765—1843) war, ein Pariser von Geburt. Sein ganzes Leben war dem Unterricht der Mathematik gewidmet, was er als Professor an der Marineschule zu Rochefort seit 1782, an der Kriegsschule in Paris seit 1787 und an der Artillerieschule zu Besançon seit 1788, als Examinator der Aspiranten und Zöglinge des Artilleriekorps vom Jahre 1793, als Adjunktprofessor der beschreibenden Geometrie an der Normalschule, als Professor der Mathematik an der Zentralschule der vier Nationen, als Professor der Analysis an der Polytechnischen Schule vom Jahre 1799, als Professor der transzendenten Mathematik bei der Fakultät der Wissenschaften und seit 1815 auch am Collège de France durchführte. Außerdem war er vom Jahre 1794 an Vorsitzender des Bureaus der Kommission zur Reorganisation des öffentlichen Unterrichts. Seine literarische Tätigkeit war ebenfalls beinahe ausschließlich dem Unterricht der Mathematik gewidmet. Diese Richtung zu verändern zugunsten der Ausarbeitung speziell wissenschaftlicher Fragen erwies sich selbst Lacroix, dessen Ernennung zum Mitglied der Akademie im Jahre 1799 erfolgte, nicht imstande. Seine wissenschaftliche Tätigkeit als Mitglied dieser Anstalt kennzeichnete sich beinahe ausschließlich durch Berichte über Werke, die ihm zum Durchsehen von der

---

[1]) Poggendorff, I, S. 1340. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, III², S. 506.

Klasse der Wissenschaften vorgelegt wurden, später genannt „Die Akademie der Wissenschaften“.

Die Bestimmung als Elementarlehrbücher hatten folgende Werke von Lacroix: „Essais sur les plans et les surfaces“[1]); „Introduction à la géographie mathématique et critique et à la géographie physique“[2]); „Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes“[3]); „Traité élémentaire du calcul des probabilités“[4]); „Manuel d'arpentage“[5]); „Introduction à la connaissance de la sphère“.[6]) Die erste und dritte dieser Schriften und ebenso auch das „Complément des Élémens de Géométrie ou Élémens de Géométrie descriptive“[7]) haben als erste ihren Gegenstand, die darstellende Geometrie, allgemein zugänglich gemacht und zu diesem Zweck ihre Prinzipien entwickelt. Der Popularisierung seines Gegenstandes waren auch das vierte Werk und die Artikel im „Dictionnaire des sciences naturelles“ und „Biographie universelle“ gewidmet. In der letzteren ist besonders bemerkenswert der Artikel über Euklid, welcher eine wertvolle Analyse seiner Elemente enthält.

Das umfangreiche Werk Lacroix' in der lehrenden Literatur war der am Anfang in sieben Bänden erschienene „Cours de Mathématiques à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations“ in den Jahren 1796—1799. Die einzelnen Überschriften jedes Bandes dieses Werkes waren: „Traité élémentaire d'Arithmétique“; „Élémens d'Algèbre“; „Élémens de Géométrie“; „Traité élémentaire de Trigonométrie recti-ligne et sphérique, et d'application de l'Algèbre à la Géométrie“; „Complément des Élémens d'Algèbre“; „Complément des Élémens de Géométrie, ou Élémens de Géométrie descriptive“; „Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral“. Von der französischen Regierung als Leitfaden in den Lyzeen und mittleren Lehranstalten angenommen, bekam es sofort nach seinem Erscheinen eine sehr große Verbreitung, die sogar in der neuesten Zeit nicht eingebüßt ist, was aus seiner fünfundzwanzigsten Ausgabe im Jahre 1897 zu ersehen ist. Es erschienen im Druck auch dessen Übersetzungen in andere Sprachen, wie zum Beispiel in die deutsche, russische und polnische. Die ausführliche Kritik seines Werkes und den Bericht über die gemachten Vervollkommnungen in den Elementen der Mathematik gab Lacroix sechs Jahre nach dem Erscheinen des letzten Bandes in der Schrift „Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des mathématiques en particulier“[8]), wo ihnen der § III

---

[1]) 1 vol. 8°, Paris 1795. [2]) 8°, Paris 1811. [3]) Paris 1812. [4]) 8°, Paris 1816. [5]) 12°, Paris 1825. [6]) 18° Paris 1832. [7]) 8°, Paris 1796. [8]) Paris 1805, 8°, 398 S.

in der zweiten Abteilung, „Analyse du Cours élémentaire de Mathématiques pures à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations"[1]) betitelt, gewidmet ist. Zur großen Verbreitung der Lehrbücher Lacroix' trug die Art der Darstellung bei, welche sich durch Klarheit, Genauigkeit und Einfachheit auszeichnete.

In dem elementargeometrischen Teile des Kursus von Lacroix, welcher dem angenommenen Plan des Autors gemäß verfaßt ist, worüber er sich übrigens in seinem Bericht wenig aufhält, wird die Elementargeometrie in zwei Teile geteilt, welche nicht mit besonderen Überschriften versehen sind. Die Übersicht ihres Inhalts jedoch zeigt klar, daß der erste Teil die Elementargeometrie der Ebene genannt werden soll, und der zweite die Elementargeometrie des Raumes. Mit der Einführung dieser Einteilung der Elemente der Geometrie wich Lacroix der Unfolgerichtigkeit aus, in die Bertrand verfiel, indem er die Einteilung d'Alemberts annahm und zu gleicher Zeit es nicht wagte, aus dem zweiten Teil eine richtige Geometrie der Flächen zu machen. Seinen ersten Teil verteilt er folgendermaßen: die erste Abteilung „Von den Eigenschaften der geraden Linien und der Kreislinien" und die zweite „Von dem Flächeninhalt des Vielecks und des Kreises". Die zweite Abteilung hat keine Unterabteilungen. In der ersten befinden sich folgende Artikel: „Definitionen und vorläufige Begriffe"; „Von senkrechten und schiefen Linien"; „Theorie der parallelen Linien"; „Von den Vielecken"; „Von der Geraden und der Kreislinie"; „Von den eingeschriebenen und umschriebenen Vielecken". Die Ansichten d'Alemberts über die gleichzeitige Betrachtung der geraden Linie und der Kreislinie und über die Unterabteilung der ersten Abteilung des ersten Teiles in zwei Hälften werden bei Lacroix überhaupt nicht verwirklicht. Über den zweiten Teil endlich genügt es zu bemerken, daß er ebenfalls in zwei Hälften geteilt ist, von denen die erste betitelt ist „Über Ebenen und Körper, die von Ebenen begrenzt sind" und aus den Artikeln besteht: „Über Ebenen und Gerade"; „Über durch Ebenen begrenzte Körper"; „Über das Ausmessen des Rauminhalts" und die zweite Hälfte unter dem Titel „Von den runden Körpern" außer dem Artikel gleichen Namens noch den Artikel „Über die Vergleichung runder Körper" enthält.

Der Bericht von Lacroix über den angenommenen Plan der Elemente der Geometrie ist sehr kurz und bezieht sich hauptsächlich auf die Geometrie der Linien. An den Anfang der letzten setzt er die Betrachtung der geraden Linien bezüglich der Vergleichung ihrer Längen und erst danach schreitet er zur Betrachtung ihrer relativen

[1]) p. 254—390.

Lage. In diesem zweiten Teil seiner Darstellung der Geometrie der Linien vereinigt er vor allem alle Sätze, die über die Ähnlichkeit und Gleichheit der Dreiecke handeln, aus dem Grunde, daß die Dreiecke als Elemente aller andern Figuren erscheinen und außerdem am einfachsten die Lage der Punkte und Linien auf den Ebenen bestimmen. Danach geht er zur Ähnlichkeit und Gleichheit der Polygone über, und zum Schluß der Abteilung setzt er die Artikel über den Kreis und die in Verbindung mit ihm stehenden geraden Linien. Aus der Verteilung der Sätze in der ersten Abteilung der Elementargeometrie kann man leicht den Schluß ziehen über ihre Verteilung in den andern Abteilungen, die dem Ausmessen der Flächeninhalte, den Ebenen und den Eigenschaften der Körper gewidmet sind, mit Hilfe der zwischen allen diesen Teilen existierenden Analogie, deren Anwendung im Unterricht Lacroix großes Gewicht beilegt, als Mittel das Gedächtnis und die Gewohnheit zur Verallgemeinerung der Ideen des Lernenden zu stärken. Wenn die Analogie beim Beweise einiger Sätze nicht durchgeführt werden kann, wie es manchmal vorkommt, so muß sie dennoch, wenn auch nur im Verteilen der Sätze und in der Art der Darstellung aufrechterhalten werden. Aus den Sätzen der Elementargeometrie gehören, nach der Meinung von Lacroix, bloß zwei Arten von Sätzen in die Elemente der Geometrie, erstens die zum Verständnis des Ganges des Denkens erforderlichen Sätze, beim Betrachten der Figuren mit Hilfe der synthetischen Methode, und zweitens solche, die aus praktischen Operationen der Geometrie folgen, wie zum Beispiel das Reißen, Vermessen usw. Was übrigens die Sätze der zweiten Art anbetrifft, findet es Lacroix für notwendig zu bemerken, daß aus ihnen nur solche gewählt werden sollen, die als wirklich bequem und anwendbar anerkannt werden können. Seinen Plan der Elemente der Geometrie hält Lacroix auf Grund seiner langjährigen pädagogischen Erfahrung für natürlich und streng.

Da er im Worte „die gerade Linie“ den direkten Ausdruck der unmittelbaren Resultate der Tätigkeit der Gefühle sieht, nämlich der Vorstellung des kürzesten Weges, der zu verfolgen ist, um von einem Punkt zum andern zu gelangen, führt Lacroix die Definition der geraden Linie auf den Ausdruck dieser einzigen Eigenschaft zurück. Die Definition des Begriffs in diesem Falle erhält er auf diese Weise mit der Definition der Bedeutung des Wortes, welche in folgendem Satze enthalten ist: der kürzeste Abstand zwischen zwei Punkten wird die gerade Linie genannt. Indem er die Ansicht über die Punkte, Linien und Flächen, als abstrakte Begriffe, die außerhalb uns selbst keine Objekte haben, verneint, findet er, daß sie wirklich existieren, wenn sie auch, getrennt vom Körper, dem sie angehören, nicht ge-

dacht werden können. Jeder Körper muß in Wirklichkeit abgegrenzt sein, sonst wird er sich vom unendlichen Raume nicht unterscheiden. Solche Grenzen sind eben die Flächen, die ihrerseits wieder als Grenzen die Linien haben, und diese letzten — die Punkte. Alle diese Grenzen existieren nicht nur in Wirklichkeit, sondern stehen auch gerade unseren Sinnen vor, weil diese ohne ihre Hilfe keine Figuren der Körper kennen würden. Von der Darlegung dieser Ansichten muß auch die Darlegung der Elemente der Geometrie anfangen. Lacroix führt es auch wirklich in seinem Lehrbuche durch, indem er seinem ersten Teil die der oben-genannten Auslegung gewidmete Stelle voranschickt, nämlich den „Hauptbegriff der Ausdehnung".

Alle Axiome in Form einer Sammlung an den Anfang der Elemente zu setzen, findet Lacroix nutzlos, sogar lächerlich, weil ihrer Natur nach sich keine Hindernisse in den Weg stellen können, sich ihrer bei Beweisen dort zu bedienen, wo es als notwendig erscheint. Als Definition, die besonderer Aufmerksamkeit wert ist infolge ihrer völligen Unzulänglichkeit bei Euklid und die überhaupt ernste Schwierigkeiten bietet, findet Lacroix die Definition des Winkels. Um diese zu umgehen, schlägt er sogar vor, überhaupt keine Definition zu geben, sondern sich mit der Bekanntmachung mit dem Winkel oder direkt durch den Gegenstand selbst zu begnügen. In seinem Lehrbuche führt er dieses jedoch nicht durch und begnügt sich, nach seinen eigenen Worten, mit der ungenügenden Definition des Winkels, als eines unbestimmten Raumes, eingeschlossen von zwei geraden Linien, die sich in irgend einem Punkte treffen, und die man sich als beliebig verlängert vorstellen kann. Derselben Definition bedient sich auch Bertrand, jedoch in folgendem viel genauerem Satze: Ein Winkel ist der Teil einer ebenen Fläche, eingeschlossen von zwei geraden sich schneidenden Linien, die im Punkte ihrer Begegnung endigen.

Verhältnismäßig viel Platz, wie es eigentlich auch sein soll, widmet Lacroix in seinem Berichte dem in verschiedenen Teilen der Elemente der Geometrie sich antreffenden Übergang vom Endlichen zum Unendlichen. Solcher Fälle, die denselben augenscheinlich oder nichtaugenscheinlich darstellen, existieren drei: 1. der Übergang vom Kommensurabelen zum Inkommensurabelen, der in der Theorie der proportionalen Linien gemacht wird; 2. der Übergang von geraden Linien zu krummen, der beim Ausmessen des Kreises und der runden Körper vorkommt; 3. das Auftreten der Gleichheit des Rauminhaltes von Körpern in Fällen, wo das Prinzip der Kongruenz unanwendbar ist, was als Folge davon erscheint, daß der Körper eine Größe von drei Dimensionen ist. Als einfachstes Mittel in solchen Fällen, dieser

Betrachtung vom Unendlichen auszuweichen, bezeichnet Lacroix die Grenzen. Die beim Gebrauch dieses Mittels angewandten Prinzipien, als gemeingültig für Sätze dieser Art, müssen getrennt von ihnen und unabhängig von den Linien dargestellt werden, als Prinzipien, die nicht nur auf Größen, die in den Elementen der Geometrie betrachtet werden, anwendbar sind, sondern auch auf andere Größen. Dank diesen Folgerungen stellt Lacroix die erwähnten Prinzipien in folgenden Formen dar: 1. Wenn bewiesen werden kann, daß die Differenz zweier unveränderlicher Größen kleiner ist, als jede gegebene Größe, wie klein sie auch wäre, so folgt daraus, daß die beiden ersten Größen einander gleich sind. 2. Wenn von drei Größen eine sich verändernde und dabei immer größere, als die beiden anderen, die unveränderlich bleiben, sich gleichzeitig einer jeden von ihnen nähern kann, so nahe wie nur wünschenswert, so sind die beiden unveränderlichen Größen einander gleich. Indem er diese beiden Theoreme als Ausdruck, wenn auch nicht als offenbaren, der ersten Gründe der Grenzmethode ansieht und die angenommene Form des zweiten sich zuschreibt, spricht er die Überzeugung aus, daß diese letzte besonders die Eigenschaft besitzt, alle ihrer bedürftige Beweise zu vereinfachen, bedeutend zu verkürzen und sie symmetrischer zu machen. In seinen Elementen der Geometrie setzt er das erste Theorem an den Anfang des Artikels über die Rektifikation des Kreises und das zweite an den Anfang des Artikels vom Ausmessen des Flächeninhaltes des Kreises. Zu zeigen, daß je mehr sich die geradlinigen Figuren den krummlinigen nähern, sich auch das Maß der ersten dem Maße der zweiten nähert — das sei die Hauptsache, auf die nach Lacroix' Meinung die Aufmerksamkeit gerichtet werden muß, bei Anwendung dieser beiden Theoreme zum Übergang von geraden Linien zu krummen. Als Erfindung kann hier bloß die Methode der Annäherung angesehen werden, die am Ende mit Hilfe der Induktion die gesuchte strenge Bedeutung der betrachteten Größe offenbart.

Lacroix gibt den Rat, die apagogische Methode nur zum Beweis der einfachsten Sätze anzuwenden. In allen komplizierten Fällen jedoch muß man seiner Meinung nach dieser Methode ausweichen, weil sie den Verstand überzeugt, ihn jedoch nicht erleuchtet. Zu diesen Ansichten und ebenso auch zur oben angeführten Überzeugung von der Möglichkeit, die Methode der Grenzen in allen Fällen des Übergangs vom Endlichen zum Unendlichen anzuwenden, gelangte Lacroix augenscheinlich nach dem Erscheinen der ersten Ausgaben seiner Elemente der Geometrie. In ihnen benutzte er wirklich beim Beweise der Sätze, die vom Übergang von den kommensurabelen zu inkommensurabelen Größen handeln, in Übereinstimmung mit d'Alem-

bert und Bertrand die apagogische Methode. Von diesem anfänglichen, von ihm gewählten Wege zugunsten seiner erwähnten Überzeugung abzugehen, findet er übrigens auch in allen folgenden Ausgaben seiner Elemente der Geometrie nicht für nötig.

Dem Bestreben zur Verminderung der Anzahl der einzelnen Sätze, das so klar bei Bertrand ausgedrückt ist, bleibt auch Lacroix nicht fremd. Als Anlaß dazu dient ihm die Erwägung, daß es nötig sei, die Ausführlichkeit zugunsten der Forderungen der Wissenschaft an den Unterricht, die sich infolge des Fortschritts immer vergrößern, zu opfern und zugleich das existierende Verhältnis zwischen dem Umfang und der gegebenen Zeit des Unterrichts aufrecht zu erhalten. Als die bemerkbarste Folge des betrachteten Bestrebens in den Elementen der Geometrie von Lacroix erscheint das Auslassen des Satzes über das Zerlegen des Rauminhaltes der abgestumpften Pyramide und ebenso auch des abgestumpften Kegels. Indem er vorschlägt, in Beziehung auf diese Sätze dem von Bertrand eingeschlagenen Weg zu folgen, bemerkt Lacroix in seinem Bericht, daß aus der Auslassung der eigenartigen Art des Beweises dieser Sätze keine Unbequemlichkeit entstehen kann, weil dieselbe Art der Beweisführung auch beim Beweise des Theorems über das Zerlegen des abgestumpften dreiseitigen Prismas angewandt wird, welches niemals ausgelassen werden darf.

Zum Schluß seiner Bemerkungen vom Übergang vom Endlichen zum Unendlichen in den Elementen der Geometrie bleibt Lacroix bei der Darstellung der Bedeutung der Arbeiten von Robert Simson stehen, die sie nach seiner Meinung in der Literatur der Elementargeometrie hatten, welche mit seiner Ausgabe der Elemente des Euklid in Verbindung standen, und bei dem oben erwähnten Werk von Bertrand. Indem er auf diese Ausgabe Simsons, als auf eine wichtige Erscheinung in der Geschichte der Geometrie hinweist, ebenso auch auf das Werk Bertrands, sagt er, daß sie die geringe Anzahl von Sätzen enthalten, die nötig sind, um die richtigen Ansichten in allen schwierigen Stellen der Elementargeometrie mit Hilfe der Mittel allein, die uns die Werke der Alten liefern, festzustellen. Nach Erscheinung dieser beiden Bücher kann seiner Meinung nach in den Elementen der Geometrie keine Veränderung mehr, außer der Anordnung des Inhaltes, vor sich gehen.

Die in den eben erwähnten Meinungen von Lacroix geäußerte Ansicht über die Grundbedeutung der Vervollkommnung der Bearbeitung der Sätze, die vom Übergang vom Endlichen zum Unendlichen handeln, teilt auch vollkommen der russische Gelehrte Simeon Gu-

rief[1]) (1766—1813). Er war in den Jahren 1778—1784 in Petersburg Schüler im Artillerie- und Ingenieurkadettenkorps. Infolge der schon hier sich kundgebenden Neigung zur Beschäftigung mit der Mathematik mußte er die Grenzen des elementaren Kursus dieser Wissenschaft überschreiten. Nachdem er das Korps im Range eines Offiziers verlassen hatte, widmete er seine Tätigkeit nicht dem Militärdienst, sondern dem Unterricht der Mathematik und gelehrten Arbeiten in dieser Sphäre. Anfangs war er Lehrer der Navigation und Artillerie in dem griechischen Kadettenkorps in Petersburg. Der Mangel an Werken über Navigation, die der zeitgemäßen Lage der Wissenschaft entsprachen, in der russischen Literatur bewog Gurief, den sechsten Teil des „Cours de mathématiques" von Bezout, der diesem Gegenstand gewidmet war, ins Russische zu übersetzen und ihn unter dem Titel „Nautische Untersuchungen"[2]) herauszugeben. In dieser Ausgabe fügte er viele eigene Ergänzungen bei, von ihnen als wichtigste die in russischer Sprache zum ersten Male gelehrte Differential- und Integralrechnung.[3]) Im Jahre 1792 machte Gurief eine Reise nach England, um dort die hydraulischen Arbeiten zu studieren. Nach der Rückkehr im Jahre 1793 wurde ihm die Vorlesung der physico-mathematischen Wissenschaften und der Artillerie für die Offiziere der Ruderflotte anvertraut, und seine umfangreichen Kenntnisse in der reinen und angewandten Mathematik, die er durch das Studium der besten Autoren erworben hatte, lenkten auf ihn die Aufmerksamkeit der Akademie der Wissenschaften in Petersburg, die ihn am 26. Mai 1796 zum Adjunkten der physico-mathematischen Wissenschaften ernannte. Sehr bald nach dieser Ernennung, nämlich im Jahre 1798 am 31. Januar, wurde er zum ordentlichen Akademiker befördert. Die ersten wissenschaftlichen Arbeiten von Gurief, die er der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften bis zum Jahre 1800 vorlegte, waren folgende: „Mémoire sur la résolution des principaux problèmes qu'on peut proposer dans les courbes dont les ordonnées partent d'un point fixe."[4]) „Essai de démontrer rigoureusement un théorème fondamental des équations de condition de la différentielle des fonctions à plusieurs variables, et du calcul des variations".[5]) „Observations sur le théorème de Taylor, avec sa démonstration par la méthode des limites; application de ce théorème, ainsi démontré, à la démonstration du binome de Newton, dans le cas où l'exposant est une quantité fractionnaire, négative et incommensurable avec l'unité;

[1]) Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg, VI (1818). Histoire, p. 4—6. — Poggendorff, I, S. 980. [2]) 2 Bände, St. Petersburg 1790—91, 4°. [3]) 59 S. [4]) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, T. XII, p. 176—191. [5]) Ebenda, T. XIII, p. 154—165.

suivie de la résolution d'un problème qui concerne la méthode inverse des tangentes, par le moyen de ce théorème".[1]) Eins der Resultate der literarischen Berühmtheit, die Gurief dank seiner wissenschaftlichen und lehrenden Tätigkeit erlangte, war seine Ernennung am 1. September 1800 zum Mitglied der Russischen Akademie zu St. Petersburg.

Die Reform des Lehrfaches und das Eröffnen einiger neuen höheren Lehranstalten im Anfange des 19. Jahrhunderts in Rußland eröffneten Guriefs Begabung als Lehrer neue Gebiete zur Tätigkeit. Im Jahre 1800 wurde er zum Professor der Mathematik an der Schule der Schiffsarchitektur ernannt, im Jahre 1809 in der geistlichen Akademie zu St. Petersburg und im Jahre 1810 im Institut des Korps der Ingenieure der Kommunikationswege. Bei Eröffnung der zweiten dieser Lehranstalten verlas er die später gedruckte „Abhandlung über Mathematik und ihre Zweige".[2]) In den Ausgaben der Akademie der Wissenschaften waren 23 Schriften und Abhandlungen gedruckt, die er in ihren Sitzungen vom Jahre 1800 an verlas. Als Mitglied einiger Kommissionen, die von der Akademie der Wissenschaften zum Durchsehen der ihr vorgelegten Arbeiten und Erfindungen gebildet wurden, beteiligte sich Gurief an der Zusammenstellung zweier Berichte. Die Hauptgegenstände der wissenschaftlichen Arbeiten von Gurief, welche in den Ausgaben der Akademie der Wissenschaften gedruckt wurden, waren Mechanik, Geometrie und Differentialrechnung.

Die Zwischenstellung in den wissenschaftlichen und lehrenden Arbeiten von Gurief nahmen ein: „Die Grundlagen der Differentialrechnung mit deren Anwendung auf Analytik".[3]) „Grundlagen der transzendenten Geometrie der krummen Flächen".[4]) „Grundlagen der Mechanik".[5]) Rein lehrende Arbeiten von Gurief, die im 19. Jahrhundert erschienen, und die ausschließlich der Elementarmathematik gewidmet waren, waren folgende: „Der erste Teil des nautischen Lehrkursus, die Grundlagen der Geometrie enthaltend"[6]); „Das erste Buch der Zahlenlehre, die Grundlagen der Arithmetik enthaltend"[7]); „Grundlagen der Geometrie".[8])

Aus der gelehrten Tätigkeit von Gurief ist als charakteristisch zu bezeichnen sein besonderes Interesse für festere Begründung der schon bekannten Wahrheiten und der schon festgestellten Prinzipien. Seinem methodischen Verstande, welcher von der Verehrung der strengen Methoden der altgriechischen Geometrie durchdrungen war, waren die Arbeiten in dieser Richtung kostbarer, als die Aufdeckung

---

[1]) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, T. XIV, p. 306—335. [2]) 4°, St. Petersburg 1809. [3]) 4°, St. Petersburg 1811. [4]) 4°, ib. 1806. [5]) 8°, ib. 1815. [6]) 4°, ib. 1804—1807, 2 Bände. [7]) 4°, ib. 1805. [8]) 8°, ib. 1811.

neuer Wahrheiten. Außer den Arbeiten über die Differentialrechnung, die dieser Richtung angehörten, und einigen anderen gehören dazu noch einige Arbeiten, die, obgleich nicht gedruckt, so doch der Akademie der Wissenschaften vorgelegt waren, wie zum Beispiel das von ihr am 26. Mai 1796 handschriftlich erhaltene Werk „Anfangsgründe der transzendenten Geometrie und der Differentialrechnung, abgeleitet aus der wahren Natur ihres Gegenstandes", oder des von ihm im Jahre 1797 verlesenen Manuskripts „Versuch der Begründung der Mathematik auf festen Gründen".

Die erste seiner Arbeiten dieser Art, die im Druck erschien, war „Versuch einer Vervollkommnung der Elemente der Geometrie"[1]). Direkte Ursache zum Verfassen dieses Werkes war der Versuch, die Beweise der Theoreme, die über den Übergang vom Endlichen zum Unendlichen handelten, von dem verbreiteten Gebrauch der Unteilbaren von Cavalieri und der Unendlichkleinen von Guldin zu befreien. Um der Geometrie ihre Genauigkeit und Klarheit wiederzugeben, die sie nach der Meinung des Autors, infolge des Gebrauches dieser Größen, oder, was dasselbe ist, infolge der Einführung der von ihnen dargestellten Methode der Unteilbaren eingebüßt hat, stellt er an Stelle der letzteren die Methode der Grenzen, die er aus den obengenannten Werken d'Alemberts und des Abbé de la Chapelle entnimmt. Indem er jedoch die darin gegebene Definition der Grenze als ungenügend und unbestimmt findet, stellt er sie, um die darin befindlichen Mängel zu beseitigen, in folgender Form dar: „Wenn irgend eine Größe durch irgend eine bestimmte bis in die Unendlichkeit dauernde Operation sich vergrößert oder vermindert, und dadurch sich einer anderen unveränderlichen Größe so nähert, daß sie sich von ihr weniger unterscheidet als um irgend eine willkürlich genommene Größe derselben Art und mit alledem sie doch niemals erreicht, so ist diese andere unveränderliche Größe dasjenige, was man die Grenze der ersten sich vergrößernden oder vermindernden Größe nennt."[2]) Indem er als Grundsatz der Methode der Grenzen den ersten der beiden von de la Chapelle anerkannten Sätze annimmt, stellt Gurief den Beweis, den d'Alembert diesem Satz gab, in folgender veränderter Form dar: „Nehmen wir an, daß X die sich vermehrende Größe ist und A, B ihre beiden Grenzen sind, so sind sie, wenn nicht einander gleich, die eine größer als die andere. Nehmen wir an, daß A größer ist als B um eine unveränderliche Größe D, so wird infolgedessen, daß A und B zwei unveränderliche Größen sind, $A = B + D$ sein. Da aber X immer kleiner ist als B,

[1]) St. Petersburg 1798, 4°, 264 S. mit 5 Tafeln. [2]) Gurief, Versuch, S. 34.

so kann der Unterschied zwischen X und $B+D$ niemals kleiner werden als D, kann auch folglich nicht kleiner werden als jede willkürlich gegebene Größe, und da $B+D=A$ ist, so kann auch die Differenz zwischen X und A nicht kleiner werden als jede willkürlich gegebene Größe und A ist folglich nicht die Grenze von X, was der Voraussetzung widerspricht, folglich usw."[1]) Dieses Satzes bedient sich Gurief in allen Fällen im ersten Kapitel seines Werkes, welches dem Übergang vom Endlichen zum Unendlichen gewidmet ist, außer dem Fall des Übergangs vom Kommensurabelen zum Inkommensurabelen, welchem das zweite Kapitel bestimmt ist. Der Inhalt des ersten Kapitels wird vom Verfasser als „Sätze, in denen die Gleichheit zweier Größen aus drei Arten von Dimensionen begründet werden", bezeichnet. Als zweiten Grundsatz der Methode der Grenzen, deren er sich ausschließlich im zweiten Kapitel bedient, wo er auch angeführt wird, nimmt Gurief folgendes an: „Wenn zwei sich vergrößernde oder vermindernde Größen X und Y, die als Grenzen A und B haben, sich so verhalten, wie zwei unveränderliche Größen C und D, so werden sich auch ihre Grenzen A und B so verhalten, wie diese unveränderlichen Größen C und D"[2]). Die Sätze, „deren genauer und klarer Beweis" den Gegenstand des zweiten Kapitels bilden, werden in dessen Überschrift als solche charakterisiert, „in denen die Proportionalität zweier Größen aus drei Arten von Dimensionen zu zwei anderen Größen derselben oder einer anderen einfachen Dimension gesucht wird"[3]). Diese beiden Kapitel in Verbindung mit den Elementen des Euklid bilden, nach der hochmütigen Meinung ihres Autors, das vollständig genügende Material für die Elemente der Geometrie, so wie sie sich d'Alembert wünscht, und zu deren Zusammenstellung nach der Meinung des letzteren die Kräfte der größten Geometer, wie Descartes, Newtons, Leibniz' und Bernoullis erforderlich sind. Den Plan solcher Elemente, den d'Alembert zusammengestellt hatte, sah Gurief nicht als den auserwähltesten an, und zog ihm den von Euklid angenommenen vor. Über Gurief kann man sagen, daß er zu dem in Rußland sehr verbreiteten Typus gebildeter Leute gehörte, die große Ehrfurcht für die alten Autoren fühlen, und gleichzeitig sehr ungenügende Kenntnisse von ihnen besitzen. Die authentischen Werke der alten Geometer und besonders die des Euklid und Archimedes kannte er so oberflächlich, daß er mit Gewißheit zu behaupten wagte, daß die Exhaustionsmethode von der Methode Newtons der ersten und letzten Verhältnisse herstamme, und daß sie bei den alten Geometern gar nicht gebraucht worden sei[4]). Diese

[1]) Gurief, Versuch, S. 85. [2]) Ebenda, S. 152. [3]) Ebenda, S. 105. [4]) Ebenda, S. 26—27.

Behauptung sprach er zum Zwecke der Widerlegung der entgegengesetzten Meinung des Abbé de la Chapelle aus. In demselben Werk gibt Gurief, wenn auch einen sehr umfangreichen, jedoch lange nicht den ganzen Gegenstand erschöpfenden kritischen Überblick der Elemente der Geometrie von Legendre.

Unter den Lehrbüchern der Elementargeometrie, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts erschienen, nennen wir auch das Lehrbuch, welches eingeschlossen war in dem umfangreichen Werk des Mitgliedes der Pariser Akademie der Wissenschaften Bezout, „Cours de mathématiques“[1]), das alle Abteilungen der Elementarmathematik, Mechanik und Navigation umfaßte. Außer den Übersetzungen in viele europäische Sprachen erschienen die Ausgaben der einzelnen Teile dieses Kursus während der ganzen ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts[2]). Beim Zusammenstellen der in diesem Kursus befindlichen Elemente der Geometrie bemüht sich der Verfasser, soweit es in seinen Kräften stand, den obengenannten Anweisungen und dem Plan d'Alemberts zu folgen. Dieses gut durchzuführen, gelang ihm jedoch nicht. Sein Werk, wie es schon von der zeitgemäßen Kritik bemerkt wurde, zeichnete sich durch Mangel an Strenge aus. Vieles, was er voraussetzte und als augenscheinliche Folge benannte, bedürfte des Beweises. Einer der Hauptgründe des Mißlingens, das Bezout traf, war sein Verfolgen einiger Nebenzwecke, wie z. B. das Bestreben, das Examen sowohl dem Examinator, als auch dem Examinanden zu erleichtern.

Wenn die bis jetzt betrachteten Schriften über die Elementargeometrie im vollen Sinne des Ausdrucks als Elemente der Geometrie sich erwiesen, die von d'Alembert genau festgestellt waren, so ist der der Geometrie gewidmete zweite Teil der „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebener und sphärischer Trigonometrie und Perspektive“[3]) von Kästner[4]) Muster eines anderen Typus der Elemente der Geometrie, der außer den allgemeinen auch spezielle Ziele verfolgt. Dieser Typus hat dank der ihn reichlich vertretenden Werke schon lange sein Bürgerrecht bekommen. Aus den angewiesenen verschiedenen Formen in dem Aufsatz „Des élémens de Géométrie“[5])

---

[1]) 8°, 6 Bände, Paris 1764—69. [2]) Es wurde bis zum Jahre 1852 in vielen neuen Ausgaben verlegt, und in Übersetzungen in der deutschen, russischen und polnischen Sprache. Mit der Umarbeitung einiger seiner Teile, die zum Zweck hatte, einige darin enthaltene Unvollkommenheiten zu beseitigen, beschäftigten sich Baron Reynaud, Garnier, Reboul und Peyrard. [3]) 8°, Göttingen 1758, 6. Aufl., ib. 1800. [4]) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III², S. 576. [5]) Encyclopédie méthodique. Mathématiques II, p. 136.

von d'Alembert, in denen die Elemente der Geometrie dargestellt werden können, je nach den Forderungen, die von verschiedenen Gruppen von Lesern an sie gestellt werden, nähert sich das Werk von Kästner am nächsten der Form eines Traktates über die praktische Geometrie, das von Spekulationen begleitet wird, welche bis zu einem gewissen Grade die praktischen Operationen zu erleuchten imstande sind, und verhindern, daß man sich mit der blinden Routine allein begnüge. Der erste Teil der Geometrie von Kästner besteht aus der Geometrie der Ebene und der Anwendung der in ihr vorgelegten Regeln zur praktischen Geometrie. Unmittelbar nach dem ersten Teile folgt die Darstellung der ebenen Trigonometrie, welche auf diese Weise den Charakter eines Anhangs oder sogar eines Schlußteils des Traktats über die praktische Geometrie der Ebene bekommt. Den zweiten Teil der Geometrie von Kästner stellt die Geometrie des Raumes dar, wonach unmittelbar als Ergänzung oder ihr Schlußteil die sphärische Trigonometrie folgt. Die theoretische Abteilung des ersten Teiles enthält die Geometrie der geraden Linie und der Kreislinie. Die Reinheit seiner Darstellung wird durch die Einführung zweier Theoreme aus der Geometrie der Flächen gestört: des Theorems des Pythagoras und des Theorems über das Verhältnis der Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Höhe. Die Abteilung beginnt mit der Erklärung von Definitionen, Postulaten und Axiomen. Von den Definitionen, die Kästner gibt, genügt es, folgende anzuführen: „Die gerade Linie ist eine solche, deren Punkte gerade nach einer Seite hin liegen.“ „Die Kurve jedoch ist eine Linie, in welcher zwischen zwei möglichst nahe aneinander gelegenen Punkten sich immer einige Punkte befinden, die nicht mit ihnen zusammen auf einer geraden Linie liegen.“ „Die Ebene ist eine Fläche, von deren jedem Punkt zu ihren anderen Punkten man gerade Linien führen kann, so daß alle ihre Punkte sich auf derselben Fläche befinden werden.“ „Ebener Winkel ist die gegenseitige Neigung zweier Linien, die auf einer Ebene liegen, und welche nicht eine gerade Linie bilden.“ Folgende Sätze sieht Kästner als Axiome an: 1) Durch jede zwei Punkte geht nur eine gerade Linie. 2) Wenn zwei gerade Linien zusammentreffen, ohne eine Gerade zu bilden, so werden sie außer einem Punkt nichts gemeinschaftlich haben. 3) Größen, die so aufeinander gelegt werden können, daß die Grenzen der einen und was zwischen ihnen enthalten ist, zusammenfallen mit den Grenzen und allem was zwischen ihnen sich befindet, der anderen sind einander gleich und ähnlich. 4) Gleiche gerade Linien und gleiche Winkel decken einander. 5) Alle rechten Winkel sind einander gleich, weil sie sich gegenseitig decken. 6) Der Durchmesser teilt den Kreis in zwei ähnliche und gleiche Teile. 7) Die Peripherie

des Kreises um das Zentrum ist eine ununterbrochene Kurve. 8) Eine unbestimmte gerade Linie teilt eine unbestimmte Ebene, auf der sie gelegen ist, in zwei Teile, die auf den ihnen entgegengesetzten Seiten gelegen sind. Mit Ausnahme der zwei angeführten Theoreme ist die ganze Geometrie der Flächen und mit ihr das Ausmessen des Kreisumfanges von Kästner in die Abteilung der praktischen Geometrie zugerechnet. Als auf eine bemerkenswerte Eigenartigkeit der Geometrie von Kästner ist auf die Einheit der Mittel der Beweisführung von Sätzen, die vom Übergang vom Endlichen zum Unendlichen handeln, hinzuweisen. In beiden Fällen dieses Überganges, d. h. ebenso wie beim Übergang von den kommensurabelen zu inkommensurabelen Größen, ebenso auch beim Übergang von geraden Linien zu krummen wird in ihr gleichförmig dieselbe Methode gebraucht, nämlich die Exhaustionsmethode.

Von den anderen Lehrbüchern der Elementarmathematik, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts verlegt worden sind, waren in der Heimat ziemlich verbreitet, und sogar außerhalb derselben einigermaßen bekannt, die Werke des Professors der Mathematik und Physik an der Universität zu Rostock, zu Bützow und zu Halle Wences-aus Johann Gustav Karsten (1732—1787)[1]) „Lehrbegriff der gesammten Mathematik“[2]); „Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften“[3]) und „Auszug aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriff der mathematischen Wissenschaften“[4]). Als bemerkenswerte Eigenschaft des den Elementen der Geometrie gewidmeten Teiles dieses Werkes erschien die vollkommene Beseitigung der Anforderung an den Leser, anfängliche Kenntnisse der Arithmetik und Algebra zu besitzen. Um diesen Umstand vielleicht stärker zu betonen, fängt die Darstellung der Teile der Elementarmathematik mit der Geometrie an.

Der Wunsch d'Alemberts, als Autoren der Elemente der Geometrie Geometer vom ersten Range zu sehen[5]), wurde in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts von Euler und Legendre erfüllt. Jedoch bekam das obenerwähnte Werk Eulers gar keine Bekanntheit und außerhalb Rußlands gar keine Verbreitung. Was das Werk von Legendre anbetrifft, so entsprach es überhaupt den Forderungen d'Alemberts nicht, bei Darlegung der Elemente der Geometrie dem Weg zu folgen, dem die sie erschaffenden Forscher in ihren Entdeckungen folgten, d. h. eben derjenigen Forderung, welche d'Alem-

---

[1]) Poggendorff, I, S. 1224—1225. [2]) 8 Bücher, 8°, Greifswald 1767—77, 2. Aufl. 1782—91. [3]) 3 Bücher, 8°, Rostock 1780. [4]) 2 Bücher, 8°, Greifswald 1781, 2. Aufl. ib. 1785. [5]) Encyclopédie méthodique. Mathématiques II, p. 135—136.

bert zwang, Mathematiker vom ersten Range zum Zusammenstellen der Elemente der Geometrie zu bewegen. Sogar Euklid, wenn nicht in der Beweisführung, so im Verteilen des Inhalts einiger Teile seines Buches, stand den Anforderungen d'Alemberts näher als Legendre. Und überhaupt kann man an der Fähigkeit und der Möglichkeit für Mathematiker vom ersten Range den Anforderungen d'Alemberts zu genügen, stark zweifeln, sie sogar absprechen. Auf einen der Gründe dieser Zweifel, nämlich auf das Vorhandensein unbewußter schöpferischer Prozesse oder, nach dem Ausdruck d'Alemberts, auf den Fall, wenn der Forscher sich mehr von einer Art des Instinktes als von Vernunftschlüssen leiten läßt, weist d'Alembert schon selbst hin. Aber außer diesem Grunde, und schon nicht allein zum Zweifel, sondern zum Verneinen, können auch andere angeführt werden. Gegen die Möglichkeit, für Mathematiker vom ersten Range der neuen und neuesten Zeiten auf die Wege zurückzukehren, auf denen die Schöpfer der Elementargeometrie bei ihrem Erschaffen gingen, sprechen noch folgende Vernunftschlüsse. Das Erschaffen der griechischen Geometrie, durch die Elemente von Euklid dargestellt, als Resultat der im Laufe großer Zeiträume sich entwickelnden Kollektivarbeit solcher Schöpfer, welche einer langen Reihe von aufeinander folgenden Generationen und dabei so verschiedenen Nationen, wie der ägyptischen, griechischen und den mehr oder weniger bekannten anderen angehörten, ging bei vollständig anderen Umständen und Bedingungen vor sich, als die Arbeiten der Forscher der neuen Wissenschaft. Um sich von der Gerechtigkeit der eben ausgesprochenen Behauptung zu überzeugen, genügt es der Erinnerung, daß Euler, Legendre und andere europäische Mathematiker des 18. Jahrhunderts und überhaupt der neuen Zeit, infolge ihres Standpunktes auf der arithmetisch-algebraischen Richtung der Inder, Analytiker waren, abgesehen von dem Unterschiede, der unumgänglich hervorgerufen wird durch den Fortschritt der weit vorgerückten Wissenschaft im Vergleich zum grauen Altertum, während solche hervorragende Kräfte in der Elementargeometrie, wie die griechischen Mathematiker des fünften und der folgenden Jahrhunderte vor Christi Geburt, als reine Geometer angesehen werden müssen, weil sie immer auf dem Grunde rein geometrischer Richtung standen, welcher so schroff die indische Mathematik von der altgriechischen unterscheidet.

Was jedoch die Fähigkeit der Mathematiker vom ersten Range der neuen Zeit anbetrifft, die Wege wiederherzustellen, auf denen beim Erschaffen der Elementargeometrie ihre Schöpfer gingen, so genügt es in dieser Beziehung, um den Einzelheiten beim Betrachten dieses Gegenstandes auszuweichen, die Aufmerksamkeit auf folgenden Umstand zu

lenken. Als d'Alembert die Mathematiker vom ersten Range zum Zusammenstellen der Elemente der Geometrie aufforderte, dachte er, daß es für sie genügend sein würde, beim Wiederherstellen der Wege der anfänglichen Schöpfung dieser Elemente, ihren eigenen Wegen, die sie während ihrer eigenen Entdeckungen gingen, zu folgen, d. h. mit anderen Worten, mit der Wiederherstellung dieser eigenen Wege wieder anfänglich zu beginnen. Können sie das aber bei den herrschenden Bedingungen und Arten der schaffenden wissenschaftlichen Arbeiten in der neuen und neuesten Zeit in den mathematischen Wissenschaften? Um eine neue Entdeckung zu machen, hält sich der Gelehrte bei den Wegen, die seine Idee wandelt, und bei den einzelnen Stadien ihrer Entwicklung in seinen Gedanken nicht auf, sondern bemüht sich, so schnell wie möglich zu seinem Ziel zu gelangen. Gewöhnlich gibt er sich über dieselben nicht nur keine klare, sondern überhaupt gar keine Rechenschaft. Nachdem er sein Ziel erreicht und eine neue Entdeckung gemacht, gibt sich der Gelehrte Mühe, oft mit großer Anstrengung, dieselbe in den ihm selbst gewohnten Formen darzustellen, in denen gewöhnlich in der gelehrten Literatur und im Unterricht die Wahrheiten und ihre Beweise dargestellt werden. Dasjenige, mit dessen Hilfe er seine Entdeckung erreichte, erscheint ihm in dieser seiner neuen Arbeit nicht als Beistand, sondern direkt als Störung und Hemmung. Er ist bemüht, sich davon zu befreien, es zu vergessen. Dieses Bestreben gelangt zu seiner höchsten Entwicklung, die sich bis zur absichtlichen Vernichtung aller Spuren der anfänglichen schaffenden Arbeit steigert, bei solchen Gelehrten, die ihre unmittelbaren Resultate, als unelegant und manchesmal als Fehler enthaltend, finden. Als Resultat aller eben angeführten Umstände und Bedingungen, bei denen die schöpferische Arbeit der Gelehrten in der neuen und neuesten Zeit vor sich geht, erscheint seine Lage augenscheinlich als sehr nahe angrenzend an diejenige, in der der Gelehrte sich bei der unbewußten schöpferischen Arbeit befindet, oder nach dem Ausdruck d'Alemberts im Falle, daß er dem Instinkt mehr folgt als dem Vernunftschluß.

Wer kann eigentlich die Anforderungen von d'Alembert befriedigen, wenn sogar die Mathematiker vom ersten Range der neuen und neuesten Zeit es zu tun nicht imstande und sogar dazu unfähig sind? Das kann nur die Geschichte der Mathematik erfüllen, oder in engerem Sinn, die in dieser Richtung von ihr gemachten Forschungen. Leider entbehrt sie solcher Forschungen nicht nur in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, sondern auch in der Gegenwart. Folglich konnten und können nicht, nicht in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, sogar jetzt nicht diejenigen wahren Elemente der Geometrie zusammen-

gestellt werden, welche d'Alembert vorschwebten, und die seinem Gedanken nach eine Verbindung der Wahrheiten in ihrem natürlichen Schein darstellen sollten, indem sie zwischen ihnen eine in Wirklichkeit existierende und keine künstliche Kette bilden sollte, und die außerdem von derjenigen Ausdrucksform befreit sein sollte, welche sich im Laufe der Jahrhunderte in der Wissenschaft ausgearbeitet hatte, teils dazu, um ihr etwas Geheimnisvolles zu verleihen, teils um ihren Gebrauch in der Praktik zu vereinfachen.

Eine besonders wichtige Bedeutung muß das Zusammenstellen solcher wahren Elemente der Geometrie zum Erlernen der letzteren haben, wenn man diese Elemente als Leitfaden oder sogar direkt als Lehrbuch ansieht. Und wirklich, nur nach der Reinigung der Elemente der Geometrie von allem Künstlichen und allem, was der Natur der menschlichen Vernunft und den Gesetzen der Entwicklung der menschlichen Kenntnisse widerspricht, werden sie für Menschen, die über mittleren Verstand verfügen, zugänglich werden, das heißt für die Mehrzahl der Menschheit, und ihr Erlernen von dieser Mehrzahl wird ein wirkliches und kein scheinbares werden, wie jetzt und auch früher. Nur bei einer solchen Befreiung der Elemente der Geometrie von allem Fremden und von außen Eingeführten kann der königliche Weg der Erlernung der Geometrie geschaffen werden, über dessen Abwesenheit in den Elementen des Euklid einstmals der weise König Ptolemäus dem Autor bitter klagte.

Praktische Geometrie (Feldmeßkunst).

Außer den Lehrbüchern der Elementargeometrie, welche, gleich dem oben besprochenen Lehrbuch von Kästner, die, in der Überschrift nicht bezeichnete, Verbindung der theoretischen Geometrie mit der praktischen darstellten, erschienen in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts nicht wenige solcher Lehrbücher, deren Benennungen auf diese Vereinigung als auf den Gegenstand des Werkes hinwiesen. „Geometria theoretica-practica"[1]) oder „Traité de géométrie théorique et pratique"[2]), das waren ungefähr die allgemeinen Überschriften der Werke dieses Typus, in einzelnen Fällen mehr oder weniger variierend. Das Erscheinen einer bedeutenden Anzahl solcher Werke in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wies klar auf die Verbreitung in dieser Epoche des von d'Alembert bezeichneten Typus von Lesern der elementargeometrischen Werke, die bei deren Erlernung nur prak-

---

[1]) Florian Dabuz, Mogunt. (Mainz) 1767. [2]) Seb. Le Clerc, Paris 1764.

tische Ziele verfolgten. In der größten Anzahl erschienen Werke des betrachteten Typus entweder in den am wenigsten kultivierten Ländern, wie Rußland und Polen, die dementsprechend über fünf und neun solcher Werke verfügten, oder in Ländern, die sich in der vorherrschend praktischen Richtung auszeichneten, wie Holland, wo es deren fünf gab. In den anderen Hauptländern Europas gab es ungefähr in England und Italien je eins, in Frankreich zwei, und in Deutschland vier solche Werke.

In den Inhalt dieser Werke wurden verschiedene Artikel aus verschiedenen Teilen der praktischen Geometrie eingeführt, wie die Artikel über die Maße, von den Mitteln der Messung und von den dabei gebräuchlichsten Vorrichtungen (Astrolabium und Mensula), von der Absteckung und Messung der Strecken und Winkel auf dem Felde und auch der Entfernungen und Höhen, vom Ausmessen der Felder, von der Grundrißaufnahme, von verschiedenen in der Praktik vorkommenden Fällen des Ausmessens der Rauminhalte (unregelmäßige Körper, Kornhaufen, Holzstapel, Fässer, Krüge, Kanonenkugeln). In einigen von solchen Werken wurden ebenfalls Artikel über Nivellierungen und sogar über Refraktion eingeschoben.

Außer den Werken des betrachteten Typus wurden im Laufe der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts noch Werke herausgegeben, die der Darstellung der praktischen Geometrie allein gewidmet waren. Nach den zurzeit sehr unvollkommenen bibliographischen Berichten erschien in dem angegebenen Zeitraum je ein solches Werk in England und Rußland, vier in Deutschland und zwei in Polen. Das hervorragendste von ihnen war das Werk Mayers des Sohnes „Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie“[1]). In großem Gebrauch in der betrachteten Epoche waren einige Werke über die praktische Geometrie, die im Laufe der ersten Hälfte des 18. und sogar im 17. Jahrhundert erschienen waren. Von ihnen hatten eine sehr große Verbreitung folgende Werke: Chr. Clavius[2]), Geometria practica[3]); Daniel Schwenter, Geometria practica nova[4]); Nicolas Bion, Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques[5]); J. F. Penther, Praxis geo-

[1]) 3 Teile, 8°, Göttingen 1778—83, 4. Aufl. 1814—18. [2]) Cantor, Vorlesungen II², S. 555—557. [3]) Opera mathematica, II, fol. Mogunt. 1612. Cantor Vorlesungen II², S. 579—581. [4]) 2 tom., 4°, Nürnberg, 1618. Cantor, Vorlesungen II², S. 666—670. [5]) 8°, Paris 1709. Poggendorff, I, S. 194—195. Erschien in mehreren Ausgaben in Frankreich und war außerdem in einige andere Sprachen übersetzt worden. Besonders bemerkenswert war die deutsche Übersetzung von Doppelmayr, weil sie viele Ergänzungen enthielt. Sie erschien im Jahre 1713 in Nürnberg unter dem Titel „Mathematische Werkschule“, und danach von neuem herausgegeben 1717 und 1723; in-4°.

metriae[1]); Johann Bayer, Vollkommene Visier-Kunst[2]); Pézenas, Traité du Jaugeage[3]).

Für die praktische Geometrie, ebenso wie für alle Wissenschaften, die über Maße handeln, stellt die große Anzahl der letzteren im Leben große Hindernisse und Unbequemlichkeiten in den Weg. Besonders bemerkbar war es in Frankreich, wo nicht nur verschiedene Provinzen verschiedene Maße hatten, sondern einzelne Städte in ein und derselben Provinz. Das Feststellen der Einheit der Maße oder die Gebrauchseinführung eines allgemeinen Maßes für die ganze Menschheit wurde hier früher, und vielleicht mit einer größeren Klarheit eingesehen, als in den anderen Ländern Europas. Als erster trat mit einem bestimmten Vorschlag in der Wissenschaft über diesen wichtigen Gegenstand Gabriel Mouton[4]) hervor. In seinem Werk „Observationes diametrorum solis et lunae apparentium etc."[5]) schlug er vor als allgemeines Maß den geometrischen Fuß, „virgula geometrica", der im Erdgrad 600000mal enthalten war, anzunehmen. Um die Möglichkeit zu haben, die wirkliche Länge dieses Fußes zu jeder Zeit zu finden, bestimmte er die Zahl der Schwingungen des einfachen Pendels derselben Länge während einer halben Stunde, die sich als die Zahl 3959,2 erwies. Dieselben Gedanken wurden im nächsten Jahre (1671) von Picard ausgesprochen und 1673 von Huygens; sie fanden sogar in der Royal Society solchen Anklang, daß diese sich ihnen öffentlich anschloß. Am Anfang des 18. Jahrhunderts fing man an direkt die schnelle Durchführung in der Wirklichkeit zu fordern, was in ihren Werken als erste Amontons[6]) und Bouguer[7]) taten. Danach stellte der Akademiker du Fay dem Minister das Projekt des Reglements vor, welches die Einführung eines allgemeinen Maßes durch ein Gesetz feststellte. Die Annahme dieses Projekts verhinderte der Tod des ihm sympathisierenden Ministers, und ebenfalls des Autors selbst. Auf derselben Neuerung bestand auch de la Condamine in seinem Memoire[8]), in dem er zu zeigen sich bemühte, daß das natürlichste und am wenigsten die Eifersucht verschiedener Länder hervorrufende Maß, dem deshalb auch der Vorzug gegeben werden müßte, das Äquatorialpendel erschien, welches die Länge von 36 pariser Zollen und 7,21 Linien besitze, wenn man sich der Toise, die für Ausmessungen in Peru angefertigt worden war, bediente. Bei Einführung

[1]) 1732, neue Auflage, 2 Teile, fol. Augsburg 1755. Cantor, Vorlesungen III², S. 528—529. [2]) 4°, Frankfurt a. M. 1603. [3]) 4°, Marseille 1742. Seconde édition, donnée en 1778 par les soins de M. de la Lande. Poggendorff, II, S. 422—423. [4]) Cantor, Vorlesungen III², S. 76. [5]) 4°, Lugd. 1670, p. 433. [6]) Histoire de l'Académie des sciences de Paris, année 1703, p. 51. [7]) Ebenda, p. 300. [8]) Ebenda, année 1747, p. 189.

dieses Maßes würde die pariser Toise um 14,42 Linien länger werden, und der pariser Breitengrad würde 56132 astronomische Toisen enthalten anstatt 57069 solcher pariser Toisen, die im Grad des Meridians zwischen Paris und Amiens enthalten waren.

Am Ende des 18. Jahrhunderts, am Anfang der französischen Revolution, wurde die Forderung der Einführung eines allgemeinen Maßes nicht nur von wissenschaftlichen Anstalten und einzelnen Gelehrten ausgesprochen, sondern auch von weiten Kreisen der Gesellschaft. So legte am Anfang des Jahres 1790, dem allgemeinen Wunsch entsprechend, der Bürger vieler Städte, Talleyrand-Périgord, welcher damals Bischof von Autun war, der Nationalversammlung den Bericht von der Notwendigkeit, ein allgemeines Maß durch das Gesetz festzustellen, vor, wozu man sich eines von den vorgeschlagenen natürlichen Maßen bedienen konnte, und am besten der Länge des Sekundenpendels auf der geographischen Breite von 45°. Da sich die Nationalversammlung nicht als kompetent genug fühlte, um eine so wichtige Frage endgültig zu bestimmen, wandte sie sich mit einer entsprechenden Anfrage an die Pariser Akademie der Wissenschaften. Die Ausarbeitung der Antwort auf diese Anfrage vertraute die letztere einer zu diesem Zweck besonders erwählten Kommission an, welche aus den Akademikern Borda, Lagrange, Laplace, Monge und Condorcet bestand. Die Ergebnisse der Arbeiten dieser Kommission waren in dem in ihrem Namen gemachten vom 19. März 1791 datierten Berichte „Sur le choix d'une unité des Mesures"[1]) enthalten.

Die Länge des Sekundenpendels auf dem 45. Breitengrade als allgemeines Maß anzunehmen, fand die Kommission als unbequem, weil es in das System der Maße eine Ungleichartigkeit einführt, indem es die Bestimmung der Länge dem Vermessen der mit ihm so ungleichartigen Größe, wie die Zeit, unterwirft, oder, was gleichbedeutend ist, der Größe der Schwere, und außerdem, was noch wichtiger ist, ein Element der Willkür hineinbringt, weil es sich eines so willkürlich gewählten Zeitteiles bedient, wie die Sekunde. Die Längeneinheit im allgemeinen Maßsystem muß nach der Meinung der Kommission auf der Erde selbst gefunden werden, weil nur eine solche Einheit von keiner andern Größe abhängig sein wird, und außerdem, ihrem Ursprung nach, die Analogie mit allen anderen, von der Menschheit gebrauchten Längeneinheiten bewahren wird. Von diesem Standpunkt aus würde es natürlicher sein, die Abstände der Orte auf der Erde auf das Viertel eines der Erdkreise zurückzuführen,

[1]) Histoire de l'Académie royale des sciences, année 1788 (Paris 1791), p. 7—16.

als auf die Länge des Pendels. Als solcher Kreis muß der Äquator oder Meridian angenommen werden, und nur der Meridian, weil er aus vollkommen begreiflicher praktischer Erwägung dem von den Völkern Europas dargestellten zivilisierten Teil der Menschheit die größten Bequemlichkeiten darbietet. Als wirkliche Maßeinheit muß der vierte Teil des Erdmeridians gewählt werden, und die im praktischen Leben gebrauchte Einheit ihr 10000000. Teil sein. Im Einklang mit dem eingeführten Dezimalsystem in der Arithmetik muß das System der Einteilung dieser Einheiten nicht ein sexagesimales, wie früher, sondern ein dezimales werden. Der Bericht hält sich nicht bei den Erwägungen auf, welche die Kommission zwangen, das Dezimalsystem vorzuziehen, aus dem Grunde vielleicht, daß dieser Gegenstand schon früher einer genauen Betrachtung im „Rapport fait à l'Académie des Sciences par MM. Borda, Lagrange, Lavoisier, Tillet et Condorcet, le 27 Octobre 1790"[1]) unterzogen war. Dieser „Rapport" war entstanden infolge des Wunsches der Nationalversammlung, die Meinung der Akademie über die Frage zu wissen: „s'il convient de fixer invariablement le titre des métaux monnoyés, de manière que les espèces ne puissent jamais éprouver d'altération que dans le poids, et s'il n'est pas utile que la différence tolérée sous le nom de remède, soit toujours en dehors. Elle a chargé en même temps l'Académie d'indiquer aussi l'échelle de division qu'elle croira la plus convenable, tant pour les poids que pour les autres mesures, et pour les monnoies? Die Messungen des Meridians, die zur Bestimmung dieser Einheiten notwendig sind, müssen als Ziel die Bestimmung der Länge des Bogens des Erdmeridians haben, welche dem 10000000. Teil des Bogens des Himmelsmeridians = 90° entsprechen würde, und so gelegen wäre, daß seine eine Hälfte nach Norden und die andere nach Süden von der Parallele 45° sich befinde. Um dieses Ziel in Wirklichkeit zu erreichen, schlug die Kommission vor, den Bogen des Meridians von Dünkirchen bis Barcelona unmittelbar auszumessen, welcher etwas mehr als $9^1/_2{}^0$ einschloß. Als die Hauptvorteile, welche dieser Bogen darstellte, wies die Kommission auf die hinlängliche Größe seiner Ausdehnung und auf seine Teilung durch die Parallele 45° in folgende Teile: den nördlichen Teil = 6° und den südlichen = $3^1/_2{}^0$, und auf das Befinden seiner Endpunkte auf der Höhe der Meeresfläche hin. Außer diesem Bogen konnte ebenso vorteilhaft sein der Bogen, der noch westlicher lag und vom Ufer Frankreichs bis zum Ufer Spaniens ging. Jedoch der Vorzug mußte dem ersten gegeben

---

[1]) Histoire de l'Académie royale des sciences, année 1788 (Paris 1791), p. 1—6.

werden, weil er schon zum Teil nämlich zwischen Dünkirchen und Perpignan ausgemessen war und deshalb ein kostbares Mittel der Prüfung der sich ihm anschließenden neuen Vermessungen und Beobachtungen besaß. Als Operationen, die zur Ausführung der ganzen Arbeit über das von der Kommission vorgeschlagene allgemeine Maß notwendig waren, erkannte sie folgende an: 1. Die Bestimmung der Längendifferenz zwischen Dünkirchen und Barcelona, und überhaupt das Ausführen auf dieser Linie aller astronomischer Beobachtungen, welche als nützlich anerkannt werden könnten. 2. Die Vermessung der früheren Basen, deren man sich bei der Messung des Grades, in Paris ausgeführt, bediente, und bei den Arbeiten der Zusammenstellung der Karte von Frankreich. 3. Die Prüfung, durch eine neue Reihe von Beobachtungen der Dreiecke, die früher zur Messung des Meridians gebraucht wurden, und ihre Verlängerung bis Barcelona. 4. Die Ausführung von Beobachtungen unter 45° geographischer Breite zum Feststellen der Zahl der Schwingungen im luftleeren Raume, am Meeresstrande, im Laufe eines Tages, bei der Gefriertemperatur, eines einfachen Pendels, dessen Länge dem 10000000. Teile des Bogens des Meridians gleich sein würde. 5. Die Prüfung durch neue, sorgfältig ausgeführte Experimente des Gewichts eines gegebenen Volums destillierten Wassers, welches sich im luftleeren Raum bei der Gefriertemperatur befindet. 6. Die Zurückführung auf irgend welche neueste Maße, zum Beispiel auf die pariser Toise oder das Pfund oder alle andern im Handel gebräuchlichen Längen-, Flächen-, Kubik- und Gewichtsmaße mit der Bedingung, daß nach der Bestimmung der Einheiten des neuen allgemeinen Maßsystems alle ihre Ausdrücke auf die früheren Maße durch einfache Regeldetri zurückzuführen sind. In Beziehung auf die vierte von den aufgezählten Operationen wurde im Bericht bemerkt, daß die aufgefundene Zahl der Schwingungen, einmal bekannt geworden, die Möglichkeit geben wird, die Einheit der Länge selbst von neuem zu finden mit Hilfe der Beobachtungen über das Pendel. Damit wird die Vereinigung der Vorteile des Systems der Maße, welche von der Kommission vorgeschlagen, mit den Vorteilen des Systems, welche als Einheit die Länge des Pendels annimmt, erreicht. Nach der Erstattung dieses Berichts in der Nationalversammlung wurde er von ihr am 26. März 1791 angenommen und bekam danach die Kraft des Gesetzes. Die Pariser Akademie der Wissenschaften, der die Leitung aller obengenannten Operationen anvertraut war, mußte, dem Vorschlag des Berichts entsprechend, für dieselben einzelne Kommissionen bilden, deren erste Arbeit das Vorlegen des allgemeinen Planes der bevorstehenden Arbeiten sein mußte. Als Mitglieder dieser Kommissionen für die erste und dritte Operationen er-

wählte die Akademie Cassini, Mechain und Legendre, für die zweite Monge und Meusnier, für die vierte Borda und Coulomb, für die fünfte Lavoisier und Haüy und für die sechste Tillet, Brisson und Vandermonde.[1])

Die Benennung „Metrisches System“ bekam das neue System der Maße und Gewichte zum erstenmal im „Rapport fait à l'Académie des Sciences, sur le système général des Poids et Mesures, par les Citoyens Borda, Lagrangé et Monge“[2]). Dieser von der Akademie angenommene Bericht wurde in ihrem Namen der gesetzgebenden Versammlung vorgelegt als derjenige zweite Bericht, welcher nach dem im ersten Bericht gegebenen Versprechen den vollen Plan des neuen Systems darstellen mußte. Als Darstellung dieses Planes in Beziehung auf die Längen- und Kubikmaße dienen folgende im Bericht angeführte Tabellen:

	Seconde nomenclature.	Première nomenclature.				
	Quart du méridien	Quart du méridien	toises 5132430			
Mesures géogr. et nautiques	Décade		513243			
	Degré		51324			
Mesures itinéraires	Poste		5132			
	Mille	Millaire	513			
				pieds	pouces	lignes
Mesures agraires	Stade			307	11	4
	Perche			30	9	6,4
Mesures usuelles	Mètre	Mètre		3	0	11,44
	Palme	Deci-mètre			3	8,34
	Doigt	Centi-mètre				4,43
	Trait	Milli-mètre				0,44

	Seconde nomenclature	Première nomenclature	Valeurs en pintes de Paris	Valeurs en boisseaux
			pintes	boisseaux
Mètre cubique	Tonneau	Muid	$1051\frac{1}{3}$	78,90
	Sétier	Deci-muid	$105\frac{1}{7}$	7,89
	Boisseau	Centi-muid	$10\frac{1}{2}$	0,789
Palme cubique	Pinte	Pinte	$1\frac{1}{20}$	0,0789

Zum Ausdruck der neuen Maße in den alten wurde in der ersten dieser Tabellen das Viertel des Meridians als gleich der 90 mal ge-

[1]) Exposé des travaux de l'Académie, sur le projet de l'uniformité des mesures et des poids. Histoire de l'Académie royale des sciences, année 1788 (Paris 1791), p. 17—20. [2]) Ebenda, année 1789 (Paris, l'an II de la République), p. 1—18.

nommenen 57027. Toise angesehen, die der Länge des 45. Breitengrades auf dem Meridian, welcher über Frankreich geht, nach den Angaben des Abbé de la Caille[1]) auf Grund der Vermessungen, welche von früheren Astronomen der Akademie ausgeführt waren, entsprachen. Das zweite der geographischen und nautischen Maße bekam seine Benennung als Grad aus dem Grunde, weil nach der Bestimmung der Akademie in dem neuen Maßsystem der 100. Teil des Viertels des Kreisumfanges als Grad angenommen wurde. Er stellte folglich die Länge des Erdgrades dar, „mille", oder sein 100. Teil die Länge der dezimalen Erdminute („minute décimale terrestre") und „perche", als 100. Teil dieser letzten, die Länge der dezimalen Erdsekunde (seconde décimale terrestre). „Stade" stellte die Seite eines Quadrats dar, welches im neuen Maßsystem als neuer Morgen Landes angenommen wurde, welcher beinahe um das Doppelte den früheren französischen Morgen übertraf. Die zweite Nomenklatur parallel der ersten anzunehmen, hielt sich die Akademie für gezwungen infolge der Unvollkommenheiten, die der letzteren eigen waren: die Länge der Benennungen, die Kompliziertheit der von ihnen ausgedrückten Begriffe und der Möglichkeit, die eine Benennung mit der andern zu verwechseln, wegen ihrer gleichen Endungen. Zur Erläuterung der angezeigten Kompliziertheit der Begriffe durch ein Beispiel bleibt der Bericht auf der Benennung „Deci-mètre" stehen, in welchem er die Vereinigung dreier Begriffe sieht: der metaphysischen Idee des Zehntels, der metaphysischen Idee eines bestimmten Maßes und endlich die Anwendung der ersten Idee auf die zweite. Um auf diese Weise zum ausgedrückten physischen Maß zu gelangen, muß der Verstand drei Operationen verrichten. Als Benennungen in der zweiten Nomenklatur bemühte sich die Akademie, solche zu wählen, die sich durch Eigenschaften auszeichneten, die den Mängeln der ersten Nomenklatur entgegengesetzt waren und aus der existierenden Metrologie entnommen waren: der französischen, wie décade, degré, poste, perche, und der alten, wie stade, palme, oder aus den Benennungen von Gegenständen, die an eine entsprechende Länge erinnern, wie doigt, trait. Dieselben Überlegungen gaben die Anleitung beim Ausarbeiten der zweiten Nomenklatur der Kubikmaße, die in dem neuen Maßsystem dieselben wie für Flüssigkeiten ebenso auch für Körner sein sollten. Für die Zurückführung der neuen Maße in frühere bei Zusammenstellung der zweiten Tabelle benutzte die Akademie „pinte de Paris" als das zu jener Zeit gebräuchliche Flüssigkeitsmaß und „boisseau" als das ebenso gebräuchliche Kornmaß.

Die begonnenen Arbeiten zur Einführung des metrischen Systems

[1]) Histoire de l'Académie des sciences, année 1758.

wurden von den Umständen der Revolutionszeit sehr aufgehalten. Die nach Beendigung dieser Arbeiten erfolgte offizielle Einführung des metrischen Systems in Frankreich konnte erst im Jahre 1795, am 22. Dezember zustande kommen (1 nivôse de l'an IV de la République). Etwas früher, nämlich den 31. Juli 1793 (13 thermidor de l'an I de la République), wurde das Dekret von der Annahme des Meters als Grundmaß erlassen. Um das metrische System vollkommener zu machen und ebenso auch, um ihm die Möglichkeit zu geben, sich möglichst weit über andere Nationen zu verbreiten, wurde im Jahre 1797 in Paris die internationale Kommission zusammengerufen, welcher Lorenzo Mascheroni angehörte, der dem Gegenstand ihrer Beschäftigung sein Werk „Notizie generali del nuovo sistema dei pesi e misure de dotte dalla grandeza della terra"[1]) widmete.

Derjenige Teil der praktischen Geometrie, welcher als Gegenstand die Kunst des Messens der Felder hatte, wurde von der Feldmeßkunst dargestellt. Sie wurde in drei Teile geteilt. Der erste Teil, oder die Feldmeßkunst im eigentlichen Sinne des Worts, beschäftigte sich mit der Messung der Dimensionen des Feldes, ebenso wie mit der Verrichtung der dabei erforderlichen Beobachtungen in diesem Felde selbst. Der zweite Teil, oder die Grundrißaufnahme genannt, hatte als Ziel die gefundenen Größen und die Ergebnisse der gemachten Beobachtungen auf das Papier zu bringen. Gegenstand des dritten Teils endlich war die Bestimmung des Flächeninhalts des Feldes. Der erste Teil wurde der eben gegebenen Definition seines Gegenstands gemäß seinerseits wieder in folgende zwei Unterabteilungen geteilt: das Messen der Entfernungen und die Beobachtungen der Winkel. Als gebräuchliche Vorrichtungen im ersten Teil dienten entweder die Meßkette oder der Wegemesser, im zweiten das Graphometer, Meßtisch, Boussole, Meßscheibe usw. Die Bestimmung des Flächeninhalts des Feldes im dritten Teil der Feldmeßkunst wurde durch das vorhergehende Teilen derselben in Dreiecke, Quadrate, Parallelogramme, Trapeze und hauptsächlich Dreiecke erzielt, wonach die Bestimmung ihres Flächeninhalts und deren Summierung folgte.

An den dritten Teil der Feldmeßkunst schloß sich unmittelbar der besondere Teil der praktischen Geometrie an, der sich mit der Teilung der Länder und der Felder und mit deren Verteilung zwischen ihren Besitzern beschäftigte. Indem man sie als selbständigen Teil der praktischen Geometrie betrachtete, nannte man sie, sich an die Etymologie des Wortes haltend, die Geodäsie im engen Sinne dieses Wortes. Der im weiteren Umfang verstandene Sinn der Benennung

[1]) Milano, anno VI (1798).

„Geodäsie“ umfaßte dagegen nicht nur die Feldmeßkunst, sondern auch solche, höherstehende geometrische und trigonometrische Operationen, wie das Zusammenstellen von Karten und das Messen der Grade des Meridians, oder überhaupt irgend welcher seiner Teile.

Die Grundfrage der Geodäsie, im obengenannten engen Sinne des Wortes verstanden, war die Frage, irgend eine Figur in eine bestimmte Anzahl von Teilen zu teilen, was in den meisten Fällen auf Teilung des Dreiecks in gegebenem Verhältnis zurückgeführt wurde, welches darum auch mit allen Details betrachtet wurde, in vielen, diesem Gegenstand gewidmeten Werken, aus denen angeführt zu werden verdienen: „Application de l'algèbre à la géométrie“ par Guisnée[1]) und „Pratique de la géométrie sur le papier et sur le terrain“[2]) par Le Clerc. In ihnen wurde diese Frage in den Fällen betrachtet, wenn die Gerade, die das Dreieck in gegebenem Verhältnis teilte, durch den Punkt ging, 1) der mit der einen seiner Spitzen zusammenfiel, 2) der auf einer seiner Seiten lag, 3) der inwendig im Dreieck lag, 4) welcher sich außerhalb befand. In denselben vier Fällen wurde auch die allgemeine Frage von der Teilung einer Figur in gegebenem Verhältnis betrachtet. Im Falle, daß verlangt wurde, irgend eine Figur in einem gegebenen Verhältnis durch eine Gerade zu teilen, welche durch einen gegebenen Punkt gehe und der gegebenen Geraden parallel sei, wurde die Figur zuerst durch Gerade geteilt, die aus den Spitzen ihrer Winkel parallel der gegebenen Geraden geführt, sie in Trapezoide teilte. Im Falle einer krummlinigen Figur wurde die sie begrenzende Linie in Teile geteilt, die ohne fühlbaren Fehler als geradlinig angesehen werden konnten, was die Möglichkeit gab, die ganze Figur als geradlinig anzusehen, und folglich solche Methoden anzuwenden, die für Figuren solcher Art ausgearbeitet waren.

Unter den Fragen der Feldmeßkunst, die hauptsächlich durch ihre Ausführung Wichtigkeit gewannen, lenkte die besondere Aufmerksamkeit im Anfang der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts die Frage auf sich, ob beim Messen eines geneigten Feldes dessen wirklicher Flächeninhalt, oder der Inhalt seiner horizontalen Grundfläche zu nehmen sei? Wie wichtig diese Frage auch vom ökonomischen und praktischen Standpunkt aus betrachtet wäre, kann sie jedoch nicht als direkt zur Geometrie gehörend betrachtet werden. Und wirklich, wie man sich auch entscheiden würde, in der Praktik müßte man immer nur eine und dieselbe Größe ausmessen, die Grenzen des Feldes nämlich und ihre Neigung zum Horizont,

---

[1]) Paris 1705; 2e édition, ib. 1753, 4°. [2]) Amsterdam 1691, 12°.

und welchen Flächeninhalt man dann bestimmen würde, den wirklichen oder den der horizontalen Grundfläche, das Endresultat würde immer eine und dieselbe Größe darstellen, nämlich die Ausdehnung des Feldes. Bei den französischen Feldmessern wurde die Methode, welche bei der Messung des Feldes sich ihrer horizontalen Grundfläche bediente, „méthode de cultellation", und die andere, die sich ihrer wirklichen Fläche bediente, „méthode de développement" genannt.

In Deutschland lenkte die im Jahre 1766 in der Danziger Physischen Gesellschaft für Bewerbung um die Prämie des Fürsten Jablonowsky vorgelegte Frage: „einen unzugänglichen und undurchsichtigen Wald oder Morast auf die beste Weise auszumessen, aufzunehmen und zu vertheilen" einige Aufmerksamkeit auf sich. Außer den beiden Autoren Auer und Wilke[1]), deren Werke mit der Prämie gekrönt wurden, beschäftigten sich mit der Lösung derselben Frage auch einige andere deutsche Gelehrte.

Als bemerkenswerteste Arbeit in wissenschaftlicher Hinsicht, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts den Fragen der Feldmeßkunst gewidmet war, ist das Werk von Lorenzo Mascheroni, Problemi per gli agrimensori con varie soluzioni[2]) zu nennen, welches 1803 in die französische Sprache übersetzt wurde. Besondere Beachtung verdienen darin die Aufgaben, die mit Hilfe bloß eines Lineals gelöst werden oder, nach der später angenommenen Terminologie, mit Hilfe der Geometrie des Lineals.

Von den Teilen der praktischen Geometrie stand ihrer Entwicklung nach in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts am niedrigsten die Kunst der direkten Ausmessung des Inhalts der Gefäße, welche in Frankreich Jaugeage und in Deutschland Visierkunst genannt wurde. Ungeachtet der großen praktischen Wichtigkeit dieser Kunst besonders in den Ländern, in denen die Steuern und Zölle auf Getränke und andere Flüssigkeiten den Hauptteil der staatlichen und öffentlichen Einkünfte bildeten, erreichte die Willkür in der Wahl der theoretischen Grundlagen der Ausmessung und die damit bedingte Fehlerhaftigkeit der Resultate in keinem anderen Fach als in diesem einen so hohen Stand der Entwicklung. Das Faß wurde z. B. bald

---

[1]) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik III[2], S. 556. Das mit der Prämie gekrönte Werk Wilkes, „Abhandlung über die Fürstl. Jablonowskische Preisaufgabe aus der Erdmeßkunst etc." (32 S. mit 1 Tafel), war in der Sammlung „Solutiones problematum a celsissimo principe Jablonovio ex historia polona, Geometria et oeconomia propositorum quas societas Physica Gedanensis 1766 praemiis Jablonovianis coronavit" (Danzig 1767), herausgegeben von der Danziger Physischen Gesellschaft, gedruckt. In derselben Sammlung war auch das Werk Auers abgedruckt worden (32 S. mit 1 Tafel). [2]) 8°, Pavia 1793.

als abgekürztes Ellipsoid betrachtet, bald als Zylinder, dessen Diameter gleich ist der halben Summe der Diameter der Grundflächen des abgestumpften Kegels, der dieselbe Höhe hat, bald als zwei abgestumpfte Kegel, die an beiden Seiten der gemeinschaftlichen großen Grundflächen gelegen sind. Die Resultate der Ausmessung in der ersten Voraussetzung erschienen im Vergleich zur Wirklichkeit stark vergrößert, bei den beiden anderen jedoch im Gegenteil stark verkleinert. In vollem Einklang mit der Ungenauigkeit und Fehlerhaftigkeit der theoretischen Gründe der Ausmessung des Inhalts von Gefäßen standen die dazu in der Praktik gebrauchten Instrumente; als solche dienten die Stäbe, Velten, pytometrische Lineale, Ruten, Rohre, Gerten, Bänder und eine Menge verschiedener Visiere mit 4, 6 und 8 Seiten, die eine bedeutende Anzahl von Skalen enthielten, die nach verschiedenen und dabei gewöhnlich fehlerhaften Methoden konstruiert waren. Die Folgen eines so traurigen Zustandes der für das praktische Leben so wichtigen Kunst sind nicht schwer vorauszusehen. Der reiche Kaufmann Bruni aus Marseille erlitt einen Schaden von 40000 Franken wegen der fehlerhaften Ausmessung des Inhalts der Fässer mit dem zugestellten Öl aus dem Osten. Bei der Ausmessung eines Fäßchens mit Branntwein, das aus Orleans gesandt war und in Wirklichkeit 58 Pinten enthielt, mußte in Paris im Jahre 1783 für 76 Pinten Einfuhrzoll bezahlt werden.

Aus den Versuchen, die Visierkunst auf eine möglich höchste Stufe zu bringen, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gemacht wurden, erregte wenigstens in Frankreich die größte Aufmerksamkeit das Werk, welches dem königlichen Professor der Mathematik an der königlichen Kriegsschule, Dez, gehörte. Seinen Erfindungen und Forschungen auf diesem Gebiete weihte er sein, von der Pariser Akademie der Wissenschaften gedrucktes „Mémoire sur la théorie du jaugeage“[1]) und den umfangreichen Artikel „Jauger“ in der Encyclopédie méthodique[2]). Der Vorzug des von ihm erfundenen Apparates zum Ausmessen des Inhaltes der Fässer vor anderen solchen Apparaten wurde durch zahlreiche Versuche, die am 22. Februar 1776 in der Steuerverwaltung in Gegenwart von Mitgliedern der Kommission, die zu diesem Zweck von der Pariser Akademie der Wissenschaften ernannt war, festgestellt. Auf Grund des Berichtes, den diese Kommission vorlegte, nahm die Regierung in Person des Ministers Turgot diese Erfindung von Dez an und beschloß sie zum Gebrauche seiner Beamten einzuführen. Die Anerkennung der Erfindung von

---

[1]) Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie Royale des sciences par divers Savans et lûs dans ses Assemblées, année 1773, p. 383—389. [2]) Mathématiques II, p. 245—257.

Dez wurde von der Regierung auch schon früher durch die ihm am 22. Dezember 1775 bewilligten Patente über diese Erfindung ausgesprochen.

Zu seiner Erfindung wurde Dez durch die von ihm angenommene Methode zur Ausmessung der Fässer von Camus gebracht, welche erklärt und gedruckt war im Jahre 1744 im Memoire des Autors „Sur un instrument propre à jauger les tonneaux et les autres vaisseaux qui servent à contenir des liqueurs“[1]). Camus betrachtete das Faß als einen Körper, der gebildet wird durch Umdrehung um die Achse hH einer gemischten Linie, die aus dem Bogen einer Parabel mBM in ihrem Scheitel B und zweier Tangenten mK und MF in den Endpunkten dieses Bogens m und M besteht. Die aus diesen beiden Punkten auf die Achse gefällten Perpendikel MQ und mq teilen ihre beiden Hälften HC und hC in gleiche Teile. Wenn man danach den Diameter des Fasses BD bei ihrer Biegung oder, was dasselbe ist, bei ihrer Mitte durch b bezeichnet, mit f den Diameter FN des Bodens des Fasses und mit l die innere Länge Hh, so bekommt man für den Inhalt des Fasses oder, was dasselbe ist, für das darin enthaltene Volum der Flüssigkeit den Ausdruck

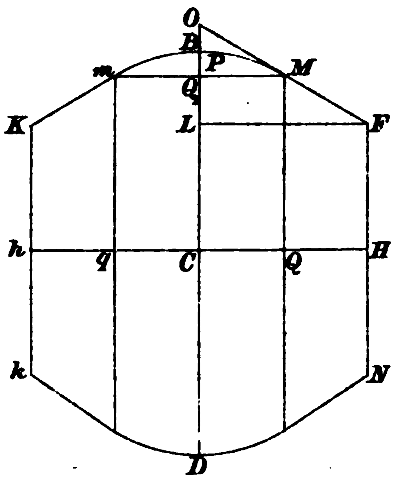


Fig. 7.

$$\pi l \cdot \left(\frac{64 b^2 + 37 b f + 34 f^2}{540}\right), \tag{1}$$

dessen sich Dez auch bediente.

Camus erhielt diese Formel folgendermaßen. Sind $HC = l$, $BC = a$, $FH = b$, so ist $BL = a - b$ und nach der Voraussetzung $MQ_1 = \frac{1}{2} l$. Man verlängere danach MF bis zum Schnitt O mit der Achse der Parabel. Dann sind

$$Q_1 L = Q_1 O \quad \text{und} \quad Q_1 B = \frac{1}{2} Q_1 O = \frac{1}{2} Q_1 L,$$

und folglich

$$Q_1 B = \frac{1}{3} BL = \frac{a - b}{3}.$$

---

[1]) Histoire de l'Académie Royale des sciences, année 1741, p. 385—402.

Das parabolische Segment MQ_1B wird auf diese Weise

$$\frac{2}{3} MQ_1 \cdot Q_1B = \frac{1}{3} l \cdot \frac{a-b}{3}.$$

Der Punkt P der Achse, der dem Schwerpunkt P des Segments entspricht, gibt

$$BP = \frac{3}{5} BQ_1 = \frac{a-b}{5},$$

und folglich

$$CP = \frac{4a+b}{5},$$

und der Umkreis, der vom Punkte P um den Punkt C, als Zentrum, umschrieben wird, wird gleich $2\pi \cdot \frac{4a+b}{5}$. Der Inhalt des Körpers welcher durch die Rotation des Segments MQ_1B gebildet wird, wird auf diese Weise durch die Formel ausgedrückt

$$\frac{\pi l}{45}(8a^2 - 6ab - 2b^2).$$

Der Inhalt des Zylinders, welcher durch die Rotation des Rechtecks MC um die Achse Hh gebildet wird, ist $\pi \cdot MQ_1 \cdot (MQ)^2$. Weil jedoch $MQ_1 = \frac{1}{2} l$ und $MQ = \frac{2a+b}{3}$, so wird damit dieser Inhalt durch die Formel bezeichnet

$$\frac{\pi l}{2}\left(\frac{4a^2 + 4ab + b^2}{3}\right).$$

Endlich ist der Inhalt des abgestumpften Kegels, gebildet durch die Rotation des Trapezes $FHQM$ um die Achse Hh,

$$\pi \cdot \frac{HQ}{3} \cdot (MQ^2 + MQ \cdot FH + FH^2)$$

oder

$$\frac{\pi l}{6} \cdot \frac{4a^2 + 10ab + 13b^2}{9}.$$

Das Addieren der Inhalte dieser drei Körper gibt folglich den Inhalt des ganzen Fasses, welcher durch die Formel ausgedrückt wird

$$(2) \qquad \pi l \cdot \frac{64a^2 + 37ab + 34b^2}{135},$$

aus der durch Einführung an Stelle von BC des ganzen Diameters BD, an Stelle von FH des ganzen Diameters des Bodens des Fasses FN und an Stelle von HC der ganzen Länge des Fasses Hh, die Formel (1) erhalten wird, welche Dez gebraucht.

Vollkommen bestätigt durch eine Menge von Versuchen und Vergleichen der Resultate der nach der Formel berechneten mit den

wirklich in den verschiedensten Gefäßen vorhandenen Flüssigkeiten erwies sich jedoch die Formel des Camus, ihrer Kompliziertheit wegen, als unbequem für den Gebrauch in der Praxis, besonders wenn man den geringen Stand der Kenntnisse und der Entwicklung des Verstandes der Leute in Betracht zieht, denen gewöhnlich das Ausmessen der Fässer und anderer Gefäße anvertraut wurde. Diese Formel in einfacherer Art darzustellen und sie dadurch bequemer zur Anwendung zu machen, half Dez die Beobachtung, daß in Wirklichkeit die Differenz zwischen dem Durchmesser des Fasses an der Stelle seiner Biegung und dem Durchmesser seines Bodens sehr unbedeutend ist. Diese Differenz mit α bezeichnend und in der Formel (1) auf Grund des Ausdrucks

$$\alpha = b - f$$

die entsprechenden Substitutionen ausübend und in den erhaltenen Zahlen unbedeutende Veränderungen zulassend, die nicht zu irgend fühlbaren Fehlern führen, brachte Dez die Formel (1) in folgender einfachen Form

$$\frac{1}{4}\pi l \cdot \left(b - \frac{3}{8}\alpha\right)^2,$$

oder nach der Transformation der letzten zur Formel

$$(3). \qquad \frac{1}{4}\pi l \cdot \left(\frac{b+f}{2} + \frac{1}{8}[b-f]\right)^2.$$

Der Fehler, der durch diese Vereinfachung der anfänglichen Formel entsteht, ist sehr unbedeutend. Und wirklich beträgt die Differenz zwischen den Formeln (1) und (3), was nicht schwer zu ersehen ist,

$$\frac{1}{4}\pi l (0{,}11122 \cdot \alpha - 0{,}02777 \cdot b) \cdot \alpha,$$

was kaum den $\frac{1}{500}$ Teil des Inhalts des Fasses ergibt, sogar wenn man $\alpha = \frac{3}{10} b$ annimmt, nämlich nach der Versicherung des Autors beim ungünstigsten der Fälle, vor dessen Begegnung man sich in der Praxis hüten muß.

Es würde zu weit führen, die Beschreibung des Visiers, das von Dez nach der Formel (3) konstruiert wurde, zu schildern. Wir finden es für genügend, uns mit der Bemerkung zu begnügen, daß die Hauptbedeutung in diesem Apparat zwei Skalen haben, von denen die eine, nach der Benennung des Autors, die Skala der Längen (échelle des longueurs), zum Ausmessen der Länge l des Fasses dient, und die andere, oder die Skala der Durchmesser (échelle des diamètres) zur Ausmessung des Multiplikators

$$\frac{1}{4}\pi \cdot \left(\frac{b+f}{2} + \frac{1}{8}[b-f]\right)^2.$$

Demjenigen, der sich dieses Visiers bediente, blieb nur übrig, um das Endresultat der vollzogenen Ausmessung zu erhalten, die Anzeigen der beiden Skalen zu multiplizieren.

Elementargeometrische Einzeluntersuchungen.

Ebenso wie früher, vielleicht auch noch in größerem Maße, war die Aufmerksamkeit einiger Spezialisten und überhaupt vieler Leute, die dem aufgeklärteren Teile der Gesellschaft angehören, im Laufe der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts auf das Vermächtnis des Altertums, die berühmten Aufgaben der Dreiteilung eines Winkels, Quadratur des Kreises und der Verdoppelung des Würfels, gerichtet. Als auf sehr bedeutende Zeichen der Aufmerksamkeit auf diese Aufgaben seitens der Spezialisten ist auch auf das Erscheinen in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts von Werken, die der Geschichte dieses Gegenstandes gewidmet waren, hinzuweisen. Es gab drei solche Werke. Als erstes erschien das schon früher erwähnte[1]) Werk Montuclas „Histoire des recherches sur la quadrature du cercle“[2]), das im letzten 6. Kapitel einen kurzen historischen Überblick der Aufgaben über die Verdoppelung des Würfels und die Dreiteilung eines Winkels enthielt. Die beiden anderen Werke, die ausschließlich der Aufgabe der Verdoppelung des Würfels gewidmet waren, gehörten Nikolaus Theodor Reimer[3]) (1772—1832), der im Jahre 1796 Privatdozent an der Universität in Göttingen war, und später, vom Jahre 1801, Professor der Mathematik an der Universität zu Kiel. S. oben S. 28 im XIX. Abschnitte.

Die Aufmerksamkeit auf diese berühmten Aufgaben seitens der Mitglieder der gebildeten Gesellschaft kennzeichnete sich durch das Erscheinen einer bedeutenden Anzahl von Versuchen dieselben zu lösen. Die Aufgabe der Quadratur des Kreises beschäftigte übrigens die gebildete Gesellschaft mehr als die beiden anderen. Besonders viel beschäftigte man sich mit ihr, nach der gedruckten Literatur zu urteilen, in Polen, wo ihr 15 Werke gewidmet waren, und in Frankreich, wo es 7 solcher Werke gab. Elf der Werke über die Quadratur des Kreises, die in Polen erschienen, gehörten einem Autor, dem

---

[1]) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, III², S. 506.
[2]) Paris 1754. [3]) Poggendorff, II, S. 596.

Vizeoberst Eugenius Innocentius Corsonich, der darin bewies, daß $\pi = 3\frac{1}{8}$ sei.[1]) Sowohl dieses Resultat, als auch dessen in denselben Werken versuchter Beweis waren, seinen Worten nach, von vielen Mathematikern und von sieben Akademien gutgeheißen. Und wirklich wurde der von ihm zusammengestellte genaue Bericht über seine sechsjährige Beschäftigung mit den entsprechenden Gegenständen außer in Warschau, wo er im Jahre 1779 erschien, noch in den „Nova Acta eruditorum"[2]) gedruckt unter dem Titel „Quadratura lunulae, circuli et segmenti, nec non curvatura sphaerae a V.-Col. E. Corsonich, ope 4 propositionum fundamentalium invicte demonstrata, et judicio Academiarum celeberrimarum subjecta"[3]). Jedoch nicht alle, die mit den Arbeiten von Corsonich bekannt waren, befriedigten sich mit seinen Beweisen. Als Opponent in der Heimat des Autors trat in der Literatur der Warschauer Professor Johann Koc vor. Die Polemik über einige im Druck erschienene Versuche der Lösung dieser berühmten Aufgaben entstand auch in anderen Ländern. So herrschte in Italien, wo man sich mehr mit der Dreiteilung eines Winkels und der Verdoppelung des Würfels beschäftigte, als mit der Quadratur des Kreises, nach der Literatur zu urteilen, eine heiße Polemik zwischen Francesco Boaretti einerseits und Vincenzo Dandolo und Antonio Romano andererseits, in den Jahren 1792—93 über den vom ersteren gegebenen Versuch, diese beiden Aufgaben mit Hilfe des Zirkels und Lineals zu lösen.[4])

Die Literatur über die Lösung dieser drei berühmten Aufgaben erschöpfte sich jedoch nicht mit den Werken, die im Druck erschienen. Der bedeutend größere Teil der Versuche, diese Aufgaben zu lösen, blieb in Manuskripten und in diesem Zustande den Akademien und gelehrten Gesellschaften vorgelegt, belästigte er sie äußerst, da er zu seiner Durchsicht eine vollständig nutzlose Anwendung von Mühe und Zeit beanspruchte. Aus den zahlreichen Durchsichten in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts war nur ein einziger Fall, der der Wissenschaft einen neuen interessanten Satz gab. Er beschäftigte die Pariser Akademie der Wissenschaften, und wurde im Artikel „Mémoire sur la Quadrature de la partie *bfd* du cercle *ahrbda*" (par M. Bourrand[5])) des von ihr im Jahre 1774 gedruckten 6. Bandes der „Mémoires de mathématique et de physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences, par divers Savans"

---

[1]) Dra Teofila Żebrawskiego Bibliografija piśmiennictwa polskiego z działu Matematyki i fizyki oraz ich zastósowan. W Krakowie 1873. [2]) Anno 1776. [3]) p. 108—124. [4]) G. Valentin, Eine seltene Schrift über Winkeldreitheilung. Bibliotheca mathematica, VII (1893), S. 113—114. [5]) p. 400.

dargestellt. Der Gegenstand dieses Artikels war folgender neue Satz: Wenn wir im Kreise rba eine Sehne ba ziehen, die die Endpunkte des Bogens von 120° verbindet, und den Durchmesser hd, der den Teil bd von 30° von diesem Bogen abteilt, so stellt der Sektor cbd den $\frac{1}{12}$ Teil des Kreises rba dar. Wenn danach mit der Sehne ad, die die Endpunkte des Bogens von 90° verbindet, um den Punkt a, als um das Zentrum, der Bogen fd beschrieben wird, so wird der Sektor $fsad$, der zum Zentriwinkel a von 15° gehört, den $\frac{1}{24}$ Teil des Kreises bilden, dem er angehört, und welcher doppelt so groß ist, als der gegebene Kreis rba. Dieser Sektor wird folglich den $\frac{1}{12}$ Teil des Kreises rba darstellen, und deshalb dem Sektor cbd gleich sein. Diese beiden Sektoren aber haben den gemeinschaftlichen Teil fsd und deshalb

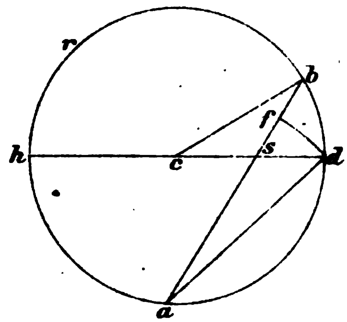


Fig. 8.

$$\Delta sda = \Delta csb + bfd.$$

Es stellt sich auf diese Weise heraus, daß die Differenz zwischen den Flächen der Dreiecke sda und csb durch die Fläche des Teiles bfd des gegebenen Kreises ausgedrückt wird, worin eben der Beweis dieses Satzes besteht.

Die sich immer vergrößernde Anzahl der der Pariser Akademie der Wissenschaften vorgelegten Erzeugnisse der Kreisquadrierer und anderer Personen, die sich mit anderen berühmten Aufgaben, wenn auch in geringerem Maße, beschäftigten, erreichte endlich einen solchen Umfang, daß die Akademie anfing ernstlich darüber nachzudenken, ihre Mitglieder von der nutzlosen Anwendung der Zeit und der Mühe bei dem Durchsehen dieser Erzeugnisse zu befreien. Zum Erreichen dieses Zieles wurde das entschiedenste Mittel gewählt. Im Jahre 1775 veröffentlichte die Akademie folgende Erklärung: „L'Académie a pris, cette année, la résolution de ne plus examiner aucune solution des Problèmes de la duplication du cube, de la trisection de l'angle, ou de la quadrature du cercle, ni aucune machine annoncée comme un mouvement perpétuel".[1]) Der beständige Sekretär der Akademie, Condorcet, motivierte diese Erklärung durch folgende Betrachtungen: Von der Aufgabe der Verdoppelung des Würfels ist

[1]) Histoire de l'Académie Royale des sciences, année 1775, p. 61.

alles, was nur möglich ist von ihr zu wissen, bekannt. Bekannt sind die einfachsten Methoden der Lösung; bewiesen ist, daß es nutzlos sein würde, deren Lösung mit Hilfe nur eines Kreises und einer geraden Linie zu machen. Die Analyse des Problems der Dreiteilung eines Winkels ist so vollständig, daß sie schon seit langer Zeit nichts mehr zu wünschen übrig läßt. Auf diese Weise kann es keinem Zweifel unterliegen, daß diejenigen, die zur Lösung dieser Aufgabe nur den Zirkel und das Lineal gebrauchen, ein fehlerhaftes Resultat erhalten müssen. Diejenigen von ihnen, die zu richtigen Resultaten gelangen, erreichen sie durch den unbemerkten Gebrauch auch anderer Kurven zusammen mit dem Kreise und der geraden Linie, wodurch ihre Lösungen sich von den schon bekannten nicht unterscheiden können, und aus diesem Grunde wird deren Betrachtung vollständig nutzlos. In einer ganz anderen Lage befindet sich die Aufgabe der Quadratur des Kreises. Angenäherte Lösungen sind schon in großer Anzahl gefunden, und die Akademie erkennt in vollem Maße den Wert der Arbeiten in der Richtung der Vervollkommnung der Methoden solcher Lösungen an. Die Kreisquadrierer jedoch suchen nicht die angenäherten Lösungen, sondern die genauen. In Beziehung auf diese letzten zerfällt die Aufgabe der Quadratur des Kreises in zwei selbständige Aufgaben: in der ersten wird die Quadratur des ganzen Kreises gesucht, in der anderen die Quadratur irgend eines Teiles, dessen Sehne als bekannt angesehen wird. Die Unmöglichkeit der ersten Aufgabe wurde von solchen Autoritäten anerkannt, wie Gregory und Newton, ist von vielen Geometern bewiesen, und am besten von Johann Bernoulli. In betreff der zweiten Aufgabe herrscht zwischen den Geometern keine solche Einstimmigkeit über die Unmöglichkeit ihrer Lösung, infolge der häufig vorkommenden Möglichkeit in besonderen Fällen die Größen zu bestimmen, was im allgemeinen Fall unmöglich ist. Infolge dieser Lage der Sache fand Condorcet zur Rechtfertigung der Erklärung der Akademie im betrachteten schwierigen Falle nichts besseres, als an ihre 70jährige Erfahrung zu appellieren, welche klar die vollkommene Nutzlosigkeit für die Wissenschaft der Prüfung der ihr zugestellten eingebildeten Lösungen dieser Frage gezeigt hat, als Erzeugungen von Autoren, die mit der Natur und den Schwierigkeiten dieser Frage nicht bekannt seien, und deshalb solche Methoden anwenden, die zur Lösung dieser Frage nicht führen können, sogar in dem Falle, wenn sie möglich wäre.

Es gab auch noch andere Aufgaben aus der Zahl der von der alten griechischen Geometrie gestellten, für welche sich die Geometer in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts interessierten. So gaben

Lambert, Euler[1]) und Fuß[2]) neue Lösungen der Aufgabe über die Konstruktion eines drei gegebene Kreise berührenden Kreises. Besonderer Beachtung unter solchen Aufgaben erfreute sich die Aufgabe des Pappus von Alexandria von der Einbeschreibung in den Kreis eines Dreiecks, dessen Seiten durch drei auf einer geraden Linie gegebene Punkte gehen, welche von Cramer im Jahre 1742 in folgender allgemeineren Formulierung dargestellt wurde: In einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen müssen. Diese, in der anfänglichen besonderen Form sehr einfache Aufgabe stellte in der verallgemeinerten Form einige Schwierigkeiten dar, die auch die Aufmerksamkeit der Geometer auf sie lenkten. Als erster löste sie in dieser Form Castillon[3]), dem sie von Cramer vorgelegt wurde. In demselben Bande der Memoiren der Berliner Akademie der Wissenschaften gab auch Lagrange seine Lösung dieser Aufgabe. Im Jahre 1780 erschienen drei neue Lösungen von Euler[4]), Fuß[5]) und Lexell[6]). In noch allgemeinerer Form und dabei endgültig wurde die Aufgabe des Pappus von Alexandria dargestellt und gelöst von den italienischen Geometern: A. Giordano[7]) aus Ottaiano, der diese Arbeit mit bemerkenswerter Einfachheit im Alter von 16 Jahren verrichtete, und Malfatti.[8]) Die Aufgabe des Pappus von Alexandria hatte in ihrer endgültigen allgemeinen Form folgende Darstellung: In einen Kreis ein Vieleck einzuschreiben, dessen Seiten in einer beliebigen Anzahl genommen durch eine gleiche Anzahl von Punkten gehen müssen, welche in der Ebene des Kreises willkürlich gelegen sind. Die letzte dieser Aufgabe gewidmete Arbeit am Ende des 18. Jahrhunderts war das Werk von Lhuilier[9]), welches

---

[1]) Solutio facilis problematis, quo quaeritur circulus, qui datos tres circulos tangat. Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae, VI, p. 95—101.
[2]) Solution du problème de trouver un cercle, qui touche trois cercles donnés de grandeur et de position. Ebenda, p. 102—118. [3]) Sur un problème de géométrie plane, qu'on regarde comme fort difficile. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres, à Berlin, année 1776, p. 265 bis 283. [4]) Problematis cujusdam Pappi Alexandrini constructio. Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 1780, I, p. 91—96. [5]) Solutio problematis geometrici Pappi Alexandrini, ebenda, p. 97—104. [6]) Solutio problematis geometrici in Actis Academiae Scientiarum Berolinensis, pro Anno 1776, a celeb. Castillon propositi, ebenda, 1780, II, p. 70—90. [7]) Considerazioni sintetiche sopra di un celebre problema piano, e risoluzione di alquanti problemi affini. Memorie mat.-fis. della Società Italiana delle scienze, IV, 1788. [8]) Soluzione generale di un problema geometrico di Pappo Alessandrino, ebenda, IV, 1788. [9]) Solution algébrique du problème suivant: A un cercle donné, inscrire un polygone dont les côtés passent, par des points donnés. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres, à Berlin, année 1796 (publié 1799), p. 94—116.

einige Änderungen in die Lösungen der italienischen Geometer hineinbrachte.

Ebenso als Beendigung der Arbeiten, die schon früher angefangen waren, nämlich in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts[1]), erschien das Werk von Mascheroni La Geometria del compasso[2]), das im Jahre 1797 erschien. Sein Gegenstand, wie schon aus dem Titel ersichtlich, besteht aus der Lösung ausschließlich nur mit Hilfe des Zirkels aller Aufgaben, die gewöhnlich mit dem Zirkel und Lineal gelöst werden. Sich mit den Aufgaben der Elementargeometrie nicht begnügend, zeigt Mascheroni in seinem Werke, daß die Geometrie des Zirkels leicht zur angenäherten Lösung der Aufgaben von den Kegelschnitten und sogar von noch höheren Teilen der Geometrie angewandt werden kann. Lorenzo Mascheroni[3]) (1750—1800), ein Abbé, beschäftigte sich am Anfang seiner wissenschaftlich-lehrenden Tätigkeit mit Poesie und Belletristik. Aber nach einigen Jahren des Vortrages der humanistischen Wissenschaften und der griechischen Sprache in Bergamo und Pavia fühlte er sich zur Mathematik hingezogen. Nachdem er sich ihrem Studium vollständig gewidmet hatte, wurde er so bald ihrer Herr, daß er schon nach einem kurzen Zeitraum imstande war den Vortrag der Geometrie auf sich zu nehmen, anfangs im Marienkollegium in Bergamo und danach im Archigymnasium in Ticino. Späterhin wurde er Professor der Elementarmathematik an der Universität in Pavia, Korrespondent der Akademie von Padua und Mitglied der italienischen Gesellschaft der Wissenschaften. Als überzeugter und heißer Anhänger der Revolution kam er mit Enthusiasmus den Veränderungen in Italien entgegen, die die Armeen der ersten französischen Republik in ihr politisches Leben hineinbrachten. Nach Gründung der zisalpinischen Republik wurde er zum Mitglied des gesetzgebenden Körpers erwählt und begab sich bald darauf nach Paris, um an der internationalen Kommission teilzunehmen, die zur Ordnung des metrischen Systems der Maße und Gewichte zusammengerufen war. Während seines Aufenthaltes in Paris und kurz vor seinem Tode wurde er zum Mitglied des Stadtrats in Mailand ernannt.

---

[1]) Die ersten Arbeiten dieser Art waren Cardanos und Tartaglias Lösungen einiger Aufgaben der Geometrie von Euklid mit Hilfe eines Lineals allein oder eines Lineals und Zirkels, der jedoch immer unveränderte Öffnung hat. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II[2]. S. 526—529 und häufiger. [2]) Pavia, 8°, VIII + 264 pp., 14 tavole. In das Französische von Carette (Paris 1798) übersetzt und später von Gruson (Berlin 1825) ins Deutsche. [3]) Poggendorff, II, S. 71—72. Biografia di Lorenzo Mascheroni di Camillo Ugoni, Bergamo 1878. Bibliografia mascheroniana per Giuseppe Ravelli, Bergamo 1881.

Durch das Einführen der Algebra in die Elemente der Geometrie in Widerspruch mit den altgriechischen Geometern geraten, setzte Legendre denselben Weg fort. In seinen Arbeiten gab er den analytischen Methoden einen weiten Zugang in der Lösung der Fragen der Elementargeometrie. So gibt er im V. Anhang zu seinen „Elementen" analytische Lösungen der Aufgaben, die da handeln von Dreiecken, in einen Kreis eingeschriebenen Vierecken, Parallelepipeden und der dreiseitigen Pyramide. Bei der Wahl eines Beispiels aus ihnen für unsere Darstellung genügt es an der Bestimmung des Radius des Kreises, der um ein Viereck umschrieben ist, und an dessen Fläche, als Beispiele, in denen der Autor die Theorie des eingeschriebenen Vierecks ergänzt hat und welche deshalb eine selbständige Bedeutung haben.

Es seien die gegebenen Seiten des dem Kreise eingeschriebenen Vierecks $ABCD$

$$AB = a,\quad BC = b,\quad CD = c,\quad DA = d,$$

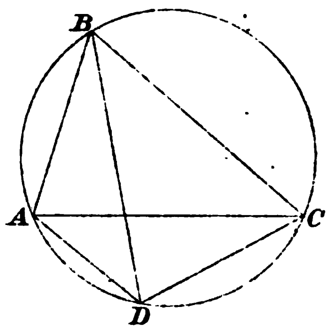


Fig. 9.

und seine unbekannten Diagonalen $AC = x$, $BD = y$. Dann werden auf Grundlage der Theoreme über das Produkt der Diagonalen eines eingeschriebenen Vierecks und über ihr Verhältnis

$$xy = ac + bd \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

daraus folgt, daß

$$x = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}, \quad y = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}.$$

Wenn man sich danach der bekannten Darstellung des Radius eines umschriebenen Kreises des Dreiecks durch die drei Seiten und die Fläche des letzteren bedient, so erhält man für den gesuchten Radius, als den Radius eines umschriebenen Kreises des Dreiecks ABC, den Ausdruck

$$z = \frac{abx}{\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2}},$$

welcher sich nach Ersetzen des x durch seinen eben gefundenen Wert und ferner nach Zerlegung der erhaltenen Resultate in Faktoren in den endgültigen Ausdruck verwandelt

$$z = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}{(a + b + c - d)(a + b + d - c)(a + c + d - b)(b + c + d - a)}}.$$

Auf Grundlage derselben Darstellung des Radius eines einem Dreieck umschriebenen Kreises durch dessen drei Seiten und seine Fläche werden die Flächen der Dreiecke ABC und ADC sich in folgenden Ausdrücken darstellen

$$\Delta ABC = \frac{\frac{1}{4} abx}{z} \quad \text{und} \quad \Delta ADC = \frac{\frac{1}{4} cdx}{z}$$

und folglich wird die ganze Fläche des dem Kreise eingeschriebenen Vierecks sein

$$ABCD = \frac{1}{4} \cdot \frac{(ab + cd)x}{z}$$

oder nach Ersetzen des x und des z durch ihre Werte

$$ABCD$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)},$$

und bei $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$

$$ABCD = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Wenn eine so weite Anwendung der analytischen Methoden in den elementar-geometrischen Untersuchungen von Gelehrten zugelassen wurde, welche überzeugte Anhänger der altgriechischen Geometer waren, so ist es nicht schwer sich vorzustellen, wie in solchen Fällen Gelehrte, die sich anders zu den Alten verhielten, handelten. In ihren Schriften haben die synthetischen Methoden vollständig den analytischen den Platz geräumt. Diese Erscheinung ist unmöglich außer acht zu lassen, als sehr charakteristische für die elementar-geometrischen Untersuchungen in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts.

Die sphärische Geometrie bis in die zweite Hälfte des 18. Jahrhunderts überschritt fast gar nicht die engen Grenzen ihres kleinen Teils, den sie mit der sphärischen Trigonometrie teilte und die sich mit den sphärischen Dreiecken beschäftigte. Dieser Teil, durch die Bedürfnisse der Astronomie und nachher als notwendig für die Navigation und Geodäsie ins Leben hervorgerufen, entsprach ungeachtet der erreichten hohen Entwicklungsstufe nur demjenigen kleinen Teil der Geometrie der Ebene, der zum Gegenstand die gerade Linie und das Dreieck hat. Alle anderen Teile der sphärischen Geometrie jedoch, die den viel größeren Teilen der Geometrie der Ebene entsprachen, harrten noch ihrer Forscher. Als erster erschien in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts der schon oben erwähnte Anders

Johann Lexell (1740—1784)[1]). Er wurde in der Stadt Åbo geboren und fing seine wissenschaftlich-lehrende Tätigkeit an der Universität als Dozent der Mathematik in derselben Stadt an. Im Jahre 1769 wurde er Mitglied der St. Petersburger Akademie der Wissenschaften, und im Jahre 1771 war er daselbst schon Professor der Astronomie und ordentlicher Akademiker. Er wurde ebenfalls zum Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Stockholm ernannt. Da in Petersburg die Astronomie das Hauptfach Lexells wurde, so gehörten ihr alle seine Schriften, die in einzelnen Ausgaben erschienen und der größte Teil derer, die in den Veröffentlichungen der Akademien in Petersburg und Stockholm und in den „Philosophical Transactions" enthalten waren. Von den Abhandlungen Lexells in der Mathematik gehörten sechs der Geometrie an, acht der Integralrechnung, je zwei der Differentialrechnung, der Trigonometrie und der Geodäsie, vier der theoretischen Mechanik und je eine der Algebra und den Reihen. Von den astronomischen Arbeiten Lexells waren am bekanntesten seine Schriften über die Sonnenparallaxe und ihrer Bestimmung, die sich in den Veröffentlichungen der Petersburger und Stockholmer Akademien befanden. Als auf die wichtigste von ihnen ist auf die im Jahre 1772 in Petersburg als Sonderausgabe erschienene „Disquisitio de investiganda vera quantitate parallaxeos solis, et transitu Veneris ante discum solis anno 1769"[2]) hinzuweisen, in welcher der Autor, die Berechnungen nach den Methoden Eulers führend, die Sonnenparallaxe gleich 8″,68 fand.

Die erste Arbeit Lexells, die der sphärischen Geometrie gewidmet war, war der Artikel „De epicycloidibus in superficie sphaerica descriptis"[3]), der, wie aus dem Titel zu ersehen, sich mit Gegenständen beschäftigte, die schon früher von den Geometern berührt worden waren. Als vollständige Neuheit, dem Gegenstand der Erforschung nach, traten folgende drei Arbeiten Lexells hervor, welche in den Jahren 1781 und 1782 erschienen „Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum"[4]), „De proprietatibus circulorum in superficie sphaerica descriptorum"[5]) und „Demonstratio nonnullorum theorematum ex doctrina sphaerica".[6]) Als Hauptgegenstand ihrer Betrachtung erscheinen die Eigenschaften von Kreisen, die auf der

---

[1]) Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch, I, S. 1444 bis 1446. Précis de la vie de M. Lexell. Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, II. Historia Academiae ad annum 1784, p. 16—19.
[2]) 4°, 181 S., mit 1 Tafel. [3]) Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae pro Anno 1779, pars I, p. 49—71. [4]) Ebenda, pro Anno 1781 pars I, p. 112—126. [5]) Ebenda, 1782, pars I, p. 58—103. [6]) Ebenda 1782 pars II, p. 85—95.

Kugel konstruiert sind. In der Geometrie der Ebene werden folglich analog zu diesem Gegenstande Eigenschaften von Kreisen, welche in der Ebene konstruiert sind, vorhanden sein.

Als der am meisten bemerkenswerte Satz aus diesem von Lexell gewählten Gebiet der sphärischen Geometrie erkennt man gewöhnlich das schöne Theorem über die Linie, die den geometrischen Ort der Spitzen der sphärischen Dreiecke darstellt, welche eine gemeinschaftliche Basis und gleiche Oberfläche haben. Angenommen, ABC sei eines der sphärischen Dreiecke, deren gemeinsame Basis $AB = c$ ist und die gegebene Oberfläche $A + B + C - \pi = S$. Es sei ferner JPK der unbestimmt verlängerte Perpendikel, der auf AB in der Mitte errichtet ist. Dann wird, wenn JP ein Quadrant ist, der Punkt P der Pol des Bogens AB sein und der Bogen PCD, der durch die Punkte P und C gezogen ist, perpendikular zu AB sein. Es sei weiter $JD = p$, $CD = q$, dann werden die rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD, in welchen $AC = b$, $BC = a$, $AD = p + \frac{1}{2}c$, $BD = p - \frac{1}{2}c$ ist, geben

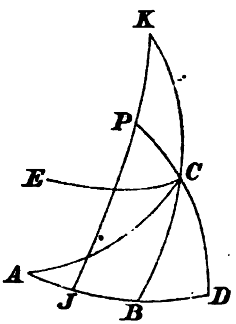


Fig. 10.

$$\cos a = \cos q \cos\left(p - \frac{1}{2}c\right)$$

$$\cos b = \cos q \cos\left(p + \frac{1}{2}c\right).$$

Setzt man jetzt in die schon früher gefundene Formel

$$\cot\frac{1}{2}S = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{\sin a \cdot \sin b \cdot \sin c}$$

die Werte

$$\cos a + \cos b = 2\cos q \cdot \cos p \cdot \cos\frac{1}{2}c$$

$$1 + \cos c = 2\cos^2\frac{1}{2}c$$

$$\sin b \sin C = \sin c \cdot \sin B = 2\sin\frac{1}{2}c \cdot \cos\frac{1}{2}c \cdot \sin B,$$

so bekommt man:

$$\cot\frac{1}{2}S = \frac{\cos\frac{1}{2}c + \cos p \cdot \cos q}{\sin a \cdot \sin\frac{1}{2}c \cdot \sin B}.$$

Außerdem ist noch in dem rechtwinkligen Dreieck BCD

$$\sin a \cdot \sin B = \sin q$$

und folglich

$$\cot\frac{1}{2}S = \frac{\cos\frac{1}{2}c + \cos p\cdot\cos q}{\sin\frac{1}{2}c\cdot\sin q}$$

oder

(1) $$\cos p\cdot\cos q = \cot\frac{1}{2}S\cdot\sin\frac{1}{2}c\cdot\sin q - \cos\frac{1}{2}c,$$

was endlich auch jene Beziehung zwischen p und q vorstellt, die die Linie bestimmen muß, auf der alle Punkte C gelegen sind.

Wenn man jetzt JP um die Größe $PK = x$ verlängert und $KC = y$ zieht, so läßt sich die Seite KC des Dreiecks PKC, in welchem $PC = \frac{1}{2}\pi - q$ und der Winkel $KPC = \pi - p$ aus der Formel

$$\cos KC = \cos KPC\cdot\sin PK\cdot\sin PC + \cos PK\cos PC$$

oder

$$\cos y = \sin q\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos q\cdot\cos p$$

bestimmen. Man erhält nach Substitution des nach der Formel (1) gefundenen Wertes von $\cos q\cdot\cos p$

$$\cos y = \sin x\cdot\cos\frac{1}{2}c + \sin q\left(\cos x - \sin x\cot\frac{1}{2}S\cdot\sin\frac{1}{2}c\right).$$

Man sieht daraus, daß wenn man annimmt

$$\cos x - \sin x\cdot\cot\frac{1}{2}S\cdot\sin\frac{1}{2}c = 0$$

oder

$$\cot x = \cot\frac{1}{2}S\cdot\sin\frac{1}{2}c,$$

alsdann gefunden wird

(2) $$\cos y = \sin x\cdot\cos\frac{1}{2}c$$

und folglich wird der Wert y eine Konstante werden.

Errichtet man also auf der Basis AB in der Mitte den Perpendikel JP und nimmt auf der andern Seite des Pols den Bogen PK so, daß

$$\cot PK = \cot\frac{1}{2}S\cdot\sin\frac{1}{2}c,$$

so werden alle Spitzen der Dreiecke, die eine gemeinschaftliche Basis C und gleiche Oberfläche S haben, auf dem kleinen Kugelkreise EC gelegen sein und alle Punkte dieses Kreises EC denselben nach der Formel

$$\cos KC = \sin PK\cdot\cos\frac{1}{2}c$$

gefundenen Abstand KC von dem Pol K haben.

Die Bedeutung, die Lexell selbst diesem Theorem gab, oder, wie er es nannte, diesem Problem, ist daraus ersichtlich, daß er ihm einen besonderen Artikel widmete, nämlich die schon oben erwähnte „Solutio problematis geometrici ex doctrina sphaericorum“. Legendre stellte am Ende seiner Bemerkung X[1]) zu seinen „Éléments de géométrie“ die Lösung dieses Theorems in einer gedrängteren Weise dar, als der Autor. In dieser Form ist sie auch von uns dargestellt.

Nach dem Tode von Lexell übernahmen die Fortsetzung der von ihm unternommenen Ausarbeitung der sphärischen Geometrie zwei andere Mitglieder der Petersburger Akademie der Wissenschaften Nikolaus Fuß und Friedrich Theodor Schubert. Der erste von ihnen legte die Resultate seiner Untersuchungen in diesem Gebiet in den im Jahre 1788 erschienenen zwei Memoiren: „Problematum quorundam sphaericorum solutio“[2]) und „De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae“.[3]) In dem ersten von ihnen löste Fuß folgende drei Aufgaben: Auf gegebener Basis zwischen zwei gegebenen größten Kugelkreisen ein Dreieck zu konstruieren, an dessen Spitze der Winkel ein Maximum sei; ein Dreieck zu konstruieren, an dessen Spitze die Summe zweier Seiten ein Minimum sei; ein Dreieck zu konstruieren, dessen Fläche ein Maximum sei. Da die Lösung der ersten Aufgabe zu einer kubischen Gleichung führt, so untersucht der Autor zuerst die Bedingungen, bei denen die Aufgabe drei Wurzeln zuläßt. Diese Untersuchung findet mit Hilfe der Dreiteilung des Winkels statt und wird von Berechnungen begleitet, die einem bestimmten Fall angehören. Danach folgt die Betrachtung des Falles, bei dem die beiden größten Kugelkreise aufeinander senkrecht stehen und welcher die kubische Gleichung zur Gleichung vom zweiten Grade bringt. Obwohl die zweite Aufgabe nicht schwer erscheint, führt dennoch der Gebrauch gewöhnlicher Mittel zu ihrer Lösung zu solchen Gleichungen, deren Lösung große Schwierigkeiten in den Weg setzen. Der Autor umgeht sie, indem er die Spitze des Dreiecks um einen unendlich kleinen Bogen ändert, als Resultat erscheint eine äußerst einfache Lösung. Außer dem Memoire von Fuß, und sogar früher als dessen Erscheinung, erschien die dritte Aufgabe im zweiten Heft des „Leipziger Magazins für reine und angewandte Mathematik“ von J. Bernoulli und Hindenburg, was darauf hinweist, daß die deutschen Gelehrten an den Untersuchungen über die sphärische Geometrie, die von den Petersburger Akademikern ausgeführt wurden,

---

[1]) Note X. Sur l'aire du triangle sphérique. [2]) Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, II, p. 70—88. [3]) Ebenda, III, p. 90 bis 99.

ebenfalls teilzunehmen anfingen. Ungeachtet, daß die Lösung dieser Aufgabe schwieriger erscheint, als die der zweiten, gelang es Fuß mit Hilfe der Methode, die der Methode der zweiten Aufgabe ähnlich ist, einen viel schöneren Ausdruck der Lösung der dritten Aufgabe zu finden, welcher dabei geometrisch auf der Kugel konstruiert werden kann. Sein zweites Memoire widmete Fuß den Eigenschaften der bekannten sphärischen Ellipse, d. h. der Kurve, die den geometrischen Ort der Spitzen der Dreiecke darstellt, in denen bei ein und derselben Basis die Summe der zwei andern Seiten konstant ist. Zu der Untersuchung dieser Eigenschaften, die den Eigenschaften der ebenen Ellipse analog sind, wurde Fuß durch die zweite Aufgabe des ersten Memoires veranlaßt. Als Resultat dieser Untersuchung erschien die Schlußfolge, daß die zu betrachtende Kurve eine Durchschnittslinie der Kugel mit dem Kegel zweiten Grades sei, dessen Spitze in dem Mittelpunkt der Kugel liegt. Anders ausgedrückt: die sphärische Ellipse ist die Krümmungslinie der Kegel zweiten Grades. Sie kann auf der Kugel konstruiert werden, ebenso wie die Ellipse in der Ebene, d. h. mit Hilfe eines Fadens, welcher von einem sich bewegenden Stifte stets straff gespannt wird und dessen Enden in zwei Brennpunkten befestigt sind. Wenn man die Abszisse dieser Kurve auf dem größten Kugelkreise nimmt, der durch die Punkte A und B geht, in denen die Enden des Fadens befestigt sind, indem man aus der Mitte C zwischen ihnen ausgeht, und diese Abszisse mit x bezeichnet, die Ordinate auf dem größten Kugelkreise (z. B. YX), der senkrecht

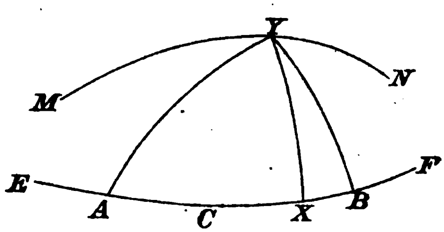


Fig. 11.

zum größten Kugelkreise ACB steht, mit y bezeichnet, die Länge des Fadens AYB mit $2c$ und den Bogen des größten Kugelkreises AB mit $2a$, so kann man mit Hilfe der sehr bekannten Transformationen und Reduktionen bei dem Kalkül der Sinusse eine Gleichung erhalten

$$\operatorname{tang} y = \frac{\sqrt{(\sin^2 c - \sin^2 a)(\sin^2 c - \sin^2 x)}}{\sin c \cdot \cos c},$$

welche die Natur der sphärischen Ellipse ausdrücken wird. Die Anwendung dieser Gleichung auf den speziellen Fall, in welchem die Länge des Fadens $2c$ gleich der halben Peripherie des größten Kugelkreises ist, führte den Autor zu folgendem bemerkenswerten Resultat. Wenn die Länge des Fadens der halben Peripherie des größten Kugelkreises gleich ist, so ist die mit ihrer Hilfe konstruierte Kurve immer

ein größter Kugelkreis, wie groß auch die Entfernung zwischen den beiden Punkten, in denen der Faden befestigt ist, sein mag.

Schubert beschäftigte sich in seinem der Petersburger Akademie der Wissenschaften im Jahre 1798 mitgeteilten Memoire „Problemata ex doctrina sphaerica"[1]), welches der Ausarbeitung der sphärischen Geometrie gewidmet war, mit der Lösung der vier Fragen über die geometrischen Orte der Spitzen der Dreiecke, in denen bei der gegebenen Basis folgendes in den einzelnen Fällen gegeben wird: im ersten das Verhältnis der Sinusse der beiden andern Seiten, im zweiten das Verhältnis ihrer Kosinusse, im dritten das Verhältnis der Sinusse der Hälften derselben Seiten und im vierten das Verhältnis der Kosinusse derselben Hälften. Der Autor zeigt, daß der gesuchte geometrische Ort in der ersten Frage dargestellt wird durch den Durchschnitt der Kugel mit dem Kegel, dessen Grundfläche eine Ellipse ist, welche sich auf die Ebene der gegebenen Basis projiziert und als Projektion die Hyperbel hat. Der erwähnte Durchschnitt stellt eine Kurve doppelter Krümmung dar. Der geometrische Ort in der zweiten Frage ist der zur Basis senkrechte größte Kugelkreis. Endlich sind die gesuchten geometrischen Orte in der dritten und vierten Frage durch zwei kleine Kugelkreise dargestellt, die untereinander gleich und parallel sind und senkrecht zur gegebenen Basis stehen.

Parallelenlehre.

Beständig wachsend erreichte das Interesse an der Parallelenlehre bei den Gelehrten im betrachteten Zeitraum von 1759—1800 ein solches Maß, das bedeutend dasjenige übertraf, welches in gleichen Zeitabschnitten der vorhergehenden Periode erreicht wurde. In diesem Zeitraum erschienen 67 Werke, die in ihrem ganzen Umfang, oder einigen ihrer Teile, der Parallelenlehre gewidmet waren, während in der ganzen vorhergehenden Periode, von Euklid angefangen, nur 55[2]) solcher Werke existierten. Der größte Teil der erwähnten

---

[1]) Nova Acta Academiae Petropolitanae, XII, p. 196—216. [2]) Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, Leipzig 1895, S. 287—316. Stäckel, Zur Bibliographie der Parallelentheorie. Bibliotheca Mathematica. Neue Folge, XIII, S. 47—48. Zur Angabe der in diesen beiden Werken bezeichneten Schriften sind noch zwei in Rußland erschienene Arbeiten hinzuzufügen: das aus dem Vorhergehenden bekannte Werk von Gurief, „Versuch einer Vervollkommnung der Elemente der Geometrie" und der Artikel „Théorie des lignes parallèles", mitgeteilt in der Sitzung der Petersburger Akademie der Wissenschaften im Jahre 1799 (24. Oktober). Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, XV, p. 77—78.

Schriften, nämlich 44, gehörten Deutschland an. Was die andern anbetrifft, so gehörten 7 Frankreich, ebenfalls 7 Italien, 4 England, 2 Rußland und je 1 der Schweiz, Schweden und Holland an.

Einer und vielleicht der wichtigste von den Gründen, welche die soeben in Zahlen angegebene hohe Entwicklung des Interesses an der Parallelenlehre in Deutschland hervorriefen, war das Erscheinen der Dissertation „Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio, quam publico examini submittent Abrah. Gotthelf Kaestner et auctor respondens Georgius Simon Klügel"[1]) im Jahre 1763. Der Gegenstand dieser Dissertation bestand aus der Geschichte der Parallelenlehre und der Kritik der ihr gewidmeten 30 Arbeiten. Die Idee zu diesem Werk, ebenso auch das dazu erforderliche Material, wurde dem Autor wahrscheinlich von Kästner gegeben, der sich für die Parallelenlehre während seiner ganzen gelehrten Tätigkeit interessierte. Indem er in seinen eigenen Untersuchungen auf diesem Gebiet nicht zu genügenden Resultaten gelangte, suchte sie Kästner bei den anderen Autoren und stellte deshalb mit Sorgfalt eine Sammlung derselben zusammen, welche am Ende seines Lebens ziemlich bedeutenden Umfang erreichte. Diese Sammlung benutzte natürlich Klügel bei seinen Arbeiten. Einige Angaben aus der Geschichte der Parallelenlehre waren ebenfalls in dem Artikel von Castillon „Sur les parallèles d'Euclide"[2]) enthalten.

Dank seiner Autorität und Popularität trug d'Alembert viel dazu bei, das Interesse an der Parallelenlehre in Frankreich und anderen Staaten Europas hervorzurufen und zu unterhalten. „Die Erklärung und die Eigenschaften der geraden Linie sowie der parallelen Geraden sind die Klippe und sozusagen das Ärgernis der Elementargeometrie", hatte er in einem bemerkenswerten Aufsatze über die Elemente der Geometrie 1759[3]) ausgerufen und hatte hinzugefügt, man könne allerdings parallele Gerade als solche erklären, die auf einer dritten Geraden senkrecht stehen, dann aber sei unbedingt erforderlich, zu beweisen, daß der Abstand der beiden Geraden immer gleich dem gemeinsamen Lote sei. Später in dem im Jahre 1785 gedruckten Artikel „Parallèle"[4]) in der Encyclopédie méthodique sagte er: „Der strenge Beweis der Theorie der Parallellinien ist vielleicht in der Elementargeometrie die schwerste Aufgabe. Wie es mir scheint, ist die wahre und dabei die reinste Definition der parallelen

[1]) Göttingen, 4°, 30 S., mit 1 Tafel. [2]) Nouveaux mémoires de l'Académie royale de Berlin, année 1786—1787, Berlin 1792, p. 233—254, années 1788—1789, ib. 1793, p. 171—202, 4°. [3]) D'Alembert, Mélange de Littérature, d'Histoire et de Philosophie. Nouvelle édition. T. V. Amsterdam, 8°. [4]) T. II, 3e partie, p. 520. Mathématiques.

Linie, welche überhaupt gegeben werden kann, diejenige, welche sagt, parallel seien Gerade, wenn zwei Punkte der einen gleichweit von zwei Punkten einer anderen Geraden entfernt sind. Zwei Punkte anzuführen ist vollkommen genügend, weil zwei Punkte die gerade Linie bestimmen. Danach muß bewiesen werden (und das ist das Schwerste), daß alle anderen Punkte der zweiten Geraden gleichweit entfernt sind von der gegebenen Geraden und daß folglich sich diese Linien niemals schneiden werden. Zu sagen, daß die parallele Linie eine solche ist, deren Punkte alle gleichweit von einer anderen Linie entfernt sind oder eine solche, welche bei der Verlängerung sich niemals mit ihr schneidet, heißt das, wonach gefragt wird, voraussetzen. Den großen Geometern gleich zu sagen, daß zwei parallele Linien zwei gerade Linien sind, die in einer unendlichen Entfernung oder in einem unendlich entfernten Punkte sich schneiden, das heißt einem vollkommen einfachen Gegenstande eine äußerst metaphysische und abstrakte Definition geben."

Wie auch früher, waren die Anstrengungen der Geometer der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts, die sich mit der Theorie der Parallellinien beschäftigten, auf die Entdeckung eines strengen Beweises der fünften Forderung des Euklid, oder, was dasselbe ist, seines elften Axioms gerichtet, welches, wie bekannt, folgenden Satz darstellt: Wenn eine Gerade zwei Gerade trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so müssen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf der Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte. In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts waren zwischen den, wie die oben angeführten Zahlen zeigen, zahlreichen Versuchen, den Beweis dieses Satzes zu liefern, sehr wenig solche, die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich lenkten und die als vollkommen genügend angesehen in Lehrbücher übergingen. In der chronologischen Reihenfolge ihrer Erscheinung muß man vor allem bei dem Beweise von Bertrand stehen bleiben, welchen er in seinem aus der früheren Darstellung bekannten Werke „Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques"[1]) gab.

Seinem Beweise der fünften Forderung schickte Bertrand folgenden Satz voraus: Zwei Gerade, welche von einer dritten Geraden derart geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, zwei Rechte beträgt, schließen einen solchen Teil der Ebene ein, der in der ganzen

[1]) Tome II, p. 19—20.

Ebene unendlich vielmal enthalten ist. Und wirklich, wenn man auf der Geraden GH, die den angegebenen Bedingungen genügende zwei gerade Linien AB und CD schneidet, die Strecke LM gleich der Strecke KL macht und danach durch den Punkt M die Linie EF zieht, die mit GH den Winkel FML, gleich dem Winkel DLK, bildet, so wird bei der Verschiebung des Streifens $ACDB$, die den Punkt K zur Übereinstimmung mit dem Punkt L und die Strecke KL mit der Strecke LM bringt, dieser Streifen mit dem Streifen

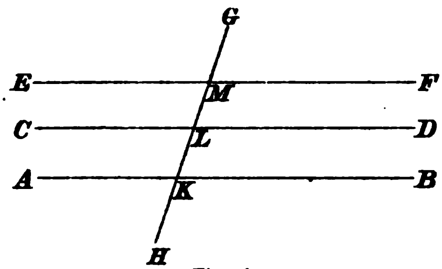


Fig. 12.

$CEFD$ übereinstimmen, was daraus folgt, daß die Winkel DLM und BKL, als den Winkel DLK bis zu zweien Rechten ergänzend, einander gleich sein müssen. Da aber die Anzahl solcher Streifen, wie $CEFD$, gleich der Anzahl der nacheinander in der Linie GH eingetragenen Strecken LM ist, so wird bei der augenscheinlich unendlichen Zahl dieser Strecken auch die Anzahl dieser Streifen unendlich sein. Nachdem Bertrand auf diese Weise seinen vorläufigen Satz bewiesen hat, geht er zur fünften Forderung über. Angenommen,

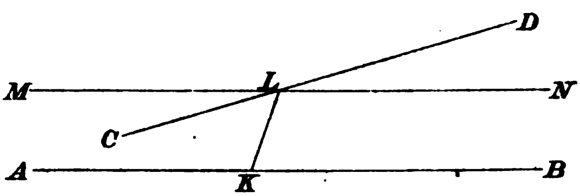


Fig. 13.

daß die Geraden AB und CD, welche von einer dritten Geraden KL derart geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden KL liegen, zwei Rechte nicht beträgt. Es sei ebenso

$$\angle BKL + \angle DLK > 2R,$$

dann

$$\angle AKL + \angle CLK < 2R.$$

Wenn man nun die Gerade LM zieht, die den Winkel CLM bildet, welcher so viel Grade, Minuten und Sekunden enthält, als der Summe $\angle AKL + \angle CLK$ fehlen, daß sie $2R$ gleich werde, so kann man auf Grund des vorhergehenden vorläufigen Satzes sagen, daß die ganze Ebene eine unendliche Anzahl solcher Streifen enthält, wie der Streifen

MLKA. Dasselbe kann man jedoch vom Winkel *MLC* nicht sagen, da er im Gegensatz zum Streifen *MLKA* in der ganzen Ebene eine endliche Zahl mal enthalten sein wird, nämlich 360 mal bei der Größe von 1 Grad, 21600 mal bei der Größe von einer Minute, 1296000 mal bei Größe von einer Sekunde usw. Aus diesem Grunde wird die Voraussetzung, daß die Gerade *LC* sich auf der Seite von *A* nicht mit der Geraden *KA* begegnet, zu einer Absurdität, da sie zu dem Schlusse führt, der Winkel *MLC*, der in der ganzen Ebene eine endliche Anzahl mal enthalten ist, sei im Streifen *MLKA* enthalten, welcher in der ganzen Ebene eine unendliche Anzahl mal enthalten ist oder, was dasselbe ist, bilde einen Teil von ihm. Also ist es unmöglich, daß die Gerade *LC* sich mit der Geraden *AK* in der Seite von *A* nicht trifft, oder, überhaupt gesagt, ist es unmöglich, daß sich zwei Gerade nicht treffen, die von einer dritten Geraden derart geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, zwei Rechte nicht beträgt.

Um dem Leser die Kraft dieses Beweises verständlicher zu machen, führt Bertrand zum Schluß folgende strengere Darstellung seiner Gründe an. Wie klein oder wie groß ein Winkel auch sein würde, dessen Scheitel im Zentrum des Kreises liegt, welcher mit irgend einem endlichen Radius beschrieben ist, wird er immer entweder zu einem Bogen gehören, der irgend eine Größe hat, oder zu einem Bogen, der gar keine Größe hat. Im zweiten Falle werden seine Schenkel zusammenfallen und folglich wird er kein Winkel mehr sein. Was jedoch den ersten Fall anbetrifft, so wird, da die Peripherie des Kreises selbst eine endliche Größe besitzt, das Verhältnis des Bogens, der dem Winkel gehört, zur ganzen Peripherie des Kreises notwendig das Verhältnis einer endlichen Größe zu einer endlichen Größe sein, und folglich wird sich auch der Winkel selbst zur ganzen Winkelgröße am Zentrum, wie eine endliche Größe zu einer anderen endlichen Größe verhalten, was daraus folgt, daß die Zentriwinkel sich zur ganzen Winkelgröße am Zentrum verhalten wie die Bogen, die zu ihnen gehören, zur ganzen Peripherie des Kreises. Aber zur gleichen Zeit wird derjenige Teil der Ebene, welcher von zwei Geraden eingeschlossen ist, die von einer dritten Geraden derart geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, zwei Rechte beträgt, sich zur ganzen Ebene nicht wie eine endliche Größe zu einer anderen endlichen Größe verhalten, sondern wie eine endliche Größe zu einer unendlichen. Der Streifen *ACDB* z. B. verhält sich zur ganzen Ebene, dessen Teil er bildet, wie eine endliche Gerade *KL*

zu einer unendlichen Geraden KG. Also wie klein ein Winkel auch sein wird, er wird immer den Teil einer Ebene übertreffen, welcher eben mit dem Ausdruck „Streifen“ bezeichnet worden ist. Die Behauptung, daß ein Streifen einen Winkel enthält, schließt folglich einen Widerspruch ein. Ebenso schließt auch die Behauptung einen Widerspruch ein, daß zwei Gerade, welche von einer dritten Geraden derart geschnitten werden, daß die Summe der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, zwei Rechte nicht beträgt, sich bei der Verlängerung auf der Seite, wo diese Summe kleiner als zwei Rechte ist, nicht treffen werden.

Einer großen Bekanntheit, die die Bekanntheit der angeführten Beweisführung Bertrands bedeutend übertraf, erfreuten sich die demselben Gegenstand gewidmeten Arbeiten Legendres hauptsächlich dank der Verbreitung seiner Éléments de géométrie, in denen er sie anbrachte. An Stelle der fünften Forderung selbst bewies er in diesen seinen Arbeiten einige andere Sätze, auf denen die ganze Theorie der Parallellinien ebenso streng begründet werden konnte, wie auf diese Forderung. Ein solcher Satz war in der ersten Ausgabe der „Éléments“ im Jahre 1794 der folgende: Wenn die gerade Linie BD das Perpendikel zu AB ist und eine andere Gerade AC mit derselben Linie AB einen spitzen Winkel BAC bildet, so begegnen sich die Linien AC und BD bei genügender Verlängerung. Legendre beweist diesen Satz auf folgende Weise: Der Punkt G, der Fußpunkt des Perpendikels, der auf die Gerade AB von irgend einem Punkte

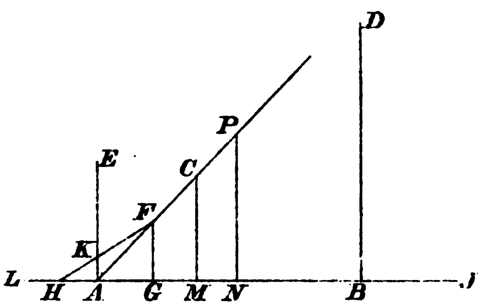


Fig. 14.

F auf der Linie AC gefällt ist, kann nicht auf den Punkt A fallen, noch auf irgend einen anderen Punkt auf der Linie AL. Die erste Voraussetzung ist unmöglich, weil der Winkel BAF kein rechter ist. Was jedoch die zweite Voraussetzung anbetrifft, so erweist sich seine Unmöglichkeit aus folgenden Erwägungen. Wenn der Fußpunkt G des Perpendikels zum Beispiel auf den Punkt H fallen würde, so würde sich das angenommene Perpendikel FH im Punkte K mit dem anderen Perpendikel AE, das auf der Geraden AB in dem Punkte A errichtet ist, schneiden, dann würden von dem Punkte K aus auf die Gerade AB zwei Perpendikel gefällt worden sein, was unmöglich ist. Also kann der Punkt G, der Fußpunkt des Perpendikels FG, nur

auf irgend einen Punkt der Linie AJ fallen. Auf Grund derselben Erwägungen kann man weiterhin behaupten, daß der Fußpunkt M des Perpendikels, der auf die Gerade AB von dem Punkte C aus gefällt ist, nicht in den Punkt G fallen kann und nicht in irgend einen anderen Punkt der Linie GL, da der Punkt C auf der Geraden AC in der Entfernung AC, die AF übertrifft, genommen ist. Ebenso kann auch der Fußpunkt N des Perpendikels, der auf die Gerade AB von dem Punkte T aus auf der Geraden AC in der Entfernung von AP genommen, die AC übertrifft, gefällt ist, nicht auf den Punkt M, nicht auf irgend einen anderen Punkt der Linie ML fallen usw. Also können die Fußpunkte M, N usw. der Perpendikel sich nur bez. auf den Linien GJ, MJ usw. befinden auf Entfernungen vom Punkte A, die bez. die Entfernungen AG, AM usw. übertreffen. Auf diese Weise werden nach der allmählichen Entfernung der Punkte der Linie AC vom Punkte A, von denen Perpendikel auf die Linie AB gefällt werden, auch diese Perpendikel sich vom Punkte A entfernen. Dabei eine Grenze der Vergrößerung des Abstandes (z. B. AN) des Fußpunktes des Perpendikels vom Punkte A bei der gleichzeitigen Vergrößerung des Abstandes vom Punkte A desjenigen Punktes (z. B. P), von dem das Perpendikel gefällt ist, vorauszusetzen, wäre absurd. Und wirklich, nehmen wir an, daß das letzte oder das am meisten vom Punkte A entfernte Perpendikel CM sei, so könnten wir, indem wir auf der Verlängerung von AC den Punkt P nehmen würden, auf dieselbe Weise, wie auch früher, beweisen, daß der Fußpunkt des Perpendikels PN auf die Linie MJ fallen muß und folglich von A auf einer Entfernung, die die Entfernung AM übertrifft, sein muß, was der Voraussetzung widerspricht. Also können die Fußpunkte der Perpendikel, die von den verschiedenen Punkten der Linie AC aus auf AJ gefällt sind, in beliebig großen Entfernungen vom Punkte A liegen, folglich wird auch unter ihnen ein solcher Fußpunkt sein, der mit B zusammenfallen wird, oder, was dasselbe ist, das ihm entsprechende Perpendikel wird mit BD zusammenfallen, woraus direkt folgt, daß die Linien AC und BD bei genügender Verlängerung einander treffen werden.

Dieser Beweis ist nicht genau, da die Behauptung von der Absurdität der Voraussetzung, daß es eine Grenze der Entfernung gäbe zwischen dem Fußpunkt des Perpendikels und dem Punkte A, nicht richtig ist. Und diese Ungenauigkeit ist der Aufmerksamkeit der Zeitgenossen nicht entschlüpft. Gurief hat schon in seiner oben erwähnten kritischen Analyse der „Éléments" von Legendre folgende Einwände diesbezüglich gemacht.[1]) „Wenn auch zusammen mit der

[1]) Versuch einer Vervollkommnung der Elemente der Geometrie, S. 189—190.

Entfernung des Punktes C von A der Abstand AM des Perpendikels CM von demselben Punkte A wirklich eine unendliche Anzahl Zuwächse bekommen kann, so folgt noch lange nicht daraus, daß die Voraussetzung von der Möglichkeit der Existenz einer Grenze für die Entfernung AM absurd ist. Der Beweis Legendres setzt dabei nur die Unmöglichkeit der Existenz des letzten der Perpendikel fest, die von dem auf AC genommenen Punkte aus auf AB gefällt werden, beweist jedoch in keinem Falle die Unmöglichkeit der Existenz einer Grenze für den Abstand AM. Es kann jedoch kein Zweifel bezüglich des ersteren herrschen, deshalb ist auch sein Feststellen nicht als Beweis des betrachteten Satzes anzusehen. Was jedoch die Unrichtigkeit der Ansicht, daß die Voraussetzung der Existenz einer Grenze des Abstandes AM absurd sei, anbetrifft, so deckt sie Gurief mit Hilfe folgender Betrachtungen auf. Da uns beim Beweise des Grundsatzes der Theorie der Parallellinien noch nicht bewußt ist, ob den gleichen Längen AF, FC, CP usw., die auf AP genommen, ebenso untereinander gleiche Größen entsprechen, nämlich AG, GM, MN usw., die auf der Linie AJ durch die gefällten Perpendikel von den Punkten F, C, P usw. abgetrennt sind, so entsteht die Möglichkeit zu sagen, daß die Zuwächse des Abstandes AM z. B. der Reihe folgen

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots.$$

Da aber die Summe der Glieder dieser Reihe immer kleiner als 2 ist, wie weit man sie auch fortsetzt, so folgt daraus direkt, daß, wie weit der Punkt C sich vom Punkte A auch entfernen mag, das von ihm aus gefällte Perpendikel CM auf der Linie AJ immer eine um zweimal kleinere als die genommene Größe AG von ihr abschneiden wird. Die verdoppelte Größe AG wird auf diese Weise zur Grenze der Entfernung AM.

Den Beweis Legendres auf diese Weise widerlegend, gab Gurief in demselben Werke[1]) seinen eigenen Beweis der fünften Forderung, der mit dessen Teilung in drei Fälle anfing. Als ersten Fall beweist er den, in welchem von den beiden inneren Winkeln, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, der eine ein spitzer, der andere ein rechter ist. Beim Beweise des zweiten, in welchem beide innere Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen, spitze Winkel sind, benutzt er den ersten Fall. Was jedoch den dritten Fall anbetrifft, in dem der eine der inneren Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen,

[1]) Versuch einer Vervollkommnung der Elemente der Geometrie, S. 236—239.

ein spitzer und der andere ein stumpfer ist, so führt er dessen Beweis direkt auf den ersten Fall zurück. Der Beweis, den Gurief dem ersten Fall gab, welcher den Fall darstellt, den Legendre zu beweisen versucht, wurde Gurief durch das Durchsehen der Arbeit des letzteren eingeflößt, wie er es selbst eingesteht, indem er mit dem ihm eigenen Eigendünkel sagt: „Wie schwach und unbegründet dieser Beweis des Herrn Legendre auch sei, er gab mir die Gelegenheit diese Sache zu beendigen, auf die so viel Mühe verwandt worden ist, wie im Altertum, so auch in der neuen Zeit, von den berühmtesten Männern."[1]) Dieser Beweis ist ebenso ungenau, wie der Beweis Legendres, weil Gurief unbemerkbar für sich selbst denselben Fehltritt getan hat wie Legendre.

Indem Legendre von der Kritik Guriefs keine Vorstellung hatte, da dieselbe in russischer Sprache erschien, war er selbst von seinem Beweise nicht befriedigt. In der dritten Ausgabe seiner „Éléments", die im Jahre 1800 erschien, ebenso auch in allen folgenden bis zur achten einschließlich, bewies er an Stelle des Satzes, den er als Grundsatz der Theorie der Parallellinien in der ersten Ausgabe annahm, schon einen anderen, nämlich den Satz von der Gleichheit der Winkelsumme eines Dreiecks mit zwei Rechten, welcher infolge seines engen Zusammenhanges mit der Theorie der Parallellinien als Grundsatz dieser Theorie ebenso streng angenommen werden kann, wie der erstere Satz und wie die fünfte Forderung selbst.

Nach einer Reihe mißlungener Versuche, den direkten Beweis dieses Satzes zu finden, war Legendre gezwungen bei dem indirekten Beweise stehen zu bleiben, nämlich bei den Sätzen, daß die Winkelsumme eines Dreiecks nicht größer sein kann als zwei Rechte, und daß dieselbe Summe nicht kleiner sein kann als zwei Rechte. Für den ersten dieser Sätze gab er folgenden vollkommen strengen Beweis. Wenn es möglich ist, so sei das Dreieck ABC ein solches, bei dem

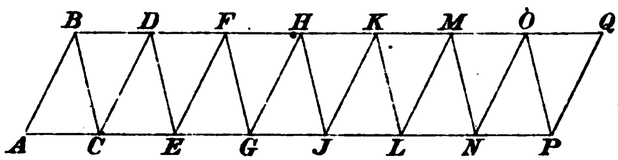


Fig. 15.

die Winkelsumme größer als zwei Rechte ist. Indem man dann auf der Verlängerung von AC die Strecke $CE = AC$ nimmt, den Winkel $ECD = CAB$ konstruiert, auf seiner Seite die Strecke $CD = AB$

[1]) Versuch einer Vervollkommnung der Elemente der Geometrie, S. 190.

macht und sodann die entsprechenden Punkte durch die Linien DE und BD verbindet, so bekommt man ein Dreieck CDE, das gleich dem Dreieck ABC ist, da sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Aus der Gleichheit dieser Dreiecke folgt, daß der Winkel $CED = ACB$ ist, der Winkel $CDE = ABC$ und die dritten Seiten ED und BC gleich sind. Da die Linie ACE eine Gerade ist, so ist die Summe der Winkel ACB, BCD und DCE zwei Rechten gleich, und folglich laut der Voraussetzung, daß die Winkelsumme des Dreiecks ABC größer als zwei Rechte ist,

$$CAB + ABC + BCA > ACB + BCD + DCE.$$

Indem man von beiden Seiten dieser Ungleichheit den gemeinsamen Winkel ACB subtrahiert und ebenso die gleichen Winkel CAB und ECD, bekommt man

$$ABC > BCD;$$

und da die Seiten AB und BC des Dreiecks ABC gleich den entsprechenden Seiten CD und CB des Dreiecks BCD sind, so wird die dritte Seite AC größer als die dritte Seite BD sein. Wenn man sich danach die Linie AE als unbegrenzt verlängert denkt, ebenso die auf ihr konstruierte Reihe von gleichen und ähnlich liegenden Dreiecken ABC, CDE, EFG, GHJ usw., so wird zu gleicher Zeit durch die Verbindung der anliegenden Spitzen durch die Geraden BD, DF, FH, HK usw. eine Reihe dazwischen liegender Dreiecke BCD, DEF, FGH usw. erhalten, die alle untereinander gleich sein werden, als solche, die übereinstimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel. Aus der Gleichheit dieser Zwischendreiecke folgt, daß $BD = DF = FH = HK$ usw.

Weil $AC > BD$ ist, sei die Differenz zwischen ihnen $AC - BD = D$. Dann wird $2D$ die Differenz zwischen der Geraden ACE, die gleich $2AC$ ist, und der geraden oder der gebrochenen Linie BDF sein, die gleich $2BD$ ist und ebenso $AG - BH = 3D$, $AJ - BK = 4D$ usw. Aber wie klein auch die Differenz D wäre, ist es augenscheinlich, daß sie, genügend wiederholt, größer werden kann, als irgend eine mögliche gegebene Größe, infolgedessen kann man immer voraussetzen, daß die Reihe der Dreiecke so weit fortgesetzt ist, daß

$$AP - BQ > 2AB \quad \text{oder} \quad AP > BQ + 2AB.$$

Andererseits jedoch dieser Folgerung widersprechend, muß die Gerade AP kürzer sein als die gebrochene Linie $ABQP$, weil sie mit ihr die gemeinsamen Endpunkte A und P hat, d. h. es muß immer sein

$$AP < AB + BQ + QP \quad \text{oder} \quad AP < BQ + 2AB.$$

Die Voraussetzung, von der man ausging, erweist sich auf diese Weise als absurd, folglich kann die Winkelsumme des Dreiecks ABC nicht größer als zwei Rechte sein.

Dem zweiten Satze gab Legendre den Beweis, dessen Mangelhaftigkeit er später selbst anerkannte[1]), indem er sagte, daß „dieser zweite Satz, obwohl das Prinzip seines Beweises gut bekannt ist, uns Schwierigkeiten stellte, die wir nicht vollends beseitigen konnten“.

Zu Legendres Versuchen des direkten Beweises des Satzes über die Gleichheit der Summe der Winkel eines Dreiecks mit zwei Rechten ist auch der Beweis dieses Satzes zu rechnen, welcher in der ersten Ausgabe der „Éléments de géométrie“ angeführt wird, obwohl er auch nicht mit der Absicht gegeben war, diesen Satz als Grundsatz der Theorie der Parallellinien anzugeben. Ungeachtet dessen, daß dieser Beweis in dem eben angeführten Memoire von Legendre[2]) wiederholt war, befriedigte er den Autor nicht, weil er sich nicht mit dem Gebrauche der Mittel begnügte, die vom ersten Buche der Elemente des Euklid geboten wurden, und teils synthetisch, teils analytisch war. Hier ist dieser Beweis.

Indem wir unmittelbar durch Auflegung ohne Anwendung irgend eines vorläufigen Satzes beweisen, daß zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, bezeichnen wir die erwähnte Seite mit dem Buchstaben p, die ihr anliegenden Winkel mit A und B und den dritten Winkel mit C. Es ist nötig, daß der Winkel C vollkommen bestimmt ist im Falle, wenn die Winkel A und B und die Seite p bekannt sind, weil im andern Fall den drei gegebenen Größen A, B, p einige Winkel C entsprechen könnten und es ebenso viel verschiedene Dreiecke geben würde, die übereinstimmen in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln, was unmöglich ist. Also muß der Winkel C eine bestimmte Funktion der drei Größen A, B, p sein, was auf folgende Weise dargestellt werden kann $C = \varphi\,(A, B, p)$.

Wenn als Einheit der rechte Winkel genommen wird, so werden die Winkel A, B, C durch Zahlen ausgedrückt werden können, die zwischen 0 und 2 liegen; da aber $C = \varphi\,(A, B, p)$, so erhalten wir die Möglichkeit zu behaupten, daß die Funktion φ die Linie p nicht enthalten kann. Und wirklich, wenn dank der Eigenschaft des C durch die gegebenen Größen A, B, p allein vollkommen bestimmt zu werden, irgend eine Gleichung zwischen A, B, C, p existieren

[1]) Legendre, Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles du triangle. Mémoires de l'Académie Royale des sciences de l'Institut de France XII (1833), p. 371. [2]) Ebenda, p. 372—374.

könnte, so könnte man aus ihr den Ausdruck der Größe p ableiten in der Abhängigkeit von den A, B, C, woraus folgen würde, daß die Seite p einer Zahl gleich sein würde, was absurd ist. Also kann die Funktion φ die Seite p nicht enthalten, und folglich ist $C=\varphi(A, B)$.

Diese Formel weist gerade darauf hin, daß wenn zwei Winkel eines Dreiecks zwei Winkeln eines andern Dreiecks gleich sind, so auch die dritten Winkel gleich sind. Wenn aber das bewiesen ist, so ist es nicht schwer, auch das Theorem selbst über die Gleichheit der Summe der Winkel eines Dreiecks mit zwei Rechten zu beweisen.

Zuerst nehmen wir ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei A und fällen ein Perpendikel AD von diesem Punkt A auf die Hypotenuse. Dann werden die Winkel B und D des Dreiecks ABD den Winkeln B und A des Dreiecks BAC gleich sein, und folglich wird, nach dem eben Bewiesenen, der dritte Winkel BAD dem dritten Winkel C gleich sein. Auf Grund derselben Erwägungen wird der Winkel $DAC=B$ sein, und folglich $BAD+DAC$ oder $BAC=B+C$. Aber der Winkel BAC ist ein rechter, folglich werden die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks zusammen einen rechten Winkel bilden.

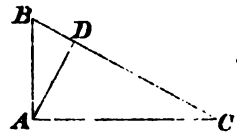


Fig. 16.

Nehmen wir jetzt irgend ein Dreieck BAC, in dem die Seite BC nicht kleiner ist, als jede der beiden andern Seiten. Wenn wir von dem Scheitel des Winkels A, der der Seite BC gegenüberliegt, auf diese Seite der Perpendikel AD fällen, so wird dieses Perpendikel im Innern des Dreiecks BAC verlaufen und dasselbe in zwei rechtwinklige Dreiecke BAD, DAC teilen. Im ersten werden die beiden Winkel BAD und ABD einen rechten Winkel bilden, ebenso auch im zweiten die beiden Winkel DAC, ACD. Bei der Vereinigung jedoch aller dieser vier Winkel werden sie die drei Winkel bilden BAC, ABC, ACB, oder ebenfalls zwei Rechte. Also ist die Summe der Winkel in jedem Dreieck zwei Rechten gleich.

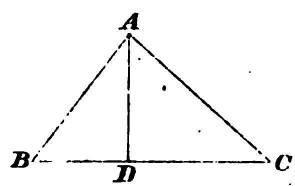


Fig. 17.

Die Hauptarbeit in der Theorie der Parallellinien in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts und, wenn man die Arbeit von Saccheri ausschließt, auch in der ganzen vorhergehenden Zeit, war das Werk Lamberts „Theorie der Parallellinien"[1]. Es war schon

[1]) Magazin für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von

im September 1766 verfaßt, jedoch befriedigte es den Autor nicht und wurde auch deshalb während seiner Lebzeiten nicht verlegt. Diese Pflicht bezüglich der wichtigen Arbeit fiel dem Direktor der Königlichen Sternwarte zu Berlin, Johann Bernoulli (1744—1807), zu, dem die Berliner Akademie der Wissenschaften den Nachlaß Lamberts „unter annehmlichen Bedingungen" überließ, „damit er einen für das gelehrte Publikum nützlichen Gebrauch davon machen sollte".

In seinem Werk ging Lambert, Saccheri gleich, vom Viereck $ABDC$, in welchem die Winkel A und B Rechte sind, aus. Wenn in ihm ebenso auch der Winkel C ein Rechter sein wird, so werden AB und CD einander nicht begegnen und die Frage wird auf den Winkel BDC zurückgeführt, in Beziehung zu welchem man drei Voraussetzungen

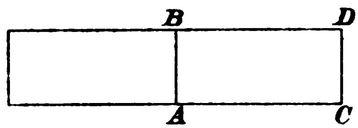


Fig. 18.

zulassen kann: $\angle BDC = 90^\circ$, $\angle BDC > 90^\circ$, $\angle BDC < 90^\circ$. Nach der Durchsicht einer jeden dieser Voraussetzungen im einzelnen unter den entsprechenden Titeln: „Erste Hypothese"[1]), „Zweite Hypothese"[2]) und „Dritte Hypothese"[3]) kommt Lambert hinsichtlich der ersten zum Schluß, daß sie mit der Annahme des fünften Euklidischen Postulats gleichbedeutend ist, und die zweite Hypothese auf einen Widerspruch führt. Endlich macht er bei der dritten Hypothese stillschweigend eine mit dem zu beweisenden Postulate gleichbedeutende Annahme. Dieser letzte Umstand war auch wahrscheinlich einer der Gründe, und vielleicht auch der Hauptgrund der Unzufriedenheit des Autors mit seiner Arbeit, die ihn an deren Druck hinderte. Die schwachen Seiten des Werks von Lambert verhinderten ihn jedoch nicht bei seiner weiteren, viel weiter als bei Saccheri gehenden Betrachtung von der zweiten und dritten Hypothese zu einigen bemerkenswerten Resultaten zu gelangen. So findet er, daß wenn eine von jenen beiden Hypothesen stattfände ein absolutes Maß der Länge vorhanden wäre. Als letztes und vielleicht als wichtigstes Resultat erscheinen die Betrachtungen über den Flächeninhalt des Dreiecks, die Lambert zeigten, daß dieser Flächeninhalt bei der zweiten und dritten Hypothese der Abweichung der Summe der Winkel des Dreiecks von zwei Rechten proportional ist. Dieser Schluß bringt ihn zur folgenden wichtigen Bemerkung: „Hierbey

Bernoulli und Hindenburg, Leipzig 8°. Jahrgang 1786, 2. Stück, S. 137 bis 164; 3. Stück, S. 325—358. Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, Leipzig 1895, S. 152—207.

[1]) S. 180—185. [2]) S. 186—192. [3]) S. 192—207.

scheint mir merkwürdig zu seyn, daß die zwote Hypothese statt hat, wenn man statt ebener Triangel sphärische nimmt, weil bei diesen sowohl die Summe der Winkel größer als 180 Gr. als auch der Überschuß dem Flächenraume des Triangels proportional ist. Noch merkwürdiger scheint es, daß, was ich hier von den sphärischen Triangeln sage, sich ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit der Parallellinien erweisen lasse, und keinen andern Grundsatz voraussetzt, als daß jede durch den Mittelpunkt der Kugel gehende ebene Fläche die Kugel in zween gleiche Theile theile. Ich sollte daraus fast den Schluß machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor. Wenigstens muß immer etwas seyn, warum sie sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstoßen läßt, als es sich bei der zwoten thun ließ."[1])

Als er, wie die Bemerkung zeigt, erfuhr, daß die zweite Hypothese sich auf der Kugel verwirklicht, ging Lambert weiter und sprach die für seine Zeit außerordentlich kühne Vermutung aus, daß zu demselben für die dritte Hypothese die imaginäre Kugelfläche führe. Damit schaute er weit in die Zukunft, weil die Richtigkeit seiner Vermutung erst ein ganzes Jahrhundert nachher bewiesen werden konnte. Vollkommen möglich ist es, daß er zu seiner Vermutung gelangte, indem er den Radius der Kugel r durch den Wert $\sqrt{-1}\cdot r$ in der Formel

$$r^2(A+B+C-\pi)$$

ersetzt, die zum Ausdruck des Flächeninhaltes des sphärischen Dreiecks mit den Winkeln A, B, C dient. Als Resultat dieser Vertauschung mußte er den Ausdruck

$$r^2(\pi-A-B-C)$$

bekommen, was dem Forscher zeigte, daß auf der imaginären Kugel, ebenso wie auf der wirklichen, der Flächeninhalt des Dreiecks der Abweichung der Winkelsumme des Dreiecks von zwei Rechten proportional ist und daß dieselbe Summe nicht größer sein kann als zwei Rechte, d. h. alles das, was den Inhalt der dritten Hypothese bildet.

Mit der Theorie der Parallellinien beschäftigte sich ebenfalls Lagrange. Er war, ebenso wie Lambert und Legendre, von den erhaltenen Resultaten nicht befriedigt, was aus folgenden übrigens sehr ungenügenden Auskünften zu ersehen ist. Nach der Mitteilung Leforts, von Hoüel[2]) dargestellt: „Lagrange hatte erkannt, daß

---

[1]) Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß, Leipzig 1895, S. 202—208. [2]) Hoüel, Essai critique sur les prin-

die Formeln der sphärischen Trigonometrie von dem elften Axiome unabhängig sind, und hoffte hieraus einen Beweis dieses Axioms zu gewinnen. Alle anderen Beweisversuche betrachtete er als ungenügend. So hat er sich in seinen Unterhaltungen mit Biot ausgedrückt." Und nach der Erzählung von de Morgan[1]): „Lagrange verfaßte am Ende seines Lebens eine Abhandlung über die Parallellinien. Er begann sie in der Akademie zu lesen, aber plötzlich hielt er inne und sagte: ‚Il faut que j'y songe encore'; damit steckte er seine Papiere wieder ein."

---

cipes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premières propositions des Éléments d'Euclide p. 76.

[1]) Engel und Stäckel, Die Theorie der Parallellinien usw., S. 212.

Verbesserungen.

S. 58 Z. 2 v. u. statt [5]) Ebenda, S. 79, 80 lies [5]) A. De Morgan, op. cit. S. 79, 80.
S. 59 Z. 4 v. u. statt S. E. Morgan lies S. E. De Morgan.

ABSCHNITT XXIII

TRIGONOMETRIE · POLYGONOMETRIE UND TAFELN

VON

A. v. BRAUNMÜHL

Die Ausbildung der Trigonometrie durch Euler und dessen Zeitgenossen und Nachfolger.

Die definitive Umgestaltung der Trigonometrie war 1753 durch den ersten grundlegenden Aufsatz Eulers angebahnt worden (vgl. III², S. 560—561 und 867—869), obwohl derselbe seine praktische Bezeichnungsweise der trigonometrischen Funktionen schon viel früher in seinen zahlreichen Abhandlungen sowie in der „Introductio" angewendet hatte. Diese Bezeichnungsweise, die in der Hauptsache der noch jetzt gebräuchlichen entspricht, war auch von einigen der hervorragendsten Mathematiker, wie von den Franzosen Clairaut und d'Alembert, alsbald mit Glück gebraucht worden, während andere und darunter namentlich die Engländer sich noch ziemlich lange teils der älteren Abkürzungen[1]) bedienten, teils überhaupt keine Formeln schrieben. Die Wichtigkeit seiner Schreibweise für die ganze Mathematik hat Euler selbst mit folgenden Worten hervorgehoben[2]): „Wenn dies (nämlich die Einführung der trigonometrischen Funktionen in den Kalkül) auch nicht von großer Wichtigkeit scheinen möchte, da es hauptsächlich auf der von mir in die Rechnung eingeführten Bezeichnungsweise dieser Größen beruht ..., so hat doch eben diese Art der Bezeichnung nachmals der ganzen Analysis so große Hilfsmittel verschafft, daß dadurch ein fast neues Feld erschlossen wurde ..."

Ferner hat Euler[3]), wenn er dies auch nirgends ausdrücklich hervorhob, die trigonometrischen Funktionen nicht mehr allein als Linien, wie es bisher stets geschehen war, sondern fast durchweg als Verhältnisse aufgefaßt. Dies geht aus verschiedenen Stellen seiner Schriften auf das deutlichste hervor und war schon durch den Um-

---

[1]) Vgl. z. B. die Bezeichnung bei F. C. Maier, III², S. 559. Ausführlicheres hierüber in: A. v. Braunmühl, Die Entwicklung der Zeichen- und Formelsprache in der Trigonometrie. Bibl. math. (3) III, 1902, p. 64—74. [2]) Subsidium calculi sinuum. Novi Comment. Acad. sc. Petrop. ad annos 1754/55, erschienen 1760, V, p. 164—165. [3]) So z. B. in „Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem". Novi Comment. Acad. Petrop. 1760/61 (erschienen 1763), VIII, p. 159 ff.; ferner in „Trigonometria sphaerica universa". Acta Acad. Petrop. 1779, I, p. 73. Vgl. auch die Übersetzung von E. Hammer, Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 73, p. 41.

stand gefordert, daß er sie als Winkelfunktionen in die Analysis einführte[1]). Simon Klügel, auf den wir weiter unten noch ausführlich zu sprechen kommen werden, hat diese Neuerung mit folgenden Worten gekennzeichnet[2]): „Nach der alten Ansicht der goniometrischen Funktionen waren es bloße Linien, die man unter sich und mit dem Halbmesser zu Gleichungen verknüpfte . . ., und hier den Halbmesser zur Einheit nehmen, war nur Ersparung im Schreiben, welche die Gleichartigkeit (Homogeneität) der Glieder zerstörte. Nach der neuen, durch Euler eingeführten, sind sie Zahlgrößen, welche die Gleichartigkeit der Glieder nicht aufheben, . . .“ Aber obwohl schon Eulers Arbeiten den Vorteil dieser Auffassung ins Licht setzten, und später Klügel und andere für sie eintraten, dauerte es noch bis tief in das 19. Jahrhundert hinein, bis dieselbe auch in der elementaren Trigonometrie durchgriff und überall festen Fuß faßte.

Ähnlich ging es auch mit jenem so einfachen und in seiner Tragweite doch so wichtigen Gedanken Eulers, die Seiten der ebenen und sphärischen Dreiecke mit a, b, c und die gegenüberliegenden Winkel mit den an den Ecken stehenden Buchstaben A, B, C zu bezeichnen, ein Gedanke, den er schon in jener Abhandlung von 1753 über die kürzeste Linie zur vollkommen symmetrischen Gestaltung der sphärischen Formelsysteme ausgenützt hatte. Obwohl das Vorteilhafte dieser Bezeichnung auf der Hand lag, fand auch sie nur ziemlich langsam allgemeine Verwendung.

Sehen wir uns um, was von Eulers Zeitgenossen und Nachfolgern sowie von ihm selbst von 1759 ab neues in der Trigonometrie geleistet wurde, so müssen wir um einige Jahre zurückgreifend einen Aufsatz des Engländers Francis Blake (1718—1780) mit dem Titel „Spherical Trigonometrie reduced to Plane“[3]) besprechen, der deshalb nicht übergangen werden kann, weil die darin angewandte Methode nachmals wiederholte Verwendung fand. Den Schlüssel zur Behandlung der sphärischen Dreiecke bot ihm der Fall, einen Winkel aus den drei Seiten zu bestimmen, den er folgendermaßen löste. Um

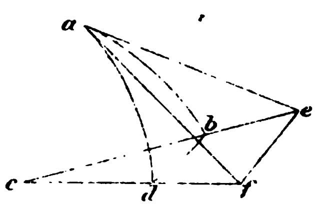


Fig. 19.

$\sphericalangle a$ in Δabd (Fig. 19) zu bestimmen, seien af und ae die Tangenten

[1]) Er sagt im Subsidium calculi sinuum a. o. a. O.: „Ebenso (wie Johann Bernoulli die Logarithmen zu analytischen Größen machte) glaube ich die Sinus und Tangenten der Winkel zuerst in den Kalkül eingeführt zu haben, so daß man sie wie andere Größen behandeln und mit ihnen alle Operationen ohne jedes Hindernis ausführen kann“ [2]) Mathem. Wörterbuch, II, 1805, p. 618. [3]) P. T. XLVII, 1752, p. 441 ff.

der Bögen ad und ab und c sei das Zentrum der Kugel, dann ist $ce = \sec ab$, $cf = \sec ad$ und $\sphericalangle c = \operatorname{arc} bd$ bekannt. Somit ergibt sich aus Δcef die Seite ef, und da $af = \operatorname{tg} ad$, $ae = \operatorname{tg} ab$ ebenfalls bekannt sind, so findet man aus dem ebenen Δaef den $\sphericalangle eaf = a$. Im Grunde genommen ist Blakes Verfahren nur eine Vereinfachung der schon von den Arabern und Regiomontan ausgebildeten Methode.[1])

Im Jahre 1756[2]) versuchte ferner der Franzose Alexander-Gui Pingré (siehe XIX. Abschnitt, S. 14), der sich durchweg der Formelschreibweise Eulers bediente, die Nepersche Regel für rechtwinklige sphärische Dreiecke auf schiefwinklige auszudehnen, indem er die längst bekannten Sätze, welche sich durch Fällen eines senkrechten Bogens von einer Ecke eines Dreiecks auf die Gegenseite ergeben, in zwei Regeln zusammenfaßte, die nur auf jene beiden Aufgaben, in welchen drei Seiten oder drei Winkel gegeben sind, keine Anwendung fanden. Dieser Umstand veranlaßte später (1798) den Schotten Walter Fisher, Pingrés Regeln zu verbessern[3]), indem er sie durch vier in allen Fällen anwendbare Theoreme ersetzte, die jedoch wenig Verwendung fanden.

Jean François de Castillon kennen wir bereits als Herausgeber von Newtons kleineren Schriften (III[2], S. 508). Durch das Studium der Werke des letzteren wurde er offenbar zur Abfassung zweier Abhandlungen veranlaßt, die er 1764 und 1765 der Berliner Akademie vorlegte[4]) und in denen er eine neue Begründung einiger Sätze der ebenen Trigonometrie versuchte. So gab er eine geometrische Ableitung des Halbwinkelsatzes und zeigte, wie aus diesem sieben Theoreme fließen, die schon Newton in seiner Arithmetica universalis aufgestellt hatte.[5])

Eulers analytische Formeln wurden mit Glück verwendet in einer Dissertation aus dem Jahre 1760, die unter dem Präsidium von Johann Kies (1713—1781), Professor in Tübingen, von den Kandidaten des Magisteriums Hoffmann und Jäger verteidigt wurde. Sie führt den Titel „Trigonometria methodo plana et facili exposita“ und gibt die goniometrischen Formeln sehr vollständig, ohne jedoch die trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse zu definieren. Dann werden die zehn Hauptgleichungen zwischen drei Stücken eines recht-

[1]) Vgl. A. v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I, 1900, p. 68 und 129. [2]) Mém. de l'Acad. de Paris 1756 (erschienen 1762), p. 301. [3]) P. T. I, 2, 1758, p. 538—543. [4]) Propositions de Géométrie et de Trigonométrie élémentaire, démontrées d'une manière nouvelle. Mém. de l'Acad. de Berlin 1766 (publiziert 1768), p. 354—364. [5]) Arithmetica univ., Cap. XIII, Problemata geometrica.

winkligen sphärischen Dreiecks abgeleitet und auch die weniger bekannten Relationen zwischen vier Stücken aufgestellt, woran sich die Ableitung der Sätze für das schiefwinklige Dreieck mit Einschluß der Neperschen Analogien anreiht. Bemerkenswert ist die polare Gruppierung der sechs Dreiecksfälle zu zweien, die trotz Vietas Vorgang[1]) selten genug zu finden war. Die Formeln für das ebene Dreieck gewinnt Kies, wie das später noch oft geschah, durch Grenzübergang aus jenen für die Kugel, indem er $\sin A = A$, $\operatorname{tg} A = A$, $\cos A = 1$ setzt.

Um die Mitte des 18. Jahrhunderts wurde auch zum ersten Male die Notwendigkeit einer Kleinkreistrigonometrie auf der Kugel von d'Alembert betont. Nachdem derselbe bereits in seinen Réflexions sur la cause des vents, Paris 1757, durch eine ziemlich umständliche Rechnung gezeigt hatte, wie man eine Relation zwischen den Seiten eines Dreiecks herstellen kann, dessen Basis aus einem Kleinkreisbogen und dessen Schenkel aus Großkreisbögen bestehen, löste er einige Jahre später[2]) die Hauptaufgaben, den Neigungswinkel eines Klein- und eines Großkreises, welche dieselbe Sehne haben, zu bestimmen, die zwischen zwei solchen Kreisen liegende Fläche auszudrücken und endlich den Winkel der Ebenen zweier Kleinkreise anzugeben. Seinem Wunsche, andere möchten diese seine Ideen weiter ausführen, kam 1798 Charles Bossut nach, indem er sowohl mit Integralrechnung den Inhalt eines von drei Kleinkreisen gebildeten Dreiecks bestimmte, als auch einen elementaren Weg hierzu angab.[3])

Bedeutende Förderung fand die Trigonometrie durch verschiedene Arbeiten Johann Heinrich Lamberts. Lambert[4]) ist am 26. August 1728 in der damals schweizerischen Stadt Mülhausen im Oberelsaß geboren und als Mitglied der Berliner Akademie und Oberbaurat am 25. September 1777 gestorben. Aus einer unbemittelten Schneidersfamilie hervorgegangen, mußte er sich frühzeitig sein Brot als Schreiber verdienen, brachte es jedoch als Autodidakt sich fortbildend bald zum Hauslehrer bei dem Reichsgrafen Peter von Salis, wo er seinen Studien weiter obliegen konnte. Da aber Studieren und Produzieren bei ihm Hand in Hand ging, so bereitete er schon damals die wichtigsten seiner Werke vor. Nachdem er diese, nämlich die Photometrie, eine Schrift über die Kometenbahnen und die Kosmologischen Briefe zu Augsburg hatte erscheinen lassen, wurde er Mitglied der bayerischen Akademie der Wissenschaften mit 800 Gulden Gehalt, löste jedoch dieses Verhältnis bald wieder und kam nach ver-

[1]) Vgl. A. v. Braunmühl, Gesch. der Trig. I, p. 180—181. [2]) Recherches mathém. sur différents sujets. Miscellanea Taurin. IV, 1766—69, § 1, p. 127, 2. Zählung.
[3]) Traités de calcul différentiel et intégral, an VI, 1797/98, II, p. 522—531.
[4]) Allgem. deutsche Biographie XVII, p. 552—556.

schiedenen Versuchen eine dauernde Lebensstellung zu finden, die ihm Muße zu seinen wissenschaftlichen Arbeiten böte, endlich 1764 nach Berlin, wo er auf Veranlassung der dort herrschenden Schweizer Schule mit einem Gehalt von 500 Talern, der sich später auf 1100 Taler erhöhte, in die Akademie aufgenommen wurde. Seine wissenschaftliche Tätigkeit war eine äußerst fruchtbare und erstreckte sich sowohl auf die reine Mathematik, als auch auf alle mit der Praxis in Beziehung stehenden Anwendungen derselben. Alle seine Arbeiten sind, wenn auch nicht immer so bedeutend wie die Eulers und Lagranges, reich an originellen und fruchtbaren Gedanken und zeichnen sich durch eine in jener Zeit seltene Strenge der Beweisführung aus. Die gleiche Originalität zeigt sein Stil, der derb und oft schrullenhaft wie seine Persönlichkeit, doch nie die nötige Klarheit und Prägnanz vermissen läßt.

Für unser engeres Wissensgebiet kommen von seinen Publikationen zunächst die „Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung“[1]) in Betracht. Im ersten Bande derselben spricht er sich (S. 369 ff.) über die Art und Weise, wie die Trigonometrie zu fördern sei, eingehend aus, indem er hauptsächlich drei Gesichtspunkte im Auge hat: einmal, sagt er, könne man die Auflösung der einzelnen Dreiecksfälle durch Berechnung passender Tafeln vereinfachen, dann könne durch Benutzung der Algebra viel erspart werden und endlich könne man in der Verwendung der Trigonometrie zur Integralrechnung noch bedeutend weiter gehen.

Vorerst wandte sich nun Lambert der Neperschen Regel zu, indem er an Stelle des bisher durch einen Induktionsschluß bewerkstelligten Beweises derselben einen anderen setzte, der mehr das Wesen dieser merkwürdigen Regel aufdeckte und auf dem gleichen Gedanken beruhte, den schon Neper angewendet, aber nur angedeutet hatte. Christian von Wolf hatte in seinen Anfangsgründen der Mathematik[2]) den Wortlaut der Regel zum ersten Male in der Weise ausgesprochen, wie er heute noch allgemein angegeben wird. An ihn schloß sich Lambert an, indem er die Katheten des rechtwinklig sphärischen Dreiecks durch ihre Komplemente ersetzte und zeigte, daß die fünf zirkulären Stücke in fünf Dreiecken liegen, die sich in einem Zyklus um die Kugel aneinanderschließen, wie dies Fig. 20 veranschaulichen möge. Daselbst stellen $AadF$ und $ADcG$ zwei Großkreise dar, deren Pole P und Q sind, durch die der Kreis $cQPa$ geht. Ferner ist dPC irgend ein anderer Kreis durch P, welcher

---

[1]) 4 Bände, 8°, Berlin 1765—1772. [2]) Im 3. Teile, zweite Ausgabe von 1717, p. 144 und 152; die erste Ausgabe von 1710 enthält dieselbe noch nicht.

den ersten in C rechtwinklig schneidend das ΔABC vollendet. Zieht man endlich noch Kreis $GHQb$ durch Q, so daß seine Ebene auf Dc senkrecht steht, so entstehen die fünf schraffierten Dreiecke, von denen Lambert aus ihrer Entstehung nachweist, daß sie die verlangte Eigenschaft haben, dieselben fünf zirkulären Stücke zu besitzen. So ist z. B. $\sphericalangle A$ in I gleich $90^0 - PD$ in II, gleich PQ in III, gleich $90^0 - FQ$ in IV und endlich wieder gleich A in V, und allgemein behalten ein Mittelstück und zwei anliegende Stücke sowie ein Mittelstück und zwei gegenüberliegende diesen Charakter in allen fünf Dreiecken bei.

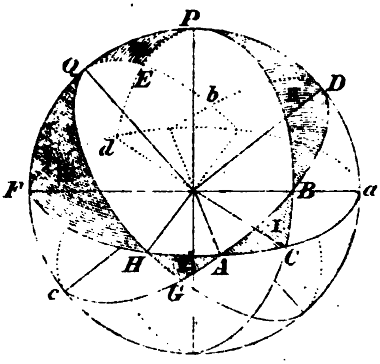
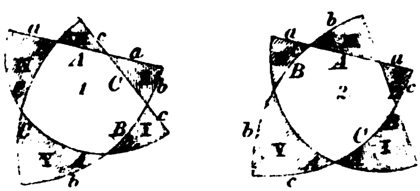


Fig. 20

Zeichnet man daher mit Lambert die beiden stereographischen Figuren (Fig. 21), in denen die kleinen Buchstaben die Komplemente der Katheten bedeuten, so liefern die beiden darunter stehenden Gleichungen, für ein Dreieck bewiesen, die sämtlichen zehn Fälle der Neperschen Regel.



$\cos C = \sin A \sin B$ $\qquad$ $\cos C = \cot A \cot B$

Fig. 21.

Man wird aus dem Vorstehenden erkannt haben, daß Lambert wirklich den wahren Grund der Neperschen Regel aufdeckte, indem er bei Aufstellung seines Beweises unbewußt mit dem Begriff der Gruppe operierte.[1])

An die Behandlung der Neperschen Regel schließt Lambert eine Zusammenstellung der wichtigsten goniometrischen Formeln an und gibt dann die Vorschriften zur Berechnung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke, die er mittels einer Höhe in zwei rechtwinklige zerspaltet. Die Anwendung jener Regel auf die beiden Teildreiecke und die Verbindung der Formeln zu einer einzigen Schlußformel führt ihn dann selbstverständlich wieder zu den schon längst bekannten Hauptgleichungen für das schiefwinklige Dreieck.

Da Lambert stets die praktische Verwendbarkeit der Formeln im Auge hatte, so stellte er auch eine Umformung des sphärischen

[1]) Vgl. O. Pund, Über Substitutionsgruppen in der sphärischen Trigonometrie usw. Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg III, 1897, p. 7, und C. O. Lovett in Bulletin of the American Math. Society, 2. Series, IV, 1898, p. 252.

Kosinussatzes, wie der Kotangentenformel für logarithmische Rechnung her, indem er z. B. im ersteren Falle in

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \quad \cos a = 1 - 2 \sin \frac{a}{2}^2$$

und

$$\frac{\cos (B - C)}{2 \sin B \sin C} = \sin \frac{\varphi}{2}^2$$

setzte, wodurch er die elegante Formel

$$\cos A = 2 \sin B \sin C \sin \frac{\varphi + a}{2} \sin \frac{\varphi - a}{2}$$

erhielt.[1])

Ferner muß noch erwähnt werden, daß Lambert ebenso wie Euler die trigonometrischen Funktionen als Verhältnisse auffaßte, wenn er dies auch ebensowenig wie jener ausdrücklich hervorhob; dies beweist die Schreibweise seiner Formeln für die rechtwinkligen ebenen Dreiecke, wie

$$k = h \sin a = h \cos b, \quad c = h \cos a = h \sin b \text{ usw.},$$

wo h die Hypotenuse, k und c die beiden Katheten bezeichnen.

Noch von einer anderen Seite her suchte Lambert die Trigonometrie zu bereichern, indem er nämlich die Hyperbelfunktionen für sie verwertete. Schon Gregor von St. Vincentio, David Gregory und John Craig hatten durch die Quadratur der gleichseitigen Hyperbel, wenn auch unbewußt, die Grundlagen für diese Funktionen geschaffen, bei Newton traten dann bereits Vergleiche zwischen Kreis und gleichseitiger Hyperbel auf, und De Moivre hatte schon ziemlich deutlich erkannt, daß durch Vertauschung des Reellen mit dem Imaginären Kreisaufgaben in solche für die gleichseitige Hyperbel übergehen. Der erste aber, welcher eine Theorie der Hyperbelfunktionen begründete, war der von Lambert selbst genannte Graf Vincenzo Riccati (vgl. B III², S. 474), der sie mit Hilfe geometrischer Betrachtungen entwickelte[2]), während Lambert 1768 zuerst auf den Gedanken kam, sie zur Behandlung trigonometrischer Probleme zu verwerten.[3])

Ist (Fig. 22) CDQ ein Kreisquadrant, der den Ast Qq einer gleichseitigen Hyperbel in Q berührt, q ein beliebiger Punkt der Hyperbel, $qP \,|\, QC$, PQ und $qp \perp QC$, $\sphericalangle PCQ = \omega$ der sogenannte

---

[1]) a. a. O., p. 415 ff. — Eine etwas andere Umgestaltung hat W. Croswell, Lehrer der Schiffahrtskunde, durch eine Regel ausgedrückt, gegeben: Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences II, part I, 1780 (veröffentlicht 1793), p. 18—20. [2]) Vgl. S. Günther, Lehre von den Hyperbelfunktionen, Halle 1880, Kap. I. [3]) Observations trigonométriques Histoire de l'Académie de Berlin 1768, 24, p. 327.

„transzendente“ und $\sphericalangle\, qCQ = \varphi$ der „gewöhnliche“ Winkel, dann folgt aus der Figur: 1. $\operatorname{tg}\varphi = \sin\omega$, $CP = \sec\omega = Cp = \cosh u$ und $PQ = \operatorname{tg}\omega = pq = \sinh u$, wenn der zu Winkel φ gehörige Hyperbelsektor QCq mit u bezeichnet wird. Hieraus folgt dann leicht $du = \frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{1 - \operatorname{tg}\varphi^2}$ und daraus hinwieder 2. $u = \log\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\omega}{2}\right)$. Somit kann man zu jedem Winkel φ den entsprechenden Hyperbelsektor berechnen, indem man sich der beiden Gleichungen 1. und 2. bedient. Damit konstruierte nun Lambert eine kleine Tabelle,

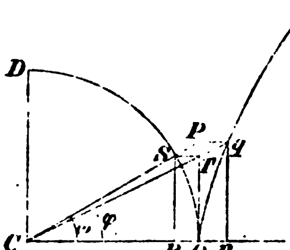


Fig. 22.

welche in der ersten Spalte links die Werte des Winkels ω von 0^0 bis 90^0 enthält und zu ihnen die entsprechenden Hyperbelsektoren, den sinhyp., den coshyp., die Logarithmen derselben, die tg. und log tg. des gewöhnlichen Winkels und endlich in der letzten Spalte diesen selbst gibt. Wie er dieselbe zur Vereinfachung trigonometrischer Rechnungen anwandte, erkennt man am besten aus einem Beispiel. Es soll für ein sphärisches Dreieck abc aus dem Winkel c und der Seite B[1]) eine Tabelle berechnet werden, die zu jedem Winkel c den zugehörigen Winkel a gibt. Dazu hat man

$$\sin B \operatorname{ctg} A = \cos c \cos B + \sin c \operatorname{ctg} a$$

und hieraus $\frac{\operatorname{ctg} a}{\cos B} = \operatorname{tg} k \sec c' - \operatorname{tg} c'$, wenn $\operatorname{tg} k = \operatorname{tg} B \operatorname{ctg} A$ und $c' = 90^0 - c$ ist. Sind nun die den Winkeln k und c' entsprechenden Hyperbelsektoren x und y, so hat man $\operatorname{ctg} a = \frac{\cos B}{\cos h x} \sin h(x - y)$, wodurch die Rechnung auf eine einzige Analogie gebracht ist und zwar auf die einfache Addition des konstanten Logarithmus von $\cos B : \cos hx$ zu dem Logarithmus von $\sin h(x - y)$.

Dadurch, daß Euler die trigonometrischen Linien als „Rechnungsgrößen“, wie er sagte, in die Analysis eingeführt hatte, hatte sich zunächst vielfach eine Trennung der elementaren Trigonometrie, die nur zur Berechnung der Figuren in der Ebene und auf der Kugel dient, von der heute nach Klügels Vorgang[2]) als Goniometrie bezeichneten Lehre von den Winkelfunktionen vollzogen. Dies läßt sich am deutlichsten aus zwei Schriften erkennen, die der preußische Offizier Georg Friedrich von Tempelhof (1737—1807)

---

[1]) Lambert bezeichnet durchweg die Seiten mit den großen, die gegenüberliegenden Winkel mit den kleinen Buchstaben des lateinischen Alphabetes

[2]) Mathematisches Wörterbuch II, p. 604.

unter dem Titel „Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen" (Berlin 1769) und „Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen" (Berlin und Stralsund 1770) veröffentlichte. Während nämlich in dem ersten Werke nur die wichtigsten goniometrischen Formeln sowie die Periodizität der trigonometrischen Funktionen geometrisch abgeleitet werden, und bei sämtlichen geometrischen Anwendungen sogar wieder der Radius r mitgeschleppt wird, indem die Funktionen durch Linien ersetzt werden, sind in das zweite Werk ganz verschieden hiervon die analytischen Formeln Eulers zur Dreiecksberechnung in ihrem vollen Umfange aufgenommen. Eine Vereinigung der beiden getrennten Gebiete wurde erst dadurch ermöglicht, daß Simon Klügel in seiner „Analytischen Trigonometrie" (Braunschweig 1770) das Wesentliche in Eulers Auffassung erkannte, indem er die trigonometrischen Größen ausdrücklich als Verhältnisse der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks definierte und sie zum ersten Male als trigonometrische Funktionen bezeichnete.[1]) Das Buch Klügels weist aber außerdem noch andere bemerkenswerte Verdienste auf. Das wichtigste ist wohl die Erkenntnis, daß die Additionstheoreme für die Sinus- und Kosinusfunktion allein „alle Lehrsätze über die Zusammensetzung der Winkel" enthalten[2]), was durch direkte Entwicklung aller einschlägigen Formeln aus diesen Theoremen gezeigt wird. Weitere Verdienste Klügels sind, daß er in diesem Buche die Ableitung der sechs Grundformeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks auf Dreiecke mit Seiten, die einen Quadranten überschreiten, ausdehnte, die hervorragende Verwendbarkeit der Neperschen Analogien für praktische Rechnungen hervorhob und nachwies, wie man mit Hilfe des Supplementardreiecks zu jeder Formel eine Polarformel angeben kann. Klügels Buch hat jedenfalls viel dazu beigetragen, Eulers analytische Behandlungsweise der Trigonometrie in weiteren Kreisen bekannt zu machen.

Aber auch Kästner (vgl. III², S. 576), der immer bestrebt war die neuesten Erscheinungen der mathematischen Literatur den Lesern seiner zahlreichen Schriften auf seine etwas breite und umständliche Weise zugänglich zu machen, bediente sich frühzeitig der Eulerschen Formelrechnung und veröffentlichte in seinen Astronomischen Abhandlungen (I. Sammlung Göttingen 1772), ähnlich wie Kies und Klügel, eine elementare Ableitung der hauptsächlichsten Formeln der sphärischen Trigonometrie. Auch gab er hier, wie in den Göttinger

---

[1]) a. a. O., p. 4 heißt es: „Ich will diese Verhältnisse mit einem allgemeinen Namen: trigonometrische Funktionen der Winkel nennen, als deren Stelle sie in der Rechnung vertreten". [2]) Ebenda, p. 85.

Dissertationen[1]) und in seinen geometrischen Abhandlungen (2 Sammlungen, Göttingen 1790—91) und noch anderwärts[2]) vielfache Anwendungen auf astronomische, physikalische und geometrische Fragen, wobei er die trigonometrischen Formeln mit Gewandtheit handhabte, wenn auch die Eleganz seiner Lösungen durch das fast beständige Mitschleppen des Sinus totus beeinträchtigt wird.

Neun Jahre nach dem Erscheinen von Klügels Buch kam auch Euler noch einmal auf die sphärische Trigonometrie zurück[3]), deren Formelsystem er bereits vor 26 Jahren mit Hilfe höherer Rechnung abgeleitet hatte. Offenbar befriedigten ihn die inzwischen über diesen Gegenstand erschienenen Abhandlungen und Bücher nicht, und er wollte daher zeigen, wie man das ganze Formelsystem, das auch noch einiger Ergänzungen bedurfte, auf elementare Weise aus einer einzigen Figur ableiten könne. Als solcher bediente er sich des zum schiefwinkligen sphärischen Dreieck ABC gehörigen Dreikants, dessen Spitze im Mittelpunkt O der Kugel mit dem Halbmesser 1 liegt (Fig. 23). In den Ebenen COa und COb (a liegt auf OA und b auf OB) seien Ca und Cb senkrecht zu OC errichtet, ferner sei $bp \perp Ca$, $bq \perp Oa$, dann ist $\sphericalangle bqp$ der Neigungswinkel von $\sphericalangle \widehat{Oa}$, ferner ist $\sphericalangle COa$ = Seite b, $\sphericalangle COb$ = Seite a und $\sphericalangle aOb$ = Seite c des sphärischen Dreiecks. Aus der Figur folgt dann unmittelbar:

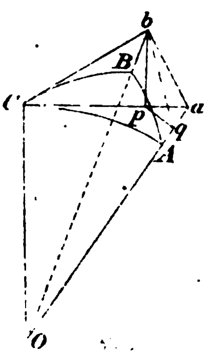


Fig. 23.

$$Ca = \operatorname{tg} b, \quad Oa = \sec b, \quad Cb = \operatorname{tg} a, \quad Ob = \sec a.$$

Hieraus folgt $bq = Ob \sin c = \frac{\sin c}{\cos a}$ und $Oq = Ob \cos c = \frac{\cos c}{\cos a}$. Da ferner $\sphericalangle aCb = \sphericalangle C$ des Dreiecks ABC ist, so hat man

[1]) Dissertationes mathematicae et physicae, quas Societati reg. sci. Gottingensi annis 1756—1766 exhibuit etc. Altenburgi 1771. Besonders zu bemerken sind darunter Nr. 7: Gnomonica universalis analytica 1762, eine Umarbeitung der Gnomonica analytica von 1754, hervorgerufen durch seine erweiterten Kenntnisse trigonometrischer Formeln; dann Nr. 9: „Quot sphaerae aequales mediam et se mutuo tangere possint“, woselbst sich eine elegante Ableitung der Fläche eines sphärischen Dreiecks mit höherer Rechnung findet. [2]) So findet sich in Novi Comm. Soc. Gotting. VII ad annum 1776 (publiziert 1777), p. 92—141 bei Behandlung des optischen Problems von Alhazen (vgl. I², S. 744) eine näherungsweise Auflösung einer trigonometrischen Gleichung von der Form $\sin\varphi - B \operatorname{tg}\varphi = A$ und in Hindenburgs Archiv der reinen und angewandten Mathematik II, 1798, p. 174 wird die Wertänderung der beiden Seiten des Ausdruckes $\sec\varphi \pm \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(45^\circ \pm \frac{\varphi}{2}\right)$ diskutiert und in Einklang gebracht, wenn φ von 0° bis 90° wächst. [3]) Trigonometria sphaerica universa ex primis principiis

$$bp = Cb \sin C = \operatorname{tg} a \sin C \quad \text{und} \quad Cp = Cb \cdot \cos C = \operatorname{tg} a \cos C;$$

und da $\sphericalangle\, CaO = 90^0 - b$ ist, so folgt noch:

$$ap = Ca - Cp = \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a \cos C, \quad pq = ap \cos b = \sin b - \operatorname{tg} a \cos b \cos C$$

und

$$aq = ap \sin b = \frac{\sin b^2}{\cos b} - \operatorname{tg} a \sin b \cos C \text{ oder } \frac{\cos c}{\cos a} = \cos b + \operatorname{tg} a \sin b \cos C$$

und hieraus endlich

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

Ähnlich liest man aus der Figur unmittelbar die Gleichung des Sinussatzes $\frac{\sin C}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin a}$ und die in dieser Form neue Gleichung

$$\frac{pq}{bq} = \cos A = \frac{\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C}{\sin c}$$

ab. Diese drei Gleichungen umfassen, wie Euler sagt, die ganze sphärische Trigonometrie, und in der Tat gelang es ihm durch einfache Rechnung aus ihnen alle jene Formeln abzuleiten, die heute den eisernen Bestand der sphärischen Trigonometrie bilden.

Auch die Existenz und die Eigenschaften des Supplementardreiecks, für das Euler jedoch keinen eigenen Namen hat, wurden in einem „Theorema“ hervorgehoben, während eine Nebeneinanderstellung der Polarformeln nur für die Kosinus- und Kotangentensätze durchgeführt wurde — in diesem Punkte war Klügel bereits weiter gegangen. Dagegen erkannte Euler hier zuerst die sechs möglichen Formen der dritten Hauptgleichung, das Prinzip der zyklischen Vertauschung aber war ihm, wie seine Formelschreibung zeigt, entgangen.

Euler hat von seinen trigonometrischen Formeln den vielseitigsten Gebrauch gemacht in rein mathematischen und mechanischen, wie in astronomischen und physikalischen Untersuchungen. Wir wollen hier auf die wichtigsten hinweisen, die zur ersten Gruppe gehören. In den Petersburger Akten für das Jahr 1778[1]) hatte er bereits gezeigt, wie man die trigonometrischen Funktionen zur Lösung einiger schwieriger diophantischer Gleichungen benutzen könne und ebenda[2]) eine Abhandlung über die Messung der Körperwinkel durch die Inhaltsbestimmung sphärischer Figuren gegeben, bei welcher Ge-

---

breviter et dilucide derivata. Acta Acad. Petrop. 1779 (erschienen 1782). 1, p. 72—86.

[1]) De casibus quibusdam maxime memorabilibus in Analysi indeterminata etc. Acta Acad. Petrop. ad annum 1778, pars II (erschienen 1781), p. 85—110.

[2]) De mensura angulorum solidorum. Ebenda. p. 31—54.

legenheit er die trigonometrischen Funktionen des sphärischen Exzesses S eines Dreiecks in den Seiten desselben durch elegante Formeln ausdrückte. Diese wurden noch in einer erst nach seinem Tode 1792 erschienenen Abhandlung weiter ergänzt, die ebenfalls aus dem Jahre 1778 stammte.[1]) Die in der ersteren Abhandlung mitgeteilte Formel $\operatorname{tg}\frac{S}{2} = \frac{\sqrt{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2\cos a\cos b\cos c}}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$, wo a, b, c die Seiten des Dreiecks sind, hat De Gua 1783[2]) wieder entwickelt, ohne jedoch Euler zu erwähnen. Endlich erschien 1786 ebenfalls posthum ein älterer Aufsatz von ihm[3]), in welchem er mit alleiniger Benutzung des Kosinussatzes die Relationen zwischen den sechs Linien, die vier Punkte in der Ebene verbinden, aufsuchte. Dabei wurde auch die Frage behandelt, wie man ein Kreisviereck bestimmt, dessen Seiten und Diagonalen durch rationale Zahlen ausgedrückt werden.

Mit besonderer Eleganz handhabten die Eulerschen Formeln bald sein Schüler Andreas Johann Lexell, sein Gehilfe Nikolaus Fuß und der Petersburger Astronom Friedrich Theodor Schubert. Der erste, auf den wir noch weiter unten eingehend zu sprechen kommen werden, hat in mehreren Abhandlungen[4]) eine ganze Reihe von wichtigen Theoremen über die Geometrie der Kugelkreise entwickelt, die geradezu die Grundlagen für alle späteren auf dieses Gebiet bezüglichen Arbeiten wurden. So wies er nach, daß die Spitzen aller sphärischen Dreiecke von gleicher Fläche, die über derselben Grundlinie stehen, auf einem Kleinkreise liegen[5]), berechnete in eleganten Formeln die sphärischen Radien des einem Dreieck umgeschriebenen und des ihm eingeschriebenen Kreises aus den Seiten, bzw. Winkeln desselben, gab ein Analogon zum Ptolemäischen Satze vom ebenen Sehnenviereck für das einem Kleinkreis eingeschriebene Viereck. berechnete den Radius von jenem aus den Seiten von diesem und löste die entsprechenden polaren Aufgaben. Auch übertrug er den Satz vom harmonischen Kreis auf die Kugel (Lexellscher Kreis).

Auch Nikolaus Fuß (vgl. III[2], S. 551) hat interessante Aufgaben der Kugelgeometrie behandelt[6]), die wir in folgender Form kurz zu-

---

[1]) Variae speculationes super area triangulorum sphaericorum. Nova Acta Acad. Petrop. X, ad annum 1792 (erschienen 1797), p. 47—62. [2]) Mémoires de l'Académie de Paris 1783, p. 358. [3]) De symptomatibus quatuor punctorum in eodem plano sitorum. Acta Acad. Petrop. ad annum 1782 (erschienen 1786), pars I, p. 3 ff. [4]) Acta Acad. Petrop. ad annum 1781, pars I (erschienen 1784), p. 112—126, und ebenda, 1782, pars I (erschienen 1786), p. 58—106 und pars II., p. 85—95. [5]) Einen Beweis dieses Satzes hatte Euler schon 1778 gegeben; posthum erschienen 1797 in Nova Acta Acad. Petrop. X, ad annum 1792.
[6]) Nova Acta Acad. Petrop. II, ad annum 1784 (erschienen 1788), vorgelegt 1786,

sammenfassen können: Ein sphärisches Dreieck mit gegebener Basis so zu bestimmen, daß seine Spitze auf einem gegebenen größten Kreise liegt und der Dreieckswinkel an derselben oder die Fläche des Dreiecks ein Maximum oder die Summe der Schenkel ein Minimum wird. Auch fand er[1]) als Ort der Spitze eines sphärischen Dreiecks über gegebener Basis, für das die Summe der Schenkel konstant ist, eine „sphärische Ellipse", welche mit der ebenen Figur gleichen Namens viele Eigenschaften gemein hat.

Endlich hat Schubert, durch diese Arbeiten angeregt, 1786 und 1798 ähnliche Fragen untersucht, indem er[2]) z. B. das größte und kleinste sphärische Dreieck mit gegebener Basis und Höhe bestimmte und die geometrischen Örter eines Punktes auf der Kugelfläche behandelte[3]), für welchen das Verhältnis der Sinus oder der Kosinus der ganzen oder halben kürzesten Entfernungen von zwei festen Kugelpunkten konstant ist.

Auch der große Lagrange beschäftigte sich vorübergehend mit trigonometrischen Fragen. Außer einer Abhandlung über eine neue Begründung der sphärischen Trigonometrie, auf die wir weiter unten noch zu sprechen kommen, veröffentlichte er 1774 „Solutions de quelques problèmes d'Astronomie sphérique par le moyen des séries"[4]), worin er die Auflösung der transzendenten Gleichung $\operatorname{tg} x = m \operatorname{tg} y$ nach x durch die Reihe $x = y - \theta \sin 2y + \frac{1}{2}\theta^2 \sin 4y - \frac{1}{3}\theta^3 \sin 6y + \cdots$ darstellte, in welcher $\theta = \frac{1-m}{1+m}$ bedeutet. Indem er diese Gleichung sowohl mit jenen drei Fundamentalgleichungen des sphärischen Dreiecks, in denen Tangenten vorkommen, als auch mit den Neperschen Analogien verband, gelangte er zu mehreren, namentlich in der Astronomie und Geodäsie sehr brauchbaren Lösungen trigonometrischer Aufgaben. So erhielt er z. B. zur Bestimmung der Winkel β und γ eines sphärischen Dreiecks, von dem die Seiten b, c und der Winkel α gegeben sind mit Benutzung der erwähnten Analogien, die Reihenentwicklungen:

$$\gamma = \operatorname{tg}\frac{c}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{b}{2} + \operatorname{tg}\frac{b}{2}\right)\sin\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}^2\left(\operatorname{ctg}\frac{b}{2}^2 - \operatorname{tg}\frac{b}{2}^2\right)\sin 2\alpha + \cdots,$$

---

p. 70; auch Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, 1786, p. 241—245.

[1]) Nova Acta Acad. Petrop. III, ad annum 1785 (erschienen 1788), vorgelegt 1787, p. 90—99. [2]) Ebenda, IV, ad annum 1786 (erschienen 1789), vorgelegt 1786, p. 89—94. [3]) Ebenda, XII, ad annum 1794 (erschienen 1801), vorgelegt 1798, p. 196—216. [4]) Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin, année 1776 (erschienen 1779), gelesen 1774, p. 214 ff. Oeuvres, Ed. Serret, IV, p. 275—298.

$$\beta = 180^0 - \alpha + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2} - \operatorname{ctg}\frac{b}{2}\right)\sin\alpha$$
$$- \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}^2\left(\operatorname{tg}\frac{b}{2}^2 + \operatorname{ctg}\frac{b}{2}^2\right)\sin 2\alpha + \cdots,$$

welche nach Lagranges Bemerkung um so konvergenter sind, je kleiner c ist und je näher b an 90^0 liegt. Auch zeigte er, daß die Verwendung des Imaginären, durch welche er diese Formeln gefunden hatte, noch ähnliche Gleichungen komplizierterer Form zu lösen gestattet. Lambert hat 1777 ebenfalls ähnliche Gleichungen durch Reihen gelöst[1]), und desgleichen finden sich in Delambres großer Arbeit über die Bestimmung des Meridianbogens zwischen Dünkirchen und Barcelona[2]) trigonometrische Gleichungen mit Reihen behandelt, die mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten erhalten werden.

Bedeutende Verdienste um die Ausbildung der elementaren Trigonometrie in Eulerschem Sinne, sowie um die systematische Ausgestaltung derselben erwarb sich der Italiener Antonio Cagnoli (1743—1816). Cagnoli[3]), zu Zante geboren, zog sich bald von der zuerst gewählten diplomatischen Laufbahn zurück, lebte dann in Verona als Privatmann, wo er sich eine Sternwarte erbaute und wurde nach Gründung der cisalpinischen Republik von Napoleon an das Observatorium in Mailand berufen. Später wurde er Professor der Astronomie an der Kriegsschule in Modena. Er gehörte der von Lorgna gegründeten Società Italiana delle scienze an, welche Mathematiker, wie Malfatti, V. Riccati, Ruffini und Ferroni zu den ihrigen zählte, und wurde nach Lorgnas Tode Präsident dieser gelehrten Gesellschaft. Seine Trigonometria piana e sferica, welche 1786 italienisch und in französischer Übersetzung von N. M. Chompré in Paris in erster Ausgabe erschien, wurde 1804 in 2. Auflage italienisch zu Bologna und 1808 abermals französisch zu Paris publiziert und ist das vollständigste und umfassendste Handbuch jener Zeit, in dem man manches auch heute noch Interessante und Lesenswerte findet. Wenn auch Cagnoli noch immer ausschließlich mit trigonometrischen Linien rechnete, so nahm er doch die Einheit als Radius an und bediente sich der Eulerschen Funktionszeichen, denen er nur merkwürdigerweise die abkürzende Bezeichnung der Dreiecksseiten durch die Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets nicht zugesellte. Cagnolis Hauptverdienst liegt darin, daß er wie Klügel die analytische Formel-

[1]) Bode, Astronomisches Jahrbuch für 1780, p. 67. [2]) Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, an VII (1798/99), Paris, 4°, p. 64 und 111. [3]) Poggendorff, Literarisch-biographisches Handwörterbuch, I, p. 359/60.

rechnung in den Vordergrund stellte und nur die notwendigsten Sätze aus Figuren ableitete. Auch bei Behandlung von komplizierten Dreiecksaufgaben, die er in eleganter Weise zu lösen verstand, setzte er sich stets die Herstellung einer allgemeinen Endformel zum Ziele.

Wesentlich Neues in bezug auf die ebene Trigonometrie war damals nicht mehr zu bringen; so ergibt denn die Durchsicht von Cagnolis Werk sowie einer ergänzenden Abhandlung[1]) vom Jahre 1794 als erwähnenswert nur eine Umgestaltung der Formel des ebenen Kosinussatzes für logarithmische Rechnung, aber auch hierin war ihm schon 1777 Johann Tobias Mayer[2]), der jüngere, zuvorgekommen. Zudem sei noch erwähnt, daß er auch die sogenannten Mollweideschen Gleichungen entwickelte und verwenden lehrte.[3])

Aus seinen Ergänzungen zur sphärischen Trigonometrie entnehmen wir die fundamentale Formel

$$\sin c \sin a + \cos c \cos a \cos B = \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b$$

als die erste Relation, welche zwischen den sechs Stücken eines sphärischen Dreiecks gegeben wurde.[4]) Ferner teilte er eine praktische Umgestaltung des sphärischen Kosinussatzes für logarithmische Rechnung mit[5]), abweichend von jener, die Lambert gegeben hatte (S. 411) und entwickelte Formeln, um die Stücke rechtwinklig sphärischer Dreiecke eventuell bis auf Zehntel-Sekunden genau erhalten zu können. Auch die Proportionen, zu welchen die Betrachtung zweier Dreiecke dieser Gattung führt, wenn sie einen Winkel oder die Hypotenuse gemeinsam haben, wurden von Cagnoli aufgestellt und außerdem wurden die Formeln abgeleitet, welche den Zusammenhang der Elemente eines sphärischen Dreiecks mit denen des zugehörigen Sehnendreiecks geben.[6]) In der eleganten Behandlung der trigonometrischen Gleichung $a \cos A + b \sin A = n$ aber war ihm schon Kästner 1772 zuvorgekommen.[7])

Wichtige Fortschritte machte in dem von uns betrachteten Zeitabschnitte auch die für die Astronomie und Geodäsie so notwendige

---

[1]) Cose trigonometriche. Memorie della Società Italiana, VII, 1794, p. 35 ff.
[2]) Gründlicher und ausführlicher Unterricht zur praktischen Geometrie, Göttingen 1777, 4 Bände, 8°, I, p. 12—13. [3]) Trigonometria, 1. Aufl. p. 122. [4]) Diese Formel findet sich allerdings erst in der Ausgabe von 1808, Nr. 1189, p. 326.
[5]) Diese Umformung steht schon in Cose trigonometriche, Nr. VI der sphärischen Probleme. [6]) Kap. VIII der ersten, Kap. XX der Auflage von 1808. Die elegante Formel $\cos A' = \cos A \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} + \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$ gibt z. B. den Winkel A' des Sehnendreiecks, der dem Winkel A im sphärischen entspricht.
[7]) Astronomische Abhandlungen 1774, p. 13—15.

Fehlerrechnung, bei welcher es sich um die Bestimmung der Veränderungen handelt, welche die Stücke eines Dreiecks erleiden, wenn gewisse derselben um sehr kleine Größen zu- oder abnehmen. Nachdem Cotes in seiner Aestimatio errorum 1722 dieselbe eingeführt (III², S. 360 und 412—414) und die wichtigsten Sätze geometrisch entwickelt hatte, publizierte De la Caille 1741 einen „Calcul des différences dans la trigonométrie sphérique"[1]), in welchem er Cotes' 18 Theoreme in 24 Formeln vereinigte, die er auf astronomische Aufgaben anwandte. Später haben sich namentlich Klügel, Kästner, Boscovich und Cagnoli mit Ausbildung dieses Wissenszweiges beschäftigt. Ersterer widmete ihm das 8. Kapitel seiner analytischen Trigonometrie und einen Aufsatz mit dem Titel „Trigonometrische Variationsrechnung zum Gebrauche bei Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse"[2]) und behandelte die vier wichtigsten Fälle, indem er ein Dreiecksstück konstant ließ und die endlichen Variationen der anderen untersuchte. Die beiden Hauptformeln, welche er erhielt, sind: $\Delta a = \cos C\Delta b + \cos B\Delta c$ und

$$\Delta B : \Delta C = (\sin c\Delta b - \cos a \sin b\Delta c) : (\sin b\, \Delta c - \cos a \sin c\Delta b),$$

die sich aus dem Kosinussatze und aus der Kotangentenformel ergeben. Kästner gab im ersten Bande seiner „Astronomischen Abhandlungen"[3]) ebenfalls eine analytische Ableitung der Cotesschen Theoreme und teilte auch Differentialformeln für ebene Dreiecke mit, aber das Verdienst, aus den vielen in der sphärischen Trigonometrie möglichen Relationen die vier Hauptgleichungen

$$\begin{gathered}
da = \cos C db + \cos B dc + \sin B \sin c dA, \\
\sin B da - \cos c \sin A db = \sin c dA + \sin a \cos B dC, \\
\operatorname{ctg} a da - \operatorname{ctg} b db = \operatorname{ctg} A dA - \operatorname{ctg} B dB, \\
dA = \sin b \sin C da - \cos c dB - \cos b dC,
\end{gathered}$$

die man heute als Fehlergleichungen bezeichnet, ausgewählt und in dieser Form geschrieben zu haben[4]), gebührt dem auch sonst verdienten Jesuiten Roger Boscovich (1711—1787). Dieser war in Ragusa geboren, wurde 1740 Professor der Mathematik und Philosophie am Collegium Romanum, dann Professor in Pavia, dann Directeur de l'optique de la marine in Paris, kehrte aber 1783 nach Italien zurück, wo er in Mailand starb. Aus Boscovichs Formeln folgen

[1]) Mémoires de l'Académie de Paris 1741, p. 238 ff. [2]) Bode, Astronomisches Jahrbuch für 1793, Berlin 1790, p. 178—182. [3]) A. a. O., p. 95 bis 107. [4]) Opera IV, 1785, 4°, p. 316—394, wo er auch die entsprechenden Formeln für ebene Dreiecke angibt (p. 322).

alle anderen, weshalb es ziemlich überflüssig war, daß Cagnoli noch 1798 eine Zusammenstellung von 139 Proportionen angab[1]); allerdings sind unter diesen auch die Formeln für endliche Variationen enthalten.

In Beziehung zu diesen Betrachtungen stehen auch die Methoden, welche anzuwenden sind, wenn in trigonometrischen Rechnungen die Logarithmen der Sinus von Winkeln, die nahe an 90° liegen, oder die der Kosinus sehr kleiner Winkel vorkommen, oder wenn direkt Funktionen kleiner Winkel zu bestimmen sind. Israel Lyons (1739 bis 1775), Rechner beim Board of Longitude in London, schlug hierzu ein Verfahren ein[2]), das wir an einem von ihm gegebenen Beispiel erläutern wollen. Ist in dem bei B rechtwinkligen sphärischen Dreieck ABC $AB = c$ und $BC = a$ (klein gegen c) gegeben, und soll die Hypotenuse b berechnet werden, so setzt er $b = c + \zeta$, nimmt

$$\cos b = \cos a \cos c = \cos(c + \zeta) = \cos c - \sin c \sin \zeta - \cos c \operatorname{sinvers} \zeta$$

und erhält hieraus

$$\sin \zeta = \operatorname{ctg} c \operatorname{sinvers} a - \operatorname{ctg} c \operatorname{sinvers} \zeta.$$

Nun berechnet er mit alleiniger Benutzung des ersten Gliedes auf der rechten Seite einen Näherungswert für ζ und mit diesem dann als Korrektur das zweite Glied.

Anders verfuhren Lambert und Cagnoli, die für solche Fälle die Ersetzung der zu berechnenden Formeln durch andere gleichwertige, aber brauchbarere vorschlugen. Ist z. B. die Entfernung x zweier sehr nahe beieinander gelegener Örter auf der Erde oder zweier Sterne aus ihren Entfernungen vom Pol c und $\varkappa$ und dem Unterschied λ der Längen oder Rektaszensionen zu bestimmen, so ersetzt Lambert[3]) die Formel $\cos x = \cos c \cos \varkappa + \sin c \sin \varkappa \cos \lambda$ durch die gleichwertige $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\sin \frac{c - \varkappa^2}{2} + \sin c \sin \varkappa \sin \frac{\lambda^2}{2}}$, für die man, falls $c - \varkappa$ und λ wenig von 1 oder 2 Graden verschieden sind, die Näherungsformel $x = \sqrt{\lambda^2 \sin c \sin \varkappa + (c - \varkappa)^2}$ nehmen kann. Ähnlich verfuhr Cagnoli[4]), sprach aber das allgemein richtige Prinzip aus, daß man am sichersten rechnet, wenn man den gesuchten Winkel durch eine Tangente oder Kotangente bestimmt. So gebrauchte er z. B. für die Gleichung $\cos a = \frac{\cos b}{\cos c}$, im Falle b und c

[1]) Memorie della Società Italiana VIII, 1, p. 214—218, vorgelegt 1798, und Trigonometria, 2. Aufl., p. 360—378. [2]) P. T. LXV, 2, 1775, p. 470—484.
[3]) Bodes Astronomisches Jahrbuch für 1778 (erschienen 1776), p. 205—210.
[4]) Trigonometria, 1. Aufl. p. 250, 2. Aufl. p. 296.

nahezu gleich sind, die aus den Neperschen Analogien entstehende Formel $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{a+c}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{a-c}{2}}$.

Übrigens bemerkte Lambert auch, daß man sich zur Bestimmung der Sinus, Kosinus, Tangenten und Sekanten sehr kleiner Winkel der gewöhnlichen Tafeln der natürlichen goniometrischen Funktionen bedienen könne[1]), wenn man die Kotangenten und Kosekanten zu Hilfe nimmt. Will man z. B. $\sin 1'$ und $\cos 1'$ berechnen, so setzt man $\sin 1' = \frac{1}{\operatorname{cosec} 1'}$, und

$$\cos 1' = \sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec} 1'^2}} = 1 - \frac{1}{2\operatorname{cosec} 1'^2} - \frac{1}{8\operatorname{cosec} 1'^4} - \cdots.$$

Hat man dann $\operatorname{cosec} 1'$ auf 5 Dezimalen, so bekommt man hieraus $\sin 1'$ und mit Hilfe der Reihe auch $\cos 1'$ bis auf 12 Dezimalen genau.

Auch Kästner hat Formeln mitgeteilt, welche zur Berechnung sphärischer Dreiecke mit kleinen oder nahezu gleichen Stücken dienen[2]), und in dem Tafelwerk von Gardiner[3]), auf das wir unten noch zu sprechen kommen, finden sich bereits solche Formeln zusammengestellt.

Dem Gedanken, zur Berechnung der Funktionen eines sehr kleinen Winkels zu Reihenentwicklungen zu greifen, entsprang auch eine noch heute viel verwendete Regel zur Bestimmung von $\log\sin x$ und $\log\operatorname{tg} x$, die der Greenwicher Astronom Nevil Maskelyne (1732—1811) herleitete und die seinen Namen erhalten hat.[4]) Vernachlässigt man in den Reihen für $\sin x$ und $\cos x$ die Glieder vom 4. Grade an, so erhält man $\sin x \sim x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)$, $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$, oder da $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ innerhalb derselben Genauigkeitsgrenze $\sim 1 - \frac{x^2}{6}$ ist,

$$\sin x \sim x(\cos x)^{\frac{1}{3}}$$

und hieraus $\log\sin x \sim \log x + \frac{1}{3}\log\cos x$; genau ebenso folgt für

$$\log\operatorname{tg} x \sim \log x - \frac{2}{3}\log\cos x.$$

Die Regel ist, wie man leicht sieht, bequem zur Berechnung der

[1]) Bodes Astronomisches Jahrbuch für 1778 (publiziert 1776). p. 209.
[2]) Acta Acad. Elect. Moguntinae 1778—79 (erschienen 1780), p. 181—190.
[3]) W. Gardiner, Tables de Logarithmes; Ausgabe von Pezenas, Dumas und Blanchard, 1770, 4°. [4]) Maskelyne hat dieselbe mitgeteilt in der Einleitung zu seiner Ausgabe der Tables of Logarithms von Michael Taylor, London 1792, 2°, Problem II, p. 21—22, ohne eine Begründung zu geben. Diese gab erst 1804 Tralles, Abhandl. der Berliner Akademie, 1804—1811, p 17.

Logarithmen von $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$ für Winkel bis zu $5^0\,33'$, wenn in einer Logarithmentafel die Werte von

$$\frac{1}{3}\log\cos x = S \quad \text{und} \quad -\frac{2}{3}\log\cos x = T$$

notiert sind, was zum erstenmal in der 7stelligen Tafel von Callet 1795 der Fall war. Von ihr aus gingen die Zahlen S und T in die neuen vollständigen Logarithmentafeln über.

Mit einigen Worten sei auch noch auf die Näherungsformeln hingewiesen, welche infolge der Verfeinerung der astronomischen Beobachtungen und der geodätischen Messungen notwendig wurden. Man hatte sphärische Dreiecke mit sehr kleinen Winkeln lange Zeit wie ebene Dreiecke behandelt, bis J. L. Lalande (III², S. 500) zuerst 1763 darauf aufmerksam machte, daß dies nicht immer statthaft sei, ohne sich erheblichen Fehlern auszusetzen[1]), und durch eine allerdings nicht einwandfreie Rechnung fand, daß man dem ebenen Winkel B des bei A rechtwinkligen ΔABC die in Sekunden ausgedrückte Größe $\frac{1}{24} BC^2 \sin 2B(3 - \cos 2B)$ hinzufügen muß, um den entsprechenden sphärischen Winkel zu erhalten. Auch ergab sich ihm der Unterschied zwischen der geradlinigen und der sphärischen Hypotenuse zu $\frac{1}{8}\frac{AB^2\cdot AC^2}{BC}$.

Weit praktischer aber griff Adrien Marie Legendre die Sache an, als an ihn bei Gelegenheit der Feststellung der gegenseitigen Lage der Greenwicher und Pariser Sternwarten[2]) die Notwendigkeit herantrat, verhältnismäßig kleine Dreiecke auf der Erdkugel zu behandeln. In seiner berühmten Abhandlung „Sur les opérations trigonométriques, dont les résultats dépendent de la figure de la terre“ 1787[3]) sprach er den nach ihm benannten Satz aus[4]), daß ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten gegen den Kugelradius klein sind, wie ein ebenes mit denselben Seiten berechnet werden kann, wenn man von seinen Winkeln je den dritten Teil des sphärischen Exzesses in Abrechnung bringt. Lagrange erkannte den Vorteil und die Notwendigkeit einer solchen Berechnung darin, daß die vollen trigonometrischen Formeln für Dreiecke mit so kleinen Seiten, wie sie

---

¹) Mémoires de l'Acad. de Paris 1763, p. 347—353. ²) 1787 wurde auf Betreiben Cassinis de Thury eine Kommission von französischen und englischen Gelehrten zur Ausführung dieser Arbeit gewählt, welcher auch Legendre angehörte. ³) Mémoires de l'Acad. de Paris 1787, p. 352 ff. ⁴) A. a. O., p. 358.

hier in Betracht kommen, gar keine exakte Rechnung gestatten, und gab[1]) einen kurzen und sehr übersichtlichen Beweis des schönen Theorems.

Das Lehrgebäude der Trigonometrie. Versuche einer möglichst einfachen Begründung desselben.

Obwohl uns das Vorhergehende ein Bild von der theoretischen Entwicklung der Trigonometrie in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gab, dürfte es doch nicht überflüssig erscheinen, sich die Frage vorzulegen, wie rasch und in welchem Umfang die allmählich angewachsene Summe von neuen Kenntnissen in der Lehrbücherliteratur Verwertung fand, da gerade sie zur Ausbreitung der Wissenschaft in weiteren Kreisen dient und dadurch ihrerseits wieder auf das Wachstum jener befruchtend einwirkt. Wir wollen daher diese Frage durch den folgenden kurzen Überblick zu beantworten suchen.

In allen, auch den gelehrtesten Kompendien jener Zeit, mit einziger Ausnahme von Klügels Analytischer Trigonometrie, wurden die trigonometrischen Funktionen noch als Linien definiert, und dementsprechend wurde auch der Sinus totus oder Radius r mitgeführt. Nur zur Vereinfachung der Formeln setzten ihn manche Schriftsteller, wie Karsten[2]), Kästner und Cagnoli gleich 1. Eulers Bezeichnungsweise der Funktionen dagegen fand ziemlich rasche und umfassende Verbreitung, während der alte Gebrauch, die Lehrsätze in Proportionen zu schreiben, mit großer Zähigkeit festgehalten wurde.[3])

Die Aufstellung der Funktionen für alle 4 Quadranten wurde seit der Veröffentlichung von Eulers „Introductio" allgemein als notwendig erkannt, geschah aber immer noch, selbst für die Tangenten und Kotangenten, an der Figur, wodurch Irrtümer in den Zeichen nicht immer vermieden wurden. Durch die Beachtung der längst bekannten Gleichung $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, oder wie sie damals stets geschrieben wurde: $\operatorname{tg}\alpha : r = \sin\alpha : \cos\alpha$, brach sich jedoch die Erkenntnis des Richtigen allmählich Bahn, so daß man a posteriori eine Übereinstimmung mit der geometrischen Interpretation suchen konnte[4]).

---

[1]) De quelques problèmes relatifs aux triangles sphériques avec une analyse complète de ces triangles. Journal de l'École Polyt., 6. cah., 1798/99, p. 29? bis 296. [2]) Wenceslaus Johann Gustav Karsten hat zwei hier einschlägige Werke geschrieben: Mathesis theoretica elementaris atque sublimior, Rostock 1760, 8°, und Lehrbegriff der gesammten Mathematik, 2. Teil, 2. Aufl., Greifswald 1786, 8°. [3]) Vgl. z. B. Legendres Éléments de Géométrie noch in der 14. Aufl. von 1832. [4]) Segner, Elementa Arithmeticae Geometriae et Calculi

Auch die Funktionen negativer Argumente wurden wenigstens in den umfassenderen Werken, wie bei Karsten und Legendre, in den Kreis der Betrachtung gezogen und richtig bestimmt. Die Ableitung der goniometrischen Formeln wurde trotz Euler und Klügel (vgl. S. 413) immer noch einzeln geometrisch vollzogen, das vollständigste Formelsystem hat wohl Cagnoli aufgestellt. Dagegen beschränkte man sich in den größeren Kompendien[1]) nicht mehr nur auf die Ableitung der elementaren Formeln, sondern man nahm auch aus der „Introductio" die trigonometrischen und zyklometrischen Reihen und den Satz von Moivre in sie auf, ja selbst die Teilungsgleichungen wurden zuweilen mit in den Kreis der Betrachtung gezogen.

Die Berechnung der ebenen Dreiecke hatte durch den Gebrauch der Formeln wohl etwas an Leichtigkeit gewonnen, aber infolge der beständigen Beibehaltung des Sinus totus ihre Vollendung noch nicht erreicht[2]), wozu noch der Umstand beitrug, daß Eulers praktische Bezeichnungsweise der Seiten und Winkel des Dreiecks von den meisten seiner Zeitgenossen, ja selbst von Cagnoli und Louis Bertrand in der ebenen Trigonometrie so wenig wie in der sphärischen angewendet wurde; eine rühmliche Ausnahme hiervon machten Kästner[3]) und Klügel. Daß die sämtlichen Sätze zur Berechnung der ebenen Dreiecke, wie wir sie jetzt benützen, damals bereits in Gebrauch waren, braucht kaum bemerkt zu werden; in ihrer Gesamtheit, selbst mit Einschluß der sogenannten Mollweideschen Gleichungen[4]) zusammengestellt und in unserer Art abgeleitet finden wir sie jedoch nur in Cagnolis Trigonometrie.

Geometrici in neuer Auflage Halae Magdeb. 1756; Abbé Sauri. Cours complet de mathématiques, t. I, Paris 1774, 8°, und Institutions mathématiques, Paris 1786, 4. Aufl., p. 206, wo ein kurzer Auszug der Trigonometrie aus dem Cours steht; P. C. Scherffer (S. J.), Institutionum geometricarum pars sec. sive Trigonometria plana. Vindob. 1770, 4°. Deutsche Übersetzung von einem Ungenannten, Halle 1782. Scherffer bemerkt, wie später auch Cagnoli, daß beim Durchgang durch Null und durch Unendlich ein Zeichenwechsel eintreten muß.

[1]) So nahm z. B. Louis Bertrand, ein Schüler Eulers, in sein zweibändiges Werk „Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques. Genève, II, 1778, 4°", alle Entdeckungen Eulers, die sich auf die Trigonometrie beziehen, auf. Ähnlich verfuhren Mauduit in seinen Principes de l'Astronomie sphérique ou traité complet de trigonométrie sphérique", Paris 1765, 8°, und Karsten in den o. a. Werken. [2]) Vgl. La Caille, Leçons élémentaires de mathématiques, Paris 1764, und Sauri in der schon angeführten Schrift, Étienne Bézout in seinem Cours de mathématiques, Paris, pars II, 1772, usw. [3]) In den späteren Auflagen seiner „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie" sowie in seinen „Geometrischen Abhandlungen", 1790—1791. [4]) Schon in der 1. Aufl. von 1786 stehen diese Gleichungen aus dem Sinussatze abgeleitet p. 122, übrigens finden

Bezüglich der Behandlung der sphärischen Trigonometrie muß man die graphischen und rechnerischen Methoden auseinanderhalten. Die ersteren, die sich in der alten Astronomie schon einer großen Beliebtheit erfreut hatten[1], waren durch die Trigonometriae sphaericae constructio, Romae 1737, 4°, des uns schon bekannten Boscovich wieder neuerdings in Gebrauch gekommen. Sie beruhten in der Hauptsache auf der Orthogonalprojektion und wurden zur näherungsweisen Auflösung der sphärischen Aufgaben, vereinzelt, wie bei Mauduit, auch zur Ableitung der trigonometrischen Hauptsätze verwendet[2]. Antoine Remi Mauduit (1731—1815) war zuerst Professor der Mathematik an der École des ponts et chaussées, dann Professor der Geometrie am Collège de France in Paris und hat in seinen Principes d'astronomie sphérique ein reichhaltiges Werk geschaffen. Die ausführlichste Schrift aber, welche ohne Kenntnis der geschichtlichen Entwicklung der Jahrhunderte alten Methode alles längst Bekannte wieder neu fand und in organischen Zusammenhang brachte, war eine Schrift[3] des Mathematiklehrers zu Montauban Siméon Fagon Valette (1719—1801) aus dem Jahre 1757, sie baut unmittelbar auf Boscovich auf, der jedoch nirgends genannt wird. Auch der Abbé Tommaso Valperga di Caluso (1737—1815), der erst Offizier auf der Flotte des Malteser-Ordens, dann Priester in Neapel und Turin war, woselbst er Professor der griechischen und orientalischen Sprachen und Direktor der Sternwarte wurde, hat noch 1786 eine ähnliche Arbeit, allerdings nicht in Form eines Lehrbuches veröffentlicht[4].

Die weit wichtigere rechnerische Behandlung der sphärischen Trigonometrie, welche die Lehrbücher fast ausschließlich brachten, wurde damals im Gegensatze zu Eulers Methode, die er in seiner Abhandlung von 1779 befolgte, in der Weise vorgenommen, daß zuerst die Sätze für das rechtwinklige und dann jene für das schiefwinklige Dreieck als Folgerungen aus ersteren gebracht wurden. So leiten z. B. Segner, dessen vielbefolgte Bezeichnungsweise aus der nachfolgenden Figur 24 erhellt, und ebenso Sauri und Boscovich sowie viele andere auf diese Weise die folgenden fünf Gleichungen ab:

---

sie sich auch in Mauduits o. a. Werke p. 83 und 84 ohne Beweis aus den Neperschen Analogien der sphärischen Trigonometrie geschlossen.

[1] A. v. Braunmühl, Gesch. d. Trig. I, Kap. 2, § 1, Kap. 3, § 2, Kap. 4, § 2, Kap. 7, § 1, Kap. 8, § 6. Ferner Zeuthen, Bibl. mathem. 1900, p. 20—27. [2] A. a. O., p. 65 ff. [3] Trigonométrie sphérique résolue par le moyen de la Règle et du Compas, Bourges 1757, 8°. [4] De l'utilité des projections orthographiques. Mémoires de l'Acad. de Turin II, 1786, p. 231—327.

$$1)\ \sin H : \sin h = \sin m : \sin M; \qquad 2)\ \sin B : \sin b = \operatorname{ctg} M : \operatorname{ctg} m;$$
$$3)\ \sin N : \sin n = \cos M : \cos m; \qquad 4)\ \cos N : \cos n = \operatorname{ctg} H : \operatorname{ctg} h;$$
$$5)\ \cos B : \cos b = \cos H : \cos h$$

und fügen ihnen noch die beiden durch korrespondierende Addition und Subtraktion aus 3) und 5) hervorgehenden Formeln:

$$\operatorname{ctg} \frac{N+n}{2} : \operatorname{tg} \frac{M+m}{2} = \operatorname{tg} \frac{m-M}{2} : \operatorname{tg} \frac{N-n}{2},$$
$$\operatorname{tg} \frac{B+b}{2} : \operatorname{tg} \frac{H+h}{2} = \operatorname{tg} \frac{H-h}{2} : \operatorname{tg} \frac{B-b}{2}$$

hinzu[1]). Die Methode, mit diesen 7 Formeln alle Dreiecksaufgaben zu behandeln, war damals sehr verbreitet, wenn auch manche Autoren noch nebenbei die allgemeinen Formeln für das schiefwinklige Dreieck entwickelten, indem sie die Hauptsätze aus dem Dreikant ableiteten und aus diesen dann die übrigen durch Rechnung gewannen. Andere wieder, wie Cagnoli, Scherffer, Karsten und Mauduit stellten sich als Grundlage ihrer Formeln den Kosinus-, den Sinussatz und die Kotangentenformel mit Hilfe der Sätze des rechtwinkligen Dreiecks her. Auch die Neperschen Analogien kommen bei den genannten Autoren vor, die auch ihre praktische Verwendung auseinandersetzten. Dagegen wird die Methode, das ganze Formelsystem durch Anwendung des Supplementardreiecks zu verdoppeln, merkwürdigerweise nirgends ausschließlich angewendet.

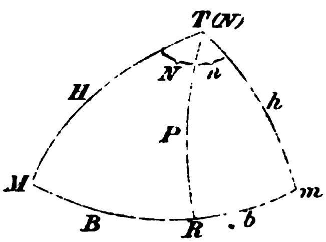


Fig. 21.

Wenn wir im vorhergehenden die hauptsächlichsten Methoden kennen gelernt haben, nach denen die Trigonometrie für den Unterricht entwickelt wurde, so müssen wir noch der am Ende des Jahrhunderts auftretenden Versuche gedenken, welche dahin zielten, das ganze trigonometrische Lehrgebäude auf die einfachstmögliche Grundlage zu stützen. Ohne diese bestimmte Absicht auszusprechen, leitete Kästner[2]) die Hauptformeln der ebenen Trigonometrie rechnerisch aus dem Sinussatze und der Winkelbeziehung $A + B + C = 180^0$ ab, und noch viel früher[3]) hatte der Oberberg-

[1]) Diese waren schon im 17. Jahrhundert von Thomas Baker (1625 bis 1690), Pfarrer in Bishop-Nymmet in Devonshire, mitgeteilt worden. Siehe A. v. Braunmühl, Gesch. d. Trig. II, p 48. [2]) Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, z. B. 3. Aufl. 1774, p. 418; 4. Aufl. 1786, p. 505. Kästner wollte eigentlich nur eine „Vergleichung der Seiten des Dreiecks und eines seiner Winkel" finden [3]) A. v. Braunmühl, Gesch. der Trig. II, p 97—100. Oppels Schrift heißt: Analysis triangulorum 1746, 2°.

hauptmann Friedrich Wilhelm Oppel in Freiberg (1720—1769) gezeigt, daß sich aus der Kenntnis des Sinus- und Kosinussatzes die sämtlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie gewinnen lassen. Damit nicht zufrieden suchte De Gua de Malves (III², S. 576—577) zu zeigen[1]), daß die Kosinusformel allein zu diesem Aufbau genüge. Diesen Gedanken, den übrigens, wie De Gua selbst bemerkt, schon der Petersburger Akademiker F. C. Maier (III², S. 558—559) ausgesprochen hatte, führte er in der Abhandlung „Trigonométrie sphérique déduite très brièvement et complètement de la seule solution algébrique du plus simple des ses problèmes généraux etc.“ 1783 aus. Dabei hatte er die unglückliche Idee für seine neu aufgebaute Trigonometrie auch eine neue Funktionsbezeichnung einzuführen, die durch ihre Schwerfälligkeit die Lektüre seiner sonst verdienstlichen Abhandlung sehr unangenehm macht. Da sie jedoch keine Nachahmung fand, gehen wir auf dieselbe nicht weiter ein. De Gua leitet nun zunächst den Kosinussatz

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

geometrisch ab, indem er sich derselben Figur bedient, die wir bei F. Blake (S. 406) antrafen, und berechnet aus dieser Formel

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 + 2 \cos a \cos b \cos c} : (\sin b \sin c).$$

Da man aus der Symmetrie dieser Form erkennt, daß $\sin B$ und $\sin C$ denselben Zähler erhalten müssen, so folgt unmittelbar

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{1}{\sin b \sin c} : \frac{1}{\sin c \sin a} : \frac{1}{\sin a \sin b} = \sin a : \sin b : \sin c.$$

also der Sinussatz. Durch sehr umfangreiche Rechnungen ergeben sich dann der Kosinussatz für die Winkel, die Kotangentenformel und noch 10 andere recht komplizierte Gleichungen, welche zu praktischer Verwendung zum Teil sehr wenig brauchbar sind.

Die abschreckenden Rechnungen De Guas veranlaßten Lagrange in der schon erwähnten Abhandlung „De quelques Problèmes relatifs aux triangles sphériques avec une Analyse complète de ces triangles“[2]) eine einfachere Ableitung zu geben. Kosinus- und Sinussatz erhält er wie De Gua, indem er aber dann den ersteren für die Seiten a und c ansetzt, mit Hilfe der zweiten dieser Formeln $\cos c$ aus der ersten eliminiert und $\sin c = \sin a \sin C : \sin A$ einführt, ergibt sich ihm als dritte Gleichung $\operatorname{ctg} a \sin b = \operatorname{ctg} A \sin C + \cos b \cos C$. Vor der

[1]) Mémoires de l'Acad de Paris 1786, p 291—343, vorgelegt 1783.
[2]) Journal de l'École Polytechnique, cahier 6, 1798/99.

eben erwähnten Einführung von $\sin c$ hatte sich Eulers Formel $\cos a \sin b = \cos b \sin a \cos C + \sin c \cos A$ ergeben; indem er nun in dieser a mit b und folglich auch A mit B vertauschte und den hierdurch erhaltenen Ausdruck für $\cos b \sin a$ in sie einführte, ergab sich mit Hilfe der Beziehung $\sin c = \sin b \sin C : \sin B$ leicht der Kosinussatz für die Winkel als vierte Hauptgleichung. Obwohl diese Formeln genügen, wie Lagrange sagt, um alle auf sphärische Dreiecke bezüglichen Aufgaben zu lösen, so leitet er dennoch aus ihnen die bekannten 6 Gleichungen für das rechtwinklige Dreieck sowie die Sätze zur Bestimmung der Seiten aus den Winkeln und der Winkel aus den Seiten ab und verschafft sich die Neperschen Analogien, indem er in beiden Fällen auch das Supplementardreieck verwendet.

Da Lagranges Arbeit unmittelbar an De Guas Gedanken anknüpfte, mußten wir ihre Besprechung gleich hier anfügen und können erst nachträglich noch auf eine Abhandlung des uns schon bekannten Schubert hinweisen, die schon 1796 erschienen war[1]) und denselben Gegenstand behandelte, ohne jedoch jener Lagranges an Übersichtlichkeit, Einfachheit und Eleganz gleichzukommen. Friedrich Theodor Schubert (1758—1825), geboren zu Helmstädt, begann seine Tätigkeit als Hauslehrer, wurde dann Revisor des hapsalschen Kreises in Esthland, beschäftigte sich aber hauptsächlich mit geographischen und astronomischen Studien, die ihm die Pforten der Akademie in Petersburg eröffneten, woselbst er Aufseher der Bibliothek und des Münzkabinetts dieser Anstalt wurde, Stellungen, die er bis zu seinem Tode inne hatte. Mit den Schriften der Alten wohlvertraut kam er auf den Gedanken, aus dem Satze des Menelaus[2]), mit dem schon Ptolemäus die sphärische Trigonometrie behandelt hatte, das ganze bekannte Formelsystem der Trigonometrie abzuleiten. Zunächst gewann er aus diesem Theorem die 6 Formeln für die rechtwinkligen sphärischen Dreiecke[3]), dann den Sinussatz und durch beständige Anwendung der gefundenen Formeln auf die Figur jenes Transversalensatzes von Menelaus die beiden Kosinusregeln, aus denen sich dann als einzige noch notwendige Regeln die Formel

$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin A \sin c}{\sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A}$$

und ihre polare ergaben. Auch dieses schöne System gründet die ganze sphärische Trigonometrie auf einen einzigen Satz, die hierzu notwendigen Rechnungen stehen aber jenen Lagranges an Einfachheit bedeutend nach. Beachtung hat dasselbe wenig gefunden.

---

[1]) Trigonometria sphaerica e Ptolemaeo. Vorgelegt am 22. Dezember 1796, publiziert 1801 in Nova Acta Acad Petrop. XII, p. 165—175 [2]) Vgl. dieses Werk I², p. 386. [3]) Vgl. I², p. 392—393.

Tetragonometrie, Polygonometrie und Polyedrometrie.

Nachdem infolge der Ausbildung der Formelsprache und der dadurch gewonnenen Geschmeidigkeit der analytischen Rechnung die Behandlung aller auf ebene Dreiecke bezüglichen Fragen eine Leichtigkeit geworden war, regte sich der Wunsch, auch für unregelmäßige Vierecke und allgemeine Polygone, deren typische Formen schon Stevin und Girard unterschieden hatten[1]), Formeln zu besitzen, welche eine Berechnung derselben direkt, d. h. ohne vorherige Zerschneidung in Dreiecke gestatten würden. Lambert war der erste, der in seiner „Anlage zur Tetragonometrie"[2]) diesen Gedanken verfolgte, um überflüssigen Rechnungen zu begegnen. Er gab ohne Beweis die vier Beziehungen an, welche zwischen je 6 Stücken eines ebenen Vierecks bestehen müssen. Da man jede von diesen nach einem der sechs Stücke auflösen kann, so ergeben sich 24 Fälle, von denen jedoch nur 14 verschieden sind, da mehrere Auflösungen dasselbe sagen, und drei Winkel bereits den vierten bestimmen, Umstände, die Lambert nicht berücksichtigt hat. Nimmt man noch eine Diagonale hinzu, so vermehren sich die möglichen Fälle, deren unvollständige Abzählung durch Lambert später Björnsen und Lexell ergänzten, während Johann Tobias Mayer in seine Inauguraldissertation von 1773[3]) Lamberts Irrtümer herübernahm. Der schon früher genannte J. T. Mayer war als Sohn des berühmten Astronomen gleichen Namens 1752 in Göttingen geboren, studierte und habilitierte sich daselbst, wurde dann Professor der Mathematik und Physik in Altdorf und Erlangen und starb als Professor der Physik in Göttingen 1830. In der genannten Schrift bemühte er sich hauptsächlich, logarithmisch brauchbare Gleichungen in der Tetragonometrie zu erhalten, was seine, wenn auch mangelhafte Abhandlung immer noch vorteilhaft von dem Buche unterscheidet, das der Däne Stephan Björnsen (1730—1798), Kalkulator der dänischen Landesvermessung, 1780 herausgab[4]). Dasselbe ebenfalls an Lambert anschließend bietet wenig elegante Formeln, wenn es auch Mayers Schrift an Vollständigkeit übertrifft, indem es noch die Fälle, welche mit Hinzunahme einer Diagonale entstehen, analytisch behandelt, geometrische Konstruktionen ableitet und die auftretenden Doppelwerte erklärt.

Der erste, welcher den geringen Wert solcher Detailuntersuchungen

---

[1]) Vgl. dieses Werk II², p. 665—666 und Bibliotheca math. 1900, I, p. 271. [2]) Beiträge zum Gebrauche der Mathematik II, 1770, p. 175—184. [3]) Tetragonometriae specimen I. Göttingen 1773. [4]) Introductio in Tetragonometriam ad mentem Lambert. Hauniae 1780, 8°.

erkennend eine **allgemeine** Methode zur Berechnung beliebiger Polygone entwickelte, war der schon genannte Petersburger Mathematiker **Lexell**. **Andreas Johann Lexell**, 1740 zu Abo in Finland als Sohn des dortigen Bürgermeisters geboren, kam 1766 auf Grund einer Abhandlung über die Auffindung von Kurven aus den Eigenschaften ihrer Krümmung als Lektor an die Universität und als Professor an die Marineschule in Upsala. Als er 1768 an die Petersburger Akademie eine Abhandlung einsandte, in welcher er eine neue Methode zur Integration gewisser Differentialgleichungen auseinandersetzte, wurde **Euler** auf ihn aufmerksam und veranlaßte sofort seine Berufung nach Petersburg, der er auch Folge leistete und sich als **Eulers** treuer Mitarbeiter namentlich an dessen neuer Mondtheorie auszeichnete. Als der letztere 1783 starb, erhielt **Lexell** seine Stelle in der Akademie, in die er schon früher aufgenommen worden war, hatte sie jedoch nur mehr ein Jahr inne, indem er schon 1784 seinem Meister im Tode nachfolgte.

Lexell hat der Polygonometrie zwei Abhandlungen gewidmet, in denen er diesen Zweig der Trigonometrie eigentlich erst schuf[1]). Er löste darin die Aufgabe aus $2n-3$ Stücken eines n Ecks, die dasselbe bestimmen, die übrigen zu berechnen, indem er das Polygon auf zwei zueinander senkrechte Linien, wovon er die eine mit einer Seite zusammenfallen ließ, orthogonal projizierte. Die beiden hierdurch sich ergebenden Gleichungen sind in seiner Schreibweise:

$$a \sin\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots$$
$$+ l \sin(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda) = 0,$$
$$a \cos\alpha + b \cos(\alpha+\beta) + c \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cdots$$
$$+ l \cos(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\lambda) = 0,$$

wobei $a, b, c, \ldots l$ die Seitenlängen und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ die Außenwinkel des Polygons bedeuten, und die Beziehung besteht:

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda = 360^0.$$

Die beiden Gleichungen werden auch noch dadurch verallgemeinert, daß die Projektion des Polygons auf zwei beliebige sich in einer Ecke schneidende rechtwinklige Achsen vorgenommen wird; auch wird ihre allgemeine Gültigkeit für überschlagene Polygone und solche mit einspringenden Ecken an Beispielen dargetan, wobei nur zu beachten ist, daß die Summe der Außenwinkel in solchen Fällen ein Vielfaches von 2π beträgt.

Als spezielle Anwendungen zeigt **Lexell**, wie sich aus seinen

[1]) De resolutione polygonorum rectilineorum. Novi Comm. Acad. Petrop. XIX, 1774, p. 184–233 und XX. 1775, p. 80—122, publiziert 1775, resp. 1776.

Gleichungen die Grundformeln der Trigonometrie und der Tetragonometrie ergeben und fügt noch die entsprechenden für die Fünf- und Sechsecke hinzu. Diese Detailuntersuchungen, namentlich insoweit sie sich auf das Viereck beziehen, werden dann in der zweiten Abhandlung noch weiter ausgearbeitet, wobei eine vollständige Klassifizierung aller möglichen Fälle, auch jener, die mit Hereinziehung einer und zweier Diagonalen entstehen, vorgenommen wird.

Auf einer anderen Grundlage hat Simon L'Huilier eine Polygonometrie aufgebaut[1]). An ihre Spitze stellte er folgenden Satz: „Läßt man eine Seite des Polygons weg, bildet aus allen anderen die Produkte aus je zweien und multipliziert jedes Produkt mit dem Sinus des von den betreffenden Seiten gebildeten Winkels, so ist die Summe dieser $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Produkte gleich dem doppelten Inhalt des Polygons". Da man nun immer andere Seiten des Polygons weglassen kann, so erhält man n Ausdrücke für den Polygonsinhalt, die einander gleichgesetzt die fundamentalen Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des Polygons liefern. Außer dieser Formelgruppe verschafft sich L'Huilier aber noch zwei Fundamentalformeln, die identisch sind mit Lexells Projektionsformeln[2]), indem er den Polygonsinhalt einmal in der obigen Weise und dann als Summe eines durch eine Diagonale abgeschnittenen Eckdreiecks und des übrigbleibenden Polygons von $n-1$ Seiten bildet. Den übrigen Inhalt des Buches machen allgemeine und spezielle Anwendungen dieser Sätze aus.

Außerdem hat L'Huilier über seine Vorgänger hinausgehend noch in einer dem Institut national 1799 eingereichten Abhandlung „Théorèmes de Polyedrométrie", Paris 1805, seine Sätze auf Raumpolygone ausgedehnt und den Hauptsatz der Polyedrometrie aufgestellt, daß jede Seitenfläche eines Polyeders gleich der Summe der übrigen ist, wenn man jede mit dem Kosinus des Winkels multipliziert, den sie mit der ersten bildet. Doch wurden die notwendigen Bedingungen, unter denen allein dieser Satz gültig ist, weder von L'Huilier noch von Carnot[3]), der sich bald nach ihm mit Sätzen der Polyedrometrie und der Raumpolygone beschäftigte, angegeben.

Die Hauptsätze der Polygonometrie fanden in den Lehrbüchern merkwürdig schnell Eingang, so in Prändels vielbenutzter „Geometrie und ebene Trigonometrie", München 1793, die einen eigenen Abschnitt darüber enthält.

---

[1]) Polygonométrie ou de la mésure des figures rectilignes etc., Genève 1789, 4°. Es scheint dies das erste Lehrbuch der Polygonometrie zu sein. Mascheronis „Metodo di misurare i poligoni", Pavia 1787, konnten wir nicht einsehen. [2]) Dieselben stehen a. a. O. p. 18 und 20. [3]) Géométrie de position, 1803, p. 306

Zum Schlusse dieses Kapitels möge noch auf spezielle Untersuchungen über Vierecke und Polygone hingewiesen werden, mit denen sich Nik. Fuß am Ende des Jahrhunderts beschäftigte. In einer ersten Abhandlung von 1794[1]) löste er auf trigonometrischem Wege Aufgaben, welche sich darauf bezogen, aus gewissen gegebenen Stücken ein Viereck zu konstruieren, dem man einen Kreis umschreiben und einen anderen einschreiben kann und berechnete die Radien dieser Kreise, den Abstand ihrer Mittelpunkte und die noch fehlenden Stücke solcher Vierecke. In der zweiten Abhandlung von 1798[2]) dehnte er diese Untersuchungen auf symmetrisch irreguläre Polygone aus, womit er solche Polygone bezeichnete, denen man einen Kreis um- und einen anderen einschreiben kann und die so beschaffen sind, daß sie durch den gemeinsamen Durchmesser dieser beiden Kreise in zwei kongruente Hälften geteilt werden[3]). Auch hier werden alle Einzelaufgaben trigonometrisch behandelt und die Konstruktionen aus den Formeln abgeleitet. Der Zielpunkt der Arbeit ist die Lösung des allgemeinen Problems: einem gegebenen Kreis ein n-Eck einzuschreiben, dem selbst wieder ein Kreis eingeschrieben werden kann. Direkt gelöst wurde jedoch diese Aufgabe nur bis zum 8-Eck einschließlich, indem man, wie er sagte, hieraus bereits ersehen könne, wie man bei höherer Eckenzahl verfahren müsse.

Trigonometrische und andere Tafeln. Zyklometrie. Trigonometrische Reihen.

Nachdem bereits Isaak Newton auf die Benutzung der unendlichen Reihen zur Berechnung logarithmisch-trigonometrischer Tabellen hingewiesen, und der unermüdliche Abraham Sharp[4]) zu Beginn des 18. Jahrhunderts mit ihrer Hilfe darauf bezügliche Rechnungen in großer Zahl ausgeführt hatte, wurden die letzteren von Gardiner in einer Neuauflage von Sherwins Logarithmentafel 1741 publiziert. Die zahlreichen Auflagen dieser zuerst 1705 erschienenen Mathematical tables von Sherwin, von denen Gardiners weitere Ausgabe von 1742 die korrekteste sein soll[5]), laufen bis 1771 fort, wo die fünfte

---

[1]) Nova Acta Acad. Petrop. 1792, X (erschienen 1797), p. 103—125.
[2]) Ebenda, 1795/96, XIII (erschienen 1802), p. 166—189 [3]) J. Steiner stellte (Journal für Math. und Phys. II, 1827, p. 96 und 289) die Relation zwischen den Radien der erwähnten Kreise und der Distanz ihrer Mittelpunkte für das Fünf-, Sechs- und Achteck auf, C. G. Jacobi aber wies (ebenda, III, p. 376) nach, daß diese Formeln mit den von Fuß gegebenen zusammenstimmen müssen, da dieser ohne es zu bemerken, den allgemeinsten Fall bereits behandelt hatte. [4]) Über ihn vgl. dieses Werk, III[2], S. 86. [5]) Tables of Logarithms for all numbers from 1 to 102100, and for the Sines and Tangents etc., London 1742.

Auflage derselben erschien, und enthalten die Briggschen Logarithmen aller Zahlen bis 99 und die Logarithmen der Primzahlen von 100 bis 1097 auf 61 Stellen nach Sharps Rechnungen[1]) sowie siebenstellige Logarithmen aller Zahlen bis 1000 und von 10000 bis 101000. Außerdem finden sich darin Tafeln für die Sinus, Tangenten, Sekanten und Sinus versus und ihrer Logarithmen für alle Bogenminuten ebenfalls auf 7 Stellen. Eine Neuauflage von Gardiners Tafelwerk in französischer Sprache wurde 1770 von dem Jesuiten Esprit Pezenas (1692—1776), Direktor der Sternwarte in Avignon, besorgt, der hierzu die von Gabriel Mouton (vgl. III[2], S. 77) mit dessen Differenzenmethode[2]) berechneten Zahlen benutzte, ohne jedoch seine Tafeln aller Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für die Sekunden der ersten und letzten 4 Grade zu veröffentlichen. Lalande, der dies lebhaft bedauerte, setzte in einer Abhandlung von 1761[3]) ein Interpolationsverfahren zur Berechnung solcher Tafeln auseinander und veranstaltete 1781 und noch später Neuausgaben der 1760 zum erstenmal erschienenen Tables des Logarithmes pour les Sinus, Tangentes etc. von Lacaille. Diese Tafeln waren wegen ihrer Handlichkeit (Duodezformat) und Exaktheit sehr beliebt und blieben langezeit im Gebrauch; 1832 wurden sie noch einmal von Köhler herausgegeben[4]).

Eine der wichtigsten Tafelsammlungen, die in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts erschienen, enthielten Lamberts „Zusätze zu den logarithmisch trigonometrischen Tabellen zur Erleichterung und Abkürzung der bei Anwendung der Mathematik vorfallenden Berechnungen", Berlin 1770, 8°. Diese auf eine Anregung Lagranges entstandene Tafelsammlung[5]) wurde 1788 von dem mit Lambert im Briefwechsel stehenden und von ihm vielfach unterstützten Anton Felkel (geb. 1740) in Lissabon in lateinischer Sprache neu aufgelegt. Wir wollen auf die wichtigsten Tafeln dieser Sammlung hinweisen. Lambert hatte schon im II. Bande seiner Beiträge zur Mathematik die Teiler aller Zahlen von 1 bis 10200 gegeben, ferner hatte Heinrich Ajema 1767 eine Tafel der Teiler aller Zahlen von 1 bis 10000

---

[1]) Zuerst veröffentlicht in seiner Geometry improved, London 1717.

[2]) Mouton hat sein Verfahren zuerst angewendet in „Observationes diametrorum solis et lunae", Lugd. 1670, 4°, und damit die Logarithmen der Sinus und Tangenten auf 10 Dezimalen berechnet. Das diese Tafeln enthaltende Manuskript reichte er der Pariser Akademie ein, und Pezenas konnte es benutzen. [3]) Sur les interpolations ou sur l'usage des différences secondes, troisièmes etc. Mémoires de l'Acad. de Paris 1761, p. 125—139.

[4]) Glaisher, Report of Mathematical Tables in Report of the British Association, London 1874, p. 1—175 [künftig nur als „Glaisher" zitiert], p. 158.

[5]) Brief an d'Alembert vom 4. April 1771. Lagrange, Oeuvres, éd. Serret, XIII, p. 195.

zu Löwen veröffentlicht und sowohl im Dictionnaire encyclopedique wie auch in Harris Lexikon der Künste und Wissenschaft war je eine solche Tafel für alle nicht durch 2, 3, 5 teilbaren Zahlen von 1 bis 100000 nach John Pell (vgl. II², S. 713) mitgeteilt worden; diese dehnte Lambert unter Vornahme der nötigen Korrekturen auf alle Zahlen bis 102000 aus (Tab. I) und fügte noch Tafeln für die Primzahlen bis 101977[1]) bei (Tab. II und VI), zu deren Bildung er in der Einleitung eine Reihe von Sätzen mitteilt. Felkel hat die Teilertafel fortgesetzt, indem er 1776 in Wien eine sehr praktisch eingerichtete Tabelle erscheinen ließ, die die Divisoren bis 336000 enthielt (vgl. S. 202). Nach Angabe von Gauß hatte er seine Rechnung sogar bis 2000000 getrieben, jedoch ist der Rest nicht mehr im Druck erschienen. Auch die Tafel der Primzahlen wurde 1772 von Marci bis 400000 fortgesetzt, während Johann Neumann zu Dessau 1785 Tabellen der Primzahlen und der zusammengesetzten Teiler aller Zahlen bis 100100 mitteilte und Vega eine Faktorentafel bis 400000 in seinen Vorlesungen (1793) drucken ließ.

Außer den Primzahltafeln enthält Lamberts Sammlung noch kleinere Tabellen der Quadrat- und Kubikzahlen, der Potenzen von 2 bis 2^{70}, von 3 und 5 bis zur 50^{sten} Potenz, eine Tafel für die Werte der Exponentialfunktion e^{-x}, von $x = 0{,}1$ bis $x = 10$, nebst den Entwicklungen von e^x, $\frac{1}{2}(e^x + 1)$, $\log(a + x)$ usw. in Reihen und Kettenbrüche, dann eine Tafel der siebenstelligen hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100 (Tab. XIII) und eine ebensolche der Zahlen von 1,01 bis 10 in Intervallen von 0,01. Bemerkenswert ist die XIX. Tafel, welche die Werte der Sinus von 3° zu 3° in algebraischen Ausdrücken zusammenstellt, um gegebenenfalls verschiedene Rechnungen mit aller Schärfe vornehmen zu können. Über die Aufstellung dieser Tabelle verbreitete er sich in seinen Beiträgen zur Mathematik II (S. 133—139) und zeigte, daß die einzelnen Funktionswerte aus 15 verschiedenen Wurzeln durch Addition und Subtraktion allein zusammengesetzt sind[2]). Außerdem enthält Lamberts Samm-

[1]) J. G. Krüger hatte schon 1746 zu Halle im Magdeburgischen eine Primzahltafel bis 100999 gegeben, die er nach Aussage Lamberts von Peter Jäger erhalten hatte, und von Giuseppe Pigri (1728 etwa —1804) waren 1758 Nuove tavole degli elementi dei numeri dall' 1 al 10000 in Pisa veröffentlicht worden. Diese Tafeln enthalten alle Zahlen innerhalb der gegebenen Grenzen durch Primzahlprodukte dargestellt und sollten nach des Autors sanguinischer Hoffnung die Benutzung der Logarithmen überflüssig machen. Eine Methode zur Aufsuchung der Primzahlteiler hat auch Johann Tessanek in Abhandlungen einer Privatgesellschaft in Böhmen, I, Prag 1775. p. 1—64 angegeben und mit derselben eine Tafel von 1 bis 1000 berechnet (p 53—60). [2]) Eine Ableitung derselben

lung noch eine Tafel (XXI), in welcher die hauptsächlichsten trigonometrischen Formeln zusammengestellt sind, die zur Berechnung der ebenen und sphärischen Dreiecke dienen, Tafeln für die Längen der Kreisbögen auf 27 Dezimalen von 1° bis 100°, von da ab in Intervallen von 30° und endlich für Minuten und Sekunden; ferner Tabellen zur Berechnung der trigonometrischen Funktionen kleiner Winkel, zur Bestimmung der Sinus aller Grade mit ihren ersten 9 Vielfachen auf 5 Dezimalen usw. Zum Schlusse mag noch auf die Tafeln zur Erleichterung der Auflösung höherer Gleichungen, wie der Gleichungen 3. und 4. Grades, und endlich auf die Tafel der hyperbolischen Logarithmen (Tab. XXXII) aller ganzen Winkelgrade des 1. Quadranten hingewiesen werden. Im ganzen umfaßte die mit großer Sachkenntnis zusammengestellte Sammlung Lamberts 45 Tafeln in einem sehr handlichen Oktavbändchen.

Ein wichtiges Tabellenwerk war damals auch die „Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer Tafeln“ von Johann Karl Schulze (1749—1790), einem Schüler Lamberts, welche 1778 in Berlin in zwei Oktavbänden erschien. Außer den siebenstelligen Briggsschen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 101000 finden sich daselbst die hyperbolischen Logarithmen der Primzahlen von 1 bis 10000, die der holländische Artillerieoffizier Wolfram auf 48 Dezimalen berechnet hatte, ferner eine Tafel für die Logarithmen der Sinus und Tangenten kleiner Bögen von 0° bis 2° von Sekunde zu Sekunde berechnet, dann im II. Bande Tafeln der Sinus, Tangenten und Sekanten mit den zugehörigen Briggsschen und hyperbolischen Logarithmen für die 4 ersten und 4 letzten Grade in Intervallen von 10″, für den übrigen Teil des Quadranten aber von Minute zu Minute berechnet. Auch die Längen der „Zirkulbögen“ für alle Grade auf 27 Dezimalen, ferner für alle Minuten und Sekunden sind für den Radius 1 angegeben, und außerdem ist noch eine Interpolationstafel aufgenommen. Auch findet sich darin eine Tafel für rationale Trigonometrie, die nach Lamberts Angaben berechnet wurde. Sie gibt für 100 rechtwinklige Dreiecke die Seiten, für welche die Tangente des halben spitzen Winkels $> \frac{1}{25}$ ist. Hier mag erwähnt werden, daß Lambert auf die sogenannte rationale Trigonometrie, mit welcher sich schon Vieta[1]) und De Lagny[2]) beschäftigt

hat Cagnoli 1794 in „Cose trigonometriche“, Mem. della Soc. Italiana VII, p. 2 bis 3 gegeben.

[1]) Canon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus, Lutetiae 1579 in fol. Darin: Canonion triangulorum Laterum rationalium. Vgl. die Beschreibung desselben bei Hunrath in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, Heft 9. p. 221—225. [2]) Sur le calcul analytique et indéfini des Angles

hatten, durch einen Brief aufmerksam geworden zu sein scheint, den ihm ein gewisser Pater Simon Baum vom St. Salvatororden am 15. Oktober 1773 schrieb; darin teilte er ihm mit, daß er 223 Sinuswerte in rationalen Zahlen bestimmt habe und noch 20000 zu berechnen gedenke, welche zur Behandlung von Dreiecken dienen, deren Seiten und Inhalt rational sind. In seiner Antwort auf diesen Brief am 14. Dezember des gleichen Jahres teilte ihm Lambert mit, er habe eine Tafel für alle Brüche, deren Nenner 100 ist, berechnet, und aus dieser Tafel könne man schon 200 rationale Sinus finden, was völlig genüge. Ferner sei allgemein $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ gesetzt, so folgt

$$\sin 2\alpha = \frac{2ab}{b^2 + a^2}, \quad \cos 2\alpha = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

und hieraus z. B. für $\frac{a}{b} = \frac{3}{11}$

$$\sin 2\alpha = \frac{33}{65}, \quad \cos 2\alpha = \frac{56}{65}, \quad \alpha = 30^0\,30'\,27''.$$

Diese Überlegungen waren es jedenfalls, die die Entstehung der Schulzeschen Tafel verursachten, nur war dieselbe leider mit so vielen Fehlern behaftet, daß sie Bretschneider 1841[1]) noch einmal berechnen mußte.

Schulzes Werk scheint jedoch das Bedürfnis nach Logarithmentafeln nicht befriedigt zu haben, weshalb Georg Freiherr von Vega (1756—1802) sich mit der Herausgabe ähnlicher Werke befaßte, die bald sehr populär wurden. Vega, in Zagarika in Krain geboren, trat früh in die österreichische Armee, war als Hauptmann zugleich Professor der Mathematik beim Bombardierkorps in Wien, machte die Feldzüge gegen die Türken 1788 und gegen Frankreich 1793 bis 1797 mit, in denen er sich sehr auszeichnete, und stieg bis zum Oberstleutnant. 1802 wurde er entseelt in der Donau gefunden; später ergab sich, daß er von einem Müller ermordet worden war[2]). Während er seine Professur inne hatte, veröffentlichte er zunächst „Logarithmische, trigonometrische und andere zum Gebrauche der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formeln“, Wien 1783, 8⁰, die in zahllosen Neuauflagen und Bearbeitungen bis heute im Gebrauche blieben. Das Werk umfaßte die siebenstelligen Logarithmen der

---

des triangles etc. Mémoires de l'Académie de Paris 1729, insbesondere p. 318.

[1]) Archiv für Mathematik und Physik I, p. 96—101. [2]) K. Döhlemann, Georg von Vega. Zeitschrift für Mathematik und Physik 1894, XXXIX. p. 201 bis 211.

Zahlen und der trigonometrischen Funktionen sowie die goniometrischen Funktionen selbst, die Längen der Kreisbögen und verschiedene den Kreis und die Berechnung der ebenen und sphärischen Dreiecke betreffende Formeln. 1794 erschien dann in Leipzig „Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch“ und im gleichen Jahre Vegas vollständigstes und bedeutendstes Werk in dieser Richtung, der „Thesaurus logarithmorum completus ex Arithmetica logarithmica, et ex Trigonometria arteficiali“, Lipsiae 1794, 2°. Die erste Tafel desselben, der „Magnus Canon logarithmorum vulgarium“ enthält die 10stelligen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000 ohne Differenzen und von 1000 bis 100999 mit Differenzen, die 2. Tafel, der Magnus Canon logarithmorum vulgarium trigonometricus gibt die 10stelligen Logarithmen der Sinus, Kosinus, Tangenten und Kotangenten und zwar zwischen 0° und 2° in Intervallen von 1″ und für die übrigen Winkel von 10″ zu 10″ mit Angabe der Differenzen. Außerdem findet man noch darin Tafeln für Kreisbogenlängen, eine umfassende Sammlung trigonometrischer Formeln und Wolframs hyperbolische Logarithmen der Primzahlen. Vegas Thesaurus war, wie er selbst sagt, eine Neuberechnung von Vlacks Tafeln (II². S. 443 ff.), und er glaubte die Fehler jener Tabellen so verbessert zu haben, daß er für jeden ihm angezeigten Fehler einen Dukaten zu zahlen versprach. Doch genügte, wie nachmals Gauß in einer Besprechung des Werkes nachwies[1]), die Tafel II der Anforderung, die Tabulargröße dürfe niemals um mehr als eine halbe Einheit der letzten Dezimalstelle von dem wahren Werte abweichen, keineswegs.

Ein Jahr nach dem Erscheinen des Thesaurus kam in Paris die Tafelsammlung von François Callet (1744—1798) heraus, die wir schon S. 423 anführten[2]). Sie umfaßte im ganzen 11 wichtige Tafeln in einem nicht übermäßig dicken Oktavband und berücksichtigte neben der alten Teilung des Quadranten auch die Hundertteilung desselben. Die Haupttafeln enthalten 7stellige Logarithmen der Zahlen wie der trigonometrischen Funktionen, doch sind auch die gewöhnlichen und hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1200 und von 101000 bis 101179 sowie die gewöhnlichen und hyperbolischen Antilogarithmen von 0,00001 bis 0,00179 in Intervallen von 0,00001 und von 0,000001 bis 0,000179 in Intervallen

[1]) Astronomische Nachrichten 1851, Nr. 756, Werke III, p. 257—264. Vgl. dagegen die Ansicht von Leber „Tabularum ad faciliorem interpolationis computationem utilium Trias“, Vindob. 1897. [2]) Tables portatives de logarithmes 1795, 8°. Die umfangreiche Einleitung (118 Seiten) enthält eine genaue Angabe der Berechnung der Tafeln. Neudrucke erschienen 1827, 1829, 1853, 1890.

von 0,000001 sämtlich auf 20 Dezimalen mitgeteilt und die ersten, zweiten und dritten Differenzen angegeben. Außerdem ist noch eine Tafel bemerkenswert, die die Sinus und Logarithmen derselben auf 15 Dezimalen für je 10′ des hundertteiligen Quadranten gibt. Was die Berechnung der natürlichen Sinus in diesem Werke betrifft, so hat sie Callet wahrscheinlich durch Interpolation aus der „Trigonometria arteficialis" von Vlack vollzogen[1].

Von den um jene Zeit in England erschienenen Tafelsammlungen haben wir die trefflichen Mathematical Tables, London 1785, 8°, zu nennen, die Charles Hutton (siehe Abschnitt XIX, S. 16), seit 1773 Professor an der Militärakademie zu Woolwich, herausgab. Sie erlebten bis 1858 Neuauflagen unter beständiger Verbesserung. Die ersten sechs derselben enthalten eine äußerst wertvolle Einleitung über die Geschichte der Logarithmen. Außerdem finden sich in dieser Sammlung Antilogarithmen, d. h. die Zahlen zu den Logarithmen von 0 bis 0,00149 in Intervallen von 1 Hunderttausendstel auf 20 Dezimalstellen berechnet, und logistische Logarithmen, d. h. die Werte von $\log 3600'' - \log x$, von $x = 1''$ bis $x = 5280''$ in Sekundenintervallen auf 4 Dezimalen.

Ein bedeutendes Werk ist auch die dreibändige von Michael Taylor (1756—1789), einem Rechner für den Nautical Almanac, in London 1792 in-4° herausgegebene Tafelsammlung mit einer Vorrede von Nevil Maskelyne, dem wir schon begegneten. Unter den durchweg 7stelligen Tafeln befindet sich eine (die III.) von 450 Seiten mit nahe $3\frac{1}{2}$ Millionen Ziffern; sie enthält die Sinus, Kosinus, Tangenten und Kotangenten und wurde durch Interpolation aus Vlacks 10stelliger Tafel mit Kürzung auf 7 Stellen berechnet. Außerdem hat Taylor noch 1780 eine Sexagesimaltafel publiziert.

Als man in Frankreich in den ersten Jahren der großen Umwälzung, welche die Revolution auf allen Gebieten hervorgerufen hatte, auch die Maße und Gewichte reformierte, indem man überall das Dezimalsystem einführte, lag es nahe, den schon früher vereinzelt aufgetauchten Gedanken der Dezimalteilung des Winkels wieder aufzunehmen und dafür neue logarithmisch-trigonometrische Tafeln zu schaffen, ähnlich wie sie einst Briggs berechnet hatte (vgl. II², S. 743). Die Anregung hierzu ging von Carnot, Prieur und Brunet aus, und mit der Leitung des Unternehmens, welches in großem Maßstabe angelegt wurde, ward 1794 der zum Vorstande des Katasterbureaus (1791) ernannte Ingenieur Gaspard de Prony (1755—1839) betraut.

[1]) Glaisher, a. a. O., S. 93 nach Hoberts und Idelers Angabe (1799)

Dieser teilte seine Hilfsarbeiter in drei Gruppen. Die Herstellung der für die Rechnung notwendigen Formeln lag in den Händen berühmter Mathematiker, wie Delambre und Legendre, die zweite Gruppe bestand aus Rechnern, die mit der Analysis vertraut waren, während die Mitglieder der dritten Sektion, zu denen man hauptsächlich die durch das neue Regime brotlos gewordenen Perückenmacher heranzog, nur die Additionen und Differenzenrechnungen auszuführen hatten. Dabei vollzog man[1]) die Berechnung der Sinus von 10^0 zu 10^0 mittelst der Reihe, die Sinus der zwischenliegenden Bögen wurden von Grad zu Grad mit der Formel

$$\sin(a+b) = 2\cos a \sin b + \sin(a-b)$$

bestimmt, und alles übrige wurde durch eine geschickt angelegte Differenzenrechnung ausgefüllt, deren auf Moutons Methode beruhende Einrichtung man hauptsächlich Legendre verdankte[2]). Das Werk umfaßt handschriftlich 17 Bände in Folio und enthält neben einer ausführlichen Einleitung über die Herstellung usw. der Tafeln die natürlichen Sinus für jeden 10000sten Teil des Quadranten auf 25 Dezimalen, um sie sicher auf 22 zu haben, mit Angabe von 7 oder 8 Kolonnen Differenzen, ferner die Logarithmen der Sinus und der Tangenten für jedes Hunderttausendstel des Quadranten auf 14 Dezimalen mit 5 Differenzen, dann die Logarithmen der Verhältnisse der Sinus und der Tangenten zu ihren Bögen für die 5000 ersten Hunderttausendstel des Quadranten in 14 Dezimalen, weiter die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 auf 19 Dezimalen und die der Zahlen von 10000 bis 200000 mit 14 Dezimalstellen und 5 Differenzen. Das begonnene Riesenwerk war also wirklich dem Plane gemäß zu Ende geführt worden, blieb aber leider unveröffentlicht, da der bereits angefangene Druck wegen der Zerrüttung der Finanzen eingestellt werden mußte. Übrigens hat dasselbe an Wert bedeutend verloren, da die Hundertteilung des Quadranten in der Folge keinen Eingang fand, obwohl sie Legendre in seiner vielbenutzten Trigonometrie den Rechnungen zugrunde legte, und auch bald kleinere Tafeln, wie die „Tables trigonométriques décimales“ von Borda[3]) in Frankreich und die „Nou-

[1]) Mémoires de l'Institut V, an XII, p. 56—66: Rapport sur les grandes tables trigonométriques décimales du cadastre par Lagrange, Laplace et Delambre und Bulletin de la Société Philomathique de Paris III, 1811, Bericht von denselben. Vgl. auch Comptes rendus de l'Acad. de Paris 1858, XLVI, p. 911 bis 912; ferner Annales de l'Observatoire impérial de Paris IV, 1858, p. 123 bis 150, endlich Nouvelles Annales XIV, 1855, p. 14—17 des historischen Teils.
[2]) Connaissance de temps 1817, p. 219—233. [3]) Tables trigonométriques déci-

velles tables trigonométriques" von Hobert und Ideler[1]) in Deutschland erschienen, die sich dieser Teilung bedienten. In der Vorrede zu letzterem Werk, welches das erste war, das in Deutschland die zentesimale Teilung des Quadranten einzuführen suchte, wird der Differenzenmethode zur Berechnung der Tafeln das Wort geredet und in der Tat hatte die Herstellung der „Tables du Cadastre" das Übergewicht dieser Methode über die direkte Berechnung auf das schlagendste dargetan.

Obwohl man sich, wie schon am Anfang dieses Abschnittes erwähnt, zur Berechnung der Logarithmen stets der unendlichen Reihen bediente, machte sich doch am Ende des Jahrhunderts das Bestreben geltend, elementare Methoden herzustellen, mit denen eine solche Berechnung wenigstens für die Zahlenlogarithmen möglich wäre. Der Prediger der französischen Gemeinde und nachmalige Professor der Mathematik an der Académie militaire in Berlin, Abel Bürja (siehe S. 29) veröffentlichte 1786[2]) zwei solche Methoden zur direkten Berechnung der Logarithmen. Die erste beruhte darauf, daß er durch abwechselndes Ziehen der zweiten und der fünften Wurzel aus 10 und den hierdurch entstehenden Zahlen die zu den Logarithmen

$$0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots\ 0{,}9;\quad 0{,}01,\ 0{,}02,\ \ldots\ 0{,}09;\quad 0{,}001,\ 0{,}002,\ \ldots\ 0{,}009 \text{ usw.}$$

gehörigen Numeri bildete, dann die ersten 9 Vielfachen dieser Zahlen berechnete und alles in einer Tafel vereinigte, in welcher die Logarithmen vom größten zum kleinsten abnehmen. Diese „Hilfstafel"[3]) hat er bis zu $\frac{1}{10^{15}}$ fortgeführt. Den zu einem gegebenen Logarithmus, z. B. zu $0{,}463\ldots$ gehörigen Numerus findet man dann, indem man die Faktoren von $10^{0,4}\cdot 10^{0,06}\cdot 10^{0,003}\ldots$ in jener Tafel aufschlägt und miteinander multipliziert, was durch die Vielfachen in der Tafel erleichtert wird. Auch die umgekehrte Aufgabe läßt sich, wie Bürja zeigt, mit der Hilfstafel leicht lösen[4]).

Die zweite Methode, die er mitteilte, diente dazu, jeden Loga-

---

males ou Tables des logarithmes ..revues, augmentées et publiées, par J. B. J. Delambre, Paris, an IX (1800/1), klein-8°.

[1]) Nouvelles tables trigonométriques calculées pour la division décimale du quart de cercle, Berlin 1799, 8°. [2]) Der selbstredende Algebraiste 1786 und Mémoires de l'Acad. de Berlin 1786/87 (publiziert 1792), p. 433—478, und kürzer im Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik von J. Bernoulli und Hindenburg 1786, p. 90—105. [3]) A. a. O., p. 456—478. Das Verfahren ist wahrscheinlich Long nachgebildet, der es in P. T. 1714, XXIX, Nr 339, p. 52—54 gab. [4]) Dem Gedanken, wenn auch nicht der Form nach dieselbe Methode hatte schon Brook Taylor 1717 in den P T. Vol. XXX, Nr. 352, p. 618—622, entwickelt.

rithmus einer Zahl ohne Tafel zu finden und beruhte auf der Darstellung desselben durch einen Kettenbruch. War z. B. der Logarithmus von 262144 zur Basis 128 zu bestimmen, so setzte man $128^{p+\frac{1}{q}} = 262144$, daraus folgt sofort $p = 2$, und hiermit leicht $16^q = 128$; ist jetzt $q = r + \frac{1}{s}$, so folgt wieder $r = 1$ und hiermit $8^s = 16$ usw., so daß sich schließlich der gesuchte Exponent in der Form $2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = 2\frac{4}{7}$ darstellt. Fast genau die gleiche Methode hat 1795 der Amerikaner David Rittenhouse (1732—1796) gegeben[1]), ob mit oder ohne Kenntnis von Bürjas Abhandlung, läßt sich wohl nicht mehr feststellen.

In allen Tafelwerken jener Zeit wurde natürlich, wie auch heute noch, der Zahl π gedacht; so finden sich z. B. in Lamberts Sammlung (Tafel XXIV) π, $\log \pi$, $\frac{1}{\pi}$, $\sqrt{\pi}$ auf 18 Dezimalen angeführt, und Vega gab in seinem Thesaurus (p. 633) π auf 140 Stellen an, von denen 136 richtig sind. Die Methoden, mit denen man π berechnete, beruhten hauptsächlich auf dem Kunstgriff, den zuerst Machin angewendet hatte (vgl. III², S. 364—365), nämlich $\frac{\pi}{4}$ in die Summe zweier oder mehrerer Bögen mit rationalen Tangenten zu zerlegen, die dann einzeln mit der Arkustangensreihe berechnet wurden. Euler war es, der zuerst diesen Gedanken wieder aufgriff und auf das vollkommenste ausbeutete, indem er schon 1737[2]) durch Einführung spezieller Zahlenwerte in die allgemeine Formel

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{p} = \operatorname{arctg} \frac{1}{p+q} + \operatorname{arctg} \frac{q}{p^2+pq+1}$$

solche Zerlegungen vornahm und außerdem die Reihe

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{y} = \operatorname{arctg} \frac{ax-y}{ay+x} + \operatorname{arctg} \frac{b-a}{ab+1} + \operatorname{arctg} \frac{c-b}{cb+1} + \cdots$$

herstellte, die z. B. für $\frac{x}{y} = 1$, a, b, c, ... gleich den ungeraden Zahlen der Zahlenreihe die Reihe

---

[1]) Method of raising the common Logarithm of any Number immediately (gelesen am 12. August 1795) Transactions of the American philosophical Society, IV. Philadelphia 1799, p 69—71, Nr IX. [2]) De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. Comment. Acad. Petrop. IX, 1737 (erschienen 1744), p. 100.

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 9} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 16} + \cdots$$

lieferte. Auf solche auch vom analytischen Standpunkt interessante Reihen kam er später (1762/63) noch einmal zurück[1]), indem er sich mit ihrer Summation beschäftigte. Daran anschließend hat dann Johann Friedrich Pfaff (1765—1825), Universitätsprofessor zu Helmstädt und dann zu Halle, diese Reihenkategorie von allgemeinerem Standpunkt systematisch untersucht[2]) und zu den schon von Euler summierten Reihen auch noch solche hinzugefügt, deren Summe durch einen Bogen ausgedrückt wird, dessen Tangente transzendente Größen einschließt.

Eulers Formeln wurden vielfach zur Berechnung von π benutzt (vgl. S. 299, 300). So hat z. B. Vega das oben angeführte Resultat aus der Eulerschen Formel $\frac{\pi}{4} = 5\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{3}{79}$ gewonnen, wozu er noch zur Kontrolle $\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$ nahm, und Karl Buzengeiger (1771—1835), zuerst Magister in Ansbach, dann Professor der Mathematik in Freiburg im Breisgau, gab die auf ähnliche Weise gebildete neue Formel:

$$\frac{\pi}{4} = 8\operatorname{arctg}\frac{1}{10} - 4\operatorname{arctg}\frac{1}{515} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239},$$ [3])

an, die auf sehr rasch konvergente Reihen führt. Ebenso teilte Ch. Hutton, dem wir schon wiederholt begegneten, drei ähnliche Zerlegungen von $\frac{\pi}{4}$ mit[4]), berechnete aber die Teilbögen nicht mit der gewöhnlichen Arkustangensreihe, sondern mit der viel rascher konvergenten Reihe:

$$\operatorname{arctg} t = \frac{t}{1+t^2}\left\{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^3 + \cdots\right\},$$

die er durch Transformation aus ersterer erhielt. Euler hatte übrigens diese Reihe schon 1755 in seiner Differentialrechnung aufgestellt[5]) und teilte sie 1779 der Petersburger Akademie mit, indem er durch Einführung derselben in die Formel

---

[1]) De progressionibus arcuum circularium, quorum tangentes secundum certam legem procedunt. Novi Comment. Acad. Petrop. IX, 1762/63 (erschienen 1764), p. 40—52. [2]) De progressionibus arcuum circularium etc., wie bei Euler, Nova Acta Acad. Petrop. X, 1792 (vorgelegt 1795, erschienen 1797), p. 123—184. [3]) Klügel, Wörterbuch I, p. 666. [4]) P. T. 1776, p. 476. Vgl. über die weitere Geschichte dieser Reihe, die wiederholt neu gefunden wurde, Glaisher in Messenger of Mathematics II, 1873, p. 119 ff. [5]) Pars II, Kap. 2, p. 318.

$$\pi = 20 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 8 \operatorname{arctg} \frac{3}{79}$$

die äußerst bequeme Formel:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{28}{10} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{100} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \left(\frac{2}{100} \right)^2 + \cdots \right\}$$
$$+ \frac{30366}{100000} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \left(\frac{144}{100000} \right) + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \left(\frac{144}{100000} \right)^2 + \cdots \right\}$$

erhielt. Mit ihr berechnete er, nach seiner Angabe, π in einer Stunde auf 20 Dezimalen[1])

In einer anderen Abhandlung vom 17. Juni desselben Jahres[2]) bildete Euler die leicht zu beweisende Gleichung:

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{2 - x} = 2 \int_0^x \frac{dx}{4 + x^4} + 2 \int_0^x \frac{x\,dx}{4 + x^4} + \int_0^x \frac{x^2\,dx}{4 + x^4},$$

entwickelte diese Integrale in Reihen, setzte $x = \frac{1}{2}$ und dann $= \frac{1}{4}$ und erhielt dadurch Reihen für $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ und $\operatorname{arctg} \frac{1}{7}$, welche in die Gleichung $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7}$ eingesetzt ebenfalls einen zur Berechnung von π brauchbaren Ausdruck lieferten.

Zu einer anderen interessanten Abhandlung über das hier einschlägige Gebiet wurde Euler durch einen von Descartes gemachten Versuch der Kreisrektifikation veranlaßt[3]) (vgl. S. 259, 260). Zu diesem Zweck hatte Descartes an das Quadrat $\widehat{bf}$ (Fig. 25) das Rechteck $\widehat{cg}$, dessen vierte Ecke auf der Diagonale liegt und dessen Fläche gleich $\frac{1}{4}$ des Quadrates ist, angelegt, an dieses wieder ein Rechteck $\widehat{dh} = \frac{1}{4}$ des vorhergehenden usw. Dadurch war er schließlich zu einem Grenzpunkt x gelangt, der so liegt, daß ax dem Durchmesser des gesuchten Kreises gleich wird. Dabei hatte er angegeben, daß ab der Durchmesser des dem Quadrate eingeschriebenen Kreises, ac der Durchmesser des dem Achteck eingeschriebenen,

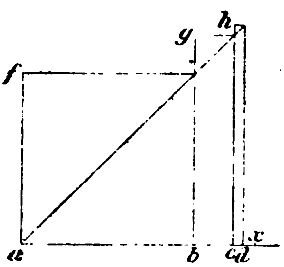


Fig. 25

ad jener des dem Sechzehneck eingeschriebenen Kreises usw. ist, so

[1]) Investigatio quarundam serierum, Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793, p. 133 ff., gelesen am 7. Juni 1779 (erschienen 1798), p. 133. In einem anderen Aufsatze, der erst 1862 in den Opera posthuma L. Euleri von P. H. Fuß et Nic. Fuß I, p. 288 veröffentlicht wurde, wird diese Reihe noch auf einem etwas anderen Wege abgeleitet. Dort findet sich obige Angabe für die Zeit der Berechnung. [2]) Nova Acta Acad. Petrop. XI, p. 150. [3]) Oeuvres de Descartes

daß endlich ax der Durchmesser des dem Polygon mit unendlich vielen Seiten eingeschriebenen Kreises, d. h. der gesuchte Kreisdurchmesser selbst wird. Euler beweist nun zunächst die Richtigkeit dieser Konstruktion und leitet dann aus ihr die Formel

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{32} + \cdots = \frac{4}{\pi}$$

ab. Diese Reihe gibt ihm aber sofort Veranlassung, die Summe der allgemeineren Reihe $\operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{4} + \cdots$ zu suchen, die er auch leicht in der Form $\frac{1}{\varphi} - 2\operatorname{ctg}2\varphi$ findet. Aus dieser Gleichung wird dann unter anderem auch die Faktorenfolge gewonnen:

$$\frac{2\varphi}{\sin 2\varphi} = 1 : \left(\cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{4} \cos\frac{\varphi}{8} \cdots\right),$$

die im speziellen für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ jene schon Vieta bekannte Beziehung liefert (vgl. II², S. 595), welche als das erste unendliche Produkt gilt[1]).

Auch Eulers jüngerer Zeitgenosse Lambert hatte schon 1758 an die Quadraturversuche des Gregorius a St. Vincentio (II², Kap. 81) anknüpfend eine Ableitung dieser Faktorenfolge in einer Abhandlung[2]) gegeben, auf deren Inhalt wir, soweit er unser Gebiet betrifft, noch kurz eingehen wollen. Er sagt daselbst, da die Länge eines Kreisbogenstückes $AM = v$ (Fig. 26) zwischen dem Sinus $AS = y$ und der Tangente AF liegt, so wird es auf der Verlängerung des Durchmessers $AB = 2$ einen Punkt P in der Entfernung $AP = z$ geben, der mit M verbunden, einen Punkt Q auf AF liefert, der zwischen S und F liegt. Bezeichnet man MS mit $x = \operatorname{sinvers} v$, so ergibt sich leicht die Beziehung $z = \frac{vx}{v - y}$. Wenn man in dieser x und y durch die bekannten Reihen ersetzt, so findet man zunächst für z die Reihe

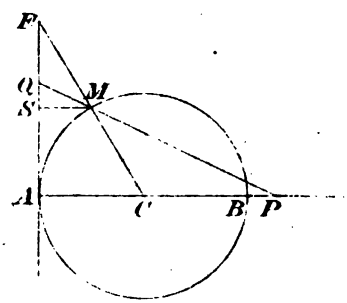


Fig. 26.

Ed. Cousin, XI, p. 442—443. Eulers Abhandlung führt den Titel: Annotationes in locum quondam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem. Nov. Comment. Acad. Petrop. VIII, 1760/61, p. 157 ff. (erschienen 1763). Später gab auch J. Fr. de Tuschio a Fagnano in Acta Eruditorum 1771, p. 406—418 einen Beweis der Konstruktion.

1) Übrigens hat Euler diese Formel von anderen Betrachtungen ausgehend schon früher gefunden: Comment. Acad. Petrop. IX, 1737 (erschienen 1744), p. 234—235. Sie tritt auch wieder auf in Opuscula analytica L. Euleri, Petropoli 1783, 4° p. 345. 2) Observationes variae in mathesin puram. Acta Helvetica III, Basileae 1758, § 10, p. 132.

$$z = 3 - \frac{1}{10} v^2 - \frac{1}{4200} v^4 + \frac{1}{126000} v^6 + \cdots,$$

durch welche P so bestimmt wird, daß $AQ = v$ ist. Nimmt man ferner $z = 3$ an, so ergibt der hierdurch bestimmte Punkt P eine sehr einfache und genaue Methode zur Rektifikation des Bogens $v = AM = AQ$. Lambert weist die Richtigkeit seiner Behauptung dadurch nach, daß er mit seiner Formel eine kleine Tabelle berechnet und die Unterschiede der gefundenen und der wahren Werte bestimmt. Weiter ergibt sich aus der Figur die Proportion

$$QS : SF = (1 - x) : (3 - x),$$

aus welcher für sehr kleine x ($x = 0$) folgt, daß $FQ = 2SQ$ oder $\operatorname{tg} v - v = 2(v - \sin v)$ ist, woraus

$$\operatorname{arc} v = \frac{\operatorname{tg} v + 2\sin v}{3} \quad \text{und} \quad \pi = \frac{180^\circ}{v^\circ} \frac{\operatorname{tg} v^\circ + 2\sin v^\circ}{3}$$

sich viel genauer ergibt, als wenn man, wie gewöhnlich, das arithmetische Mittel zwischen $\operatorname{tg} v$ und $\sin v$, oder den Seiten der um- und eingeschriebenen Polygone bildet.

Nicht unerwähnt wollen wir auch die Versuche lassen, welche im fernen Japan in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts gemacht wurden, um die Zahl π auf eine größere Anzahl Dezimalen zu bestimmen, und welche beweisen, daß die Japaner damals im Besitze von Methoden waren, die im Abendlande der Erfindung des Infinitesimalkalküls unmittelbar vorhergingen.

Japans berühmtester Mathematiker Kōwa Seki (vgl. III², S. 669) gilt als der Erfinder einer solchen Methode, und aus der von ihm gegründeten Schule gingen mehrere Mathematiker hervor, die seine Erfindung ausbauten. Bemerkenswert sind einige unendliche Reihen für $\arcsin x$, welche sich bei verschiedenen japanischen Mathematikern finden. So wurde in dem Werke Ho en san Kyo von Yoshihide Matsunaga von 1739 der Wert von π auf 50 Stellen für $x = \frac{1}{2}$ aus der gewöhnlichen Arkussinusreihe berechnet, die Newton (III² S. 74) in seiner Analysis per aequationes abgeleitet hatte[1]. Ajima (oder Yasujima?)[2]) aber (etwa 1737—1797) gab außer jener Reihe auch noch die zwei folgenden:

$$\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}) = x - \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} \frac{1}{2\beta+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\beta - 3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2\beta} x^{2\beta+1}$$

---

[1]) Sie steht übrigens auch bei Wallis „De Algebra Tractatus“, Opera II, Oxoniae 1693. p. 383. [2]) Vgl. über diese Lesart den Aufsatz von Y. Mikami im Jahresbericht der Mathematikervereinigung. 1906, p. 254.

und

$$\arcsin x = \sqrt{1-x^2} \sum_{\beta=0}^{\beta=r} \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\beta}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2\beta+1)} x^{2\beta+1}.$$[1])

Außerdem finden sich in japanischen Schriften aus jener Zeit auch Darstellungen der Zahl π durch Näherungswerte von Kettenbrüchen[2]). So stammt von Y. Arima aus dem Jahre 1766 der auf 12 Stellen richtige Näherungsbruch $\frac{5419351}{1725033}$ und der auf 30 Stellen zutreffende Bruch $\pi = \frac{428224593349304}{136308121570117}$, während G. Kurushima († 1760) $\pi^2 = \frac{98548}{9985}$ angab.

Versuche, den Charakter der Zahl π zu ergründen, waren schon von De Lagny (III², S. 120) gemacht worden. Derselbe war bereits 1719 zu dem wichtigen Satze gelangt[3]), den er allerdings nicht beweisen konnte, daß, wenn die Tangente eines Bogens eine rationale Zahl ist, der Bogen selbst irrational sein muß, und hatte daraus die Folgerung gezogen, daß die Kreisrektifikation durch Radius und Tangente geometrisch unmöglich sei[4]). Dieser Satz war es, der Lambert zum Ausgang seines Beweises für die Irrationalität von π im Jahre 1767 diente[5]), und den er „außerordentlich scharfsinnig und im wesentlichen einwandfrei" gestaltete[6]).

Lamberts Zeitgenossen scheinen allerdings entweder seine Arbeit nicht beachtet oder die Bedeutung des Schrittes, den er in der Erkenntnis des Charakters der Zahl π durch diesen exakten Beweis ge-

---

[1]) Auf die hier mitgeteilten Reihen ist von P. Harzer: „Die exakten Wissenschaften im alten Japan", Rede gehalten zu Kiel am 27. Januar 1905, hingewiesen worden (p. 33—34). Daselbst werden auch die Quellen, aus denen Harzer geschöpft hat, genau angegeben [2]) Harzer, a. a. O., p. 29, Anmerk. 5. Vgl. auch T. Hayashi, The values of π by the japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries. Bibliotheca math. 1902, p. 273—275. [3]) Mémoires de l'Acad. de Paris, 1719, p. 141. [4]) Ebenda, 1727, p. 124—125. [5]) Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques. Lu en 1767. Histoire de l'Acad. de Berlin 1761 (sic!), p. 265—322, und in populärer Darstellung in den Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik II, p. 140—169. [6]) Man sehe über den Wert von Lamberts Beweis: A. Pringsheim, „Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π"; Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. bayr. Akad. der Wissensch. 1898, XXVIII, Heft 2, p. 325—337. Hierzu sei noch bemerkt, daß Lambert in seiner Erkenntnis noch weiter ging, indem er in einem Briefe an Holland (Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von J. Bernoulli, I, p. 254) sagt: „Die Art, wie ich dies bewiesen habe, läßt sich so weit ausdehnen, daß zirkuläre und logarithmische Größen nicht Wurzeln von rationalen Gleichungen sein können".

tan hatte, nicht erkannt zu haben, sonst hätte nicht selbst Euler noch 1771 seine ziemlich unfruchtbaren Spekulationen über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises, die er bereits in der Introductio[1]) an die Lösung transzendenter Gleichungen, wie $s = \cos s$, $s = \sin 2s$ usw. angeknüpft hatte, wiederholen können[2]). Der ganze Charakter von Lamberts auf absolute Exaktheit zielender Beweisführung steht eben so ganz außerhalb der fast nur auf formale Erweiterung der Mathematik hinzielenden Tätigkeit seiner Zeitgenossen, daß eine Nichtbeachtung derselben wohl verstanden werden kann.

Haben wir uns mit der Besprechung der Methoden zur Berechnung der Zahl π bereits einen Übergriff in das Gebiet der Analysis erlaubt, so müssen wir auch noch in kurzem der übrigen Errungenschaften auf diesem Gebiete gedenken, die mit den trigonometrischen Funktionen in Zusammenhang stehen. Wir erinnern uns (III², S. 716 bis 717), daß Euler schon in der Introductio 1748 und noch früher (1743)[3]) die Summe einer endlichen Zahl von Sinus oder Kosinus, deren Argumente in arithmetischer Progression fortschreiten, auf nicht einwandsfreie Weise gewann, indem er sich divergenter unendlicher Reihen bediente. Die einfachen und stichhaltigen Ableitungen, deren wir uns heute noch bedienen, haben erst Klügel[4]), Cagnoli[5]) und später wieder Francesco Pezzi[6]) († 1813), Ingenieur und Professor der Mathematik an der Universität Genua, gegeben, und Cagnoli hat auch noch die Summen der n^{ten} Potenzen der Sinus und Kosinus solcher Winkel berechnet, nachdem schon 1748 Gregorio Fontana (1735—1803), der Nachfolger Boscovichs an der Universität Pavia war, eine Ableitung dieser Summen mit Hilfe des Imaginären mitgeteilt hatte[7]). Aber auch diese Gelehrten glaubten noch alle die Reihen ohne Rücksicht auf Konvergenz oder Divergenz ins Unendliche fortsetzen zu dürfen.

Auch für die längst bekannten Formeln, welche den Sinus und den Kosinus ganzzahliger Vielfachen eines Winkels durch die Potenzen der Sinus und Kosinus oder einer dieser Funktionen allein ausdrücken, haben Klügel[8]), Cagnoli[9]) und andere neue Ableitungen gegeben,

[1]) B, II, Kap. 22. [2]) Considerationes cyclometricae. Novi Commentarii Acad. Petrop. XVI, p. 160 ff. [3]) Miscellanea Berolinensia VII, p. 129. [4]) Analytische Trigonometrie 1770, p. 39—43. [5]) Trigonometria, 2. Aufl., p. 117—118. [6]) Memorie della Società Italiana XI, 1803, p. 21 ff. [7]) Ebenda, II, 1784, p. 424 ff. [8]) Analytische Trigonometrie 1770, p. 46—65. [9]) Cose trigonometriche, Memorie della Società Italiana VII, 1794 und Trigonometria, p. 104—108, woselbst übrigens wieder kritiklos unendliche Reihen benutzt werden. In demselben Kapitel IX werden auch die umgekehrten Formeln für $\sin x^n$ und $\cos x^n$ mittels des Imaginären abgeleitet.

von denen die des Irländers John Brinkley (1797)[1]) die vollständigste ist, da derselbe das Koeffizientengesetz mittels des Schlusses von n auf $n+1$ bewies.

Für ein ganzzahliges gerades oder ungerades n liefern diese Entwicklungen bekanntlich direkt die Teilungsgleichungen der trigonometrischen Funktionen. Nun wußte man schon seit Wallis, daß im ersteren Falle $2n$, im letzteren n Wurzeln vorhanden sind, auch hatten bereits Euler 1748 (vgl. III², S. 716) und noch viel eingehender Kästner 1756[2]) Untersuchungen über Zeichen und Gruppierung dieser Wurzeln angestellt, dennoch glaubte D'Alembert 1768 noch einmal auf diese Fragen zurückkommen zu müssen[3]) und Klügel, Karsten und andere folgten ihm nach. Der erstere der beiden zuletztgenannten Männer schloß an seine Überlegungen auch die Produktdarstellung von $\sin nz$ und $\cos nz$ für ein ganzzahliges n an und fügte[4]) noch eine stichhaltige Ableitung des Satzes von Cotes bei, die als eine Erweiterung und Vereinfachung des schon von Johann Bernoulli mitgeteilten Beweises[5]) angesehen werden muß.

Was die Ableitung der Potenzreihen für $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ anlangt, so wurde gewöhnlich die uns schon aus III², S. 708 bekannte Methode Eulers angewendet, oder man bestimmte in der mit unbestimmten Koeffizienten angenommenen Reihenform die Koeffizienten mit Differentialrechnung; L'Huilier[6]), der so elementar als möglich verfahren wollte, verwendet hierzu die Differenzenrechnung. Eine elementare Ableitung gab auch 1798[7]) Jakob de Gelder (1765—1848), Professor in Leyden. In umfassendster Weise aber hat den analytischen Teil der Trigonometrie Pietro Ferroni mit Hilfe des Infinitesimal-

[1]) Transactions of the R. Irish Academy VII, 1800, p. 27 ff. Brinkley erwähnt hier, daß Waring in seinen Curvarum algebraicarum proprietates, 1772, Theor 26 für ein ungerades n mit seinem Satze über die Potenzsummen zuerst einen exakten Beweis gegeben habe, daß diese Methode aber für ein gerades n versage. [2]) Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulares definientibus, Dissertatio 1756, Altdorfii 1771. Über die algebraische Auflösbarkeit der einen speziellen Fall bildenden Kreisteilungsgleichungen sah man damals noch sehr unklar; so sagt Mosdorff, Acta Erud. 1751, man werde wohl kaum jemals dazu kommen, zu untersuchen, wann sich diese Gleichungen algebraisch lösen lassen, und Klügel betont ebenfalls a. a. O., p. 66, daß die trigonometrischen Tafeln die Auflösung der Teilungsgleichungen geben, welche die Algebra bis jetzt nicht allgemein geben kann. [3]) Opuscules V, p. 222—227. [4]) Analytische Trigonometrie, Kap. 4, Nr. XXXI. [5]) Opera IV, p. 67. [6]) P. T. 1796, p. 142 und Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris. Tubingae 1795, 4°, Kap. 3. [7]) Over de reeksen, dienende om de rapporten van de cirkelbogen tot derzelver sinussen etc. zoonder behulp der differentiaal- och integraal-rekening afteleiden. Verhandelingen van het Genotschap te Rotterdam XII, 1798.

kalküls in seinem großen Werke „Magnitudinum exponentialium logarithmorum et trigonometriae sublimis theoria nova methodo pertracta". Florenz 1782, 4°,[1]) behandelt. Der Autor hat gehalten, was er im Titel seines Werkes versprochen, indem er eine vollständige Theorie der Exponential- und trigonometrischen Größen entwickelte, wobei er die entsprechenden Formeln für Kreis- und Hyperbelfunktionen stets nebeneinander stellte.

Die Reihendarstellungen der ersteren erhielt er von der Reihe für z^{iv} ausgehend, wo er zunächst dem z einen ganz beliebigen Wert erteilte und dann $z = e$ oder $= C$ setzte, wie er die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnete. Dadurch erhielt er die seit Euler bekannten Darstellungen des Sinus und Kosinus durch die Exponentialfunktion und die Fundamentalformel $e^{xi} = \cos x + i \sin x$, die ihn für $\sin x = v$, $\cos x = \sqrt{1 - v^2}$ zur Gleichung

$$xi = \log(iv + \sqrt{1 - v^2})$$

führte. Indem er dann für die Wurzel die binomische Reihe einführte und den Logarithmus durch die bekannte Reihenentwicklung ersetzte, gewann er auch die Reihe für $\arcsin v$. Bei Ableitung dieser Reihe, deren Koeffizientengesetz übrigens nicht bewiesen wird, findet sich auch der Versuch, die Konvergenz mittels des Quotienten zweier aufeinander folgender allgemeiner Glieder zu bestimmen, ein Beweis dafür, daß am Ende des 18. Jahrhunderts die Erkenntnis der Notwendigkeit, die Bahn rein formaler Entwicklungen zu verlassen, sich allmählich einstellte.

[1]) Kap. 5—8.

ABSCHNITT XXIV

ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE UND DES RAUMES

VON

V. KOMMERELL

Allgemeines. Kegelschnitte.

Nach dem glänzenden Aufschwung, den die analytische Geometrie der Ebene durch die Erfindung des mächtigen Hilfsmittels der Infinitesimalrechnung, durch die Arbeiten eines Newton, Maclaurin, de Gua, Clairaut, Euler u. a. genommen hatte, kann man unseren Zeitraum, die letzten 40 Jahre des 18. Jahrhunderts, als eine Periode verhältnismäßigen Stillstands bezeichnen; neue Gedanken und Methoden von großer Tragweite, die auf das ganze Gebiet befruchtend einwirken, treten kaum auf[1]); die Tätigkeit der Mathematiker erstreckt sich mehr auf Spezialuntersuchungen. Dagegen wuchs die analytische Geometrie des Raumes, die bis dahin nur schwache Ansätze gezeigt hatte, zu einem stattlichen Baum empor, als dessen Krone Monges geniales Werk: „Feuilles d'analyse appliquée à la geométrie" gelten kann.

Was die Behandlungsweise der Probleme in unserem Zeitraum betrifft, so ist besonders bemerkenswert das Hervortreten des Gegensatzes zwischen analytischer und synthetischer Methode, von denen die letztere im allgemeinen mehr in England und Italien, die erstere in Deutschland und Frankreich gepflegt wurde. Es handelt sich dabei nicht bloß um den Unterschied zwischen rechnerischem und konstruktivem Verfahren, sondern unter analytischer Methode wird vielfach eine Behandlungsweise verstanden, die man heute vielleicht eher als „heuristisch" oder „genetisch" bezeichnen würde, eine solche nämlich, die den Gedankengang des Verfassers, die Überlegungen, durch welche er seine Resultate gefunden hat, klar erkennen läßt[2]), während der Synthetiker seine Sätze fertig mitteilt, und im Beweis seinen eigenen Weg eher zu verdecken, als darzulegen sucht. Verschiedene namhafte Mathematiker haben sich über diesen Gegenstand ausgesprochen. Der Zeit nach steht voran eine aus dem Jahre 1759 stammende Vorrede Kästners zu dem kleinen Buch von Hube:

---

[1]) Es wäre denn, daß man die Anfänge der Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen hierher rechnen wollte, die allerdings von analytisch-geometrischen Untersuchungen über die Rektifikation der Kegelschnitte ausgegangen sind, aber doch eigentlich in Abschnitt XXVI gehören. [2]) Als geradezu klassische Beispiele hierfür sind die Arbeiten Eulers anzuführen.

„Versuch einer analytischen Abhandlung von den Kegelschnitten" (Göttingen 1759), das auf Kästners Veranlassung verfaßt wurde. Dieser führt hier über die Vorzüge der analytischen Behandlung etwa folgendes aus: Sie ermöglicht dem „Lehrling" eine selbständige Lösung von Aufgaben, während er bei der synthetischen Methode, die ihm nur die Sätze und Beweise fertig mitteilt, stets auf die Lippen des Lehrers sehen muß. „Das größte Vergnügen aber, das wir kennen, ist die Wahrheit durch uns selbst zu finden." Ein weiterer Vorteil ist die größere Allgemeinheit und Sicherheit der Ergebnisse, wogegen sie allerdings etwas an „Schönheit" (wir würden heute vielleicht sagen: an Eleganz) verliert. Kästner macht hierzu die originelle, man möchte fast sagen, etwas philisterhafte Bemerkung: „Würde es wohl ein Fehler sein, wenn der Mathematikverständige, wie Männer, die ökonomisch denken, bei gleicher Jugend weniger Schönheit mit mehr Reichtum wählet". Als Vorzug des synthetischen Verfahrens wird anerkannt, daß es eine vorzügliche Denkübung ist, weil hier stets mit den Begriffen selbst operiert wird; dementsprechend wird vor einer rein mechanischen, gedankenlosen Anwendung der Buchstabenrechnung gewarnt, im übrigen aber der Vorwurf zurückgewiesen, daß das analytische Verfahren rein mechanisch sei. Vielmehr, sagt Kästner, überhebt es uns bloß einer beträchtlichen Denkarbeit; denn nachdem einmal die Aufgabe in die Sprache der Analysis übersetzt ist, läßt sich das Resultat mit einfachen, und zwar immer mit denselben Hilfsmitteln finden. Wer also diese besitzt, ist befähigt, eine Menge von Kenntnissen zu erlangen. „Der Analyst", schließt er, „gleicht einem Manne, der viel Geld hat, und dafür allemal die Güter haben kann, die er verlangt, und insofern sie für Geld feil sind." — Den entgegengesetzten Standpunkt vertritt Malfatti in der Einleitung zu seiner Schrift: „Della curva Cassiniana" (Pavia 1781); er verkennt zwar die Vorzüge der Analysis durchaus nicht, gibt aber doch der Synthese den Vorzug wegen ihrer größeren Eleganz, und weil sie den Geist zwingt, mit steter Aufmerksamkeit bei der Aufgabe zu bleiben, Hilfssätze zu suchen, die zum Hauptsatz in Beziehung stehen, und so allmählich das Ziel zu erreichen. Auch Malfatti sucht die Sache durch ein hübsches Bild zu veranschaulichen. Er vergleicht den Synthetiker mit einem Reisenden, der nur überhaupt ans Ziel kommen will, dabei aber oft an Ruhepunkten Halt macht, um alles Schöne zu genießen, das sich ihm bietet; diese Ruhepunkte würden den Neben- und Zwischenresultaten im Beweis entsprechen, von denen aus sich ein Ausblick auf weitere Beziehungen eröffnet. Der Analytiker dagegen, sagt er, gleicht einem Reisenden, der sich in einen Wagen einschließt, und sich durch dessen Mechanismus (der also dem

Mechanismus der Rechnungen verglichen wird) ans Ziel führen läßt. „Er kommt vielleicht früher ans Ziel, aber er hat weniger gesehen.“ — Eine besondere, eingehende und geistvolle Untersuchung hat Klügel dieser Frage gewidmet mit einer kleinen Schrift: „De ratione quam inter se habent in demonstrationibus mathematicis methodus synthetica et analytica“. Helmstädt 1767. Es wird darin zunächst der Unterschied zwischen synthetischer und analytischer Methode klar und scharf angegeben, der nicht sowohl darin besteht, ob Konstruktion oder Rechnung benutzt wird, sondern „ex interiore veritatum natura, et ratione quam in eruendis illis et deducendis sequuntur, petendum est“. Als charakteristisch für die synthetische wird angegeben, daß sie „die Quelle der Erfindung verdecke“ und die etwas malitiöse Bemerkung beigefügt, die Synthetiker (die Engländer, unter anderen Newton und Maclaurin werden genannt) tun dies, „um aus der Schwierigkeit der Beweise eine größere Berühmtheit ihres Geistes zu erlangen“; als weiterer Grund wird indes noch angegeben, daß sie „diese Methode allein als der Geometrie und der Mathematik überhaupt würdig, und der größten Strenge fähig ansehen“. Es wird dann weiter ausgeführt, daß bei der synthetischen Methode jeder Satz für sich aufgestellt und bewiesen werde; daher komme es, daß die Geometrie manchem „horrida et sterilis“ erscheine, daran schließt sich die ganz richtige Bemerkung, daß die Evidenz der geometrischen Beweise dazu verleite, diese Methode auf andere Wissensgebiete zu übertragen, für die sie nicht passe Die synthetische Methode sei auch zur Entdeckung neuer Wahrheiten weniger geeignet, außer in den Händen des Genies, was auch Kästner in der erwähnten Vorrede einmal sagt. Ferner wird hervorgehoben, daß die synthetische Methode immer nur Einzelfälle ins Auge fassen und jeden für sich beweisen müsse, während die analytische Formel einer vollständigen Allgemeinheit sich erfreue. Ein Beispiel für die Richtigkeit dieses letzteren Satzes bietet die synthetische Untersuchung der Kegelschnitte, wo jede der drei Kurven für sich betrachtet wird, während bei der analytischen Behandlung in der Regel ein Zeichenwechsel genügt, um einen für die Ellipse gefundenen Satz auf die Hyperbel zu übertragen Demgegenüber werden die Vorzüge der Analysis entwickelt, wobei noch ein Gedanke ausgesprochen wird, den wir nicht unerwähnt lassen wollen, nämlich: „Wenn uns jemals die Fähigkeit gegeben werden könnte, die Wirkung jeder Ursache mit ihren Folgen für alle übrigen für sich zu betrachten und mathematisch zu formulieren, so würde die ganze Natur, soweit sie meßbar ist („quanta quanta est“), in einem einzigen, aber gewaltigen analytischen Problem bestehen“ Es ist hier offenbar die Idee, die der sogenannten Laplaceschen

„Weltformel“[1]) zugrunde liegt, vollständig klar ausgesprochen. — Der synthetischen Methode wird eingeräumt, daß sie bei Lagebeziehungen den Vorzug verdiene, ferner zugegeben, daß eine einseitige Benutzung der Analysis ein Nachlassen der Schärfe des geometrischen Geistes bewirke, was sich bei den Franzosen bemerkbar mache. Den Schluß bildet der gewiß richtige Satz: „Es scheint, als ob ohne Schaden öfter, als es geschieht, wenn die Arbeit des Rechnens und Beweisens getan ist, einige kurze, philosophische Bemerkungen über den Ursprung und Zusammenhang der Wahrheiten, und den Weg, auf welchem man zu ihnen gelangt ist, beigefügt werden könnten“.

Die Opposition gegen die einseitige Anwendung der synthetischen Methode wird begreiflich, wenn man bedenkt, welche Schwierigkeiten ein derart geschriebenes Werk dem Verständnis bereitet. Speziell in England scheint sich diese Vorliebe für eine schwer verständliche Ausdrucksweise in einzelnen Fällen beinahe zum Spleen gesteigert zu haben, wenigstens kommt man auf diesen Gedanken, wenn man Sätze, wie den folgenden liest[2]): „A conic hyperbola being given, a point may be found, such that if from it there be drawn straight lines to all intersections of the given curve, with an infinite number of parabolas, or hyperbolas, of any given order whatever, lying between straight lines, of which one passes through a given point, and the other may be found, the straight lines so drawn, from the point found, shall be tangents to the parabolas or hyperbolas“. — Man wird darin nicht so leicht den einfachen Satz wiedererkennen: Zieht man von einem gegebenen Punkt an alle Kurven der Schar $y = px^n$ (wo p ein variabler Parameter, n eine Konstante ist) die Tangenten, so liegen die Berührpunkte auf einer Hyperbel.

Der zu Anfang erwähnte Charakter unserer Epoche als eines gewissen Ruhestadiums in der Entwicklung zeigt sich auch darin, daß in größerer Anzahl Werke veröffentlicht werden, die nicht sowohl der Bekanntmachung neuer Ergebnisse dienen, sondern sich die Aufgabe stellen, systematisch zusammenzufassen und zu ordnen, was die Forschung im Laufe der Zeit ergeben hatte, also Lehrbücher über größere Gebiete der Mathematik. Dahin gehört Kästners ausführliches Werk: „Anfangsgründe der Mathematik“, von dem die 1. Auflage 1758, die 2. 1770 erschien, und das in etwas breiter

[1]) Essai philosophique sur les Probabilités. Seconde édition (1814), p. 2 ff. Vgl. Dubois-Reymond, Über die Grenzen des Naturerkennens, 1872, wo auch in Anm. 5 auf eine Stelle ähnlichen Inhalts bei Leibniz aufmerksam gemacht ist. [2]) Brougham, General Theorems, chiefly Porisms, in the higher Geometry. Phil. Trans. Vol. 88 (1798), p. 378—396.

Darstellung auch das Wichtigste aus unserem Gebiet bringt. Es kommen in Betracht aus der ersten Hälfte des 3. Teiles die §§ 322 bis 623, in denen zunächst die Gerade (§§ 340—348), die Kegelschnitte (§§ 349—466) und einige höheren Kurven (Cissoide, Konchoide, §§ 467—496) behandelt werden, wie auch Fragen allgemeinerer Natur: Anzahl der Schnittpunkte einer Kurve mit einer Geraden, Anzahl der zur Bestimmung einer Kurve notwendigen Punkte, Zeichnung von Kurven, die durch ihre Gleichung gegeben sind. Daran schließen sich (§§ 514—611) die Grundzüge der analytischen Geometrie des Raumes, beginnend mit der Frage: „Wie die Natur der Flächen, welche Körper begrenzen, durch Gleichungen ausgedrückt werde" (§§ 514—519). Der Ausdruck ist bezeichnend für die Betrachtungsweise der Flächen in dieser Zeit, insofern diese fast immer als Begrenzung von Körpern erscheinen, nicht von diesen losgelöst als gewissermaßen selbständige Gebilde, eine Anschauung, die erst seit Gauß allgemein geworden zu sein scheint. Betrachtet werden namentlich Kegelflächen („deren Gleichungen gleichartige sind", §§ 529—544), sodann „runde Körper" (d. h. Rotationsflächen im heutigen Sprachgebrauch, §§ 545—548), deren allgemeine Gleichung aufgestellt wird ($z^2 = x^2 + y^2$; $Z = f(z)$), mit der Bemerkung, sie stelle einen „Körper" dar; ferner Schnitt einer Fläche mit einer beliebigen Ebene (§§ 549 bis 570), die stets durch ihre Spur in der xy-Ebene und ihre Neigung gegen diese gegeben gedacht wird. Das Verfahren wird dann auf den Rotationskegel angewendet und die hier auftretenden Möglichkeiten diskutiert. Den Schluß dieses Abschnitts bildet die Betrachtung einiger „transzendentischen, krummen Linien" (Spiralen, Zykloiden, §§ 571—623), von denen gesagt wird, daß ihre Ordnung „unendlich" sei.

Die zweite Hälfte des dritten Teiles ist der Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie gewidmet, sowohl in rechtwinkligen, als in Polarkoordinaten; bei den letzteren wird an Stelle des Winkels der Bogen eines Kreises von gegebenem Radius benutzt. Dieser Teil enthält: Tangente und Normale (§§ 63—107), Asymptote (§§ 108—119), Wendepunkte (§§ 112, 532—537), Quadratur (§§ 205 bis 212), Rektifikation (§§ 266—272), Krümmungskreis (§§ 538—556), Evolute und Evolvente (§§ 563—577), alles für ebene Kurven. Den Schluß bilden Betrachtungen über Kurven, die ihren Evoluten ähnlich sind (§§ 578—592), Kubaturen und Komplanationen usw. (§ 609 bis Schluß).

Vollständig, klar und eingehend findet sich die Anwendung der Analysis auf die Geometrie dargestellt in dem zweibändigen Werk: „Institutiones analyticae a Vincentio Riccato et Hieronymo Saladino"

(Bologna 1765), (Girolamo Saladini, 1731—1813, Professor der Mathematik in Bologna) für das namentlich die glückliche Verbindung von analytischer und geometrischer Betrachtungsweise charakteristisch ist. Der erste Band bringt zunächst eine historische Einleitung, sodann im ersten Buch („De algorithmo et de aequationibus primi et secundi gradus") die Definition der Koordinaten und das Wichtigste über die Gerade; im zweiten Buch („De lineis seu locis secundi gradus et de aequationibus tertii gradus, et quarti") werden die drei Kegelschnitte nacheinander behandelt und ihre Haupteigenschaften zusammengestellt; besonders wird auf die Verwendung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte zur graphischen Darstellung der Wurzeln von Gleichungen 3. und 4. Grades eingegangen. — Das dritte Buch („De locis tertii et superiorum graduum et de aequationibus excedentibus gradum quartum") beschäftigt sich mit Kurven höherer Ordnung, ihren Berührungen (zwei- und mehrpunktig), Asymptoten, singulären Punkten, oskulierenden Parabeln und dergl.; auch der Verzeichnung einer Kurve auf Grund ihrer Gleichung ist ein Kapitel gewidmet (Kap. 10), das allerdings nur die Fälle behandelt, wo die Gleichung nach einer der Variablen auflösbar ist, und für alle anderen Fälle bemerkt: „nulla suppetit methodus cognoscendi, qua figura praedita sit curva in finito spatio". Auch hier ist (Kap. 11) von der Verwendung von Kurven zur Darstellung von Gleichungswurzeln die Rede, wobei die richtige Bemerkung fällt, daß es sich nicht darum handle, Kurven von möglichst einfacher Gleichung zu finden, sondern solche, die möglichst genau, am besten mechanisch, gezeichnet werden können. Das 13. Kapitel beschäftigt sich mit Kurven von der Eigenschaft, daß zwischen den verschiedenen Ordinaten, welche zur gleichen Abszisse gehören, Beziehungen bestehen; ist z. B. deren Summe konstant, so muß der Koeffizient des zweithöchsten Gliedes in y konstant sein, u. ä.

Der zweite Band, dem ebenfalls eine historische Einleitung vorangeht, bringt eine erschöpfende Darstellung der Infinitesimalrechnung und ihrer Anwendung auf die Geometrie. Aus dem 1. Buch, betitelt: „De quantitatibus infinitesimis et de integratione formularum, quae unam tantum variabilem continent", kommen für unser Gebiet hauptsächlich in Betracht: die Quadratur (Kap. 5) und Rektifikation (Kap. 11) der Kurven; die Komplanation der Rotationsflächen, und Kubatur der Rotationskörper.

Das 2. Buch: „De methodo tangentium directa et inversa, de separatione indeterminatarum et de constructione earum aequationum, in quibus indeterminatae separari non possunt", beginnt mit der Bestimmung der Tangente, Normale, Subtangente und Subnormale ebener

Kurven, und bringt im Anschluß daran die Theorie der Maxima und Minima mit Anwendungen, des weiteren die Lehre von der Integration der Differentialgleichungen nach dem damaligen Stand der Wissenschaft („Methodus tangentium inversa“ im Sprachgebrauch jener Zeit). Hier ist auch die im Bd. III², S. 786 erwähnte Abhandlung V. Riccatis: „De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium commentarius“ (1752) in ihrem wesentlichen Inhalte angegeben (Kap. 14 und 15).

Das 3. Buch handelt De calculo et usu quantitatum differentialium altiorum graduum, also von Differentialen höherer Ordnung, und verbreitet sich zunächst über Integrationsmethoden für Differentialgleichungen höherer Ordnungen. Kap. 11 bringt eine nicht uninteressante Herleitung des Ausdrucks für den Krümmungsradius ϱ durch folgende einfache differential-geometrische Betrachtungen: Ist MN ein Kurvenbogen, der unendlich klein von der ersten Ordnung ist, und errichtet man in M und N die Normalen, die sich in C schneiden, so ist die Differenz $CM - CN$ unendlich klein von der dritten Ordnung. Daraus wird geschlossen, daß die Krümmung der Kurve mit der des Kreises übereinstimmt, der um C mit Radius CM beschrieben wird; für CM wird dann, ebenfalls geometrisch, die Formel hergeleitet:

$$\frac{ds^3}{dyd^2x - dxd^2y} = \varrho.$$

Auf die Besprechung der Evoluten folgt die Ableitung des Ausdrucks für den Krümmungsradius in Polarkoordinaten, dann verschiedene Beispiele. Das 12. Kapitel ist den von Joh. Bernoulli untersuchten kaustischen Linien gewidmet. Kap. 13 und 14 enthalten Anwendungen und einige Problemata inversa, das 15. handelt von singulären Punkten, unter welchen jedoch nur Wende- und Rückkehrpunkte verstanden sind (also nicht Doppelpunkte). Außerdem werden hier einige Bemerkungen darüber gemacht, inwieweit eine Kurve durch geradlinige Elemente ersetzt gedacht werden darf. Das 16. Kapitel ist überschrieben: De trajectoriis. Hierbei werden unter „Trajektorien“ einer Kurvenschar ganz allgemein Kurven verstanden, quarum constructio peragitur per quantitatem quam sectio curvarum determinat; d. h. also Kurven, die nach irgend einem Gesetz von Schnitten der gegebenen Kurvenschar abhängen, ein Begriff, der sonst nicht üblich zu sein scheint[1]). Ein Beispiel (das 4. des Kapitels) mag erläutern, um was es sich handelt. Die gegebene Kurvenschar werde gebildet

---

[1]) Vgl. Klügel, Mathematisches Wörterbuch, V, S. 92.

von konzentrischen Kreisen, die von einer Sekante und einem zu ihr parallelen Durchmesser geschnitten werden. Ein zweiter Durchmesser stehe auf dem ersten senkrecht und schneide (Fig. 27) einen Kreis der Schar in A. Trägt man dann auf der Tangente des Punktes A ein Stück AC gleich dem Bogen BD des Kreises zwischen der Sekante und dem ihr parallelen Durchmesser ab, und wiederholt diese Konstruktion für jeden Kreis der Schar, so bildet der geometrische Ort der Punkte C eine „Trajektorie" der Kreisschar in diesem Sinn. In der zweiten Hälfte des Kapitels werden Trajektorien im üblichen Sinn (rechtwinklige und schiefwinklige) behandelt, sowie die sogenannten „reziproken" Trajektorien, von welch letzteren Klügel[1]) mit Recht sagt, daß in den Lehrbüchern sehr wenig darüber zu finden sei. Da auch Euler[2]) sich mit diesen Kurven beschäftigt hat, so sei ihre Definition hier kurz angegeben. Eine reziproke Trajektorie hat folgende Eigenschaft: wird sie um eine in ihrer Ebene liegende Achse umgeklappt, und dann längs dieser Achse parallel verschoben, so schneidet die umgeklappte Kurve die ursprüngliche überall unter demselben Winkel. Ist dies nicht bloß für eine bestimmte Achse, sondern auch für jede Parallele dazu der Fall, so heißt die Kurve nach Joh. Bernoulli[3]) „Pantagonia"; auch diese wird besprochen. Den Schluß (Kap. 17 und 18) bildet ein Auszug aus Eulers „Methodus inveniendi".

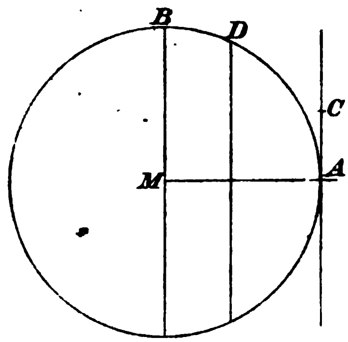


Fig. 27.

In Karstens großem Werk: „Lehrbegriff der gesammten Mathematik" kommt für unser Gebiet nur der VII. Teil, „Perspektive" (1775) in Betracht, der in systematischer und eingehender Weise die Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises behandelt, und daher bei der projektiven Geometrie in Abschnitt XXV näher besprochen werden wird.

Auch bei Bossut, „Traités de calcul différentiel et de calcul intégral" (Paris 1798) sind verschiedene Kapitel des I. Bandes der Anwendung der Analysis auf die Geometrie gewidmet, Kap. 2 gibt eine kurze Übersicht über die analytische Geometrie: ebene Kurven (bei denen die „courbes géométriques ou algébriques" von den „courbes mécaniques" unterschieden werden), krumme Flächen, Raumkurven. Kap. 3 enthält die Tangente und Normale ebener Kurven in rechtwinkligen

[1]) Klügel, Mathematisches Wörterbuch, V, S. 136. [3]) s. u. S. 509.
[2]) Opera, T. II, p. 600 (nach Klügel).

und Polarkoordinaten, Kap. 5 und 6 die Bestimmung der Maxima und Minima, Kap. 7 Wende- und Rückkehrpunkte, Kap. 8 Krümmungsradius, Kap. 9 Krümmung der Flächen mit Hinweis auf Eulers „Mémoire sur la courbure des surfaces" (s. p. 545 ff.). Aus der Integralrechnung ist hauptsächlich der Bericht über die Arbeiten von Fagnano, Euler u. a. über die Rektifikation der Kegelschnitte zu erwähnen.

Endlich gibt Vega in seinen für das K. K. Artilleriekorps bestimmten „Vorlesungen über Mathematik" (1786—1802) im II. Band, 6. Hauptstück, 1. Abschnitt, §§ 620—625 das Wichtigste aus der Kurvenlehre und Anwendung der Infinitesimalrechnung auf ebene Kurven, und im 2. Abschnitt, §§ 630—674 eine Darstellung der Kegelschnitte. Bemerkenswert ist, daß diese hier durch ihre Fokaleigenschaften definiert werden, die sonst in den einschlägigen Werken dieser Zeit nicht besonders hervortreten. Im ganzen Werke steht, seinem Zweck entsprechend, die praktische Anwendung im Vordergrund.

Gehen wir nun zur Darstellung der Fortschritte über, die auf den verschiedenen Gebieten der analytischen Geometrie in den Jahren 1759—1799 gemacht worden sind, so hat die wissenschaftliche Forschung in bezug auf die Kegelschnitte nicht gerade viel Neues von Bedeutung produziert. Auch die Behandlungsweise schließt sich meist an die von Euler (Introductio II, Kap. 5) gegebene an; als Fundamentalsätze erscheinen gewöhnlich die auch von Euler als solche bezeichneten (vgl. III², S. 779/780), nämlich: 1) daß der Ort der Mittelpunkte paralleler Sehnen eine Gerade ist, und 2) der Satz von den Abschnitten paralleler Sehnenpaare: Wird ein Kegelschnitt von zwei Paaren paralleler Sehnen geschnitten, so ist (s. Fig. 28):

$$\frac{A_1O_1 \cdot B_1O_1}{C_1O_1 \cdot D_1O_1} = \frac{A_2O_2 \cdot B_2O_2}{C_2O_2 \cdot D_2O_2},$$

gleichgültig, ob die Durchschnittspunkte O_1 und O_2 innerhalb oder außerhalb des Kegelschnitts liegen. Diese beiden Sätze bilden in der Regel den Ausgangspunkt, von dem aus die weiteren bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte abgeleitet werden. Gleich am Anfang unserer

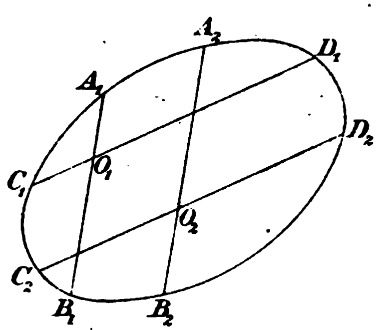


Fig. 28.

Periode stehen zwei Werke, die für den oben erwähnten Gegensatz zwischen synthetischer und analytischer Behandlungsweise charakteristisch sind. Das eine ist: Hamilton: „Treatise of conic sections"

(1758) (Hugh Hamilton, 1729—1805, war eigentlich Theologe, starb als Bischof von Ossory), das andere das S. 454 genannte kleine Buch von Hube. Hamiltons Werk ist ganz in streng euklidischer Form abgefaßt, und vermeidet auch in Äußerlichkeiten peinlich alles, was nur von ferne an algebraische Behandlung erinnern könnte, sogar das Gleichheitszeichen, das durch die Wendung „is equal to" ersetzt wird; das Produkt zweier in einem Endpunkt A zusammenstoßenden Strecken AB und AC heißt „the rectangle under BAC" usw. Angenehm für die historische Betrachtungsweise ist, daß der Autor die von ihm neugefundenen Sätze als solche bezeichnet. — Der Grundgedanke des ganzen Werkes ist, die Eigenschaften der Kegelschnitte aus denen des Kegels abzuleiten, der hier, wie überhaupt meist in der damaligen Zeit, als schiefer Kreiskegel definiert ist[1]). Die streng synthetische Darstellung nötigt den Verfasser, seine Sätze meist für jeden der drei Kegelschnitte besonders zu formulieren und zu beweisen, wodurch die Schreibweise etwas ins Breite geht, und worunter namentlich die Kürze und Klarheit der Formulierung leidet. So erscheint z. B. der zweite der oben (S. 461) erwähnten Fundamentalsätze (I. Buch, Satz 18) in folgender Form:

„If two right lines meeting each other be always parallel to two right lines given in position; according as they both touch or cut, or one of them touches and the other cuts a conic section or opposite sections (d. h. die beiden Äste einer Hyperbel); the squares of the segments of the tangents, or the rectangels under the segments of the secants between the point of concours of the two lines, and the section, or sections, will be in a constant ratio to each other, wheresoever the point of concours of the right lines be taken."

Das Buch erschöpft seinen Stoff vollständig und ist klar geschrieben, nur die harmonischen Eigenschaften kommen kurz weg; der Autor bemerkt in der Vorrede über De la Hires Methoden (vgl. III², S. 120ff.): „this expedient has rather embarrassed the doctrine of conic sections". Verschiedene Eigenschaften hat der Verfasser neu entdeckt; bemerkenswert ist, daß der sogenannte Dandelinsche Satz[2]) schon bei ihm auftritt (II. Buch, Satz 37), allerdings in etwas anderer Fassung; er lautet so: „Let GVH (s. Fig. 29) be a right cone, and PAR a conic section in its surface, and LNO a circle which does not meet the section: let its distance AL from the vertex (Scheitel) of the section be equal to AF, the distance of the same vertex from the focus F nearer to this circle; I say, that the intersection of the plane of this circle with the plane of the section will be its

[1]) Vgl. S. 465. [2]) Nouv. Mém. de l'Acad. de Bruxelles 1822, T. II, p. 172.

directrix, and that PN a side (Mantellinie) of the cone intercepted between this circle and any point P in the section will be equal to a right line drawn from the same point to the focus F nearer to this circle“.

Der Verfasser sagt, er habe diesen Satz gefunden bei dem Versuch, den Ursprung der Leitlinie, dem Grundgedanken gemäß, aus der Natur des Kegels herzuleiten. Der Beweis ist charakteristisch für die ganze Darstellungsweise, und sei daher hier kurz wiedergegeben.

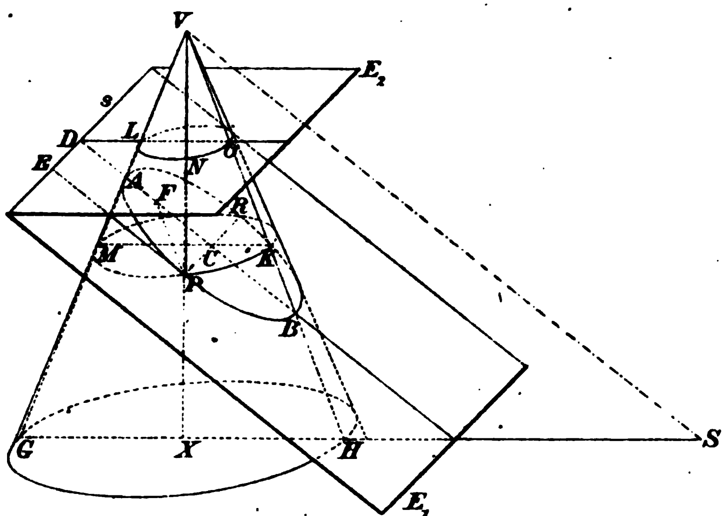


Fig. 29.

E_1 sei die Ebene des Kegelschnitts, E_2 die des Kreises, s ihre Schnittgerade; Ebene GVH sei senkrecht s und schneide s in D, E_1 nach AB, E_2 nach LO, so daß AB die große Achse des Kegelschnitts ist; C sei sein Zentrum, durch C sei eine Ebene senkrecht zur Kegelachse gelegt, die aus dem Kegel den Kreis MK ausschneidet; dieser treffe den Kegelschnitt in P und R. Durch die Spitze V des Kegels sei eine Parallele zu AB gezogen, die die Ebene des Grundkreises in S trifft. Dann ist

1) zu beweisen, daß s die Direktrix des Kegelschnitts ist. Nun ist nach einem vorher bewiesenen Satz vom Kegel:

$$AC \cdot BC : MC \cdot CK = VS^2 : HS \cdot GS,$$

aber:

$$AC \cdot BC = AC^2; \quad MC \cdot CK = CP^2.$$

Durch Einsetzen dieser Werte folgt:

$$CA^2 : CP^2 = VS^2 : HS \cdot GS$$

und daraus:

$$CA^2 : (CA^2 - CP^2) = VS^2 : (VS^2 - HS \cdot GS)$$

oder:

$$CA^2 : CF^2 = VS^2 : VG^2.$$

Nun ergibt sich aber durch ähnliche Dreiecke:

$$VS : VG = CA : CM;$$

also nach der letzten Gleichung:

$$AM = CF.$$

Ferner ist:

$$AM : CA = LA : DA,$$

also, da $AM = CF$ und $LA = FA$ (nach Voraussetzung):

$$CF : CA = FA : DA,$$

oder auch:

$$CF : FA = CA : DA.$$

Daraus folgt aber:

$$CF : CA = CA : CD.$$

Darnach ist aber D der Schnittpunkt der Achse mit der Direktrix und da $s \perp AD$ ist, so ist s die Direktrix, q. e. d.

2) ist zu beweisen, daß die Entfernung eines beliebigen Punktes des Kegelschnitts vom Brennpunkt F gleich dem Stück seiner Mantellinie zwischen dem Kreis LO und dem Punkt ist. Als dieser beliebige Punkt wird der schon vorher definierte Punkt P benutzt, so daß auch C nicht mehr der Mittelpunkt, sondern einfach der Fußpunkt des Lotes von P auf AB ist, was aber nicht bemerkt wird; es ist also zu beweisen, daß $PF = NP$. Zu diesem Zweck wird durch P eine Parallele zu AB gezogen, die s in E trifft, dann ist $PE = CD$. Ferner, da DE Direktrix ist:

$$PF : PE = AF : AD.$$

Aus dem Proportionallehrsatz folgt:

$$ML : CD = LA : DA.$$

Da $PE = CD$ und $LA = AF$ ist, ergibt sich aus den beiden letzten Proportionen:

$$ML = PF,$$

und da $ML = PN$, so ist:

$$PF = NP,$$

q. e. d.

Die übrigen vom Verfasser neu gefundenen Sätze sind von geringerer Bedeutung.

Von Hubes Buch (Joh. Michael Hube, 1737—1807; Professor am Kadettenkorps in Warschau) war oben schon die Rede. Der Verfasser will, von Kästner veranlaßt, die Eigenschaften der Kegelschnitte auf analytischem Weg herleiten und geht demgemäß aus von der allgemeinen Gleichung 2. Grades, indem er daraus ähnlich wie Euler (vgl. III², a. a. O.) die erwähnten beiden Haupteigenschaften herleitet. Ebenso werden die übrigen, bekannten Eigenschaften der Kegelschnitte durch Rechnung entwickelt; man kann indes nicht sagen, daß Hubes Schrift der analytischen Methode zu einer besonderen Empfehlung gereichen würde; der Gang der Rechnung ist recht unübersichtlich; man sieht nicht ein, wie der Verfasser zu seinen Herleitungen kommt; dazu erschweren viele Druckfehler das Verständnis.

Von weiteren zusammenfassenden Werken ist Karstens „Lehrbegriff der gesammten Mathematik" schon genannt. Hier sei nur im Zusammenhang mit den Kegelschnitten eine Bemerkung über den Kegel erwähnt, aus der hervorgeht, daß die Identität des schiefen Kreiskegels und des geraden elliptischen Kegels damals noch nicht bekannt war. Am Schlusse des XV. Abschnittes (Bd. VII, § 269) führt Karsten an, daß Euler Schnitte eines senkrechten Kegels mit elliptischer Grundfläche betrachte, und knüpft daran die Bemerkung: „Unter diesem Begriff sind nicht alle Apollonischen schiefen Kegel enthalten, weil es schiefe Kegel gibt, wovon die senkrechten Schnitte Kreise sind.... Ob und inwieweit dieser elliptische Kegel mit dem Apollonischen einerlei sei, würde eine besondere Untersuchung erfordern."

Von Charles Hutton (1737—1823, Professor der Mathematik an der Militärakademie zu Woolwich, später Examinator am Kollegium der englisch-ostindischen Kompagnie zu Addiscombre, vgl. S. 16) stammt ein Werk: „Elements of conic sections" (1789), das nach der Vorrede für die Royal Military Academy bestimmt ist. Montucla nennt es in seiner Geschichte der Mathematik[1]: „un modèle de précision et de clarté", ein Urteil, das namentlich in bezug auf die Form der Darstellung sehr berechtigt ist. Hutton hat nämlich hier, zum erstenmal, wie er angibt, jede Gleichung auf eine besondere Zeile drucken lassen, was natürlich sehr zur Übersichtlichkeit beiträgt. Das Buch enthält übrigens nicht bloß Kegelschnitte, sondern am Schluß noch eine Reihe praktischer Aufgaben über Körper- und Flächenberechnung, Geodäsie, Mechanik, Ballistik u. a.

[1]) 2. Aufl., III. Bd., S. 13.

Auch Fergolas Buch: „Le sezioni coniche" (1791), über das ich nur nach Loria[1]) berichten kann, bringt nichts wesentlich Neues, hebt aber die Analogie zwischen den drei Kurven in der Art hervor, daß die entsprechenden Sätze einander gegenübergestellt werden. Das Gleiche ist über die Schrift von Riche de Prony, die rein analytisch verfährt, zu sagen: „Exposition d'une nouvelle méthode pour construire les équations indéterminées, qui se rapportent aux sections coniques" (1790).

Die Abhandlungen über Einzelheiten aus der Lehre von den Kegelschnitten sind natürlich ziemlich zahlreich, aber viel Neues, Bemerkenswertes ist nicht zutage gefördert worden. Freilich ist ein Gebiet der Mathematik, das späterhin eine damals noch ungeahnte Ausdehnung gewann, die Theorie der elliptischen Integrale und Funktionen, von Untersuchungen über die Rektifikation der Kegelschnitte ausgegangen, speziell von Sätzen über Ellipsenbögen, deren Summe oder Differenz sich algebraisch ausdrücken und daher geometrisch konstruieren läßt.

Euler hat, wie es scheint, die Wichtigkeit und Tragweite derartiger Sätze erkannt; er suchte die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf dieses Gebiet zu lenken, indem er 1754 in den Leipziger Annalen anonym den Satz zum Beweis vorlegte, daß die Differenz gewisser Ellipsenbögen rektifizierbar sei, und gab dadurch den ersten Anstoß zu weiteren Untersuchungen. Da jedoch diese ganze Frage in den XXVI. Abschnitt gehört, werden die einschlägigen Arbeiten dort besprochen werden. Hier sei in diesem Zusammenhang nur noch eine Note von Euler aus dem Jahre 1773 erwähnt: „Nova series infinita maxime convergens perimetrum ellipsis exprimens"[2]), worin er für den Ellipsenquadranten die gut konvergierende Reihe herleitet:

$$\frac{c\pi}{\sqrt{2}}\left\{1-\frac{1\cdot 1\cdot n^2}{2\cdot 4\cdot 2}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot n^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot n^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 6}-\cdots\right\}$$

$$\left(c^2=a^2+b^2;\quad n=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right).$$

Eine Anzahl von Untersuchungen befassen sich mit Maximal- oder Minimalaufgaben, die zu den Kegelschnitten in Beziehung stehen.

[1]) Nicola Fergola e la scuola di matematica che lo ebbe a duce (Genua 1892).

[2]) N. C. P. XVIII, p. 71—84. Da wir die Veröffentlichungen der St. Petersburger Akademie in diesem Abschnitt oft zu zitieren haben, mögen sie mit folgenden Abkürzungen bezeichnet werden:

N. C. P. = Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,
A. P. = Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,
N. A. P. = Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae,
M. P. = Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg.

Hierher gehört eine Reihe von Sätzen, die Edward Waring[1]) in seinem eigenartigen Buch: „Proprietates algebraicarum curvarum" (Cambridge 1762), meist ohne Beweis, angibt. Es ist ein geistreiches, vielseitiges Werk, durchaus original gedacht, und jedenfalls eine der bedeutendsten Erscheinungen der ganzen Epoche auf diesem Gebiet; leider aber durch die knappe Ausdrucksweise und überhaupt durch die ganze Darstellung nicht leicht verständlich. Das Buch scheint wohl aus diesem Grunde den Zeitgenossen, wenigstens auf dem Kontinent, ziemlich unbekannt geblieben zu sein; in den zahlreichen Abhandlungen unseres Zeitraumes, ebenso bei Klügel (Mathematisches Wörterbuch) konnte ich es nicht erwähnt finden[2]); auch sind die von Waring angegebenen neuen Gedanken und Gesichtspunkte, soviel ich sehe, nicht weiter verfolgt worden. — Das Werk ist in 4 Bücher eingeteilt, von denen hier hauptsächlich das vierte Buch in Betracht kommt. Das von Waring ausgedachte Prinzip, aus dem er seine Sätze herleitet, wird folgendermaßen formuliert: „quantitates, quae ad singulum curvae punctum recipiant maximum vel minimum, perpetuo evadunt inter se aequales". Der Sinn dieses in seiner Kürze nicht recht klaren Satzes ist etwa folgender: Man kann die Bedingungen aufstellen, unter welchen irgend eine Größe für einen Kurvenpunkt einen extremen Wert annimmt (so ist z. B. für einen Punkt P einer beliebigen Kurve die Summe seiner Entfernungen von zwei festen Punkten F_1 und F_2 dann ein Minimum, wenn PF_1 und PF_2 mit der Kurventangente gleiche Winkel bilden). Wenn es nun eine Kurve gibt, wo diese Bedingung für jeden Kurvenpunkt erfüllt ist (also in dem angeführten Beispiel die Ellipse), so ist für diese Kurve die betreffende Größe konstant. Dieses Prinzip wird nun z. B. in folgender Weise benutzt: Es wird bewiesen, daß ein Vieleck, das einem geschlossenen Oval so umbeschrieben ist, daß seine Seiten von den Berührpunkten halbiert werden, unter allen dem Oval umbeschriebenen Vielecken von gleicher Seitenzahl den kleinsten Inhalt hat. Daraus wird nun geschlossen, daß alle solche Vielecke, die demselben Oval umbeschrieben sind, gleichen Inhalt haben. Ob es aber überhaupt mehrere solche gibt, und wie man sie findet, diese Frage wird gar nicht berührt. Solche und ähnliche, für beliebige Ovale geführte Beweise werden dann auf Kegelschnitte angewendet und liefern Sätze wie die folgenden:

Sind einer Ellipse zwei Polygone von gleicher Seitenzahl so umbeschrieben, daß jede Seite von ihrem Berührpunkt halbiert wird, so haben sie gleichen Flächeninhalt (Theorem 19).

Verbindet man die Ecken (oder Berührpunkte) beider Polygone

[1]) S. 92 ff. [2]) Dagegen ist bei Chasles, Aperçu historique, p. 153, das Buch erwähnt.

mit dem Mittelpunkt, so ist die Summe der Quadrate dieser Verbindungslinien für beide Polygone dieselbe.

Werden einer Ellipse zwei Polygone von gleicher Seitenzahl so einbeschrieben, daß je zwei anstoßende Seiten mit der Tangente im Eckpunkt gleiche Winkel machen, so haben sie gleichen Umfang (Theorem 20).

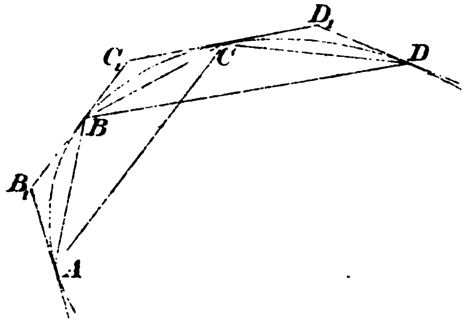


Fig. 30.

Sind einem Kegelschnitt (Fig. 30) zwei Polygone von gleicher Seitenzahl so einbeschrieben, daß je eine zwei Seiten spannende Diagonale der Tangente des gegenüberliegenden Eckpunkts parallel ist (also z. B. $AC \parallel B_1C_1$; $BD \parallel C_1D_1$ usw.), so haben die Polygone gleichen Inhalt (Probl. 24, Exempl. 2) u. ä.

Was die Darstellungsweise betrifft, so werden zunächst die Sätze, meist ohne Beweis, angeführt; erst am Schlusse wird das Prinzip genannt, aus dem sie fließen und das hier zum besseren Verständnis vorangestellt wurde. Mit diesem Prinzip verbindet Waring ein zweites, dessen Inhalt folgender ist: Eliminiert man aus zwei Gleichungen in x und y vom Grade m und n eine Unbekannte, etwa x, so ist für die resultierende Gleichung in y die Summe der „Wurzeln" (d. h. der Ordinaten der Schnittpunkte der beiden durch die Gleichungen dargestellten Kurven) gleich dem negativen Koeffizienten des zweithöchsten Gliedes in y, also des Gliedes von der Ordnung $mn - 1$. Dieser hängt aber nur von Koeffizienten der Glieder höchster und zweithöchster Ordnung in den beiden ursprünglichen Gleichungen ab. Das Gleiche gilt natürlich bei der Elimination von y. Stimmen also zwei Paare von Gleichungen in diesen Gliedern überein, so ist die Summe der Schnittpunktskoordinaten der ihnen entsprechenden Kurvenpaare beidemal dieselbe. Da Waring jedoch seinen Sätzen meist keine Beweise beifügt, so ist nicht recht ersichtlich, wo und in welcher Weise dieses Prinzip Anwendung findet[1]. — Wir werden von Warings Buch noch öfter zu sprechen haben.

[1] Auch hier ist es vielleicht von Interesse, die Formulierung bei Waring kennen zu lernen: „Sint duae aequationes (m et n dimensionum) duas incognitas quantitates x et y habentes; reducantur hae duae aequationes in unam, ita ut exterminetur altera incognita quantitas x: si aequatio resultans ad nm dimensiones ascendat, summa eius radicum pendet e terminis, in quibus inveniuntur

Es sind in diesem Zusammenhang (Maxima und Minima) noch einige Abhandlungen von Euler und Fuß zu nennen. Die erste von Euler: „De ellipsi minima dato parallelogrammo rectangulo circumscribenda"[1]) ergibt das Resultat, daß die Halbachsen der gesuchten Ellipse $a = f\sqrt{2}$; $b = g\sqrt{2}$ sind, wenn f und g die beiden Rechtecksseiten bezeichnen. Auch für die Ellipse von kleinstem Umfang wird die entsprechende Aufgabe in Angriff genommen, die natürlich hier nur durch ein Annäherungsverfahren lösbar ist. Das hier für ein Rechteck gelöste Problem hat Euler später auf ein beliebiges Viereck verallgemeinert in einer Arbeit vom 4. September 1777[2]): „Problema geometricum, quo inter omnes ellipses, quae per data quatuor puncta traduci possunt, ea quaeritur, quae habet aream minimam"[3]). Die hier gestellte Aufgabe wird in der Weise gelöst, daß zwei Gegenseiten des Vierecks $ABCD$, AB und CD als Koordinatenachsen dienen, und ihr Schnittpunkt O als Anfangspunkt. Zur Abkürzung wird nun gesetzt: $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ und $OD = d$, und gezeigt, daß ein Kegelschnitt:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

durch die vier Ecken des Vierecks geht, wenn

$$A = cd,\ C = ab,\ 2D = -cd(a+b);\ 2E = -ab(c+d);\ F = abcd$$

ist; hierbei ist also B noch willkürlich und wird als variabler Parameter eingeführt, so daß die Fläche des Kegelschnitts als eine Funktion von B erscheint. Es mag bemerkt werden, daß die etwas umständliche Integration, die zur Berechnung dieser Fläche führt, in eleganter Weise durch Benutzung der affinen Verwandtschaft von Kreis und Ellipse bewerkstelligt wird. Der so gewonnene Ausdruck wird nach B differenziert und liefert als Bedingung für den kleinsten Inhalt folgende Gleichung 3. Grades für B:

$$F \cdot B^3 - 4DE \cdot B^2 + B(3CD^2 + 3AE^2 - ACF) - 2ACDE = 0,$$

wo natürlich für die Koeffizienten $A, C, D, E, F \ldots$ ihre oben be-

n et $n-1$ dimensiones in una, m et $m-1$ dimensiones in altera, et sic deinceps; et exinde: si modo sint duae aliae aequationes n et m dimensionum, quae involvant quantitates z et v, et sint termini in his respectivis aequationibus, in quibus inveniuntur dimensiones n et $n-1$, m et $m-1$ respective, iidem ac in duabus praedictis aequationibus, tum summa omnium valorum quantitatum x et y eadem erit ac summa omnium valorum quantitatum z et v".

[1]) A. P. 1780, Tl. II, p. 3—17. [2]) In den N. A. P. und M. P. ist das Datum angegeben, an dem die betreffende Arbeit vorgelegt wurde; hierauf beziehen sich die Angaben im folgenden. [3]) N. A. P. IX, p. 132—145.

stimmten Werte in $a, b, c, d \ldots$ einzusetzen sind. Euler zeigt noch, daß diese Gleichung mindestens eine reelle Wurzel hat und macht eine Anwendung auf den Spezialfall des Parallelogramms.

In einer zweiten Abhandlung, die am gleichen Tage vorgelegt wurde, löst Euler dieselbe Aufgabe für das Dreieck. Sie ist betitelt: „Solutio problematis maxime curiosi, quo inter omnes ellipses, quae circa datum triangulum circumscribi possunt, ea quaeritur cuius area sit omnium minima“[1]). Da sich hier von den fünf unabhängigen Konstanten der allgemeinen Ellipsengleichung nur drei bestimmen lassen, so hängt der Flächeninhalt noch von zwei unabhängigen Variabeln ab. Nimmt man zwei Seiten des gegebenen Dreiecks, etwa a und c, als Koordinatenachsen, so lautet die Gleichung der gesuchten Ellipse:

$$cx^2 + acxy + ay^2 - ac^2x - a^2cy = 0.$$

Aus dieser Gleichung leitet Euler her, daß der Mittelpunkt der Ellipse in den Schwerpunkt des Dreiecks fällt, und daß die Tangente in jeder Ecke des Dreiecks der Gegenseite parallel ist. An die erste dieser beiden Arbeiten knüpft Fuß in einer Note vom 31. August 1795: „Dilucidationes super problemate geometrico de ellipsi minima per data quatuor puncta ducenda“[2]) an und diskutiert die dort gefundene Gleichung 3. Grades eingehender mit dem Resultat, daß von den drei Wurzeln derselben eine eine Ellipse, die beiden andern Hyperbeln bestimmen, die natürlich dem Problem in der Eulerschen Fassung nicht genügen, wohl aber, wie Fuß bemerkt, dem allgemeineren: „Inter omnes lineas curvas secundi ordinis per data quatuor puncta transeuntes eas invenire, in quibus rectangulum ex semiaxibus factum sit omnium minimum“. Fuß berechnet ein Zahlenbeispiel und wendet seine Resultate auch auf den Fall an, daß statt zwei Punkten einer mit seiner Tangente gegeben ist.

Um Eulers Arbeiten über Kegelschnitte hier vollends zu besprechen, sei noch eine Untersuchung von ihm erwähnt: „Solutio trium problematum difficillimorum ad methodum tangentium inversam pertinentium“. Die Arbeit wurde am 12. November 1781 eingereicht, aber erst 1826 veröffentlicht[3]). Die späte Veröffentlichung erklärt sich damit, daß Euler vor seinem Tode den Wunsch geäußert hat, die Veröffentlichungen der Petersburger Akademie möchten noch 20 Jahre nach seinem Tode Arbeiten von ihm enthalten[4]), ein Wunsch, den die Akademie in Ehren gehalten hat (s. die Vorrede zu M. P. XI). Die drei Aufgaben, die Euler hier behandelt, sind:

---

[1]) N. A. P. IX, p. 146—153. [2]) Ebenda, XI, p. 187—212. [3]) M. P. X. p. 16—26. [4]) In den M. P. ist sogar von 40 Jahren die Rede.

1) Alle Kurven zu finden von der Eigenschaft, daß die von zwei festen Punkten nach einem beliebigen Kurvenpunkt gezogenen Strahlen mit der Tangente gleiche Winkel machen.

2) Gegeben eine Gerade und auf ihr ein Punkt A. Von A ist nach einem beliebigen Kurvenpunkt ein Strahl AP gezogen, der nach seiner Reflexion an der Kurve die Gerade in O schneidet. Alle Kurven von der Eigenschaft zu finden, daß $AP + PO$ konstant sei.

3) Alle Kurven von der Eigenschaft zu finden, daß die von zwei festen Punkten auf eine beliebige Tangente gefällten Lote ein konstantes Produkt haben.

Die Untersuchung liefert das bemerkenswerte Resultat, daß sich in allen drei Fällen nur Kegelschnitte ergeben, daß es also außer diesen keine Kurven gibt, die eine der genannten drei Eigenschaften besitzen.

In den A. E. (1771), p. 131 ff., leitet ein Anonymus einen nicht uninteressanten Satz her, den er selbst als „Theorema elegantissimum" bezeichnet, nämlich: Zieht man in einem Kegelschnitt von einem Brennpunkt O aus drei Radienvektoren OF, OG, OH und beschreibt um O einen Kreis mit dem Radius $r = \sqrt[3]{OF \cdot OG \cdot OH}$, der den Kegelschnitt in F', G', H' schneidet, so ist:

$$\frac{p}{r} = \frac{\Delta F'G'H'}{\Delta FGH},$$

wo p der Parameter des Kegelschnittes ist $\left(p = \frac{b^2}{a}\right)$.

Endlich untersucht Fuß in einer Arbeit vom 19. April 1798, betitelt: „Observationes circa ellipsin quandam prorsus singularem"[1]), die Kurve, die entsteht, wenn man in einem Kreis um den Koordinatenursprung jede Ordinate um ihre Abszisse verlängert. Die Kurve ist eine Ellipse, von der eine Reihe merkwürdiger Eigenschaften nachgewiesen werden, z. B. gilt für ihre Halbachsen a und b: $ab = r^2$; $a - b = r$ (r = Radius des Kreises); die vier lunulae, die von dem Kreis und der Ellipse gebildet werden, haben gleichen Inhalt; die Differenz zwischen dem Umfang der Ellipse und dem des Kreises ist nahezu gleich den von der Ellipse eingeschlossenen Kreisbögen, u. a.

Höhere ebene Kurven.

Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, sind in der Theorie der höheren ebenen Kurven keine wesentlich neuen Ideen von allgemeinerer Bedeutung zu verzeichnen; die meisten einschlägigen Arbeiten

---

[1]) N. A. P. XV, p. 71—87.

sind Spezialuntersuchungen über einzelne Kurven und Kurvengattungen, die freilich manches Interessante zutage gebracht haben, aber meist isoliert stehen und wenig Zusammenhang miteinander zeigen. Dadurch ist natürlich die Übersicht über diesen Zweig der Mathematik und seine Entwicklung erschwert; immerhin lassen sich wenigstens einige Gruppen verwandter Untersuchungen zusammenfassen. — Die Literatur ist meist in Akademieschriften zerstreut; größere Werke, die sich speziell mit den ebenen Kurven befassen, sind wenig erschienen. Zu nennen ist hier hauptsächlich das schon S. 467 angeführte und charakterisierte Buch von Waring: „Proprietates algebraicarum curvarum". Über das auf die Kegelschnitte bezügliche vierte Buch ist oben schon berichtet worden. Hier ist nun der Inhalt der beiden ersten Bücher in der Kürze anzugeben.

Das 1. Buch enthält allgemeine Sätze über algebraische Kurven beliebiger Ordnung und beginnt mit einer Definition der Durchmesser, von denen Waring verschiedene Ordnungen unterscheidet. Deren Definition läßt sich am einfachsten folgendermaßen angeben: Wenn in einem schiefwinkligen Koordinatensystem zu jeder Abszisse $n+1-i$ Ordinaten einer Kurve n^{ter} Ordnung gehören, deren algebraische Summe verschwindet, so heißt die Abszissenachse ein Durchmesser i^{ter} Ordnung der Kurve. Es werden die analytischen Bedingungen hierfür angegeben; für einen Durchmesser 1. Ordnung muß z. B. in der Kurvengleichung:

$$Ay^n + (a + bx)\,y^{n-1} + (c + dx + ex^2)\,y^{n-2} + \cdots = 0$$

das 2. Glied mit y^{n-1} verschwinden. Daran schließen sich Formeln für Koordinatentransformation; mit Hilfe derselben wird z. B. untersucht, ob eine Gerade ein Durchmesser ist, indem sie einfach als Abszissenachse eingeführt wird. Ferner wird die Anzahl der Durchmesser 1. Ordnung bestimmt, die ihre Ordinaten unter einem gegebenen Winkel α schneiden, und gezeigt, daß diese Zahl höchstens $= 2n$ sein, für $\alpha = 90^0$ aber höchstens $= n$ sein kann. Weitere Sätze, die sich hier anschließen und die der Verfasser als neu bezeichnet, sind:

Eine Kurve, deren Durchmesser alle parallel sind, hat keine hyperbolischen Äste, außer wenn die Asymptoten auch alle parallel sind, und keine parabolischen, wenn nicht alle nach derselben Richtung konkav oder konvex sind (Theorem 2).

Es gibt nicht mehr als $\frac{n}{m}$ Richtungen paralleler Ordinaten, welche die Kurven in $(n-m)$ Punkten schneiden (Theorem 5).

Es wird aus der Kurvengleichung eine Beziehung für die Abstände eines Kurvenpunktes von 2, 3, 4 usw. festen Punkten hergeleitet (Problem 7).

Schneidet eine um einen festen Punkt rotierende Gerade die Kurve, so gibt es für jede Lage einen Punkt so, daß die algebraische Summe der Abstände aller Schnittpunkte von diesem verschwindet. Der Ort dieser Schnittpunkte ist eine Kurve von höchstens n^{ten} Grad.

Eigenschaften, die nur von den Gliedern n^{ter} und $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung abhängen, sind für zwei Kurven, die in diesen Gliedern übereinstimmen, dieselben; also hat z. B. eine Kurve mit ihren Asymptoten (diese als zerfallende Kurve n^{ter} Ordnung betrachtet) alle Durchmesser gemein, ebenso alles, was von den Durchmessern abhängt, z. B. die Mittelpunkte (Mittelpunkt heißt bei Waring ein Punkt eines Durchmessers von der Art, daß die algebraische Summe der Abstände aller Schnittpunkte dieses Durchmessers von dem Punkt verschwindet), ferner die „curva diametralis", die Waring definiert als: „locus ultimarum diametrorum intersectionum". Was damit gemeint ist, ist nicht recht klar; vielleicht die Enveloppe der Durchmesser?

Von besonderem Interesse ist das 10. Theorem, welches behauptet, daß **keine algebraische Kurve, die ein Oval ohne Doppelpunkt hat, allgemein quadriert werden könne**, oder, wie Waring sagt: „Nulla datur algebraica curva, quae habet ovalem sese in dato puncto haud intersecantem, quae generaliter quadrari potest". Es ist dies offenbar derselbe Satz, der bei Newton, Principia I, Lemma 28, so lautet: „Nulla extat figura ovalis, cuius area, rectis pro lubitu abscissa, possit per aequationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri", und an den sich eine Kontroverse geknüpft hat[1]). Der Beweis bei Waring ist so charakteristisch für dessen prägnante Ausdrucksweise, daß wir ihn hier im Wortlaut anführen wollen: „Inveniatur enim generalis expressio ad aream, e. g. terminis abscissae x, fiat haec expressio vel area impossibilis, cum x fiat α vel π, et ovalis continetur intra valores abscissae α et π; inveniatur fluxio datae expressionis, sed methodus fluxiones inveniendi eadem est ac methodus inveniendi aequationes, quarum radices sint limites inter radices α et π datarum aequationum; et si radices α et π datarum aequationum sint possibiles, possibilis etiam erit radix inter eas posita; ergo necessario ovalis se intersecabit".

---

[1]) Vgl. Brougham (ist der schon S. 456, Fußnote, genannte Mathematiker) and Routh, Analytical View of Sir Isaac Newtons Principia (1855), p. 78. Dort wird behauptet, der Satz sei falsch, da jede Kurve von der Form:

$$y^m = n^m x^{(n-1)m}(a^n - x^n)$$

quadrierbar sei. Zeuthen hat darauf hingewiesen, daß diese Kurve gar kein eigentliches Oval darstellt, sondern im Koordinatenursprung einen Selbstberührungspunkt hat. (Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton; Bulletin de l'Académie de Copenhague, 1895.)

Der Gedankengang scheint mir etwa folgender zu sein. Ist $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve, die das Oval bildet, und ist dasselbe zwischen den Ordinaten eingeschlossen, deren Abszissen α und π sind; ist ferner $F(x) = \int f(x)\,dx$, so wird sowohl $f(x)$ als $F(x)$ außerhalb der Grenze α und π imaginär. Dann muß aber $F(x)$, wenn es eine algebraische Funktion sein soll, zwischen α und π ein Maximum oder Minimum haben, und es wird dann $F'(x) = f(x) = 0$, d. h. das Oval schneidet die Abszissenachse. Daraus schließt nun Waring, wenn ich den Schluß des obigen Beweises recht verstehe, ohne weiteres, daß das Oval sich selbst schneide. Dabei müßte aber doch angenommen sein, daß die Abszissenachse ein Durchmesser des Ovals ist; das wird aber nirgends gesagt, ebensowenig wird eine scharfe Definition des „Ovals" gegeben; auch was die „radices datarum aequationum" sind, ist nicht recht klar; namentlich aber scheint mir nicht genügend berücksichtigt, daß wegen des Ovals $f(x)$, und damit auch $F(x)$, eine doppeldeutige Funktion sein muß, also noch mit einer Irrationalität behaftet ist.

Als eine „proprietas maxime elegans" aller Archimedischen Parabeln (d. h. Kurven mit lauter parallelen Durchmessern) wird folgender Satz angeführt: Ist

$$y^n + ay^{n-1} + (b + cx)\,y^{n-2} + \cdots = 0$$

die Gleichung einer solchen Kurve, so ist deren Subtangente:

$$T = \frac{ny^n + (n-1)\,ay^{n-1} + (n-2)(b+cx)\,y^{n-2} + \cdots}{c \cdot y^{n-2} + \cdots}.$$

Gibt man T einen konstanten Wert, so gibt es n^2 Kurvenpunkte, zu denen dieselbe Subtangente gehört, und für alle diese ist die Summe der Ordinaten konstant.

Ferner:

Ist die Gleichung einer Parabel:

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \cdots$$

und sind $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$ die Ordinaten der Maximal- und Minimalpunkte, $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Abszissen der Schnittpunkte mit der x-Achse, so ist:

$$\frac{y_1 y_2 y_3 \cdots y_{n-1}}{(x_1 - x_2)^2 \cdots (x_1 - x_n)^2 (x_2 - x_3)^2 \cdots (x_2 - x_n)^2 \cdots (x_{n-1} - x_n)^2} = \frac{a^n}{n^n}.$$

Zu diesen und ähnlichen Untersuchungen bemerkt Waring mit berechtigtem Stolz, daß auch die algebraischen Sätze, die ihnen zugrunde liegen, von ihm selbst gefunden seien. Der letzte Satz zeugt z. B. von der Kenntnis einer wesentlichen Eigenschaft der Diskriminante.

Das 2. Buch handelt von „Kurvoiden“. Die Bezeichnung ist nach Analogie von „Cykloide“ gebildet, und bedeutet eine Verallgemeinerung dieser Kurve, d. h. eine „Kurvoide“ wird von einem festen Punkt einer Kurve beschrieben, wenn diese auf einer Geraden abrollt. Rollt sie, statt auf einer Geraden, auf einer anderen Kurve ab, so entsteht eine „Epikurvoide“. Behandelt werden insbesondere Aufgaben über Rektifizierbarkeit und Quadratur der Kurvoiden, deren Lösung von der Rektifizierbarkeit der rollenden Kurve abhängt. Auch wird der Satz aufgestellt, daß alle Kurven, die durch eine aequatio fluxionalis bestimmt sind, durch Kurvoiden und Epikurvoiden konstruiert werden können.

Das 3. Buch beschäftigt sich mit Raumgeometrie und wird im nächsten Kapitel besprochen werden.

Unter den kürzeren Abhandlungen allgemeineren Charakters seien zunächst einige aufgeführt, die sich mit den Formeln für den Krümmungsradius, für Wende- und Rückkehrpunkte beschäftigen. Die erste ist eine nicht ganz einwandfreie Schrift von Johann Jakob Hentsch (1723 bis 1764, Professor der Mathematik in Helmstädt): „De curvis punctum inflexionis vel regressus habentibus“[1]). Schon die Definitionen, bzw. die Begründungen seiner Bezeichnungen, die Hentsch gibt, passen nicht für alle Fälle, wie man leicht sieht; sie lauten:

für den Wendepunkt: „punctum inflexionis ob mutatam curvae faciem, rectae assumtae vel puncto fixo obversam“;

für den Rückkehrpunkt: „punctum regressus ob mutationem motus, qui ordine fit retrogrado et versus principium, a quo curva moveri coeperat, respicit“.

Abgesehen von der mangelnden Klarheit gilt z. B. die erste nicht, wenn die recta assumta die Wendetangente ist. — Hentsch folgert nun daraus weiter:

1) Für einen Wendepunkt ist der Abschnitt der Abszissenachse zwischen dem Ursprung und der Kurventangente ein Minimum oder Maximum.

2) Für einen Rückkehrpunkt ist die Abszisse ein Maximum oder Minimum. (Dies ist aber offenbar auch der Fall, wenn die Kurventangente parallel der Ordinatenachse ist.)

Die analytischen Bedingungen, die Hentsch für Wende- und Rückkehrpunkte herleitet, sind zum Teil sonderbar ausgedrückt, und lassen eine Verwechslung von Differential und Differentialquotient erkennen. Er sagt z. B., in einem Punkt mit vertikaler Tangente sei $dy = \infty$ (!), die Bedingung für einen Wendepunkt sei entweder $d^2y = 0$, oder, bei vertikaler Wendetangente, $d^2y = \infty$ (!). — Die

[1]) Nov. Act. Erud., 1762, p. 256.

Betrachtungen werden dann auch auf den Fall ausgedehnt, „si in Curva Semiordinatae a puncto fixo ducantur“, d. h. auf Polarkoordinaten.

Aus dem gleichen Jahre stammt eine Arbeit von **Fontana**[1]) über Kurven in Polarkoordinaten, nämlich: „De invenienda formula radii osculatoris in curvis ad umbilicum relatis ex data formula eiusdem in curvis relatis ad axem, eruendisque inde curvarum evolutis“[2]). Es handelt sich also um Übertragung der Formeln für Krümmungsradius und Evolute von rechtwinkligen (x, y) auf Polarkoordinaten (z, φ).

Ist $du = z\,d\varphi$, so bestehen die Beziehungen:

$$x^2 + y^2 = z^2; \quad dx^2 + dy^2 = du^2 + dz^2.$$

Führt man mit Hilfe dieser Gleichungen z und u an Stelle von x und y in den bekannten Ausdruck für den Krümmungsradius ϱ ein, so ergibt sich:

$$\varrho = \frac{(dz^2 + du^2)^{3/2}}{z(dz\,d^2u - du\,d^2z) + du(dz^2 + du^2)}.$$

Ist nun (s. Fig. 31) O der Koordinatenursprung, sind P und p zwei konsekutive Kurvenpunkte, C und c die ihnen entsprechenden Punkte der Evolute, ist ferner auf Op eine Strecke $OR = OP$ und auf Oc ebenso $OD = OC$ abgetragen, endlich von O auf PC das Lot OF gefällt, so ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke PRp, PFO und OFC, CDc:

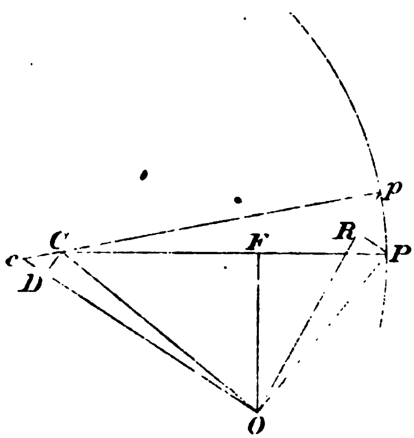


Fig. 31.

$$\frac{Pp}{PO} = \frac{PR}{PF} = \frac{Rp}{FO}$$

und

$$\frac{OF}{CD} = \frac{OC}{Cc},$$

[1]) Den Bericht hierüber verdanke ich einer gütigen Mitteilung des Herrn **Vivanti**, der ursprünglich der Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie ein besonderes Kapitel im XXVI. Abschnitt zu widmen gedachte. Da jedoch die meisten hierher gehörigen Arbeiten schon im XXIV. Abschnitt besprochen werden, hat Herr **Vivanti** nach einem Vorschlage des Herrn Herausgebers mir sein Manuskript in überaus dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt, damit nicht derselbe Stoff in zwei verschiedenen Abschnitten behandelt würde. Die Stellen, die von Herrn **Vivanti** herrühren, werden überall durch Verweisung auf diese Fußnote als solche bezeichnet werden.

[2]) Analyseos sublimioris opuscula (Venedig 1763), Op. III, p. 120—136.

woraus sich ergibt:

$$PF = \frac{PO \cdot PR}{Pp} = \frac{z\,du}{\sqrt{dz^2 + du^2}}$$

und:

$$OF = \frac{PF \cdot Rp}{PR} = \frac{z\,dz}{\sqrt{dz^2 + du^2}},$$

$$CD = \frac{OF \cdot Cc}{CO} = \frac{z\,dz}{\sqrt{dz^2 + du^2}} \cdot \frac{Cc}{OC},$$

also ist:

$$FC = PC - PF = \varrho - \frac{z\,du}{\sqrt{dz^2 + du^2}}.$$

Setzt man nun $OC = Z$; $CD = dU$, so ist nach dem Obigen:

$$Z = OC = \sqrt{OF^2 + FC^2} = \sqrt{\frac{z^2dz^2}{dz^2 + du^2} + \left(\varrho - \frac{z\,du}{\sqrt{dz^2 + du^2}}\right)^2}$$

und, da $Cc = d\varrho$ ist:

$$dU = CD = \frac{z\,dz\,d\varrho}{\sqrt{z^2dz^2 + (\varrho\sqrt{dz^2 + du^2} - z\,du)^2}}.$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung mit der Kurvengleichung $f(z, u) = 0$ ergibt sich durch Elimination von z und u die Differentialgleichung der Evolute.

Euler entwickelt die Formel für den Krümmungsradius auf elegante Weise in seiner Arbeit: „Methodus facilis investigandi radium osculi ex principio maximorum et minimorum petita“[1]) (11. September 1776). Der Inhalt ist kurz folgender: Ist O ein Punkt auf der Normalen eines Kurvenpunktes Y, und ändert sich OY nicht, wenn man zum zweiten konsekutiven Kurvenpunkt weitergeht, d. h. OY zweimal differenziert, so ist O der Krümmungsmittelpunkt. Daraus ergeben sich die bekannten Formeln für den Krümmungsradius.

Eine übersichtliche Zusammenstellung der Formeln für Polarkoordinaten findet sich bei Gurief[2]): „Mémoire sur la résolution des principaux problèmes, qu'on peut proposer dans les courbes, dont les coordonnées partent d'un point fixe“[3]) (22. Mai 1797). Gurief führt für die Koordinaten folgende Bezeichnungen ein (vgl. Fig. 32):

Radiusvektor $FM = z$; $\triangle BFM = \omega$,

ferner werden benutzt der Winkel der Tangente gegen die Achse $\angle MTF = \varphi$; das in F auf FM errichtete Lot bis zur Tangente FR, das als Subtangente bezeichnet wird; die rechtwinkligen Koordinaten

---

[1]) N. A. P. VII, p. 83—86. [2]) S. 851 ff. [3]) N. A. P. XII, p. 176—191.

des Punktes M sind $BP = x$; $MP = y$; ferner ist $PF = v$, endlich das Bogenelement ds. Damit wird nun abgeleitet:

$$\operatorname{tg} TMF = \frac{z\,d\omega}{dz}; \quad RF = \frac{z^2 d\omega}{dz};$$

$$dy = dz \cdot \sin\omega + z\cos\omega\,d\omega; \quad dx = -\,dz\cos\omega + z\sin\omega\,d\omega.$$

Krümmungsradius: $$R = \frac{\left[z^2 + \left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2\right]^{3/2}}{z^2 + 2\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2 - z^2\frac{d^2z}{d\omega^2}};$$

daraus die Bedingung für Wendepunkte:

$$z^2\frac{d^2z}{d\omega^2} - 2\left(\frac{dz}{d\omega}\right)^2 - z^2 = 0.$$

Ferner ergibt sich:

Flächenelement: $\frac{z^2 d\omega}{2}$,

Volumelement des Rotationskörpers: $\frac{2\pi}{3} z^3 \sin\omega\,d\omega$,

Oberflächenelement des Rotationskörpers: $2\pi z\sin\omega\sqrt{z^2 d\omega^2 + dz^2}$.

Diese Formeln werden auf einige Beispiele angewendet. — Die Arbeit ist hauptsächlich darum bemerkenswert, weil hier klar und konsequent überall Winkel und Radiusvektor verwendet werden, während sonst vielfach statt des ersteren Kreisbögen von irgend einem Radius auftreten.

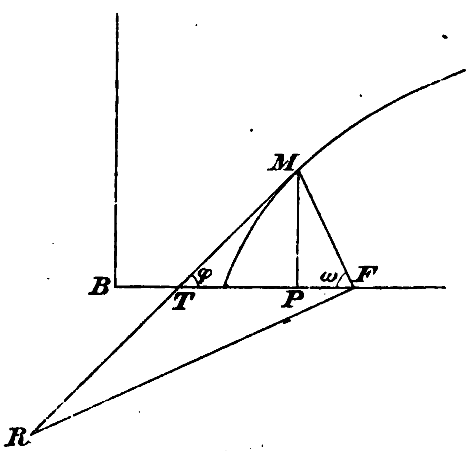


Fig. 32.

Einige andere Arbeiten beschäftigten sich mit sonstigen Fragen aus der Kurvenlehre. Die erste stammt von Kästner, nämlich: „De minimo in reflexione a curvis"[1]). Dort wird, wohl zum erstenmal, ein rein geometrischer Beweis des Satzes geführt: Wenn ein von einem Punkt O ausgehender Lichtstrahl an einem Kurvenpunkt M so reflektiert wird, daß er durch einen anderen Punkt P geht, so ist $OM + MP$ ein Minimum. Die ins Unendliche verlaufenden Äste einer Kurve behandelt eine kleine Schrift eines württembergischen

[1]) Dissert. math. et phys. Altenburgenses 1758.

Theologen, J. G. Pfeiffer (geb. 1766, gest. als Pfarrer in Steinheim a. d. Murr): „De curvarum algebraicarum asymptotis tam rectilineis quam curvilineis earumque investigatione" (Tübingen 1764). Sie bietet inhaltlich gerade nichts Neues, gibt aber einen klaren Überblick über die verschiedenen Methoden zur Aufstellung der geradlinigen Asymptoten und asymptotischen Kurven einer gegebenen algebraischen Kurve.

Endlich ist eine Arbeit von Busse (Friedrich Gottlieb von Busse, 1756—1835, Professor der Mathematik und Physik in Freiberg) zu nennen: „Formulae linearum subtangentium et subnormalium, tangentium et normalium castigatae et diligentius, quam fieri solent, explicatae" (Leipzig 1798). Das Wesentliche daran ist, daß bei den genannten Strecken nicht bloß, wie dies sonst üblich war, der absolute Wert, sondern auch das Vorzeichen berücksichtigt wird. Insbesondere wird die damals gebräuchliche Formel für die Subnormale $S = \frac{y\,dx}{dy}$ als falsch bezeichnet, und durch die richtigere $S = -\frac{y\,dx}{dy}$ ersetzt. Als Kuriosum sei noch eine Bemerkung des Verfassers angeführt, welche zeigt, daß mathematische Schriften schon damals sich keines allzugroßen Absatzes zu erfreuen hatten. Er sagt nämlich, er hätte diese Sachen schon längst veröffentlicht, „nisi bibliopolae eiusmodi scripta a me redimere et typis vulgare mirifice dubitassent, scilicet emtorum qui talia sibi comparare soleant, non tam paucitatem, quam tarditatem in hac temporum inconstantia constanter timentes".

Gehen wir nun zu den Einzeluntersuchungen über, so ist zu bemerken, daß weitaus die meisten Arbeiten sich mit Aufgaben befassen, bei denen es sich darum handelt, die Gleichungen von Kurven mit bestimmten Eigenschaften aufzustellen, und zwar sind sie meist derart, daß sie auf Differentialgleichungen führen; im Sprachgebrauch der damaligen Zeit sind dies „Problemata ex methodo tangentium inversa". So heißen ganz allgemein Aufgaben, die auf Integration von Differentialgleichungen führen, auch wenn es sich gar nicht um Eigenschaften der Tangente, sondern z. B. des Krümmungsradius handelt. Hierbei macht sich eine gewisse Unklarheit über die Bedeutung der Integrationskonstanten bemerkbar; es fehlt meist das volle Verständnis der Tatsache, daß eine Differentialgleichung nicht bloß eine Kurve, sondern eine ganze Schar definiert. Selbst Euler läßt in die Differentialgleichung einer Kurvenschar fast immer noch den variablen Parameter eingehen. Wie schon bemerkt, ist es schwierig, die große Menge von Abhandlungen, die in den verschiedensten Zeitschriften zerstreut sind, nach einheitlichen Gesichtspunkten zu ordnen; doch lassen sich wenigstens

einige solche herausfinden. Die Arbeiten, die ganz isoliert stehen, werden dann eben in chronologischer Reihenfolge aufgeführt werden.

Eine erste Gruppe von Abhandlungen beschäftigt sich mit der Bestimmung von Kurven, deren Bogenlängen irgend einer Bedingung genügen sollen. Wir führen zunächst zwei Arbeiten von Euler an, in denen ein heute wenig mehr gebrauchter Begriff eine Rolle spielt, nämlich die Amplitude eines Kurvenbogens, eine von Joh. Bernoulli eingeführte Bezeichnung. Man versteht darunter den Winkel der beiden Normalen (oder Tangenten) in den Endpunkten des Bogens. Dieser Winkel ist in den meisten der folgenden Untersuchungen als Parameter eingeführt. Nimmt man die eine der beiden Normalen als x-Achse, so ist, wie man leicht sieht:

$$dx = ds \cdot \sin\varphi; \quad dy = ds \cos\varphi.$$

Diese Darstellung ermöglicht es nun, eine große Klasse von rektifizierbaren Kurven zu finden. Ist nämlich v eine beliebige Funktion von φ, und setzt man $\frac{ds}{d\varphi} = v + \frac{d^2v}{d\varphi^2}$, so ist damit eine Kurve bestimmt, für welche sich sowohl die Koordinaten als die Bogenlänge einfach in v und φ ausdrücken lassen. Es ergibt sich nämlich durch Integration der obigen Gleichungen:

$$x = \frac{dv}{d\varphi} \cdot \sin\varphi - v\cos\varphi; \quad y = \frac{dv}{d\varphi}\cos\varphi + v \cdot \sin\varphi;$$

$$s = \int v d\varphi + \frac{dv}{d\varphi}.$$

Ist also das Integral $\int v d\varphi$ ausführbar, so läßt sich die Kurve rektifizieren, und soll sie sonst noch einer Bedingung unterworfen sein, so handelt es sich nur um eine geeignete Bestimmung der Funktion v. Diese oder ähnliche Überlegungen liegen den meisten Arbeiten Eulers über die Bogenlängen von Kurven zugrunde. Die erste der beiden Eulerschen Abhandlungen heißt: „De arcubus curvarum aeque amplis earumque comparatione"[1]). Es handelt sich hier um die Aufgabe, Kurven so zu finden, daß die Bogenlängen ihren Amplituden proportional sind, daß also:

$$\frac{s}{a} = \frac{\varphi}{\alpha},$$

oder

$$\frac{ds}{d\varphi} = \frac{a}{\alpha}$$

ist. Es ist klar, daß der Kreis jedenfalls zu den gesuchten Kurven

[1]) N. C. P. XII (1766/67), p. 17—41.

gehört; es fragt sich aber, ob nicht noch andere Kurven diese dem Kreis zukommende Eigenschaften haben. Fragen dieser Art sind in jener Zeit öfters behandelt worden; wir werden später noch einige hierher gehörigen Untersuchungen anzuführen haben; Hier findet Euler außer dem Kreis noch weitere Kurven durch einen Kunstgriff: er fügt nämlich zu φ eine Funktion V hinzu, die sich nicht ändert, wenn φ um α wächst; V muß dabei einfach eine Funktion von $\sin\frac{2\pi\varphi}{\alpha}$ und $\cos\frac{2\pi\varphi}{\alpha}$ sein. Nimmt man nun den einen Endpunkt des Kurvenbogens als Koordinatenanfangspunkt, seine Normale als x-Achse, so findet man die Gleichung der gesuchten Kurve in der Form:

$$x = \frac{a}{\alpha}(1-\cos\varphi) + \int \sin\varphi \, dV; \quad y = \frac{a}{\alpha}\sin\varphi + \int \cos\varphi \, dV.$$

Hieraus folgt für den Krümmungsradius der Ausdruck:

$$r = \frac{a}{\alpha} + \frac{dV}{d\varphi}.$$

Die nähere Untersuchung zeigt, daß die Kurve aus lauter kongruenten Stücken von der Länge a besteht.

Die zweite Arbeit (vom 19. August 1776) ist betitelt: „De duabus pluribusve curvis algebraicis, in quibus, si a terminis fixis aequales arcus abscindantur, earum amplitudines datam inter se teneant rationem“[1]).

Hier handelt es sich also um zwei verschiedene Kurven und die Amplituden gleicher Bögen sollen nicht mehr gleich sein, sondern in einem gegebenen Verhältnis stehen. Euler findet für die eine Kurve die folgenden Gleichungen, in welchen α und β Konstanten sind, derart, daß das Verhältnis der Amplituden $= \alpha : \beta$ ist, und in welchen v eine Funktion von φ bedeutet:

$$x = \frac{1}{\alpha}\frac{dv}{d\varphi}\sin\alpha\varphi - \frac{v}{\alpha}\cos\alpha\varphi + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^3v}{d\varphi^3}\sin\alpha\varphi - \frac{1}{\alpha}\frac{d^2v}{d\varphi^2}\cos\alpha\varphi\right),$$

$$y = \frac{1}{\alpha^2}\frac{dv}{d\varphi}\cdot\cos\alpha\varphi + \frac{v}{d}\cdot\sin\alpha\varphi + \frac{1}{\beta^2}\left(\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^3v}{d\varphi^3}\cos\alpha\varphi + \frac{1}{\alpha}\frac{d^2v}{d\varphi^3}\sin\alpha\varphi\right).$$

Die Gleichungen der zweiten Kurve ergeben sich hieraus durch Vertauschung von α und β. Sollen die beiden Kurven algebraisch sein, so müssen α und β rationale Zahlen und muß v eine algebraische Funktion von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sein. Das Beispiel $v = \cos\varphi$ wird durchgeführt und ergibt Epizykloiden; außerdem wird die Aufgabe

---

[1]) N. A. P. VI, p. 63—76.

auf 3, 4 usw. Kurven verallgemeinert, deren Amplituden bei gleichen Bögen ein vorgeschriebenes Verhältnis haben sollen.

Mit der Rektifikation von Kurven haben sich die Mathematiker in unserem Zeitraum mehrfach beschäftigt[1]). Schon früher hatte Hermann[2]) die Aufgabe vorgelegt, die Quadratur einer Kurve auf eine Rektifikation zurückzuführen, die dann von N. Bernoulli[3]) und Euler[4]) behandelt wurde. Saladini nahm die Frage wieder auf in seiner Abhandlung: „Methodus Bernoulliana de reducendis quadraturis transcendentibus ad longitudinem curvarum algebraicarum, a quibus inutilis saepe redditur, imaginariis quantitatibus liberatur atque eiusdem reductionis innumerae aliae viae indigitantur"[5]). Er gab einen Beweis des Bernoullischen Satzes, nach welchem die Fläche einer Kurve $y = f(x)$ durch

$$\int y\,dx = \frac{1-y^2}{y'} - S$$

ausgedrückt wird, wo S den Bogen der Kurve:

$$X = \frac{(1-y^2)^{3/2}}{y'}; \quad Y = \frac{y(1-y^2)}{y'} - x \tag{1}$$

bezeichnet. Um aber die Einführung der für $y^2 > 1$ vorkommenden imaginären Größen zu vermeiden, stellt er folgenden Satz auf: Man hat:

$$\int y\,dx = -\frac{y^2-1}{y'} + \int\sqrt{dY_1^2\,dX_1^2},$$

wenn

$$X_1 = \frac{(y^2-1)^{3/2}}{y'}; \quad Y_1 = \frac{y(y^2-1)}{y'} + x.$$

Ist die vorgegebene Kurve algebraisch, so ist es auch die Kurve (1); es läßt sich also die Quadratur jeder algebraischen Kurve auf die Rektifikation einer algebraischen Kurve zurückführen. Da aber die Linie (1) öfters kompliziert ausfällt, so schlägt Saladini eine andere Methode zur Auflösung des Problems vor. Setzt man z. B.

$$X = \frac{P}{y'}, \quad Y = \frac{Q}{y^2} + mx, \tag{2}$$

wo m konstant ist, während P, Q Funktionen von y bezeichnen, so lautet die Bedingung dafür, daß $dS^2 = dX^2 + dY^2$ ein vollständiges Quadrat sei:

$$\frac{dQ + m\,dy}{Q} = \frac{dP}{P}.$$

---

[1]) Für den Bericht über die im folgenden erwähnten Arbeiten von Saladini, d'Alembert, Mascheroni, Gratognini, Contarelli vgl. Fußnote S. 476. [2]) Acta Erud. 1719. [3]) Ebenda, 1720. [4]) Comment. Acad. Petrop. T. V. [5]) Comment. Bonon. T. V, P. II, p. 120—138 (1767).

Nimmt man dann für Q eine solche algebraische Funktion von y, daß $\frac{m\,dy}{Q}$ ein logarithmisches Differential ist, so ist P eine algebraische Funktion von y, und man hat:

$$\int^x \left[\frac{d\sqrt{P^2+Q^2}}{dy} - \sqrt{\left(\frac{dP}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dy}+m\right)^2}\right]dx = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{y'} - S,$$

wo S den Bogen der Kurve (2) bezeichnet.

Schon im III. Bande der Denkschriften der Berliner Akademie (1747) hatte d'Alembert auf ein Paradoxon hingewiesen, das aus der Betrachtung der Kurven entsteht, die durch die Differentialgleichung:

$$dy = dx\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}} - 1} \tag{3}$$

definiert ist. Zwanzig Jahre später nahm er den Gegenstand wieder auf in einer Schrift: „Extrait de plusieurs lettres de l'auteur sur différens sujets écrites dans le courant de l'année 1767"[1]). Integriert man (3) mit der Bedingung, daß für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, so erhält man:

$$y = \left[1 - (1-x)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}; \tag{4}$$

ferner ist:

$$ds = dx\sqrt{(1-x)^{-\frac{2}{3}}} = (1-x)^{-\frac{1}{3}}dx, \tag{5}$$

also unter der Bedingung $s = 0$ für $x = 0$:

$$s = \frac{3}{2}\left[1 - (1-x)^{\frac{2}{3}}\right]. \tag{6}$$

Aus (4) ergibt sich die Gestalt der Kurve; es ist $y = 1$ für $x = 1$, dann nimmt y ab für wachsendes und abnehmendes x, und es wird $y = 0$ für $x = 0$ und $x = 2$. Für $x < 0$ und für $x > 2$ ist y imaginär. Ferner hat y für jeden Wert von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werte, so daß die Kurve die aus Fig. 32 ersichtliche Gestalt $ABCD$ hat; es ist die seit Leibniz bekannte reguläre Astroïde[2]), deren Gleichung durch die Transformation $x = 1 + x'$; $y = y'$ sich auf die Form:

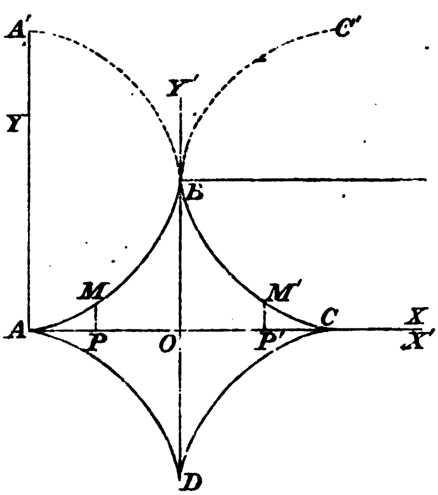


Fig. 33.

[1]) Opuscules mathématiques T. IV, p. 65—68 (Paris 1768). [2]) Vgl. Loria, Spez. Kurven, S. 227.

$$x'^{\frac{2}{3}} + y'^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \text{oder} \quad (x'^2 + y'^2 - 1)^3 + 27\,x'^2 y'^2 = 0$$

bringen läßt.

Sind nun M und M' zwei den Zweigen AB, bzw. BC angehörige, in bezug auf die y'-Achse symmetrische Kurvenpunkte, P und P' ihre Projektionen auf die x-Achse und setzt man

$$OP = OP' = z,$$

so folgt aus (6)

$$\operatorname{arc} AM = \operatorname{arc} ABM' = \frac{3}{2}\left(1 - z^{\frac{2}{3}}\right) < \frac{3}{2},$$

während $\operatorname{arc} AB = \frac{3}{2}$ ist, ferner $\operatorname{arc} ABC = 0$. Es nimmt also die Bogenlänge vom Punkte B an fortwährend ab, was absurd ist. Und d'Alembert schließt: „Voilà donc encore ici le calcul en défaut".

Eine weitere Bemerkung ist folgende: Nimmt man, wie es stillschweigend vorausgesetzt worden ist, dy in (3) positiv an, so muß y immer zunehmen; also ist die Fortsetzung der Linie über B hinaus nicht BC, sondern der zu BC in bezug auf die durch B parallel zu AC gezogene Gerade symmetrische Zweig BC'.

Diese Schwierigkeiten, auf welche d'Alembert keine Antwort gab, reizten den Scharfsinn Mascheronis[1]), welcher sich die Aufgabe stellte, die Angriffe von d'Alembert gegen die Analysis zu widerlegen („Injuria tamen accusatur calculus"). Durch Reihenintegration findet er

$$y = B - \frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} z^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{3}{6} z^{\frac{6}{3}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{3}{8} z^{\frac{8}{3}} + \cdots = B - \mu,$$

wo B eine Konstante ist. Hieraus ersieht man, daß y für z und $-z$ denselben Wert annimmt, so daß die Fortsetzung von AB nicht BC', sondern BC ist. Nimmt man aber die in (3) vorkommende Wurzelgröße mit doppeltem Zeichen an, so erhält man

$$y = B \pm \mu,$$

so daß die ganze Kurve aus den vier Zweigen AB, BC, $A'B$, BC' gebildet ist. Die Gleichung (5) läßt sich schreiben:

$$ds = \pm z^{-\frac{1}{3}} dz$$

und aus derselben folgt durch Integration:

$$s = \pm \frac{3}{2} z^{\frac{2}{3}},$$

---

[1]) Adnotationes ad calculum integralem Euleri P. I, 1790

vorausgesetzt, daß $s = 0$ für $x = 0$ ist. Betrachtet man also den Bogen BA als positiv so muß man den Bogen BC als negativ ansehen.

Hierdurch wird jedoch d'Alemberts Bedenken keineswegs erledigt; aber noch mehr: Mascheroni entdeckt ein neues Paradoxon. Für $x > 2$ ist die Kurve imaginär; aber die Bogenlänge ist auch für diese Werte von x reell. Die Erscheinung ist nicht vereinzelt: jedesmal wenn $\frac{ds}{dx}$ reell und < 1 ist, hat man eine reelle Bogenlänge bei imaginärer Kurve; denn es ist dann $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 - 1 < 0$, also $\frac{dy}{dx}$ imaginär. Diese Bemerkungen von Mascheroni, welche im Jahre 1790 veröffentlicht wurden, gaben noch in demselben Jahre Veranlassung zu einer Antwort von seiten eines gewissen Giovanni Gratognini (1757—1836), Professor an der Universität in Pavia. Seine Schrift führt den Titel: „Esame analitico d'un paradosso proposto ai geometri dal sign. D'Alembert e della soluzione datane dal Ch. sign. Don Lorenzo Mascheroni" (Pavia 1790); sie gibt eine eigentümliche Lösung des Rätsels. Gratognini sagt nämlich: „die Formel für die Bogenlänge kann längs des Zweiges BC nicht gelten; sie würde nämlich den Bogen BC, gegen seine Natur, durch eine negative Größe ausdrücken. Man muß vielmehr den Ausdruck für ds in (5) für AB mit positivem, für BC mit negativem Vorzeichen versehen. Desgleichen kann für $x > 2$ der in (5) angegebene Wert dem Bogen nicht angehören, weil sie von der Gleichung $ds^2 = dx^2 + dy^2$ abgeleitet wurde, welche, da im betrachteten Falle dy fehlt, etwas Chimärisches und Bedeutungsloses darstellt."

Einen ähnlichen Gedanken hat Contarelli in einem Brief[1]) an Paolo Cassiani, Professor in Modena, ausgesprochen. Er sagt nämlich, daß bei der Berechnung der Bogenlänge der Bogen CD notwendig als negativ angesehen werden müsse, da ja C ein Rückkehrpunkt sei, und fügt bei, daß Giordano Riccati dieser Anschauung zugestimmt habe.

Daß alle diese Deutungen ganz ungenügend sind, ist klar. Die hervorgehobenen Schwierigkeiten konnten nicht überwunden werden, solange man den Begriff des Veränderlichkeitsbereichs einer algebraischen Funktion nicht vollständig beherrschte. Heutzutage haben die d'Alembertschen Paradoxa für uns nichts Verwunderliches mehr. Da die Funktion y von x durch eine Differentialgleichung von der Form $dy = Pdx$ definiert wird, so ist sie, von einer bloß additiven

[1]) Continuazione del nuovo giornale dei letterati, T. 21.

Konstanten abgesehen, bestimmt, und daher sind sowohl $A'BC$ als ADC Zweige der Integralkurve. Ferner ist die Ordinate y, nachdem sie durch Angabe ihres Wertes für $x = 1$ bestimmt worden ist, eine sechswertige Funktion von x; dasselbe kann man von s sagen, da die rechte Seite von (6) mit doppeltem Vorzeichen behaftet werden muß. Die Bogenlänge s bildet eine auf der die Funktion y von x darstellenden Riemannschen Fläche reguläre Funktion; $x = 1$ ist ein Verzweigungspunkt dieser Fläche, und an diesem Punkte kann der Übergang von einem zu einem anderen Funktionszweige sowohl von y als von s stattfinden. Dadurch kann man sich von allen scheinbaren Unregelmäßigkeiten Rechenschaft geben.

Die Schwierigkeiten, welche die Rektifikation der meisten Kurven bietet, scheinen Euler dazu veranlaßt zu haben, Kurven zu suchen, deren Bogenlänge sich angeben, oder wenigstens durch diejenige bekannter Kurven ausdrücken läßt, oder, wie Euler sagt, die durch die Bogenlängen bekannter Kurven „meßbar“ sind. Dieses Problem kann [1]) als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Rektifikation angesehen werden, bei der es sich ja einfach um eine „Meßbarkeit“ durch geradlinige Strecken handelt. Euler hat solchen Fragen verschiedene Abhandlungen gewidmet; die erste heißt: „De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet“ [2]). Die analytische Formulierung dieser Aufgabe ist: x und y als Funktionen eines Parameters v so darzustellen, daß:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dv\sqrt{1 + v^2}$$

wird. Euler nimmt zunächst die allgemeine Aufgabe in Angriff, daß das Bogenelement ds dem Differential einer beliebigen Funktion von v gleich werden soll, also $ds = Vdv$, und versucht, ob folgende Gleichungen das Problem zu lösen vermögen:

$$\frac{dx}{dv} = \frac{P\sqrt{A+U} - Q\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}}; \quad \frac{dy}{dv} = \frac{P\sqrt{B-U} + Q\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}} \tag{1}$$

wo P, Q, U Funktionen von v, A und B Konstanten sind. Dies ist der Fall, wenn

$$P^2 + Q^2 = V^2 \tag{2}$$

ist. Dieser Gleichung müssen also P und Q genügen, und dann ist U so zu bestimmen, daß die Gleichungen (1) integrabel werden. Zu diesem Zweck führt man statt U einen Winkel φ, der also gleichfalls eine Funktion von v ist, ein, und setzt:

---

[1]) Nach einer Bemerkung von Herrn Vivanti, vgl. Fußnote S. 476.

[2]) N. A. P. V, p. 59—70.

$$\frac{dx}{dv} = P \sin\varphi + Q \cos\varphi; \quad \frac{dy}{dv} = P \cos\varphi - Q \sin\varphi. \qquad (3)$$

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wird wieder auf die spezielle Aufgabe, wo also $V = \sqrt{1 + v^2}$ sein soll, zurückgegriffen, und gezeigt, daß diese Forderung erfüllt ist, wenn in (1) U eine beliebige ganzzahlige Wurzel von v ist; die Beispiele $U = v$, $U = \sqrt{v}$ werden durchgeführt. Ebenso läßt sich aus (3) eine spezielle Lösung herleiten, wenn $P = 1$, $Q = v$ gesetzt wird; es ergibt sich so:

$$dx = dv \sin\varphi + v dv \cos\varphi; \quad dy = dv \cos\varphi - v dv \sin\varphi.$$

Setzt man hier noch $v = \sin\vartheta$, so macht die Beziehung $\varphi = \lambda\vartheta$ die Gleichungen integrabel und liefert algebraische Kurven, wenn λ eine rationale Zahl ist: Schließlich wird noch eine dritte, allgemeinere Lösung hergeleitet, nämlich

$$4x = -\frac{2}{\lambda}\cos(\alpha + \lambda\vartheta) + \frac{\sqrt{2}+1}{\lambda+2}\cos[\alpha + (\lambda+2)\vartheta] + \frac{\sqrt{2}-1}{\lambda-2}\cos[\alpha + (\lambda-2)\vartheta];$$

$$4y = -\frac{2}{\lambda}\sin(\alpha + \lambda\vartheta) + \frac{\sqrt{2}+1}{\lambda+2}\sin[\alpha + (\lambda+2)\vartheta] + \frac{\sqrt{2}-1}{\lambda-2}\sin[\alpha + (\lambda-2)\vartheta],$$

wo α ein beliebiger Winkel, λ eine rationale Zahl exkl. ± 2 ist.

Die gleiche Aufgabe hat Euler in einer späteren Arbeit vom 20. August 1781 wieder aufgenommen, über die deshalb auch gleich hier berichtet werden möge. Sie heißt: De innumeris curvis algebraicis quarum longitudo arcui parabolico aequatur[1]). Er gibt dort folgende elegante Konstruktion einer solchen Kurve: Es sei $AB = BC = 2a$ der doppelte Parameter der Parabel AC, AD eine zu ihr symmetrische, die mit ihr Achse und Scheitel gemein hat; n sei eine beliebige Zahl. Mache nun $FG = \frac{2a}{n}$; GV parallel der Achse und gleich einer beliebigen Ordinate XY; $\triangle VFG$ sei $= \vartheta$. Lege in F an AF einen Winkel $= n\vartheta$ an, und trage auf dem Schenkel desselben

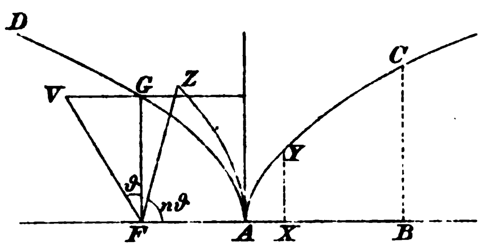


Fig. 34.

[1]) M. P. XI (1830), p. 100—101.

$FZ = FX$ ab, dann ist der geometrische Ort von Z eine Kurve der gesuchten Art, deren es also unendlich viele gibt, da n beliebig angenommen werden kann. Der Beweis ergibt sich leicht aus der angegebenen Konstruktion.

Eine weitere Abhandlung vom 10. Juni 1776 behandelt dieselbe Aufgabe für Ellipsenbögen; sie heißt: „De innumeris curvis algebraicis quarum longitudines per arcus ellipticos metiri licet"[1]). Hier soll also das Linienelement von der Form sein

$$ds = dv\sqrt{\frac{1+(n^2-1)v^2}{1-v^2}}. \tag{4}$$

Dieser Forderung wird genügt, wenn:

$$dx = \frac{(p+q)\,dv}{\sqrt{2(1+v)}}; \quad dy = \frac{(p-q)\,dv}{\sqrt{2(1-v)}} \tag{5}$$

ist, wobei p und q Funktionen von v sind, derart, daß

$$p^2+q^2-2pqv = 1+(n^2-1)v^2.$$

Dadurch werden die Gleichungen (4) integrabel und liefern algebraische Gleichungen. Z. B. ergeben die Werte $p=1$; $q=v(n+1)$ eine Kurve 6. Ordnung. Auch hier lassen sich durch Einführung von Winkeln die Gleichungen umformen, und **Euler** ermittelt folgende Lösung der Aufgabe:

$$\begin{aligned} 2x &= \frac{n+1}{\lambda+1}\sin[(\lambda+1)\varphi] - \frac{n-1}{\lambda-1}\cdot\sin[(\lambda-1)\varphi], \\ 2y &= \frac{n+1}{\lambda+1}\cos[(\lambda+1)\varphi] - \frac{n-1}{\lambda-1}\cdot\sin[(\lambda-1)\varphi], \end{aligned} \tag{6}$$

wo λ eine rationale Zahl sein muß, wenn die Kurven algebraisch sein sollen. Die durch (6) dargestellten Kurven sind Epi- und Hypozykloiden. Auffallend ist das Resultat für $n=1$; in diesem Fall stellt (4) das Linienelement des **Kreises** dar, (6) aber den Kreis selbst. **Euler** sah sich dadurch veranlaßt, den Satz auszusprechen, daß es **außer dem Kreis selbst keine Kurve gebe, deren Bogen sich durch Kreisbögen messen lasse** (vgl. unten S. 491), unterließ es aber nicht, die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf das S. 486 formulierte allgemeine Problem zu lenken. Auch führt er am Schluß dieser Abhandlung noch an, daß es ihm nicht gelungen sei, diese Aufgabe wie für Ellipsenbögen, so auch für Hyperbelbögen zu lösen. Dies leistete später **Fuß** in einer Abhandlung vom 28. Juni 1788: „De innumeris curvis algebraicis qua-

[1]) N. A. P. V, p. 71—85.

rum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet"[1]) durch Einführung hyperbolischer Funktionen. — Auch diesmal hat Euler der Aufgabe später (20. August 1781) eine zweite Arbeit gewidmet: „De curvis algebraicis, quarum longitudo indefinita arcui elliptico aequatur"[2]). Er knüpft hier an die Formeln (6) an, und bemerkt mit der liebenswürdigen Offenheit, mit der er stets seinen Gedankengang klarlegt, daß er zufällig (casu) darauf gekommen sei. Die Arbeit besteht im wesentlichen in einer Verallgemeinerung der vorher gefundenen Resultate. Auch einen schwierigeren Fall des allgemeinen Problems $ds = Vdv$ hat Euler behandelt (17. Juni 1776): „De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudo exprimitur hac formula integrali $\int \frac{v^{m-1}}{\sqrt{1-v^{2n}}} dv$".[3]) Das Problem wird gelöst und ausgedehnt auf den allgemeineren Fall

$$s = \int \frac{v^{m-1}}{\sqrt{1-v^{2n}}} (a + bv^{2n} + cv^{4n} + dv^{6n} + \cdots) \, dv.$$

Wieder einer Aufgabe allgemeinerer Natur, die in diese Gruppe gehört, sind zwei Arbeiten von Euler gewidmet, nämlich: „De binis curvis algebraicis inveniendis, quarum arcus indefinite inter se sint aequales"[4]) (20. Juni 1776) und: „De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus"[5]) (20. August 1781). Jede der beiden löst die Aufgabe auf zwei verschiedene Arten. In der ersten nimmt Euler die beiden Kurven in Parameterform gegeben an:

$$X = p(z) + q(z); \qquad x = p(z) - q(z);$$
$$Y = r(z) - s(z); \qquad y = r(z) - s(z).$$

Die Forderung, daß die Linienelemente beider Kurven gleich seien, ergibt für die vier Funktionen p, q, r, s die Bedingungsgleichung:

$$p'q' = r's'.$$

Um dieser Gleichung zu genügen, führt Euler zwei neue Funktionen u und v von z ein, die mit den ersten durch die Gleichungen verbunden sind:

$$u = \frac{q'}{r'}; \quad p = \frac{v'}{u'}; \quad s = \frac{uv'}{u'} - v.$$

Damit ist die Bedingungsgleichung erfüllt, und Koordinaten der beiden Kurven sind dargestellt durch:

---

[1]) N. A. P. XIV (1805), p. 111—138. [2]) M. P. XI (1830), p. 95—99. [3]) N. A. P. VI, p. 36—62. [4]) Ebenda, IV, p. 96—108. [5]) M. P. XI (1830), p. 102—118.

$$X = \frac{v'}{u'} + q; \qquad x = \frac{v'}{u'} - q;$$

$$Y = r - \frac{uv'}{u'} + v; \qquad y = r + \frac{uv'}{u'} - v.$$

Sind q, r, v algebraische Funktionen, so sind beide Kurven algebraisch.

Die zweite Lösung legt die Bedingungsgleichung in der Form $\frac{s'}{p'} = \frac{q'}{r'}$ zugrunde, und führt zu einer einfachen geometrischen Konstruktion, nämlich (vgl. Fig. 35): Es seien zwei beliebige Kurven mit derselben Abszissenachse und den Koordinaten p, s und q, r gegeben. Man ziehe parallele Tangenten an die beiden Kurven, die sie in S und Q berühren,

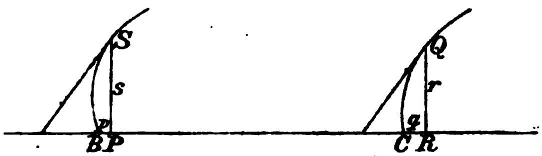


Fig. 35.

so ergeben sich die Koordinaten X, Y und x, y der beiden gesuchten Kurven aus den Gleichungen (vgl. Fig. 35)

$$X = BP + RQ; \qquad x = BP - RQ;$$

$$Y = CR - PS; \qquad y = CR + PS.$$

In der zweiten Abhandlung ist zunächst eine Lösung mit Benutzung von Winkelgrößen gegeben. Der Forderung der Aufgabe wird genügt durch die beiden Gleichungen:

$$dX = dx \cos\varphi + dy \sin\varphi,$$

$$dY = dx \sin\varphi - dy \cos\varphi,$$

wo x und y noch als Funktionen von φ so zu bestimmen sind, daß diese Gleichungen integrabel werden und algebraische Funktionen ergeben. Euler führt zu diesem Zweck zwei Funktionen P und Q von φ ein, derart, daß

$$x = \frac{dP}{d\varphi} \cdot \sin\varphi + \frac{dQ}{d\varphi} \cdot \cos\varphi,$$

$$y = -\frac{dP}{d\varphi} \cdot \cos\varphi + \frac{dQ}{d\varphi} \cdot \sin\varphi,$$

dann wird

$$X = P + \frac{dQ}{d\varphi}; \quad Y = \frac{dP}{d\varphi} - Q.$$

Sind hierbei P und Q algebraische Funktionen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$, so werden die Gleichungen integrabel, und ergeben algebraische

Kurven. Die zweite Lösung, die gegeben wird, benutzt keine Winkelgrößen, ist aber in ihrem Resultat nicht wesentlich von der ersten verschieden, die auch für die Anwendung bequemer ist. Setzt man z. B. $Q = 0$, so ergeben sich Kurvenpaare von der Eigenschaft, daß der Radiusvektor der einen Kurve gleich der Ordinate der anderen ist. Dies wird angewendet auf Parabel und Ellipse. Aber auch hier ergibt sich durch Spezialisierung für den Kreis als zweite Kurve eben wieder der Kreis. Trotzdem gelangte Euler später im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen zu einer Lösung der früher (s. S. 488) von ihm für unmöglich gehaltenen Aufgabe, Kurven zu finden, deren Bögen sich durch Kreisbögen ausdrücken lassen, abgesehen vom Kreise selbst. Seine Arbeit hierüber ist am gleichen Tag wie die letztere der beiden vorigen der Akademie vorgelegt worden. Sie führt den Titel: „De curvis algebraicis quarum omnes arcus per arcus circulares metiri licet"[1]). In der Einleitung kommt Euler auf seine früher (s. S. 489) aufgestellte Behauptung zurück, daß es keine solchen Kurven gebe, und gesteht mit der für ihn charakteristischen Offenheit ein, der Hauptgrund für jene Behauptung sei gewesen, daß es ihm trotz aller Anstrengungen nicht gelungen sei, solche zu finden; er nimmt sie hiermit feierlich zurück („solemniter retractans"). Sein Verfahren, um Kurven der genannten Art zu finden, ist nun folgendes: Es sei w ein Bogen eines Kreises vom Radius $= 1$; die Gleichung der Kurve soll in Polarkoordinaten (z, φ) aufgestellt werden; dann muß sein

$$dz^2 + z^2 d\varphi^2 = dw^2$$

oder

$$d\varphi = \sqrt{\frac{dw^2 - dz^2}{z^2}}.$$

Die Aufgabe ist also einfach, z in Funktion von φ so zu bestimmen, daß das Integral der rechten Seite einen Kreisbogen ergibt, d. h. sich durch zyklometrische Funktionen ausdrücken läßt. Dies ist nun sehr einfach möglich, wenn $z = b + \cos w$ gesetzt wird, wo b eine beliebige Konstante ist. Hierdurch erhält man:

$$d\varphi = \frac{dw \cos w}{b + \cos w}.$$

Um dies Integral auszuführen, setzt man $t = \operatorname{tg}\frac{w}{2}$ und erhält:

$$\varphi = w - \frac{2b}{\sqrt{b^2 - 1}} \operatorname{arctg} t \sqrt{\frac{b-1}{b+1}}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit $t = \operatorname{tg}\frac{w}{2}$ und $z = b + \cos w$ stellt

[1]) M. P. XI (1830), p. 114—124.

nun die gesuchte Kurve dar; sie ist algebraisch, wenn $\frac{b}{\sqrt{b^2-1}}$ eine rationale Zahl ist. An diese Formeln schließt sich eine Diskussion der Kurve, die als wichtigste Resultate folgende ergibt: der Krümmungsradius ist $r = \frac{b + \cos w}{b + 2\cos w}$; daraus folgt, daß ein Wendepunkt auftritt für $\cos w = -\frac{b}{2}$, also $z = \frac{b}{2}$. (Daraus folgt, daß ein solcher nur auftreten kann, wenn $b < 2$ ist, weil sonst $z < b - 1$ würde, was nicht möglich ist.) Die Amplitude[1]) ist $\alpha = w + \varphi$. Auf Grund der entwickelten Formeln wird noch ein Zahlenbeispiel $\left(b = \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ berechnet, und der Verlauf der Kurve gezeichnet; sie hat etwa die Gestalt einer Lemniskate mit ungleichen Schleifen. Schließlich wird noch bemerkt, daß der von einem bestimmten Punkt ab gemessene Bogen gleich dem Arkus des Winkels zwischen dem Radiusvektor und der Tangente im Endpunkt des Bogens ist.

Während es sich in den Arbeiten, über die vorstehend berichtet wurde, um Vergleichung von Bogenlängen verschiedener Kurven handelt, sind nun einige Abhandlungen zu nennen, in denen Beziehungen zwischen Bogenlängen und Tangenten, Normalen usw. einer und derselben Kurve untersucht werden. Unter diesen ist der Zeit nach die erste eine Veröffentlichung von Pio Fantoni (1721—1804, Wasserbaumeister in toskanischen Diensten, Mitglied des Instituts von Bologna): „De problemate quodam algebraico, deque evolutione mechanicae cuiusdam curvae inter infinitas hypermechanicas, quae determinatae aequationi satisfaciunt“[2]). Die Aufgabe, die Fantoni als „Problema algebraicum“ bezeichnet, ist folgende: Eine Kurve so zu finden, daß das Stück der Tangente zwischen dem Berührpunkt und dem vom Koordinatenanfangspunkt auf sie gefällten Lot konstant sei. Als Differentialgleichung der gesuchten Kurve ergibt sich:

$$x = -\frac{y\,dy}{dx} + \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}.$$

Die Integration wird zunächst in rechtwinkligen Koordinaten ausgeführt, wobei der Differentialquotient als Parameter auftritt; es ergibt sich eine ziemlich komplizierte Formel, die sich aber wesentlich vereinfacht dadurch, daß als Koordinaten der Radiusvektor z, und der von ihm und der x-Achse begrenzte Bogen u eines Kreises von gegebenem Radius $= a$ eingeführt werden, also Polarkoordinaten

---

[1]) Vgl. S. 480. [2]) Phil. Trans. Vol. 57 (1767), p. 338—371.

besonderer Art. Setzt man nämlich noch $\sqrt{s^2 - a^2} = t$, so ergibt sich

$$u = t - a \operatorname{arctg} \frac{t}{a}.$$

Es wird dann noch gezeigt, daß diese Kurven Traktorien der Archimedischen Spirale sind.

Auch Euler hat sich mit derartigen Fragen beschäftigt und folgendes „Problema geometricum ob singularia symptomata imprimis memorabile“[1]) gelöst (10. Februar 1777): Eine Kurve so zu bestimmen, daß der Sektor $ACZ = \Sigma$ dem Quadrat des Bogens $AZ = s$ proportional sei. Dabei ist angenommen, daß AC zugleich Tangente an die Kurve in A sei, und daß die Achse CB auf AC senkrecht stehe. Es soll also sein:

$$s^2 = 4n\Sigma. \tag{1}$$

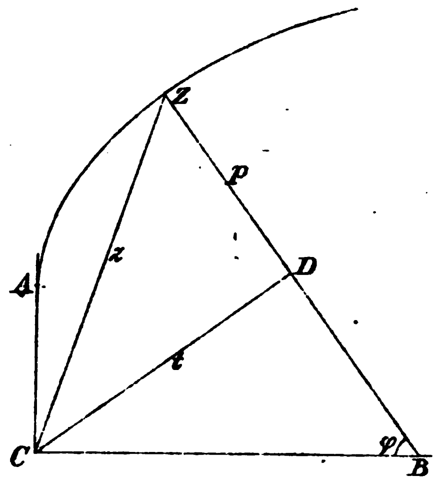


Fig. 86.

Dieser Gleichung genügt, wie man leicht sieht, die logarithmische Spirale um C, wenn

$$n = \frac{2}{\sin 2\zeta}$$

ist, wo ζ den konstanten Winkel des Radiusvektor gegen die Tangente bedeutet. Dies ist aber schon deshalb nicht die allgemeinste Lösung, weil hier $n > 2$ sein muß. Für die allgemein gefaßte Aufgabe gibt Euler drei Lösungen; die erste benutzt den Winkel φ der Normalen gegen die Achse und drückt das vom Ursprung auf die Normale gefällte Lot $CD = t$, und das Stück ZD der Normalen $= p$ in Funktion dieses Winkels aus. Hierbei zeigt sich zunächst, daß p dem Bogen s, t dem Krümmungsradius r proportional ist, nämlich

$$s = np; \qquad r = nt, \tag{2}$$

was Euler als „proprietates insignes“ dieser Kurven bezeichnet. Weiter ergeben sich die Differentialgleichungen:

$$t - n\frac{dt}{d\varphi} + \frac{d^2t}{d\varphi^2} = 0; \qquad t = \frac{dp}{d\varphi}. \tag{3}$$

---

[1]) N. A. P. VIII, p. 87—115.

Die Integration liefert unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$t = \frac{a}{\alpha - \beta}(\alpha e^{\alpha\varphi} - \beta e^{\beta\varphi}); \quad p = \int t\,d\varphi = \frac{a}{\alpha - \beta}(e^{\alpha\varphi} - e^{\beta\varphi}), \tag{4}$$

wo die vom Ursprung an die Kurve gezogene Tangente $CA = a$ ist, und α und β den Gleichungen genügen:

$$\alpha + \beta = n; \qquad \alpha\beta = 1.$$

Die Reellität von α und β hängt also davon ab, ob $n \gtreqless 2$ ist. Es sind also bei der Diskussion der Kurve drei Fälle zu unterscheiden:

1) $n > 2$, α und β sind reell (Fig. 37). Für wachsende Werte von φ wird t und damit nach (2) auch r immer größer; die Kurve zieht sich also in immer weiteren Windungen um den Punkt C herum. Nimmt φ ab und wird negativ, so gibt es schließlich einen Wert, nämlich

$$\varphi = \frac{-2\log\alpha}{\alpha - \beta},$$

wo t, und damit r, verschwindet. Daraus ergibt sich, daß der entsprechende Kurvenpunkt E ein Rückkehrpunkt ist (da $r = 0$), dessen Normale durch C geht (da $t = 0$). Von diesem Punkte ab nähert sich die Kurve asymptotisch dem Ursprung C, und es ist Bogen CE = Bogen AE. In der Nähe von C und im Unendlichen nähert sich die Kurve der logarithmischen Spirale. Denn ist ϑ der Winkel des Radiusvektor gegen die Kurventangente, so ist

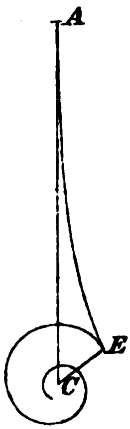


Fig. 37.

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{p}{t} = \frac{e^{\alpha\varphi} - e^{\beta\varphi}}{\alpha e^{\alpha\varphi} - \beta e^{\beta\varphi}},$$

also $\lim\limits_{\varphi=\infty} \operatorname{tg}\vartheta = \beta$, und $\lim\limits_{\varphi=-\infty} \operatorname{tg}\vartheta = \alpha$.

2) Fall $n = 2$. In diesem Fall ist $\alpha = \beta$; aus (3) folgt $t = a(1 + \varphi)e^{\varphi}$; $p = a\varphi \cdot e^{\varphi}$; $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\varphi}{1 + \varphi}$. Im Rückkehrpunkt ist $\varphi = -1$. Die logarithmische Spirale, der sich die Kurve asymptotisch nähert, hat den Winkel 45^0.

3) Fall $n < 2$. Hier werden α und β konjugiert imaginär und an Stelle der Exponentialfunktion treten goniometrische Funktionen. Setzt man $\alpha = \mu + i\nu$; $\beta = \mu - i\nu$, so wird:

$$t = \frac{a}{\nu} e^{\mu\varphi}(\mu \sin\nu\varphi + \nu\cos\nu\varphi); \quad p = \frac{a \cdot e^{\mu\varphi}\sin\nu\varphi}{\nu}.$$

Die Bedingung für den Rückkehrpunkt ($t=0$) ist hier $\operatorname{tg}\nu\varphi = -\frac{\nu}{\mu}$; diese ist aber für unendlich viele Werte von φ erfüllt, also hat die Kurve unendlich viele Spitzen.

Die beiden anderen Lösungen geben die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten (z, w) und in rechtwinkligen Koordinaten (x, y), nämlich:

$$z = \frac{a\sqrt{1+q^2}\,(q-\alpha)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}}{(q-\beta)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}}; \quad w = \int \frac{n q\, d q}{(1+q^2)(1-nq+q^2)},$$

wo der Parameter $q = \frac{z\,dw}{dz}$ ist; und

$$x = ae^{\alpha\varphi}(\alpha \sin\varphi - \cos\varphi) - ae^{\beta\varphi}(\beta \sin\varphi - \cos\varphi),$$
$$y = ae^{\alpha\varphi}(\sin\varphi + \alpha\cos\varphi) - ae^{\beta\varphi}(\sin\varphi + \beta\cos\varphi).$$

Endlich gehören hierher noch zwei Abhandlungen von Fuß, nämlich: „Exercitatio analytico-geometrica circa lineam curvam singulari proprietate praeditam"[1]) und: „Disquisitio analytico-geometrica de variis speciebus linearum curvarum singulari proprietate praeditarum"[2]). In der ersten werden Kurven folgender Eigenschaft gesucht: Ist C ein Punkt der Normalen, T ein Punkt der Tangente eines Kurvenpunktes A und Y der Schnittpunkt von CT mit der Kurve, so soll $AT = \operatorname{arc} AY$ sein. Setzt man $AC = 1$, und nimmt AC als Abszissenachse, C als Ursprung (also $CX' = x$, $X'Y = y$), so wird $AT = \frac{y}{x}$, die Differentialgleichung der Kurve lautet:

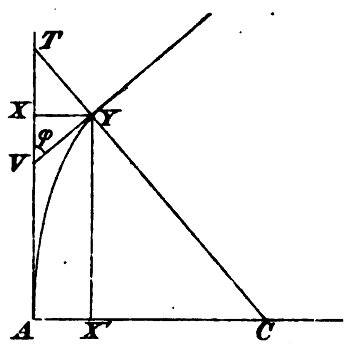


Fig. 38.

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = ds$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \pm x\sqrt{x^2+y^2-x^4}}{x(1-x^2)},$$

die sich jedoch nicht integrieren läßt, auch nicht durch Einführung von Polarkoordinaten. Fuß nimmt nun AT als x-Achse, also $AX = x$, $XY = y$, zieht ferner in Y die Tangente YV, und führt den $\angle TVY = \varphi$ und den Bogen $\widehat{AY} = s$ ein. Dann ist:

$$dx = ds\cos\varphi;$$
$$dy = -ds\sin\varphi;$$
$$AT = s = \frac{x}{1-y}.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = s^2\sin\varphi + s\cos\varphi; \quad y = 1 - s\sin\varphi - \cos\varphi;$$

$$s = \frac{1}{2\sqrt{\sin\varphi}}\int d\varphi\sqrt{\sin\varphi}.$$

---

[1]) A. P. 1780, II, p. 49—69. [2]) Ebenda, 1781, I, p. 127—146

Hieraus folgt für den Krümmungsradius:

$$r = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{2}(1 - s \operatorname{ctg} \varphi).$$

Für s wird noch folgende Reihenentwicklung angegeben:

$$s = \sin\varphi \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 7} \sin\varphi^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{\sin\varphi^4}{11} + \cdots \frac{1 \cdot 3 \ldots 2n-1}{2 \cdot 4 \ldots 2n} \cdot \frac{\sin\varphi^{2n}}{4n+3} + \cdots \right\}.$$

Die zweite Abhandlung bringt eine Verallgemeinerung der vorigen Aufgabe, insofern jetzt an Stelle der Tangente eine beliebige Gerade tritt. Es soll also (s. Fig. 39) arc $mn = MN$ sein. Hierbei wird der spezielle Fall behandelt, daß die Kurve durch C gehen und in C eine gegebene Neigung α gegen die x-Achse (das Lot von C auf MN) haben soll. Auch hier führt die Aufgabe auf ein Integral von ähnlicher Form, wie vorher, nämlich:

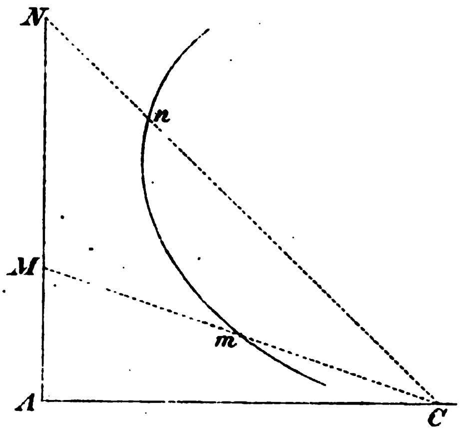


Fig. 39.

$$\int d\varphi \sqrt{\cos\varphi};$$

es wird auch hierfür eine Reihe entwickelt, die zur Berechnung von Kurvenpunkten für Spezialwerte von α dient.

In verschiedenen Aufgaben der hiermit erledigten Gruppe handelte es sich um Kurven, die gewisse Eigenschaften mit dem Kreis gemein haben. Es lag nahe, eine derartige Fragestellung noch weiter zu versuchen. Euler selbst hat dies ja für die charakteristischen Eigenschaften der Kegelschnitte getan (s. S. 471), und sich auch weiterhin mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt. Schubert und namentlich Fuß sind speziell vom Kreis ausgegangen. An derartige Fragen schlossen sich naturgemäß sonstige Aufgaben über Krümmungsradien, und deren Beziehungen zu den Koordinaten, zu Tangente, Bogenlänge usw. Die erste Abhandlung auf diesem Gebiet wurde von Euler der Petersburger Akademie vorgelegt am 16. Januar 1777: „Evolutio problematis, cuius solutio analytica est difficillima, dum synthetica per se est obvia"[1]). Es handelt sich darum, eine Kurve zu finden, deren Krümmungszentra alle auf einem gegebenen Kreis vom Radius $= a$ liegen. Es ist ohne weiteres klar, daß dieser Bedingung genügen:

---

[1]) N. A. P. VIII, p. 73—86.

1) alle Kreise, deren Mittelpunkte auf dem gegebenen Kreis liegen, also auch die Punkte dieses Kreises selbst.

2) alle Evolventen des gegebenen Kreises.

Die Abhandlung ist mehr wegen der darin angewandten Integrationsmethoden bemerkenswert, als wegen der gefundenen Kurven, die ja nichts Neues bieten. In ersterer Beziehung handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, wobei Integrale verschiedener Art auftreten, darunter auch der Kreis selbst als singuläres Integral. Von Interesse ist hier eine Bemerkung Eulers über die Untersuchungen von Lagrange (Nouveaux mémoires der Berliner Akademie 1774) über diesen Gegenstand, an denen Euler die nötige Klarheit vermißt: „Nullum autem est dubium, quin vir Illustrissimus (d. h. Lagrange) mentem suam non satis exposuerit aut quasdam rationes ad intelligendum necessarias reticuerit, quas equidem supplere non valeo, unde uberior explicatio super hoc principio, in quo Ill. Auctor adeo insigne supplementum Calculi integralis constituit, maxime foret optanda". Es handelt sich hier wieder hauptsächlich um die Bedeutung der Integrationskonstante (s. S. 479). Das jedem Band dieser Serie von Publikationen vorausgeschickte „Extrait historique" bemerkt dazu: „Il y a lieu de croire que M. Euler n'a pas bien saisi l'idée de M. de la Grange, aussi paraît-il disposé lui même à mettre ses doutes sur le compte de quelque malentendu".

Auf höchst merkwürdige Kurven wurde Euler geführt durch seine Untersuchungen: „De curvis, quarum radii osculi tenent rationem duplicatam distantiae a puncto fixo, earumque mirabilibus proprietatibus"[1]) (20. August 1781). Die Aufgabe ist also, eine Kurve so zu bestimmen, daß der Krümmungsradius r dem Quadrat des Radiusvektor z proportional ist, also $r = \frac{z^2}{a}$. Daß der Kreis vom Radius a dieser Gleichung genügt, ist ohne weiteres klar; es gibt aber auch noch andere Kurven. Um diese zu finden, werden Polarkoordi-

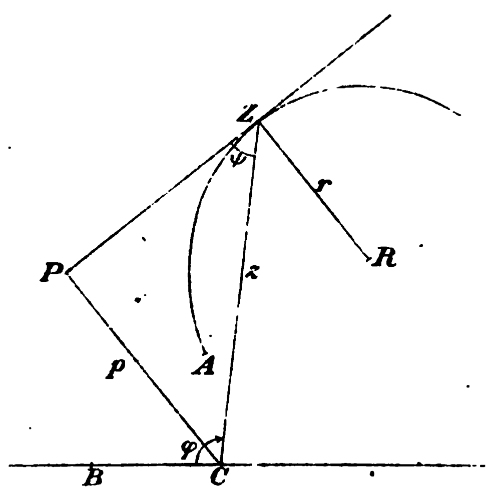


Fig. 40.

[1]) M. P. IX (1824), p. 47—56.

naten (z, φ) eingeführt, ferner das Lot P vom Pol C auf die Tangente $= p$, und der Winkel CZP des Radiusvektor gegen die Tangente $= \psi$ (vgl. Fig. 40). Es ist dann:

$$r = \frac{z \cdot dz}{dp}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{z\, d\varphi}{dz}, \tag{2}$$

also:

$$d\varphi = \frac{p\, dz}{z\sqrt{z^2 - p^2}}. \tag{3}$$

Da $r = \frac{z^2}{a}$, folgt aus (1) durch Integration, wobei die Konstante $= 1$ gesetzt wird:

$$p = a \log z, \tag{4}$$

und somit ist nach (3):

$$d\varphi = \frac{a \log z\, dz}{z\sqrt{z^2 - (a^2 \log z)^2}}. \tag{5}$$

Hieraus läßt sich ds bestimmen und integrieren; es ergibt sich

$$s - a\varphi = \sqrt{z^2 - (a \log z)^2} + c,$$

also, wenn $c = 0$ gesetzt wird (vgl. Fig. 40):

$$a\varphi = AZ - PZ.$$

Aus der Figur folgt noch:

$$\sin \psi = \frac{p}{z},$$

also nach (4):

$$\sin \psi = \frac{a \log z}{z}. \tag{6}$$

Die Integration von (5) ist nicht ausführbar, daher versucht Euler durch eine scharfsinnige Diskussion dieser Gleichungen den angenäherten Verlauf der Kurve herzuleiten. Zunächst ist zu bemerken, daß sich zwei wesentlich verschiedene Fälle ergeben, je nachdem a größer oder kleiner als die Basis e des natürlichen Logarithmensystems ist. Euler behandelt zunächst den

1) Fall: $a < e$.

In diesem Fall gibt es nur einen Wert von z, der den Radikanden $z^2 - (a \log z)^2$ zum Verschwinden bringt; denn der Faktor $z - a \log z$ kann in diesem Fall überhaupt nicht verschwinden. Bezeichnet man jenen Wert von z mit f, so ist also $f + a \log f = 0$. Beispielsweise ist für $a = 1$ angenähert $f = \frac{48}{85}$. Dieser Wert ist, wie Euler bemerkt, nahezu $= \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, woraus er vermutet, daß

$\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ der genaue Wert sei. Trägt man nun (vgl. Fig. 41) auf der Achse ein Stück $CF = f$ ab, so wird für diesen Wert von z nach (6) $\sin\psi = -1$; die Kurve steht also auf der Achse senkrecht. Nun schließt Euler aus (5), daß $d\varphi$ zunächst negativ sei, solange $z < e$, da ja dann $\log z$ negativ ist. Hier liegt nun offenbar ein Versehen vor; denn die Wurzel im Nenner hat ja ein Doppelzeichen, also muß die Kurve zur Achse symmetrisch sein. — Euler zeigt nun, daß die Kurve von F ab mit wachsendem z unter die Achse herunter geht, bis für $z = 1$ $d\varphi = 0$, und $\psi = 0$ wird; d. h. die Kurve berührt hier den Radiusvektor. Für weiter wachsende z nimmt $\sin\psi$ zu, erreicht sein Maximum für $z = e$, und nimmt von da an immer ab. Der Krümmungsradius nimmt gemäß der Gleichung $r = \frac{z^2}{a}$ mit wachsendem z sehr rasch zu. Den Verlauf der Kurve für sehr große Werte von z bestimmt Euler durch etwas gewagte Schlüsse dahin, daß sie zu einer Geraden, die mit der Achse einen Winkel $= \frac{a(1 + \log k)}{k}$ bildet (wo k eine sehr große Zahl ist), ähnlich verläuft, wie die Parabel zu ihrer Achse. Vielleicht ist es richtiger, daß die Kurve

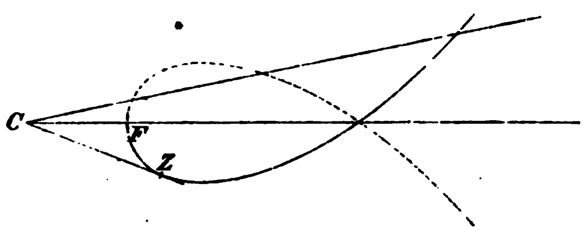


Fig. 41.

für sehr große Werte von z in rasch größer werdenden Spiralen um den Pol läuft. Auf Grund dieser Überlegungen bestimmt Euler für $a = 1$ die Gestalt der Kurve in der durch Fig. 41 angedeuteten Weise, wobei der von ihm nicht gezeichnete symmetrische zweite Zweig der Kurve gestrichelt beigefügt ist.

2. Fall. $a > e$. Hier erhalten die Kurven eine wesentlich andere Gestalt. Es gibt nämlich jetzt drei Werte von z, die den Ausdruck $z^2 - (a \log z)^2$ zum Verschwinden bringen: einmal den schon im 1. Fall genannten, für den $z + a \log z = 0$ ist, und der wieder mit f bezeichnet wird, und dann noch zwei weitere, g und h, für welche $z - a \log z = 0$ ist, und von denen der eine zwischen 1 und e, der andere zwischen e und ∞ liegt. Die Werte g und h genügen dabei noch der Gleichung:

$$\frac{g}{\log g} = \frac{h}{\log h} = a.$$

Für Werte von z zwischen g und h wird die Kurve imaginär, ebenso für $z < f$. Die Kurve zerfällt also in zwei getrennte Zweige, von denen der eine außerhalb des Kreises mit Radius h, der andere zwischen den Kreisen mit den Raden f und g liegt. In den Punkten, wo $z = f$, $z = g$, $z = h$ ist, steht der Radiusvektor auf der Tangente senkrecht; für $z = 1$ berührt er die Kurve.

Auf Grund ähnlicher Überlegungen wie im ersten Fall findet Euler die in Fig. 42 angedeutete Gestalt der Kurve, wobei $g = \sqrt{3}$ $h = 3\sqrt{3}$; $a = \frac{2\sqrt{3}}{\log 3}$ und f angenähert $= \frac{2a+1}{3a+3}$ ist. Hierbei ist also $CF = f$; $Cg = CG = g$; $CH = h$; $CE = e$; $CA = 1$. Die Symmetrie zur Achse wird diesmal berücksichtigt. Der äußere Zweig verläuft ähnlich, wie die Kurve im 1. Fall für große Werte von z. Die Anzahl der Windungen des inneren Kurvenzweiges hängt vom Verhältnis der $\sphericalangle\, ECg$ zu 360^0 ab. Euler bemerkt noch, daß dieser Winkel um so kleiner sei, je mehr f und g sich dem gemeinsamen Wert 1 nähern, und um so größer, je mehr sich g und h dem gemeinsamen Wert e nähern, und folgert daraus, daß für $a = e$, in welchem Fall auch g und $h = e$ werden, dieser Winkel ECg unendlich groß werde, d. h. daß die Kurve erst nach unendlich vielen Umdrehungen den Kreis mit Radius e erreiche, um dann in den äußeren Zweig überzugehen. Schließlich macht Euler darauf aufmerksam, daß der Kreis mit Radius a, der ja offensichtlich der Gleichung $z = \frac{r^2}{a}$ genügt, gar nicht auftritt, und bemerkt: „istum casum quasi per divisionem e calculo expulsum fore".

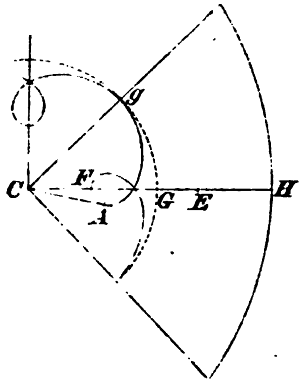


Fig. 42.

Die hier behandelte Frage ist ein spezieller Fall eines allgemeineren, die Fuß untersucht in einer Arbeit vom 24. April 1788: „Solutio problematis ex methodo tangentium inversa"[1]). Fuß knüpft hier an ein Paradoxon an, nämlich daß alle Kurven, deren Krümmungsradius gleich dem Radiusvektor ist, sich rektifizieren lassen, und daß dies für den Kreis (der doch sicher auch zu diesen Kurven gehört), bekanntlich nicht zutrifft. Er sucht nun zu einer Lösung dieses Paradoxons zu gelangen, indem er sich die Aufgabe stellt, alle Kurven zu finden, deren Krümmungsradius eine gegebene Funktion des Radiusvektor ist[2]).

[1]) N. A. P. IV, p. 104—128. [2]) Mit dieser Aufgabe hat sich auch schon Jacopo Riccati beschäftigt. S. Loria, Spez. alg. u. transcend. Kurven, S. 530.

Der Gang der Untersuchung ist im ganzen ähnlich wie in der Arbeit von **Euler**, die Bezeichnungen sind indes etwas anders gewählt. **Fuß** führt außer Polarkoordinaten (z, φ) ebenfalls das vom Pol auf die Tangente gefällte Lot t und $\frac{dy}{dx} = p$ ein. Die Funktion von z, die dem Krümmungsradius gleich sein soll, heißt Z. Es werden dann, meist auf differentialgeometrischem Wege, folgende Relationen hergeleitet:

$$t = \int \frac{z\,dz}{Z} = \frac{y - px}{\sqrt{1 + p^2}}, \tag{1}$$

$$d\varphi = \frac{t\,dz}{z\sqrt{z^2 - t^2}}. \tag{2}$$

Setzt man in (2) für t seinen Wert aus (1) ein, so ist die Aufgabe auf die Ausführung von zwei Quadraturen zurückgeführt. Nun werden Spezialfälle behandelt, und zwar

1) $Z = nz$. Die Integration wird bewerkstelligt durch Einführung des Winkels, den die Tangente eines Kurvenpunktes mit dem in diesem Punkt auf dem Radiusvektor errichteten Lot bildet, und der mit 2ψ bezeichnet wird. Es ergibt sich dann (mit a und C als Integrationskonstanten):

$$z = \frac{a}{1 + n\cos 2\psi}; \quad \varphi = C - 2\psi + \int \frac{2\,d\psi}{1 + n\cos 2\psi}, \tag{3}$$

und für den Bogen s

$$s = \frac{n^2 a \cdot \sin 2\psi}{(1 - n^2)(1 + n\cos 2\psi)} + \frac{na}{1 - n^2}(\varphi + 2\psi - C). \tag{4}$$

Aus (4) folgt, daß diese Kurven rektifizierbar sind. Das Integral in (3) nimmt verschiedene Formen an, je nachdem $n = 1$, $n < 1$, $n > 1$ ist, nämlich:

für $n = 1$

$$\varphi = C - 2\psi + \operatorname{tg}\psi,$$

für $n < 1$

$$\varphi = C - 2\psi + \frac{2}{\sqrt{1 - n^2}} \operatorname{arctg}\left[\sqrt{\frac{1-n}{1+n}} \operatorname{tg}\psi\right],$$

für $n > 1$

$$\varphi = C - 2\psi + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \log \frac{1 + \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \operatorname{tg}\psi}{1 - \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \operatorname{tg}\psi}.$$

Diese Fälle werden der Reihe nach entwickelt; am interessantesten ist eigentlich der erste, weil hierunter auch der Kreis fällt. Es ergibt sich eine Kurve, welche die zweite Evolvente eines Kreises vom Radius a ist. Beschreibt man nämlich (Fig. 43) einen Kreis mit Radius a (Mittelpunkt A), konstruiert dessen Evol-

vente ER von E aus, trägt auf der Tangente des Anfangspunktes ein Stück $EC = \frac{a}{2}$ ab, und wickelt nun einen über die Evolvente gespannten Faden, von C beginnend, ab, so beschreibt das freie Ende die gesuchte Kurve. Es ist jedoch auch hier, wie bei Euler, nicht berücksichtigt, daß die Kurve zur Achse symmetrisch sein muß, und daher nur der in der Fig. 43 ganz ausgezogene Teil der Kurve angegeben. Für die Bogenlänge s ergibt sich in diesem Fall

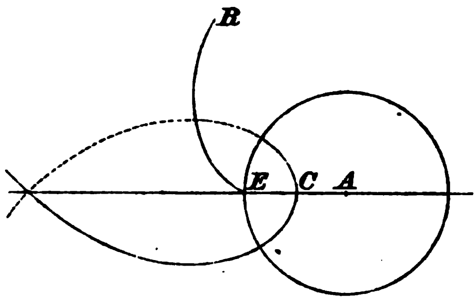


Fig. 43.

$$s = \frac{1}{2}\sqrt{2az - a^2} + \frac{(2az - a^2)^{3/2}}{6a^2},$$

also ist die Kurve rektifizierbar. Damit kommt Fuß auf das zu Anfang erwähnte Paradoxon zurück, daß der Kreis mit Radius $= a$, der doch auch zu diesen Kurven gehört, nicht rektifizierbar ist. Die Lösung findet Fuß darin, daß für $z = a$ der Ausdruck für das Linienelement die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annimmt.

Nachdem auch noch die beiden anderen Fälle ($n < 1$, $n > 1$) entwickelt sind, werden die Kurven betrachtet, für welche

2) $r = Z = nz^m$ ist. Hier ergibt sich aus (1) mit Vernachlässigung der Integrationskonstante:

$$t = \frac{z^{2-m}}{n(2-m)}$$

und daraus

$$z = \frac{a}{\sqrt[m-1]{\cos(m-1)\varphi}}.$$

Es zeigt sich nun, daß diese Formeln für $m = 1$ und $m = 2$ versagen; für $m = 2$ findet Fuß den Ausdruck für die Bogenlänge, der auch bei Euler vorkommt, und bekennt: „hic subsistere sumus coacti". $m = 3$ ergibt eine gleichseitige Hyperbel. Von Interesse ist noch die Schlußbemerkung, daß Fuß erst nachdem er seine Untersuchung „iam ad umbilicum paene" durchgeführt hatte, die vorher (S. 497 ff.) besprochene Arbeit des schon verstorbenen Euler entdeckte (die damals noch nicht gedruckt war), wo die Diskussion des schwierigsten Falles $m = 2$ „per mera ratiocinia" durchgeführt sei.

Dem in den beiden letzten Arbeiten erwähnten Paradoxon be-

züglich des Kreises hat Schubert eine eigene Untersuchung gewidmet: „Solutio dubii circa rectificationem curvarum“[1]) (30. Juni 1791). Er bemerkt einleitend, daß solche Paradoxa meist daher kommen, „quod Analysta ad calculum nimis attentus, minus inquisiverit, an, quae calculo supponit, cum rei natura consentiant“, und knüpft dann an die eben besprochene Arbeit von Fuß an. Die Untersuchung trifft aber den eigentlichen Kern der Sache auch nicht, nämlich, daß $r = \text{const.}$ ein singuläres Integral der Differentialgleichung ist. Schubert bemerkt nur, daß sich für den Kreis durch Anwendung des allgemeinen Verfahrens eine identische Gleichung ergebe. Interessant ist an der Arbeit auch eine Zwischenbemerkung; Schubert glaubt nämlich in der Tatsache, daß sich der Bogen des Kreises durch das allgemeine Verfahren nicht berechnen läßt, einen Beweis dafür zu finden, daß er überhaupt nicht rektifizierbar sei, während bisher die „irrectificabilitas“ des Kreises schwerlich je streng bewiesen worden sei.

Kurz vorher (18. Oktober 1790) hatte Schubert in einer Note („Problemata e methodo tangentium inversa“[2]) sich, ausgehend von der Eigenschaft des Kreises, daß der Krümmungsradius gleich der Normalen ist, die Aufgabe gestellt, eine Kurve zu finden, für welche der Krümmungsradius gleich der negativen Normalen ist; daß die von ihm ermittelte Kurve die längst bekannte Kettenlinie ist, scheint ihm dabei entgangen zu sein.

Auch Fuß hat sich später noch einmal mit derartigen Fragen beschäftigt, und zehn Aufgaben über den Krümmungsradius, wo Be-

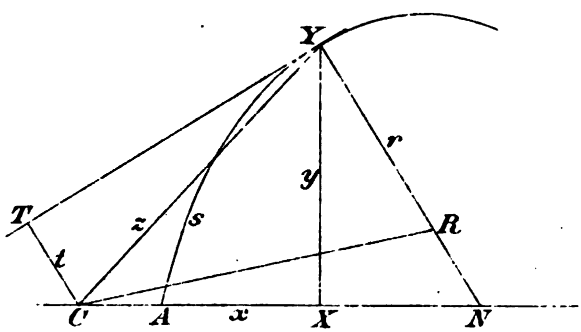


Fig. 44.

ziehungen zwischen diesem, dem Radiusvektor, der Bogenlänge usw. gegeben sind, gelöst („Decas problematum geometricorum ex methodo tangentium inversa, radium osculi spectantium“[3]) (13. Juni 1799).

[1]) N. A. P. IX, p. 190—204. [2]) Ebenda p. 166—189. [3]) M. P. I (1809), p. 88—118.

Dieselben lauten in den durch Fig. 44 angedeuteten Bezeichnungen (m, n bedeuten gegebene Zahlen, a, c gegebene Strecken, R das Krümmungszentrum):

1) $s = r$.

2) $\frac{r}{CN} = \frac{1}{n}$.

3) $r - z = a$.

4) $\frac{r}{CR} = \frac{1}{n}$.

5) $\frac{r}{YT} = \frac{1}{n}$.

6) $\frac{r}{s} = \frac{yT}{t}$.

7) $r^2 + s^2 = \frac{z^2}{n^2}$.

8) $m^2r^2 + n^2s^2 = z^2$.

9) $m^2r^2 + n^2s^2 = a^2$.

10) $m^2s^2 - n^2r^2 = c^2$.

Endlich gehört noch hierher eine Arbeit von Platzmann (1760 bis 1786), einem Schüler von Lexell und Adjunkt der Petersburger Akademie[1]): „Solutio problematis ex methodo tangentium inversa"[2]). Hier soll der Krümmungsradius in einem konstanten Verhältnis zur Summe der Abszisse und Subnormale stehen, es ist also dieselbe Aufgabe, die Fuß später in seiner Decas als Nr. 2 behandelt hat.

Eine dritte, kleinere Gruppe von Abhandlungen befaßt sich mit Kurven, die durch irgendwelche mechanische Eigenschaften definiert sind. Die erste dieser Arbeiten ist von Saint Jacques de Guillaume de Silvabella (1722—1801, Direktor der Sternwarte zu Marseille); sie handelt: „Du solide de la moindre résistance"[3]) und sucht die Kurve, deren Rotationskörper bei einer Bewegung in der Richtung der Achse im widerstehenden Mittel den geringsten Widerstand erfährt.[4]) Silvabella betrachtet zuerst den Widerstand des Rotationskörpers eines Kreisbogens, stellt die Bedingung dafür auf, daß dieser ein Minimum wird, und leitet daraus die Differentialgleichung der Kurve her, nämlich:

$$3y\,dx\,dy^2d^2y - y\,dy^2d^2x - dy^4dx = 0.$$

Ein erstes Integral lautet, wenn $\frac{dy}{dx} = u$ gesetzt wird:

$$y = \frac{c}{u^3}(1 + u^2).$$

Die ballistische Aufgabe, die Bahnlinie der Geschosse mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes zu finden, behandelt Jean Charles Borda[5]) (1733—1799, Ingenieur der französischen Flotte,

---

[1]) Vesselofski, Einige Materialien zur Geschichte der Akademie der Wissenschaften M. P. LXXIII, Anhang Nr. 2 (in russischer Sprache). [2]) A. P. 1781, II, p. 90—103. [3]) Mém. div. Sav. III (1760), p. 638—649. [4]) Loria, Spezielle Kurven, S. 585 f. [5]) Hist. de l'Acad. Avec les mémoires math. et phys. 1769, p. 247—271

später Divisionschef im Marineministerium) unter der Voraussetzung, daß der Luftwiderstand R dem Quadrat der Geschwindigkeit u proportional ist, also $R = \frac{u^2}{a}$. Die entstehende Differentialgleichung lautet, wenn $z = \frac{dy}{dx}$ ist:

$$x = \int \frac{a\,dz}{\int dz\sqrt{1+z^2}}; \quad y = \int \frac{a\,z\,dz}{\int dz\sqrt{1+z^2}}.$$

Um die Integration dieser Gleichungen bewerkstelligen zu können, nimmt **Borda** an, daß die Dichtigkeit der Luft nicht konstant sei, sondern eine Funktion von x sei. Durch passende Wahl derselben werden die Gleichungen integrabel. Durchgerechnete Zahlenbeispiele ergeben, daß die Bahn erheblich von der parabolischen abweicht ferner, daß die wirkliche Schußweite hinter der theoretischen zurückbleibt, und daß sie ihr Maximum nicht bei 45°, sondern etwa bei 30° erreicht.

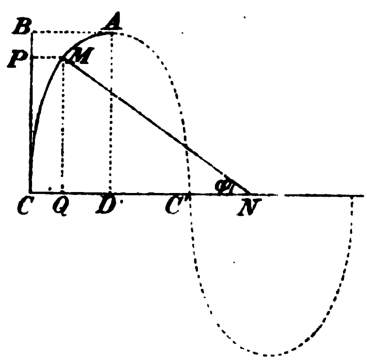


Fig. 45.

Mit einer elastischen Kurve hat sich **Euler** in einer Abhandlung: „De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione $y = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$ contentae"[1]) beschäftigt. Er bemerkt einleitend, daß die Kurve periodisch verlaufe, und beweist nun folgende merkwürdige Eigenschaften von ihr, wobei (vgl. Fig. 45) AD (Abstand eines Maximalpunktes von der y-Achse) $= 1$; ferner

$$CD = a; \quad \text{arc}\, CA = c; \quad CP = x; \quad PM = y; \quad \text{arc}\, CM = s$$

ist; nämlich:

$$\text{die Normale } MN = \frac{1}{x}; \quad ds = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$\text{Krümmungsradius} = \frac{1}{2x} = \frac{MN}{2}; \quad AB \cdot \text{arc}\, AC = AD^2 \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Bedeutet ferner $\Pi(z)$ die Funktion $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^4}}$, so zeigt sich, daß $y = \Pi(x)$ unsere Kurve darstellt, ist ferner $\Theta(z) = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$, so daß

[1]) A. P. 1782, II, p. 34—61.

$\Theta(x)$ die Bogenlänge bedeutet, sind endlich x, y, z drei Abszissen derart, daß

$$\Theta(z) = \Theta(x) + \Theta(y)$$

ist, so ist:

$$\Pi(z) = \Pi(x) + \Pi(y) + xyz.$$

Die A. E. 1769 enthalten eine Arbeit von **Lambert**: „Solutio problematis ad methodum tangentium inversam pertinentis", über die **Verfolgungskurve**, mit der Angabe, daß die Aufgabe von **Vincenzo Riccati** stamme[1]); nach dessen Aussage sei sie ihm (**Riccati**) gesprächsweise von einem „viro in rebus analyticis satis versato" vorgelegt worden, der aber offen zugab („ingenue aiebat") keine Lösung zu wissen. **Lambert** bemerkt dazu, daß ihm dieselbe Aufgabe schon lange wie ein „lusus ingenii" in den Sinn gekommen sei.

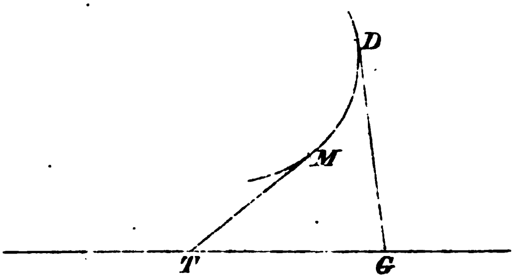


Fig. 46.

Die Kurve muß nun die Eigenschaft haben, daß ein Kurvenbogen MD in einem konstanten Verhältnis steht zu dem Stück TG, das die in seinen Endpunkten gezogenen Tangenten auf einer gegebenen Geraden abschneiden, also

$$\text{arc}\, MD : TG = n : 1.$$

Nimmt man die gegebene Gerade als x-Achse und GT als positive Richtung derselben, und bezeichnet den $\angle MTG$ mit w, so ist

$$\operatorname{tg} w = -\frac{dy}{dx},$$

und die Differentialgleichung der Kurve heißt:

$$\frac{n\,dy}{\sin w} = y\,d(\operatorname{ctg} w).$$

Nimmt man als Anfangspunkt den Punkt, wo die Kurventangente auf der x-Achse senkrecht steht, und den Abschnitt dieser Tangente als Einheit, so ergibt die Integration:

$$2x = -\frac{1}{(n-1)\,y^{n-1}} + \frac{1}{(n+1)\,y^{n+1}} - \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Ist $n = 1$, d. h. die Geschwindigkeit des Verfolgers gleich der des Verfolgten, so versagt diese Gleichung. Ein Zurückgehen auf die ursprüngliche Differentialgleichung ergibt in diesem Fall:

---

[1]) **Loria**, Spezielle Kurven, S. 608, zeigt, daß die Aufgabe älter ist.

$$2x = -\log y + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Eine Aufgabe verwandter Art behandelt Nieuport (Charles François le Prudhomme d'Hailly, Vicomte de Nieuport, 1746 bis 1827, Malteser Ritter, von 1815 an Mitglied der 2. Kammer und der Akademie in Brüssel) in einer vom 16. September 1777 datierten Arbeit: „Mémoire sur les courbes que décrit un corps qui s'approche ou s'éloigne en raison donnée d'un point qui parcourt une ligne droite"[1]). Es handelt sich dabei um folgendes: Ein Punkt bewegt sich mit gegebener Geschwindigkeit v von einem festen Punkt A aus, ein zweiter ebenso mit der Geschwindigkeit w von B aus, der letztere auf einer Geraden. Bezeichnen C und D eine beliebige Lage der beiden Punkte, so kann man die Aufgabe stellen, die Bahnkurve des Punktes C so zu bestimmen, daß die Entfernung CD der beiden Punkte eine gegebene Funktion der Koordinaten des Punktes C sei. Die Lösung ist folgende: Es sei (Fig. 47) $BK = x$; $CK = y$; $BD = z$; arc $AC = s$, so ist

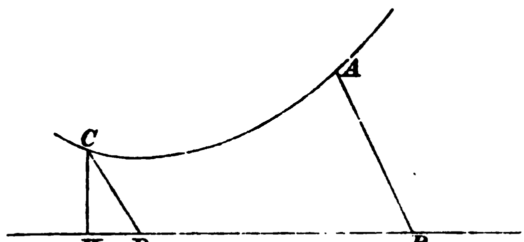


Fig. 47.

$$s = x - \sqrt{CD^2 - y^2}; \quad \frac{z}{s} = \frac{w}{v}.$$

Daraus folgt als Differentialgleichung der Kurve

$$\frac{ds \cdot w}{v} = d\left(x - \sqrt{CD^2 - y^2}\right),$$

wo also CD eine gegebene Funktion von x und y ist. Dies wird an dem einfachsten Fall $CD = a$ durchgeführt, wobei also die Entfernung der beiden Punkte und das Verhältnis ihrer Geschwindigkeiten konstant ist. Ist letzteres $= h$, so ergibt sich:

$$x = c + \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{g} + \frac{h}{g^2}\int\sqrt{\frac{h^2y^2 - g^2}{a^2 - y^2}}\,dy,$$

wo $h^2 - 1 = g^2$ ist.

Für $h = 1$ erhält man mit Weglassung der Integrationskonstanten:

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a}{4}\log\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{a + \sqrt{a^2 - y^2}}.$$

[1]) Mémoires de l'Acad. Imp. de Bruxelles, T. II (1780), p. 139—151.

Es wird dann noch der schwierigere Fall untersucht, daß die Geschwindigkeiten veränderlich sind. Bezeichnet man diese mit P und Q, so ist $z = \int \frac{P\,ds}{Q}$, also wird die Differentialgleichung:

$$\frac{P\,ds}{Q} = dx - d\sqrt{CD^2 - y^2}.$$

Als Beispiel dient $\frac{P}{Q} = \frac{\sqrt{x-q}}{\sqrt{x}}$; $CD = y$, wobei sich die Wurfparabel ergibt. Auf diesem Weg läßt sich auch leicht die Leibnizsche Isochrone herleiten, indem $CD = y$; $P = \sqrt{q}$; $Q = \sqrt{x}$ gesetzt wird. Man erhält so die Neilsche Parabel.

Mit allgemeinen Traktrixkurven[1]) beschäftigt sich Euler in zwei Abhandlungen aus dem Jahr 1775, „Commentatio de curvis tractoriis", und „De curvis tractoriis compositis".[2]) Die erste stellt die Differentialgleichung für den allgemeinen Fall auf, daß der ziehende Punkt sich auf einer beliebigen Kurve bewegt, integriert und rektifiziert sie für den Fall, daß diese Kurve ein Kreis ist. Euler versucht auch, die Aufgabe unter Berücksichtigung der Reibung zu lösen, mit dem Resultat, daß diese Aufgabe die Kräfte der Analysis übersteige. In der zweiten Abhandlung wird der Fall untersucht, daß mehrere Punkte hintereinander an demselben Faden befestigt gedacht sind; doch gelingt auch hier die Lösung nicht.

Endlich ist noch zu bemerken, daß Malfatti in der schon erwähnten Schrift: „Della curva Cassiniana", wo alle Eigenschaften durch synthetische Überlegungen hergeleitet werden, von der Lemniskate die folgende nachweist: Steht eine Doppelpunktstangente vertikal, so durchfällt ein schwerer Punkt, der im Doppelpunkt seine Bewegung beginnt, einen Kurvenbogen und seine Sehne in der gleichen Zeit.

Als vierte Gruppe lassen sich einige Arbeiten über Trajektorien und Parallelkurven zusammenstellen; den ersteren sind verschiedene Abhandlungen von Euler gewidmet, nämlich: „Considerationes de traiectoriis orthogonalibus"[3]), „Digressio de traiectoriis tam orthogonalibus quam obliquangulis"[4]) und „Considerationes super traiectoriis tam rectangulis quam obliquangulis"[5]) (3. Juni 1775). Gerade bei diesen Arbeiten ist wieder auf die S. 479 gemachte Bemerkung über eine gewisse Unklarheit in betreff der Integrationskonstanten hinzuweisen. Zunächst ist stets nur von einer Trajektorie die Rede[6]). Es ist nämlich fast immer angenommen, daß die Differentialgleichung der

---

[1]) Vgl. Kästner, Gesch. d. Math. IV, S. 2f. [2]) N. A. P. II, p. 3—27, p. 28—35. [3]) N. C. P. XIV (1769), p. 46—71. [4]) Ebenda, XVII (1772), p. 205—248. [5]) N. A. P. I, p. 3—46. [6]) So übrigens auch bei Klügel in dem betr. Artikel, V, p. 92ff.

Kurvenschar, deren Trajektorie gesucht wird, den Parameter noch enthält; in der zweiten der oben genannten Abhandlungen sagt Euler sogar geradezu, eine Kurvenschar könne definiert sein durch eine Differentialgleichung mit einem Parameter. — Unter dieser Annahme untersucht Euler die verschiedenen Fälle, die sich ergeben, je nachdem die Gleichung der Kurvenschar nach einer der Variabeln oder nach dem Parameter auflösbar ist. Die Theorie selbst wird jedoch in keinem wesentlichen Punkte weiter gefördert, nur der Satz tritt wohl hier zum erstenmal auf, daß die Bedingung für die Orthogonalität zweier Kurvenscharen $F(x, y, p) = 0$ und $\Phi(x, y, q) = 0$ gegeben ist durch die Gleichung $\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} = 0$; um die hier auftretenden Differentialquotienten bilden zu können, sind aus den Gleichungen der Kurvenscharen x und y als Funktionen der Parameter p und q auszudrücken.

Einen entschiedenen Fortschritt gegenüber diesem Standpunkt bedeutet die Arbeit von Trembley (1749—1811, erst Jurist, dann Mathematiker, von 1794 an in Berlin, Mitglied der Akademie): „Observations sur le problème des Trajectoires“.[1] Hier wird die Aufgabe mit voller Klarheit angefaßt und durchgeführt, unter Bezugnahme auf Eulers Veröffentlichungen, die Trembley als einen „calcul assez prolixe“ bezeichnet. Er macht auch auf den Hauptfehler aufmerksam, nämlich auf die falsche Auffassung des Parameters, bzw. der Integrationskonstanten, und zeigt, wie man aus der Gleichung einer Kurvenschar $F(x, y, \alpha) = 0$ mit dem Parameter α ihre Differentialgleichung findet, indem man sie differenziert und den Parameter eliminiert, was freilich bei der praktischen Ausführung manche Schwierigkeiten bietet. Aus der Differentialgleichung ergibt sich dann die der Orthogonaltrajektorien, indem man $\frac{dy}{dx}$ mit $-\frac{dx}{dy}$ vertauscht. Die Methode wird an einigen Beispielen durchgeführt und auf schiefwinklige Trajektorien ausgedehnt.

„De traiectoriis reciprocis tam rectangulis quam obliquangulis“ ist der Titel einer Abhandlung von Euler in den A. P. 1782, II, p. 3—33. Die hier betrachteten Kurven sind von etwas anderer Art, als die Isogonaltrajektorien. Es handelt sich nämlich darum, eine Kurve zu finden, die, um eine Gerade umgeklappt und parallel mit dieser verschoben, ihre ursprüngliche Lage immer unter demselben Winkel schneidet. Euler behandelt hier die schon von Joh. Bernoulli und von ihm selbst gelöste Aufgabe[2]) in allgemeiner Weise, und leitet algebraische Kurven dieser Art her.

---

[1]) Nouveaux Mémoires de l'Acad. de Berlin (1797), p. 36—83. [2]) Siehe Klügel, V, p. 113 ff.

Zu den Trajektorien kann man in gewissem Sinn auch die Parallelkurven rechnen, sofern sie die Orthogonaltrajektorien einer Schar von Geraden sind. Sie entstehen bekanntlich dadurch, daß man auf allen Normalen einer Kurve in derselben Richtung gleiche Stücke abträgt und die Endpunkte verbindet; sie heißen auch äquidistante Kurven. Leibniz[1]) hat zuerst auf sie aufmerksam gemacht; in unserem Zeitraum hat sich zuerst Nieuport damit beschäftigt in einem „Mémoire sur les codeveloppées des courbes"[2]). Er nennt sie hier „codeveloppées" und stellt ihre allgemeine Gleichung auf, die er dann speziell auf die Parallelkurven der Parabel anwendet. Bemerkenswert ist, wie er sie zu veranschaulichen sucht, nämlich durch eine Fläche, die entsteht, wenn man jede Parallelkurve im Abstand c um die Strecke c über die Koordinatenebene hebt. Es entsteht so ein „solide fort compliqué", nämlich, um die Sache im heutigen Sprachgebrauch auszudrücken, eine Regelfläche, deren Mantellinien alle die gegebene Kurve schneiden, mit deren Ebene einen $\sphericalangle\ 45^0$ bilden und sich auf diese Ebene als die Normalen der Kurve projizieren. — Fast gleichzeitig und, wie es scheint, unabhängig voneinander, haben Kästner und Angelo Luigi Lotteri (1760—1840, Professor der Mathematik zu Pavia) die Parallelkurven untersucht. Merkwürdig ist auch, daß beide durch eine Aufgabe aus der Praxis darauf geführt worden sind, nämlich eine elliptische Mauer von überall gleicher Dicke zu konstruieren. Kästners Arbeit „De curvis aequidistantibus" steht in den Commentationes Goettingenses 1793, Lotteris (Memorie sulle curve parallele) im Giornale fisico-medico de Pavia (1792). In dieser Zeitschrift findet sich im Jahrgang 1795 ein Bericht über Kästners Arbeit, sowie über eine frühere von Cagnazzi über denselben Gegenstand, die schon 1789 der R. Soc. delle Scienze di Napoli übergeben wurde. Die wichtigste, von Kästner und Lotteri unabhängig gefundene Eigenschaft bezieht sich auf die von zwei Kurvennormalen und den zwischen ihnen liegenden Bögen der Parallelkurven eingeschlossene Fläche. Sie ist nämlich gleich dem Inhalt eines Trapezes, dessen parallele Seiten gleich den beiden Parallelkurven sind, und dessen Höhe gleich dem Abstand derselben ist; dieser Satz tritt bei Kästner allerdings in etwas anderer Form auf. Es ist nämlich angenommen, daß die eine der begrenzenden Normalen die x-Achse ist; ist nun arc $AM = s$ der Bogen einer Kurve, arc FH der einer Parallelen im Abstand h, und ζ der Winkel der Tangente im Punkt M gegen die x-Achse, so ist zunächst

$$FH = s - h(90^0 - \zeta)^{3)},$$

[1]) Bd. III[2], S. 212. [2]) Mém. de l'Acad. de Bruxelles, T. 4, p. 1—16.
[3]) Wird Joh. Bernoulli zugeschrieben.

und daraus

$$AFMH = hs - \tfrac{1}{2}h^2(90^0 - \zeta).$$

Es folgt dann eine ausführliche Diskussion der verschiedenen Fälle, die auftreten, namentlich dann, wenn der Abstand der auf der konkaven Seite liegenden Parallelkurve größer oder gleich dem Krümmungsradius ist; im letzteren Fall hat die Parallelkurve einen Rückkehrpunkt. Auch daß die Parallelkurven alle dieselbe Evolute haben, wird bemerkt, und den Schluß bilden einige Anwendungen. Die Parallelkurven der Ellipse speziell hat Prasse in einer Schrift: „De ellipseos evoluta et aequidistantibus" (Leipzig 1798) behandelt.

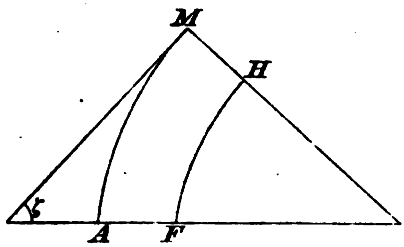


Fig. 48.

Zum Schluß dieses Kapitels sind nun noch eine Anzahl von Arbeiten aufzuführen, die untereinander in keinem engeren Zusammenhang stehen. Wir beginnen mit einer Untersuchung von Casali (1721—1802; Professor in Bologna) über den Ort der Brennpunkte einer Schar von Kegelschnitten, deren Ebenen alle durch eine gegebene zur Grundkreisebene parallele Tangente gehen. Sie ist betitelt: „De conicarum sectionum focis" und steht in den Comment. Bonon. T. IV (1757). Casali findet als den gesuchten Ort eine Kurve dritter Ordnung, die sogenannte Pteroides Torricellanea[1]); sie liegt in der zur gegebenen Tangente senkrechten Meridianebene, hat die eine der in dieser liegenden Mantellinien zur Asymptote, berührt die andere im Berührpunkt der gegebenen Tangente, und hat einen Doppelpunkt in dem Fußpunkt des Lotes, das von diesem Punkt auf die Achse gefällt wird.

Aus dem Jahr 1764 ist eine Arbeit von Euler zu nennen: „De insigni promotione methodi tangentium inversae"[2]). Es handelt sich hier um eine Kurve, die zunächst durch eine diskontinuierliche Reihe von Punkten bestimmt ist. Die Aufgabe ist nämlich, eine Kurve so zu finden, daß die Normale eines Punktes der Ordinate des Endpunktes dieser Normalen gleich werde. Die Herstellung einer Differentialgleichung ist nicht ohne weiteres möglich. Zunächst wird gezeigt, daß die Subnormalen der verschiedenen auf diese Weise ge-

[1]) Nach Loria (Spez. Kurven. S. 60) stammt diese Kurve jedoch nicht von Torricelli, sondern von einem französischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts, vielleicht Roberval. [2]) N. C. P. X, p. 135—153.

wonnenen Kurvenpunkte gleich sind, daß aber das Umgekehrte nicht gilt, d. h. daß die Kurven mit konstanter Subnormale der gestellten Bedingung nicht entsprechen. Bezeichnet man nun diesen konstanten Wert der Subnormalen mit t, so können die Abszissen der einzelnen Punkte so ausgedrückt werden: $x = \frac{t \cdot \varphi}{2\pi} + T$, wo t und T Funktionen von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ bedeuten; wächst also φ um 2π, so wächst x um t. Da nun t die Subnormale bedeutet, so ist $\frac{y\,dy}{dx} = t$; also $y^2 = 2\int t\,dx$, während $dx = \frac{t\,d\varphi + \varphi\,dt}{2\pi} + dT$ ist. Setzt man diesen Wert ein, so folgt: $y^2 = \frac{t^2\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\int t^2\,d\varphi + 2\int t\,dT$. In ähnlicher Weise werden dann noch andere Aufgaben dieser Art behandelt, z. B. daß $QR^2 - JQ^2$ konstant sein soll; daß die Subnormalen eine arithmetische oder geometrische Progression bilden sollen.

Eine Kurve, von der sich ebenfalls zunächst bloß diskrete Punkte bestimmen lassen, ist $y = x!$ Dieser hat Euler eine Abhandlung gewidmet: „De curva hypergeometrica hac aequatione expressa: $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots x$".[1]) Die Gleichung ergibt zunächst nur Ordinatenwerte für ganzzahlige Abszissen; für gebrochene ist sie so umzuformen, daß sie für beliebige Abszissen brauchbar ist, und natürlich für ganzzahlige mit der ursprünglichen Gleichung übereinstimmt. Hierbei ist die Bemerkung von Wert, daß mit einer beliebigen Ordinate auch diejenige bekannt ist, die zu einer um 1 größeren oder kleineren Abszisse gehört, wie ja leicht zu sehen ist. Es genügt also, den Verlauf der Kurve im Abszissenintervall 0 bis 1 festzustellen. Euler gibt hierfür verschiedene Entwicklungen, die zur Bestimmung von Tangente, Normale, Krümmungsradius usw. benutzt werden. Als Koordinaten eines Minimalpunktes ergeben sich durch ein Annäherungsverfahren: $x = 0{,}461632144 71$; $y = 0{,}8856031945$, wozu Euler bemerkt, es sei nicht gelungen, irgendwelche Beziehungen dieser Werte zu bekannten irrationalen oder transzendenten Zahlen aufzufinden.

Eine dritte Abhandlung über derartige Kurven, von denen zunächst nur diskrete Punkte gegeben sind, rührt von Fontana her: „Sopra l'equazione d'una curva. Sopra la falsita di due famosi Teoremi, e sopra la serie armoniche a termini infinitamente piccioli".[2]) Hier interessiert uns nur der erste Teil der Abhandlung, der folgender Aufgabe gewidmet ist: Auf dem einen Schenkel eines Winkels QAB ist in B ein Lot errichtet, das die Halbierungslinie des Winkels

[1]) N. C. P. XIII (1768), p. 3—66. [2]) Mem. mat. fis. Soc. Ital. (1784), T. II, p. 1 3—141.

in C schneidet; auf AC ist in C wieder ein Lot errichtet, das die Halbierungslinie des Winkels QAC in D schneidet usf. Führt man diese Konstruktion unendlich oft aus, so erreicht man schließlich die Gerade AQ in einem Punkte H. Gesucht ist nun 1. die Strecke AH, 2. die Gleichung der Kurve $B, C, D \ldots H$. — Ist $AD = z$ der Ra-

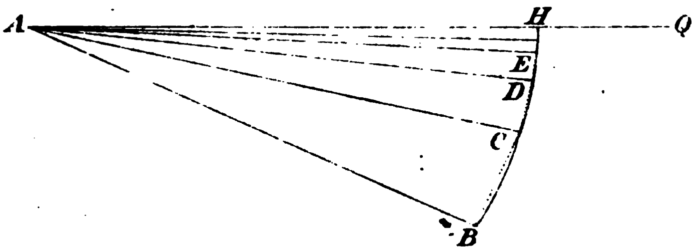


Fig. 40.

diusvektor eines beliebigen Kurvenpunktes D, und $\sphericalangle QAD = u$, so ist für den nächsten Punkt E der Radiusvektor $AE = \dfrac{z}{\cos\frac{u}{z}}$ usw., so daß schließlich:

$$AH = \lim_{n=\infty} \frac{z}{\cos\frac{u}{2}\cos\frac{u}{4}\cos\frac{u}{8}\cdots\cos\frac{u}{2n}},$$

oder nach einem trigonometrischen Satze:

$$AH = \frac{u \cdot z}{\sin u}.$$

Bezeichnet man diesen Wert mit a, so ist umgekehrt die Gleichung der Kurve:

$$z = \frac{a \cdot \sin u}{u}.$$

Zu bemerken ist noch, daß für diese Gleichung, wohl zum erstenmal, der Ausdruck equazione polare gebraucht wird. Sonach scheint das Wort „Polargleichung" und damit zusammenhängend: „Polarkoordinaten" aus Italien zu stammen. — Die Kurve selbst liegt symmetrisch zur Achse AQ und besteht aus einem herzförmigen Zweig mit der Spitze in A und unendlich vielen immer kleiner werdenden Ovalen, die AQ in A beiderseits berühren.

Zwei weitere Arbeiten Eulers beschäftigen sich mit der Beziehung einer Kurve zu ihren Evoluten. In der ersten: „Demonstratio theorematis Bernoulliani quod ex evolutione curvae cuiuscunque rectangulae in infinitum tandem cycloides nascantur"[1]) wird ein Satz von

---

[1]) N. C. P. X (1764). p. 179—198

Bernoulli bewiesen, wonach ein Kurvenstück von der Amplitude $= 90^0$ durch fortgesetzte Evolutenbildung schließlich in eine Zykloide übergeht, und zwar zunächst durch eine Art Anschaulichkeitsbeweis, dann in streng analytischer Form, wobei gezeigt wird, daß für die letzte Kurve zwischen dem Bogen s und seiner Amplitude v die Beziehung besteht: $s = A \cdot \sin v$, welche die Zykloide definiert. Die zweite heißt: „Investigatio curvarum, quae similes sunt suis evolutis vel primis vel secundis vel adeo ordinis cuiuscunque“[1] (11. Dez. 1775). Zunächst wird eine elegante Beziehung zwischen dem Krümmungsradius r, der Amplitude φ und dem Krümmungsradius $r^{(n)}$ der $n$ten Evolute hergeleitet, nämlich: $r^{(n)} = \frac{d^n r}{d\varphi^n}$. Sollen nun zwei Kurven ähnlich sein, so müssen ihre Krümmungsradien in entsprechenden Punkten proportional sein, d. h. für unseren Fall muß $r^{(n)} = C \cdot r$, oder

$$\frac{d^n r}{d\varphi^n} = Cr$$

sein. Die Gleichung ist leicht zu integrieren; sie liefert

$$r = A \cdot e^{\lambda\varphi},$$

wo

$$\lambda = \sqrt[n]{C}$$

ist. Dieses Resultat wird auf Spezialfälle angewendet.

In den Phil. Trans. 57 (1767), p. 28—43 untersucht George Witchell (1728—1785, Privatlehrer der Mathematik in London, von 1767 an Headmaster of the Royal Naval Academy Portsmouth) die Frage nach dem Schatten eines Rotationsellipsoids (A general investigation of the nature of a Curve formed by the shadow of a prolate spheroid upon a plane standing at right angles to the axis of the shadow). Der Verfasser glaubt, gewisse Unregelmäßigkeiten in der Verfinsterung der Jupiterstrabanten damit erklären zu können, daß der Jupiter keine Kugel, sondern stark abgeplattet ist. Er sucht nun den Kernschatten dieses Planeten auf einer Ebene, die auf der Achse dieses Schattens senkrecht steht, wobei die Aufgabe sich wesentlich dadurch vereinfacht, daß die Achse des Jupiter nahezu auf seiner Bahnebene senkrecht steht, so daß die Aufgabe auf die einfachere zurückgeführt werden kann: Gegeben eine leuchtende runde Scheibe, und eine elliptische, die beide auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte senkrecht stehen; gesucht der Kernschatten der letzteren auf einer dritten Parallelebene. Es ergibt sich eine Art Lemniskate, die

[1]) N. A. P. I, p. 75—116.

entsteht, wenn man auf allen Halbmessern einer Ellipse von der Peripherie aus gleiche Stücke abträgt.

Es folgen nun in chronologischer Ordnung wieder einige kleinere Arbeiten von Euler. Die erste: „Problematis cuiusdam geometrici prorsus singularis evolutio"[1]) sucht eine Kurve so zu bestimmen, daß die Normale den Winkel zwischen der Tangente und einer festen Geraden halbiert.

Die zweite heißt: „De curvis hyperbolicis quae intra suas asymtotas spatium finitum includunt"[2]) (13. Februar 1777). Sie geht aus von der Bemerkung, daß keine Hyperbel von der Form $x^m y^n = c$ die im Titel genannte Eigenschaft besitzt, und untersucht nun, ob dies vielleicht für Kurven von der Form $ax^\alpha y^\beta + bx^\gamma y^\delta = c$ der Fall sei. Vorausgeschickt wird ein Hilfssatz aus der Theorie der bestimmten Integrale, nämlich daß das Integral $\int_0^\infty \frac{u^m du}{(1+u^n)^k}$ endlich ist, wenn $nk > (m+1) > 0$ ist. Dieser wird auf zwei Arten bewiesen und bildet die Grundlage für die Herleitung folgender Resultate:

Alle hyperbolischen Kurven von der spezielleren Form:

$$ax^\alpha y^\beta + bx^\beta y^\alpha = c$$

schließen zwischen ihren Asymptoten einen endlichen Raum ein, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind: 1. a, b, c müssen alle drei positiv sein, 2. α und β müssen beide positiv sein, 3. α darf nicht $= \beta$ sein.

Für Kurven von der allgemeineren Form

$$ax^\alpha y^\beta + bx^\gamma y^\delta = c$$

gilt dasselbe, wenn 1. a, b, c alle positiv sind, 2. wenn α, β, γ, δ alle positiv sind, 3. wenn von den Brüchen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$ der eine > 1, der andere < 1 ist.

Für Kurven der ersten, spezielleren Form gelingt unter den angegebenen Bedingungen die Bestimmung des in Rede stehenden Flächeninhalts, wenn $\alpha + \beta = 1$; er beträgt nämlich: $\frac{c^2}{2ab(\alpha - \beta)}$.

Die dritte heißt: „De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurrit"[3]) (31. Mai 1779). Es handelt sich darum, eine Kurve zu finden, für welche $\int ds \sqrt{x}$ ein Minimum wird. Dieselbe wird nach den Methoden der Variationsrechnung bestimmt, wo-

[1]) N. C. P. XVI (1771), p. 140—159. [2]) N. A. P. VIII, p. 116—139.
[3]) M. P. III (1811), p. 16—25.

bei sich das scheinbare Paradoxon herausstellt, daß es eine Kurve gibt, für welche dieses Integral einen noch kleineren Wert annimmt. Euler findet die Lösung darin, daß jenes Minimum nur ein relatives sei, ebenso wie etwa ein Minimalpunkt einer Kurve nur den kleinsten Wert gegenüber den benachbarten Ordinaten, nicht den kleinsten Wert überhaupt bestimmt.

Die vierte ist betitelt: „Solutio problematis ob singularia calculi artificia memorabilis"[1]) (22. März 1779). Hier ist die Aufgabe, eine Kurve so zu bestimmen, daß das Integral über dem Produkt aus dem Linienelement und einer beliebigen Funktion des Radiusvektor z, also $\int ds \cdot f(z)$ ein Minimum oder Maximum wird. Setzt man

$$f(z) = v; \quad \frac{dv}{dz} = q; \quad \frac{dy}{dx} = p,$$

so ergibt sich als Differentialgleichung:

$$ydx - xdy = \frac{vzdp}{q(1+p^2)}.$$

Die „singularia artificia" bestehen nun darin, daß die Größen

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\varphi; \quad p = \operatorname{tg}\omega; \quad t = \frac{dz}{z\,d\varphi}$$

eingeführt werden, wodurch sich ergibt:

$$d\varphi = \frac{dz}{z\sqrt{n^2v^2z^2 - 1}}$$

(n ist Integrationskonstante). Charakteristisch für Euler ist die Schlußbemerkung, daß er nie auf diese artificia gekommen wäre, wenn er nicht die Lösung schon auf anderem Weg gehabt hätte, nämlich durch Einführung von Polarkoordinaten.

In einer fünften Abhandlung: „De duplici genesi tam epicycloidum quam hypocycloidum"[2]) beweist Euler einen von Dan. Bernoulli[3]) herrührenden Satz, daß jede solche Kurve auf doppelte Art erzeugt werden kann. Ist nämlich a der Radius des festen, b der des rollenden Kreises, so kommt, für $b < a$, dieselbe Kurve heraus, wenn $b = \frac{a+c}{2}$ und $b = \frac{a-c}{2}$ ist, wo c eine beliebige Strecke $< a$ ist. Ist $b > a$, so wird bei innerer Berührung für $b = a + c$ dieselbe Kurve beschrieben, wie bei äußerer für $b = c$.

Über eine 1779 erschienene Schrift von Nicola Fergola

---

[1]) M. P. II (1810), p. 3—9. [2]) A. P. 1781, I, p. 48—59. [3]) Nach Loria (Spez. Kurven, S. 483). S. dort auch näheres hierüber.

(1752—1824, Professor der Mathematik an der Universität Neapel und Gründer einer Schule von italienischen Mathematikern) kann ich nur nach Loria[1]) berichten. Es findet sich dort die Notiz, daß Fergola die schwierige Aufgabe gelöst habe, eine Kurve von der Eigenschaft zu finden, daß das Stück ihrer Tangente zwischen zwei festen Geraden gleich dem Krümmungsradius des Berührpunktes sei.

Eine interessante Klasse von Kurven hat Euler in einer Arbeit: „De curvis triangularibus"[2]) untersucht. Er versteht darunter Kurven mit drei Rückkehrpunkten (vgl. Fig. 49). Sie sind sowohl in der Optik, wo sie als Brennlinien auftreten, wie wegen ihrer Evolventen von Interesse. A, B, C seien die drei Spitzen; a, b, c die gegenüberliegenden Kurvenbögen. Trägt man nun z. B. auf der Tangente von A ein Stück

$$AF = f$$

ab und läßt die Tangente auf der Kurve abrollen, bis sie in B berührt, so ist der die Evolvente beschreibende Punkt in g angekommen und es ist $Bg = c + f$. Kommt dieser Punkt der Reihe nach in die Lagen H, f, G, h, so ist leicht zu sehen, daß

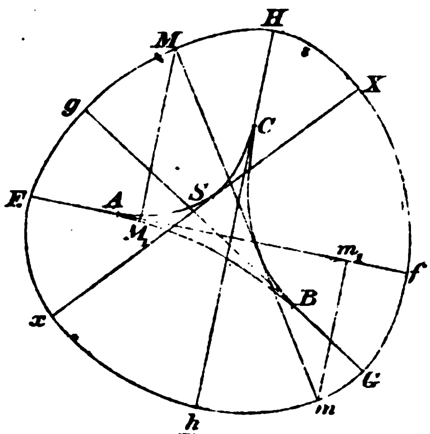


Fig. 50.

$$CH = Bg - a = c + f - a; \quad Af = b + CH = b + c + f - a;$$

$$BG = Af - c = b + f - a; \quad Ch = BG + a = b + f \text{ usw.}$$

Daraus folgt:

$$Ff = Gg = Hh = 2f + b + c - a.$$

Dies gilt aber für das Stück Xx jeder beliebigen Tangente, das innerhalb der Evolvente fällt; ist nämlich S der Berührpunkt, so ist

$$SX = SC + CH; \quad Sx = AS + AF;$$

also

$$Xx = SX + Sx = b + c + f - a + f = 2f + b + c - a.$$

Die Evolvente hat also die merkwürdige Eigenschaft (die sonst nur dem Kreis zukommt), daß jede Normale eines beliebigen Kurvenpunktes X in ihrem zweiten Schnittpunkt x

[1]) Niccolo Fergola è la scuola di Matematici che lo ebbe à duce, 1904, p. 73/74. [2]) A. P. 1778, II, p. 3—30.

mit der Kurve wieder auf dieser senkrecht steht, und daß Xx konstant ist. Euler nennt deshalb diese Kurven „orbiformes“

Um nun die Gleichung einer dreispitzigen Kurve aufzustellen, geht Euler aus von der Gleichung einer orbiformis und nimmt eine beliebige Normale Ff zur x-Achse; die konstante Länge Ff wird mit $2f$[1]) bezeichnet. Ist nun Mm eine beliebige zweite Normale, und sind von M und m die Lote MM_1 und mm_1 auf Ff gefällt, ist ferner:

$$FM_1 = X; \quad MM_1 = Y; \quad Fm_1 = x; \quad mm_1 = y;$$

endlich

$$\frac{dY}{dX} = P; \quad \frac{dy}{dx} = p,$$

so ist zunächst $P = p$. Ferner läßt sich leicht zeigen, daß:

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{1+p^2}}; \quad x - X = \frac{2fp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Setzt man:

$$X + x = 2Q; \quad Y + y = 2R,$$

so wird

$$X = Q - \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}}; \quad Y = R + \frac{f}{\sqrt{1+p^2}} \tag{1}$$

$$x = Q + \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}}; \quad y = R - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}}. \tag{2}$$

Da (1) und (2) sich nur durch das Vorzeichen der Wurzel unterscheiden, und dieser Unterschied verschwindet, sobald rational gemacht wird, so können (1) und (2) als gleichwertig angesehen werden. Differenziert man (1) oder (2), und setzt man $dY = pdX$ und $dy = pdx$ ein, so ergibt sich $dR = pdQ$, also

$$R = \int p\,dQ. \tag{3}$$

Ist also Q eine beliebige Funktion von p, für welche die Integration in (3) ausführbar wird, so stellt (1) oder (2) in Verbindung mit (3) die Koordinaten einer orbiformis als Funktionen des Parameters p dar. — Um nun die Gleichung der dreispitzigen Kurve, d. h. der Evoluten zu finden, werden die Gleichungen durch eine Hilfsfunktion $S = \int Q\,dp$ etwas vereinfacht. Man erhält nämlich aus (2):

$$x = \frac{dS}{dp} + \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}}; \quad y = \frac{p\,dS}{dp} - S - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Da die Kurve geschlossen sein soll, x und y also keinen unendlichen Wert annehmen können, so darf auch S nicht unendlich werden. Ist also z. B. S von der Form:

$$S = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_m p^m}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_n p^n},$$

[1]) f hat also hier eine andere Bedeutung als vorher.

so darf der Nenner keine reellen Linearfaktoren haben, und es muß $m \leqq n$ sein. Die Aufstellung der Evolute wird nun vereinfacht durch die Bemerkung, daß diese für alle Werte von f immer die gleiche bleibt; man kann also $f = 0$ setzen und erhält für die Koordinaten (t, u) des Krümmungsmittelpunkts:

$$t = \frac{dS}{dp} - p\frac{d^2S}{dp^2}(1 + p^2); \quad u = S - p\frac{dS}{dp} - \frac{d^2S}{dp^2}(1 + p^2).$$

Hieraus ergibt sich für den Krümmungsradius $\frac{d^2S}{dp^2}(1 + p^2)^{3/2}$. Schließlich wird das Beispiel $S = \frac{ap}{1 + p^2}$ durchgeführt, und die Aufgabe gelöst, eine dreispitzige Kurve so zu bestimmen, daß die Spitzen in drei gegebene Punkte fallen.

Zu einigen bemerkenswerten Resultaten über die Brennlinie der Parabel gelangt Fuß in einer Publikation vom 26. Januar 1791: „De novis quibusdam causticae parabolae proprietatibus".[1] Er löst zunächst die (schon von Joh. Bernoulli und de l'Hôpital behandelte) Aufgabe, die Brennlinien zu finden, die durch Reflexion paralleler Strahlen an einer beliebigen Kurve entstehen. Fuß nimmt die Abszissenachse senkrecht zu der gegebenen Strahlenrichtung an, führt den Winkel φ der Kurventangente gegen die Ordinate ein und findet als Koordinaten X, Y eines Punktes der Brennlinie:

$$X = x + \frac{ds \sin\varphi \cdot \sin 2\varphi}{2d\varphi}; \quad Y = y + \frac{ds \sin\varphi \cos 2\varphi}{2d\varphi}.$$

Dies wird angewendet auf die Parabel $y^2 = 2px$. Als Brennlinie ergibt sich:

$$Y = \pm\left(\frac{3}{2} - \frac{X}{3p}\right)\sqrt{\frac{2pX}{3}}.$$

Von dieser Kurve werden nun folgende Eigenschaften hergeleitet

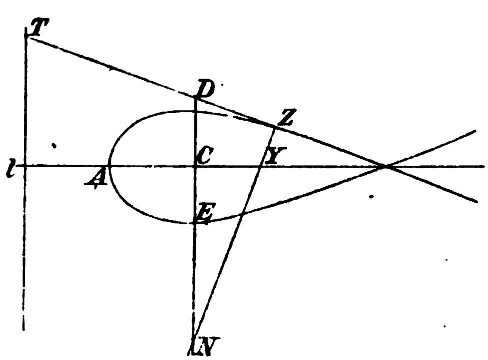


Fig. 51.

[1]) N. A. P. VIII, p. 182—200.

die sich am kürzesten an Fig. 51 ablesen lassen (AC ist die Abszisse der Punkte mit horizontaler Tangente, $AI = AC = \frac{3p}{2}$)

$$1)\quad \text{arc}\, AZ + ZY = s + y = 3\sqrt{\frac{2px}{3}}$$

$$2)\quad DN - DZ = 3p$$

$$3)\quad lT + TZ = 2 \text{ arc } AZ = 2s.$$

Fuß untersucht nun, ob es noch andere Kurven gibt, denen eine dieser drei Eigenschaften zukommt, und findet, daß dies nicht der Fall ist, daß also nur die Brennlinie der Parabel diese Eigenschaften besitzt. Dagegen gelingt es ihm, Kurven zu finden, die durch eine Verallgemeinerung definiert sind, nämlich so, daß $lT + TZ$ in einem gegebenen Verhältnis zur Bogenlänge stehen, daß also, wenn DY eine solche Kurve ist (Fig. 52),

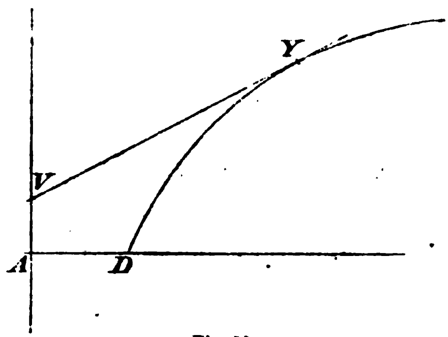


Fig. 52.

$$AV + VY = n \cdot \text{arc } DY.$$

Er findet als Bogenlänge

$$s = \int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{2Ax^{n-1} - A^2}}$$

und für den Krümmungsradius

$$R = \frac{x^n}{A(n-1)},$$

wo A eine Integrationskonstante ist. Die Kurven sind algebraisch und rektifizierbar.

Mit Kurven, die bei Abwicklung von Kegel und Zylinder auftreten, haben sich Euler und Schubert beschäftigt. Ersterer kommt in einer Note über die Oberfläche des schiefen Kreiskegels: „De superficie coni scaleni, ubi imprimis ingentes difficultates, quae in hac investigatione occurrunt, perpenduntur“[1] (12. September 1786) auch auf die Abwicklungsfigur des Grundkreises und stellt für deren Krümmungsradius die Formel auf $r = \frac{cp}{c + b\cos\varphi}$. Hierbei ist c der Radius des Grundkreises, b der Abstand des Mittelpunktes von der Projektion der Spitze auf die Grundkreisebene, p die Mantellinie eines beliebigen

[1] N. A. P. III, p. 69—89.

Punktes, φ ihr Winkel (in der Abwicklungsfigur) mit der größten Mantellinie. — Schubert (De evolutione sectionum cylindri[1]), 25. Oktober 1798) untersucht die Abwicklungsfigur eines ebenen Zylinderschnittes durch Rechnung und Konstruktion. Die Gleichung der Kurve ist:

$$y = a \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \cos \frac{x}{a}\right),$$

wo a der Radius des Zylinders, α die Neigung der Schnittebene gegen die Grundkreisebene ist.

Raumkurven und Flächen.

Wie wir gesehen haben, ist für die analytische Geometrie der Ebene in unserem Zeitraum über das Entstehen und Wachsen neuer, fruchtbarer Gedanken und Methoden von allgemeiner Bedeutung nicht viel zu berichten; die Mathematiker zeigen sich auf diesem Gebiet mehr mit Einzeluntersuchungen von Kurven beschäftigt, und es tritt namentlich die Neigung hervor, neue Kurven und Kurvengattungen von gegebenen Eigenschaften aufzusuchen. Gerade umgekehrt ist das Verhältnis in der analytischen Geometrie des Raumes: Hier liegen wenig Untersuchungen über spezielle Kurven und Flächen vor, dagegen sind eine ganze Reihe bahnbrechender Arbeiten zu nennen, die teils ganz allgemeine, wichtige Eigenschaften von Kurven und Flächen behandeln, teils die Methoden und Theorien in einer Weise fördern, daß die analytische Geometrie des Raumes sich von bescheidenen Anfängen zu der Höhe erhob, die durch Monges Werk: „Feuilles d'Analyse appliquée à la Géometrie" bezeichnet wird. — Wir werden zunächst einige Arbeiten über Raumgeometrie überhaupt, Koordinaten usw. besprechen, hierauf die Raumkurven und abwickelbaren Flächen, dann die krummen Flächen behandeln und schließlich über die Feuilles d'Analyse berichten. Als eine Art Anhang werden dann noch einige Bemerkungen über die Fortschritte der Kartographie folgen, soweit die mathematische Seite daran in Betracht kommt.

Als einen Beweis dafür, wie ungelenk selbst bedeutende Mathematiker am Anfang unseres Zeitraumes noch die räumlichen Probleme anfaßten, führen wir einiges aus dem III. Kapitel des mehrfach erwähnten Werkes von Waring, „Proprietates algebraicarum curvarum" an. Hier werden die „proprietates algebraicorum solidorum" betrachtet. Zunächst sei an die schon früher (S. 457) gemachte Bemerkung erinnert, daß fast immer nur von Körpern die Rede ist, und daß die Flächen

---

[1]) N. A. P. XIII, p. 190—204.

nur als Begrenzung von Körpern, nicht als selbständige Gebilde auftreten. Waring stellt nun die Gleichung einer Rotationsfläche auf, indem er die Schnittkurve einer beliebigen Ebene ermittelt. Er benutzt dazu (s. Fig. 53) die zur Schnittebene senkrechte Meridianebene, in der die Gleichung der Meridiankurve in rechtwinkligen Koordinaten ($AP = x$, $PM = y$) gegeben ist. Die Schnittebene trifft die Achse (Abszisse) in L, die Ordinate MP in p; in der Schnittebene wird wieder ein rechtwinkliges Koordinatensystem angenommen, mit dem Ursprung L, der Abszisse $Lp = z$, der Ordinate $pm = v$. Die Lage der Schnittebene zur Achse ist bestimmt durch $AL = a$, und das Verhältnis $\frac{Lp}{LP}$, das $= \frac{r}{s}$ gesetzt wird.

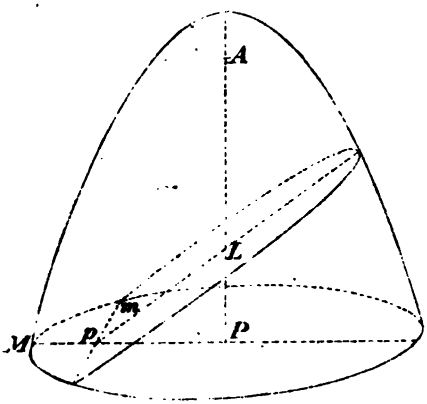


Fig. 53.

Waring bezeichnet AL als prima abscissa, Lp als secunda abscissa, mp als ordinata secundae abscissae. Es ergeben sich nun leicht die Beziehungen:

$$x = a + \frac{sz}{r}; \quad y^2 = v^2 + \frac{(r^2 - s^2)z^2}{r^2}.$$

In Verbindung mit der Gleichung der Meridiankurve stellen diese Gleichungen bei Waring den Rotationskörper dar. Er folgert daraus einige Bemerkungen über die Rotationsflächen 2. Ordnung, über den Ort der Zentra und der Brennpunkte einer Schar von Parallelschnitten. Die Zahl der unabhängigen Konstanten einer Fläche n^{ter} Ordnung wird zu $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1$ bestimmt. Weiter folgen Sätze über Durchmesserebenen, die denen über die Durchmesser ebener Kurven analog sind, und es scheint, daß Waring im Besitze einer Reihe von Sätzen über algebraische Raumkurven und Flächen war, ähnlicher Art wie die von ihm über ebene Kurven gefundenen; er bemerkt hierüber: „Hic adjici possunt propositiones ad algebraica solida et curvas duplicis curvaturae, quae consimiles sunt fere omnibus propositionibus capite primo traditis de curvis simplicis curvaturae; sed taedet has disquisitiones ulterius promovere“. Auch mit Zentralprojektion von Kurven und Körpern beschäftigt er sich, und stellt hierbei den Satz auf: „Nulla curva projiciet curvas superiorum sibi ipsi ordinum“.

Einen wesentlich anderen Charakter zeigt die Abhandlung von

Lagrange: „Solution analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires".[1]) Der eigentliche Zweck ist, Oberfläche, Inhalt, einbeschriebene und umbeschriebene Kugel, Schwerpunkt usw. für ein Tetraeder durch seine sechs Kanten auszudrücken. Hierzu wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem so angenommen, daß eine Ecke (S) in den Ursprung fällt, die drei anderen (M_1, M_2, M_3) durch ihre Koordinaten gegeben sind. Infolge dieser Behandlungsweise, die ganz symmetrisch und mit bewundernswerter Eleganz durchgeführt wird, ergeben sich eine Reihe fundamentaler Sätze über Punkte und Geraden im Raum. Um sie kurz anführen zu können, benutzen wir die Bezeichnungen Lagranges, wobei jedoch die Striche durch Indices ersetzt sind, und von drei durch zyklische Vertauschung sich ergebenden Formeln immer nur eine angeschrieben wird. Es sei also (Fig. 54)

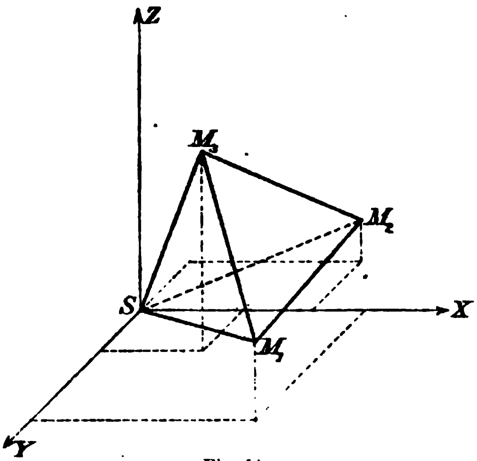


Fig. 54.

$$SM_1^2 = a_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$
$$b_1 = x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3$$
$$M_2 M_3^2 = c_1 = a_1 + a_2 - 2b_3.$$

Ferner:

$$\alpha_1 = a_2 a_3 - b_1^2; \quad \beta_1 = b_2 b_3 - a_1 b_1 \sphericalangle M_2 S M_3 = \gamma_1.$$

Dann ist:

$$SM_1 = \sqrt{a_1}; \quad M_2 M_3 = \sqrt{c_1}; \quad \cos\gamma_1 = \frac{b_1}{\sqrt{a_2 a_3}}$$
$$\Delta\, M_2 S M_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{a_2 a_3 - b_1^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha_1};$$
$$\Delta\, M_1 M_2 M_3 = E = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Sigma\alpha + 2\,\Sigma\beta}.$$ [2])

Es wird nun die Gleichung der durch M_1, M_2, M_3 gelegten Ebene hergeleitet, allerdings nicht ganz symmetrisch. Lagrange

[1]) Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres à Berlin 1773, p. 149—177. Vgl. Loria in den Verhandlungen des III. Mathematikerkongresses (zu Heidelberg 1904), S. 571. [2]) Das Zeichen Σ bedeutet im folgenden die Summe der drei Glieder, die durch zyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 entstehen.

nimmt nämlich ihre Gleichung in s, t, u als laufenden Koordinaten in der Form an:

$$u = l + ms + nt,$$

und bestimmt die Koeffizienten l, m, n, wobei zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\xi_1 = y_2 z_3 - z_2 y_3; \quad \eta_1 = z_2 x_3 - x_2 z_3; \quad \zeta_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3;$$

es wird dann:

$$m = -\frac{\Sigma\xi}{\Sigma\zeta}; \quad n = \frac{-\Sigma\eta}{\Sigma\zeta}; \quad l = \frac{\Delta}{\Sigma\zeta},$$

wobei Δ die (natürlich nicht in der heutigen Form geschriebene) Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ist. Für das Lot h vom Ursprung ergibt sich:

$$h = \frac{\Delta}{\sqrt{(\Sigma\xi)^2 + (\Sigma\eta)^2 + (\Sigma\zeta)^2}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\Sigma\alpha + 2\Sigma\beta}},$$

daraus der Inhalt des Tetraeders:

$$\frac{Eh}{3} = \frac{\Delta}{6} = \frac{1}{6}\sqrt{a_1 a_2 a_3 + 2 b_1 b_2 b_3 - \Sigma a_1 b_1^2}$$
$$= \frac{1}{6}\sqrt{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + 2\beta_1 \beta_2 \beta_3 - \Sigma\alpha_1 \beta_1^2}.$$

Es wird sodann die Aufgabe gelöst, das Tetraeder von größtem Inhalt zu finden, wenn die vier Seitenflächen dem Inhalt nach gegeben sind. Für die folgenden Überlegungen von großer Wichtigkeit ist die Aufgabe, die Diagonale einer dreiseitigen Doppelpyramide durch ihre neun Kanten auszudrücken. Eine solche erhält man, wenn ein beliebiger Punkt P (p, q, r) des Raumes mit M_1, M_2, M_3 verbunden wird. Ist $PS^2 = f$, $PM_1^2 = g_1$ usw., und zur Abkürzung gesetzt:

$$k_1 = px_1 + qy_1 + rz_1,$$

so ist:

$$g_1 = a_1 + f - 2k_1$$

oder:

$$k_1 = \frac{a_1 + f - g_1}{2},$$

und:

$$p = \frac{\Sigma k_1 \xi_1}{\Delta}; \quad q = \frac{\Sigma k_1 \eta_1}{\Delta}; \quad r = \frac{\Sigma k_1 \zeta_1}{\Delta},$$

und daraus:

$$\Delta^2 f = \Sigma\alpha_1 k_1^2 + 2\Sigma\beta_1 k_2 k_3.$$

Dies ist eine Gleichung 2. Grades für f, wie es ja auch sein muß, da

die beiden Pyramiden auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der gemeinsamen Grundfläche liegen können. Aus den zuletzt aufgestellten Gleichungen erhält man Radius und Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel, indem man $f = g_1 = g_2 = g_3$ setzt, und die zugehörigen Werte von p, q, r berechnet. Es ist in diesem Fall

$$k_1 = \frac{a_1}{2},$$

also ergibt sich für den Radius $(\sqrt{f})$ und die Mittelpunktskoordinaten (p, q, r)

$$f = \frac{\Sigma \alpha_1 a_1^2 + 2 \Sigma \beta_1 a_2 a_3}{4 \Delta^2}; \quad p = \frac{\Sigma a_1 \xi_1}{2 \Delta} \text{ usw.}$$

In ähnlicher Weise werden Radius und Mittelpunkt der einbeschriebenen Kugel ermittelt, indem man zunächst die von P auf die vier Seiten des Tetraeders gefällten Lote berechnet. Das Lot ϱ_1 auf $M_2 S M_3$ wird

$$\varrho_1 = \frac{\alpha_1 k_1 + \beta_3 k_2 + \beta_2 k_3}{\Delta \sqrt{\alpha_1}} = \frac{\xi_1 p + \eta_1 q + \zeta_1 r}{\sqrt{\alpha_1}}$$

und das Lot π auf $M_1 M_2 M_3$

$$\pi = \frac{\Delta - (p \Sigma \xi + q \Sigma \eta + r \Sigma \zeta)}{\sqrt{\Sigma \alpha + 2 \Sigma \beta}}.$$

Damit wird zunächst die Aufgabe gelöst, den Punkt P so zu bestimmen, daß die vier Pyramiden, welche die Spitzen in P und die Tetraederflächen als Grundflächen haben, in einem vorgeschriebenen Verhältnis hinsichtlich des Inhalts stehen. Dann wird

$$\pi = \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$$

gesetzt, wodurch sich für den Radius $(\sqrt{f})$ und die Mittelpunktskoordinaten der einbeschriebenen Kugel die Werte ergeben:

$$f = \frac{\Sigma a_1 \alpha_1 + \Sigma 2 b_3 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}}{(\sqrt{\omega} + \Sigma \sqrt{\alpha_1})^2}; \quad p = \frac{\Sigma x_1 \sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\omega} + \Sigma \sqrt{\alpha_1}},$$

wo

$$\omega = \Sigma \alpha_1 + 2 \Sigma \beta.$$

Schließlich wird noch in ähnlicher Weise der Schwerpunkt bestimmt.

Den Übergang zu den Raumkurven mag eine hervorragende Abhandlung von Euler bilden, die ebenfalls noch allgemeinerer Natur und insofern von großer Bedeutung ist, als darin die Grundzüge der allgemeinen Theorie der Raumkurven in ihrer heutigen Gestalt entwickelt sind. Sie heißt: „Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi".[1])

---

[1]) A. P. 1782, I, p. 19—57.

Euler geht hier darauf aus, die durch „figurae tantopere complicatae et propemodum inextricabiles“ hergeleiteten Formeln auf einfacherem Wege zu gewinnen, wobei die Hilfsmittel der sphärischen Trigonometrie benutzt werden. Um keine der drei Achsen zu bevorzugen, wird die Bogenlänge s der Kurve als Parameter eingeführt und mit p, q, r die Ableitungen der Koordinaten nach diesem Parameter bezeichnet, so daß:

$$dx = pds; \quad dy = qds; \quad dz = rds$$

ist. Es muß dann sein:

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1; \quad pdp + qdq + rdr = 0. \tag{1}$$

Ferner, wenn ds als konstant angesehen wird:

$$d^2x = dpds; \quad d^2y = dqds; \quad d^2z = drds.$$

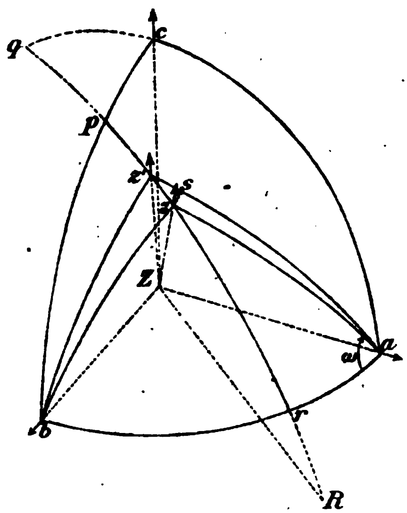


Fig. 55.

Euler denkt sich nun (Fig. 55) um einen Kurvenpunkt $Z(x, y, z)$ eine Kugel vom Radius $= 1$ beschrieben, die von der Tangente in z geschnitten wird, während die durch Z gehenden Parallelen zu den Achsen einen Oktanten a, b, c bestimmen. Es ist dann

$$\cos az = p;$$
$$\sin az = \sqrt{1 - p^2} = \sqrt{q^2 + r^2}. \tag{2}$$

Das sphärische Lot von z auf bc ist das Komplement von az, und zugleich der Neigungswinkel der Tangente gegen die yz-Ebene. Ferner ist nach bekannten Sätzen der Trigonometrie:

$$\sin baz = \frac{r}{\sqrt{r^2 + q^2}},$$

also:

$$\cos baz = \frac{q}{\sqrt{r^2 + q^2}}. \tag{3}$$

Es sei nun durch Z auch noch eine Parallele zur Tangente des Nachbarpunktes gezogen, welche die Kugel in z' schneidet, dann ist $\sphericalangle zZz'$ der Kontingenzwinkel (im heutigen Sprachgebrauch), der Krümmungsradius $R = \frac{ds}{zz'}$, und die durch den Bogen zz' gelegte

Ebene die Schmiegungsebene der Kurve. Diese Betrachtungsweise zeigt, daß Euler das Verdienst gebührt, die sogenannte sphärische Abbildung in die Mathematik eingeführt zu haben, was gewöhnlich Gauß zugeschrieben wird. Um nun die Neigungswinkel der Schmiegungsebene gegen die Koordinatenebenen zu bestimmen, setzt Euler $az = \alpha$, so daß also $az' = \alpha + d\alpha$ wird. Es ist also nach (2):

$$d\alpha = \frac{dp}{\sqrt{q^2 + r^2}}. \tag{4}$$

Bezeichnet man $\sphericalangle\, baz$ mit ω, so wird:

$$\sphericalangle\, baz' = \omega + d\omega,$$

also:

$$\sphericalangle\, zaz' = d\omega.$$

Nun ist:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{q}{r},$$

also:

$$d\omega = \frac{q\,dr - r\,dq}{q^2 + r^2}.$$

Ist ferner $zs \perp az'$, so ist:

$$zs = d\omega \cdot \sin az; \quad sz' = d\alpha; \tag{5}$$

also:

$$zs = \frac{q\,dr - r\,dq}{\sqrt{q^2 + r^2}}; \tag{6}$$

ferner:

$$zz'^2 = zs^2 + z's^2,$$

also nach (1), (5) und (6):

$$zz'^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2 \tag{7}$$

und:

$$R = \frac{ds}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}} = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}}. \tag{8}$$

Ist ds nicht konstant, so ist:

$$R = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Euler bemerkt hierzu: „quae formula per analysin communem demum post calculos maxime perplexos est eruta“.

Ferner folgt aus (5) und (6)

$$\operatorname{tg} zz's = \frac{r\,dq - q\,dr}{dp}.$$

Verlängert man zz' bis zum Schnitt mit den Oktantenseiten in

p, q, r (natürlich nicht zu verwechseln mit den Differentialquotienten p, q, r), so ergibt eine einfache Rechnung:

$$\cos zpb = \frac{q\,dr - r\,dq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}},$$

womit der Winkel der Schmiegungsebene gegen die yz-Ebene bestimmt ist; die beiden anderen werden hieraus durch zyklische Vertauschung abgeleitet, obgleich natürlich diese Bezeichnung nicht auftritt. Danach wäre auch die erste klar bewußte Anwendung dieses Verfahrens Euler zuzuschreiben. Ist ferner R der Schnittpunkt des Krümmungsradius mit der Einheitskugel, so ist:

$$\cos aZR = \frac{dp}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2}}.$$

Die aus dem Bisherigen sich ergebenden bemerkenswerten Sätze der sphärischen Trigonometrie werden formuliert, und dann auf eine zweite Art die Gleichung der Schmiegungsebene hergeleitet. Sind nämlich u, v, w ihre Achsenabschnitte, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1.$$

Auch diese Form der Ebenengleichung dürfte hier zum erstenmal auftreten. Da in der Schmiegungsebene drei konsekutive Punkte liegen, so ist auch:

$$\frac{x + dx}{u} + \frac{y + dy}{v} + \frac{z + dz}{w} = 0$$

oder:

$$\frac{p}{u} + \frac{q}{v} + \frac{r}{w} = 0,$$

und ebenso:

$$\frac{dp}{u} + \frac{dq}{v} + \frac{dr}{w} = 0.$$

Hieraus folgt mit Einführung eines Proportionalitätsfaktors t:

$$\frac{1}{u} = \frac{r\,dq - q\,dr}{t} \text{ usw.},$$

und hieraus als Gleichung der Schmiegungsebene:

$$x(r\,dq - q\,dr) + y(p\,dr - r\,dp) + z(q\,dp + p\,dq) = t,$$

wo t noch durch die Bedingung bestimmt wird, daß die Schmiegungsebene durch einen gegebenen Kurvenpunkt geht. Daraus werden nun wieder die schon oben gefundenen Formeln entwickelt und schließlich die Resultate in die elegante Form gebracht:

Hat man ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten den Achsen parallel sind, und sind die Kantenlängen

1. x, y, z, so gibt die Diagonale die Richtung und Größe des **Radiusvektors** an;

2. sind sie p, q, r, — die Richtung der **Tangente**;

3. sind sie $\frac{dp}{ds}, \frac{dq}{ds}, \frac{dr}{ds}$, — Richtung und Größe des **Krümmungsradius**;

4. sind sie $\frac{rdq-qdr}{ds}, \frac{pdr-rdp}{ds}, \frac{qdp-pdq}{ds}$, so steht die Diagonale auf der **Schmiegungsebene** senkrecht.

Damit sind wir nun schon auf dem Gebiet der **Raumkurven** und der damit eng zusammenhängenden **abwickelbaren Flächen** angelangt, ein Zusammenhang, der auch erst in unserem Zeitraum genauer studiert und klar erkannt worden ist. Auch hier war **Euler** der erste, der sich mit diesen Beziehungen beschäftigt und dabei sogleich wichtige Resultate gefunden hat. Seine Arbeit, die sehr beachtenswert ist, ist betitelt: „De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet".[1]) Zu bemerken ist hier, daß **Euler** zwar noch in den Anschauungen seiner Zeit befangen erscheint, insofern er von „solidis" spricht[2]), daß er aber doch den ersten Schritt zur heutigen Betrachtungsweise der Flächen als selbständiger Gebilde tut, indem er die **Koordinaten der Flächenpunkte als Funktionen zweier Parameter** t, u **darstellt**, und untersucht, welchen Bedingungen diese genügen müssen, wenn die Fläche in eine Ebene abwickelbar sein soll. **Euler** geht aus von der abgewickelten Fläche, nimmt t und u als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes der Ebene, und betrachtet in dieser Ebene ein unendlich kleines rechtwinkliges Dreieck, dessen Ecken die Koordinaten (t, u); $(t+dt, u)$; $(t, u+du)$ haben, und das wegen der **Abwickelbarkeit** dem entsprechenden Dreieck auf der Fläche selbst kongruent sein muß. Er bezeichnet nun die partiellen Ableitungen von x, y, z nach t und u mit l, λ; m, μ; n, ν $\left(\text{also } \frac{\partial x}{\partial t} = m;\ \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda \text{ usw.}\right)$. Dann sind die Koordinaten der Ecken des entsprechenden Dreiecks auf der Fläche x, y, z; $x + ldt$, $y + mdt$, $z + ndt$; $x + \lambda du$, $y + \mu du$, $z + \nu du$, und aus der Kongruenz der Dreiecke ergeben sich für l, m, n; λ, μ, ν die drei **Bedingungsgleichungen**:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1;\quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1;\quad l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Dies sind also die **analytischen, notwendigen und hinreichen-**

[1]) N. C. P. XVI. 1771, p. 3—34. [2]) Vgl. S. 557.

den **Bedingungen der Abwickelbarkeit**. Man sieht leicht, daß Euler damit nichts anderes gezeigt hat, als daß, modern ausgedrückt, das Linienelement der Fläche mit dem der Ebene übereinstimmen muß. Analytisch betrachtet, handelt es sich also um die Aufgabe, drei Funktionen von t und u so zu bestimmen, daß ihre partiellen Ableitungen den aufgestellten Bedingungen genügen. Diese werden gefunden durch eine geometrische Behandlung des Problems. Euler entwickelt nämlich die Beziehungen der abwickelbaren Flächen zu den Raumkurven, und zeigt, daß die Tangenten einer beliebigen Raumkurve stets eine abwickelbare Fläche bestimmen; die Koordinaten eines beliebigen Punktes einer solchen werden nun folgendermaßen dargestellt (vgl. Fig. 56). AT, TU, UV seien die Koordinaten t, u, v eines Punktes V der Raumkurve, S der Schnittpunkt seiner Tangente mit der xy-Ebene, M der Schnittpunkt von SU mit der x-Achse. Die entsprechenden Größen für einen Nachbarpunkt v sind mit kleinen Buchstaben bezeichnet, so daß z. B. $At = t + dt$ ist, usw. Ist ferner $\angle MUT = \zeta$, $\angle UVS = \vartheta$, und sind $u = f(t)$ und $v = \varphi(t)$ die Gleichungen der Raumkurve, so ist:

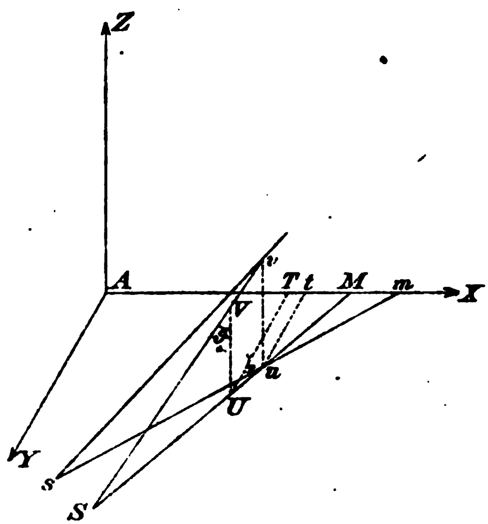


Fig. 56.

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{dt}{du}; \quad Uu = \frac{dt}{\sin\zeta};$$

$$dv = Uu \operatorname{ctg}\vartheta = \frac{dt}{\sin\zeta \operatorname{tg}\vartheta}.$$

Daraus folgt für das Kurvenelement: $Vv = \frac{dt}{\sin\zeta \sin\vartheta}$. Sind nun x, y, z die Koordinaten eines beliebigen Punktes Z auf der Tangente VS, und $ZV = s$, so hat man:

$$x = t - s\sin\vartheta \cdot \sin\zeta; \quad y = u - s \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\zeta; \quad z = v - s\cos\vartheta,$$

wobei durch die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{dt}{du}; \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{dt}{dv \cdot \sin\zeta}; \quad du = f'(t)\,dt; \quad dv = \varphi'(t)\,dt$$

die Winkel ζ und ϑ in Funktion von t bestimmt, also die Koordinaten x, y, z eines Punktes einer beliebigen abwickelbaren Fläche als

Funktionen der beiden Parameter s und t dargestellt sind. Die Beziehungen zwischen den Winkeln ζ und ϑ und den früher benutzten Größen $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ ergeben sich durch Einführung des Kontingenzwinkels $Svs = d\omega$, für welche Euler zunächst die Gleichung herleitet: $d\omega^2 = d\vartheta^2 + d\zeta^2 \sin^2\vartheta$. Es ist dann:

$$l \cdot \sin\omega + \lambda \cos\omega = \sin\zeta \sin\vartheta; \quad m \sin\omega + \mu \cos\omega = \cos\zeta \sin\vartheta;$$

$$n \cdot \sin\omega + \nu \cos\omega = \cos\vartheta$$

und:

$$l \cdot \cos\omega - \lambda \cdot \sin\omega = \frac{(d \sin\zeta \sin\vartheta)}{d\omega}; \quad m \cos\omega - \mu \sin\omega = \frac{d(\cos\vartheta \sin\zeta)}{d\omega};$$

$$n \cos\omega - \nu \sin\omega = \frac{d \cos\vartheta}{d\omega}.$$

Damit sind $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ durch ζ und ϑ ausgedrückt; es läßt sich noch die bemerkenswerte Beziehung nachweisen:

$$\frac{dl}{d\lambda} = \frac{dm}{d\mu} = \frac{dn}{d\nu} = -\operatorname{ctg}\omega.$$

Schließlich wird gezeigt, daß der Schatten, den ein leuchtender Körper von einem dunkeln erzeugt, ein solches „solidum" darstellt, und daraus ebenfalls die Gleichung der abwickelbaren Fläche hergeleitet.

Ungefähr in dieselbe Zeit fällt die erste Untersuchung von Monge über diesen Gegenstand, die sich in etwas anderer Richtung bewegt, nämlich ein „Mémoire sur les Développées, les Rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure", das schon im Jahre 1771 der Akademie eingereicht, aber erst im 10. Band der Mém. div. Sav. (1785), p. 511—550, veröffentlicht und später von Monge seinen „Feuilles d'Analyse" als Schlußkapitel einverleibt wurde. Schon dieses erste Werk zeigt alle Vorzüge von Monges Darstellungsweise, vor allem eine eminente Sicherheit des räumlichen Anschauungsvermögens; man muß geradezu sagen, daß Monge mit bloß vorgestellten räumlichen Gebilden ebenso leicht operiert, wie ein anderer mit gezeichneten Figuren in der Ebene. Dazu kommt eine ungemeine Eleganz in der Beweisführung und eine staunenswerte Gewandtheit in der analytischen Formulierung differential-geometrischer Beziehungen. — Monge schickt zunächst einige Hilfsaufgaben über Punkte, Geraden und Ebenen voraus, die er in den F. d'A. in der Einleitung behandelt, und erläutert dann einen für das Folgende wichtigen Begriff, nämlich den der Polachse (axe des-pôles) eines Kreisbogens; er versteht darunter den geometrischen Ort der Pole, d. h. der Punkte, die von allen

Punkten des Kreisbogens gleichweit entfernt sind; d. h. die Polachse ist das im Mittelpunkt eines Kreisbogens auf seiner Ebene errichtete Lot. Unter Benutzung dieser Bezeichnung ist also die Polachse für ein durch drei konsekutive Punkte bestimmtes Bogenelement einer Kurve die Schnittgerade zweier konsekutiver Normalebenen. Die Gesamtheit aller dieser Geraden ergibt den Ort der Pole (surface des pôles)[1]) für alle Bogenelemente der ganzen Kurve. Es ist eine abwickelbare Fläche und auf ihr liegen auch die sämtlichen Evoluten der Kurve; eine solche wird von Monge in anschaulicher Weise definiert als der Ort der Schnittpunkte konsekutiver Normalen; er zeigt, wie man zu einer beliebigen Normale geometrisch die Nachbarnormale findet, die sie schneidet, zu dieser ebenso eine dritte usf. Er hat also damit nicht bloß den Begriff der Evolute einer Raumkurve neu eingeführt, sondern auch gezeigt, daß jede Raumkurve unendlich viele Evoluten hat, daß alle auf der surface des pôles liegen und wie sie konstruiert werden. — Monge zeigt dann sofort, daß der Ort der Krümmungscentra auch auf der Polarfläche liegt, aber, im Gegensatze zu den ebenen Kurven, keine Evolute darstellt, außer eben bei einer solchen Kurve. Ferner beweist er, ebenfalls rein geometrisch, den interessanten Satz, daß die Evoluten geodätische Linien (in moderner Ausdrucksweise) der Polarfläche sind. Monge drückt sich folgendermaßen aus: „on aura une développée, si, par un de ses points, on mène une tangente à la surface développable qui est le lieu de ses pôles, et si l'on plie librement sur cette surface le prolongement de cette tangente". Die Beweisführung, die auf dem hier von Monge benutzten Verfahren des „plier librement" beruht, ist so charakteristisch für die Gewandtheit und Eleganz, mit der Monge im Raum operiert, daß wir wenigstens die Grundgedanken kurz andeuten wollen: er vergleicht die oben erwähnte Tangente mit einem unendlich dünnen Band, das über eine Keilkante gelegt wird, hier also über eine der Mantellinien, längs der zwei konsekutive Elemente der abwickelbaren Fläche zusammenstoßen, und zeigt, daß die beiden Teile derselben AB und BC (s. Fig. 57) mit der Keilkante gleiche Winkel

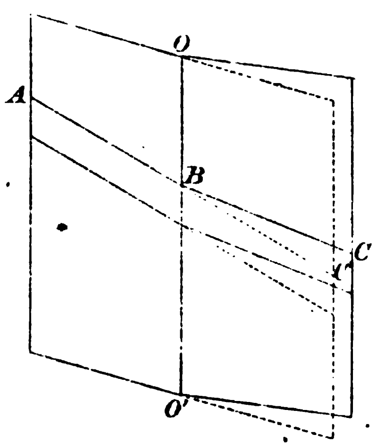


Fig. 57.

[1]) Daher die heutige Bezeichnung: „abwickelbare Polarfläche".

machen, daß also $\angle ABO = \angle O'BC$ ist. Dies trifft aber auch für jede Evolute auf Grund der von Monge gegebenen Definition zu. Daraus folgt dann sofort, daß ABC in eine Gerade ABC übergeht, wenn die zweite Ebene um OO' gedreht wird, bis sie mit der ersten zusammenfällt, d. h. daß bei Abwicklung der Polarfläche in eine Ebene die Evoluten in Gerade übergehen, daß sie also kürzeste Linien der Polarfläche sind. Dieser geometrischen Herleitung folgt dann der analytische Beweis, sowie eine differentialgeometrische Herleitung der geodätischen Linien für beliebige (also nicht abwickelbare Flächen), die in den Feuilles d'Analyse fehlt und die auf der für abwickelbare Flächen gegebenen fußt. Monge betrachtet nämlich ein Element Mm einer geodätischen Linie ML und legt durch M und m Ebenen parallel der yz-Ebene, welche die Tangentialebenen in M und m nach GT und gt schneiden. Q und q sind die Projektionen von M und m auf die xy-Ebene, ferner ist

$$Mn \parallel Qq;\quad Q'M' \parallel QM,\quad MN \parallel QQ';$$

der Winkel $M'Mm$ ist mit ν bezeichnet, und es ist dann nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie

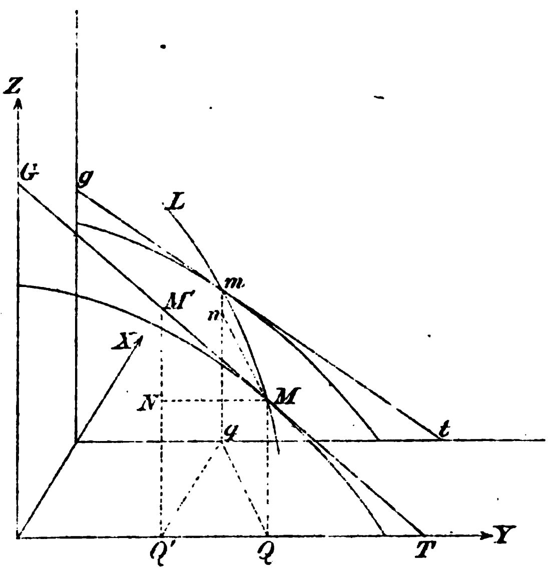


Fig. 58.

$$\cos\nu = \cos Q'Qq \cdot \cos M'MN \cdot \cos mMn + \sin M'MN \sin mMn$$

Nun ist oben gezeigt worden, daß für geodätische Linien

$$\angle Mmt = gmL = \nu + d\nu$$

ist; die beiden Winkel ν und $\nu + d\nu$ sind also nur verschieden durch die Änderung des Winkels $M'MN$; das Differential von $\cos\nu$ ist also $= 0$, wenn man bei der Differentiation den $\angle M'MN$ als konstant ansieht. Bildet man also das Differential unter dieser Voraussetzung und drückt dabei die Winkelfunktionen durch die Differentiale

von x, y, z aus, so erhält man die Differentialgleichung der geodätischen Linien, nämlich:

$$(ds^2 + dz^2)\,d^2y = \left[dy\,dz - \frac{ds^2}{q}\right] d^2z,$$

wo $ds^2 = dx^2 + dy^2$, und wo die Differentiale von z vermöge der Flächengleichung durch x, y und ihre Differentiale auszudrücken sind.

Daran schließt sich eine Anwendung auf ebene und sphärische Kurven: für erstere ist die Polarfläche ein Zylinder, der auf der Kurvenebene senkrecht steht, und dessen Basis die gewöhnliche Evolute der Kurve ist; für letztere ist es ein Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkt der Kugel liegt. Es folgen einige allgemeine Bemerkungen geometrischer Natur über abwickelbare Flächen überhaupt und ihre Rückkehrkante, für welche Monge den Namen „arête de rebroussement" eingeführt hat. Die analytische Behandlung geht aus von der Kurvengleichung in der Form $y = \varphi(x)$; $z = \psi(x)$, und es werden nacheinander die Gleichungen der Normalebene, der abwickelbaren Polarfläche, ihrer Rückkehrkante und einer beliebigen Evolute aufgestellt. Dann kommen Bemerkungen über die zwei Arten von Wendepunkten einer Raumkurve, die Monge als „points de simple inflexion" und „points de double inflexion" unterscheidet. Die ersteren sind Stellen, wo vier konsekutive Punkte in einer Ebene liegen; hier werden zwei konsekutive Polarachsen parallel, die Rückkehrkante der Polarfläche hat einen unendlichen fernen Punkt, oder, in moderner Ausdrucksweise: die Torsion der Kurve ist $= 0$. Als Bedingung für solche Punkte findet Monge:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

Letztere, die „points de double inflexion" sind Stellen, wo drei konsekutive Punkte in einer Geraden liegen, d. h. wo die Krümmung der Kurve $= 0$, und der Krümmungsradius unendlich wird. Um solche Punkte zu bestimmen, wird zunächst für den Krümmungsradius die Formel entwickelt

$$\frac{[1 + \varphi'^2 + \psi'^2]^{3/2}}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')^2}}.$$

Daraus ergibt sich als Bedingung für einen solchen Punkt: $\varphi'' = 0$; $\psi'' = 0$. Den Schluß bilden Betrachtungen über die Développée einer abwickelbaren Fläche; es ist dies die abwickelbare Fläche, die heute die rektifizierende heißt. Von dieser weist Monge folgende Eigenschaften nach:

1. Wird die Développée in einer Ebene abgewickelt, so geht die Raumkurve in eine Gerade über. Monge drückt allerdings diesen

Satz etwas anders aus, er sagt nämlich: wenn eine der rektifizierenden Ebenen mit der in ihr liegenden Kurventangente auf der Développée rollt, so beschreibt diese Tangente die abwickelbare Fläche, die von den Tangenten der Raumkurve gebildet wird.

2. Jedes Element einer abwickelbaren Fläche (d. h. der Streifen zwischen zwei konsekutiven Mantellinien) kann angesehen werden als Flächenelement eines Kegels, dessen Spitze der Schnittpunkt der beiden Mantellinien, und dessen Achse die zugehörige Erzeugende der Développée ist.

3. Ist die Développée ein Zylinder, so haben alle Mantellinien der abwickelbaren Fläche gleiche Neigung gegen dessen Mantellinien.

Der Zeit nach folgt nun Tinseau (Offizier im Geniekorps) mit einer Arbeit: „Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure“[1] (1774). Hier kommt nur der zweite Teil in Betracht, wo er von Raumkurven spricht, die Gleichung der von den Tangenten gebildeten abwickelbaren Fläche aufstellt, und die zwei Arten von Wendepunkten, ganz wie Monge, unterscheidet, und zwar als „points d'inflexion linéaire“ (Krümmung = 0) und „points d'inflexion plane“ (Torsion = 0) unterscheidet. Er stellt weiter die Gleichung der Schmiegungsebene auf, wobei sich, wohl zum erstenmal, der Satz findet, daß die Orthogonalprojektion einer Raumkurve auf eine Ebene dann einen Wendepunkt hat, wenn die Schmiegungsebene auf der Projektionsebene senkrecht steht. Endlich werden noch Formeln entwickelt für die Komplanation einer abwickelbaren Fläche und für die Kubatur des Raums, der von ihr, der xy-Ebene und den beiden Ebenen begrenzt wird, welche zwei beliebige Mantellinien auf die xy-Ebene projizieren.

Eine zweite, größere Abhandlung von Monge, die nach der ersten, vorhin erwähnten, eingereicht (1775), aber vor ihr veröffentlicht[2] wurde, heißt: „Sur les Propriétés de plusieurs genres de Surfaces courbes, particulièrement sur celles des Surfaces développables, avec une Application à la Théorie des Ombres et des Pénombres“. Monge erwähnt darin seine eigene frühere Arbeit[3]), sowie diejenige Eulers[4]) mit der Bemerkung: „je suis parvenu à des résultats, qui me semblent beaucoup plus simples“. Die Arbeit bringt also keine wesentlich neuen Ergebnisse, aber eine einfachere und elegantere Herleitung. Zunächst wird scharf unterschieden zwischen abwickelbaren Flächen und allgemeinen Regelflächen mit der Bemerkung, daß der

---

[1]) Mém. div. Sav. IX, 1780, p. 593—624. [2]) Ebenda, p. 382—440.
[3]) Siehe S. 531 ff. [4]) Siehe S. 529 ff.

„auteur de la coupe de pierres“ (also wohl Frézier) sich hierüber nicht ganz klar sei; die abwickelbare Fläche wird definiert durch die Eigenschaft, daß sie sich ohne Faltung und Zerreißung in eine Ebene ausbreiten lasse, und ihre Gleichung auf drei verschiedene Arten und in drei verschiedenen Formen hergeleitet, nämlich:

1. in endlicher Form, indem die Koordinaten eines beliebigen Punktes auf der Tangente der Raumkurve aufgestellt werden. Hierbei treten zwei, die Raumkurve bestimmende, willkürliche Funktionen auf; diese werden durch zweimaliges Differenzieren eliminiert, was die Differentialgleichung $rt - s^2 = 0$ liefert.

2. Diese wird direkt gewonnen durch Aufstellung der Schnittgeraden zweier konsekutiven Tangentialebenen und Berücksichtigung der Tatsache, daß für eine abwickelbare Fläche, und nur für eine solche, diese Schnittgerade dieselbe bleibt, gleichviel ob bloß x oder bloß y sich ändert.

3. Längs eines Flächenelements (= Streifen zwischen zwei konsekutiven Mantellinien) sind p und q beide konstant; wenn man zum nächstfolgenden übergeht, so ändern sich beide gleichzeitig. Nun kommt der in seiner Neuheit überraschende Schluß: p und q sind also „constants ensemble et variables ensemble, donc on doit avoir $p = \varphi(q)$“, d. h. p muß Funktion von q sein (oder umgekehrt). Damit ist zugleich ein erstes Integral der Differentialgleichung

$$rt - s^2 = 0$$

gefunden.

Ähnlich wie bei Euler (s. S. 531), aber weiter ausgeführt, folgt nun eine Anwendung der Theorie der abwickelbaren Flächen auf die „ombres et pénombres“. Sind zwei Körper, ein leuchtender und ein dunkler, gegeben, so zeigt Monge, daß die Grenze zwischen Kern- und Halbschatten gebildet wird von einer abwickelbaren Fläche, welche die beiden Körper berührt; das Gleiche gilt für die Grenze von Halbschatten und Licht; die Rückkehrkante liegt im letzteren Fall zwischen, im ersteren außerhalb der beiden Körper. Es wird dann zunächst der einfachste Fall erledigt, daß der leuchtende Körper ein Punkt ist. Sind a, b, c die Koordinaten des Punktes, ist $z = K(x, y)$ die Gleichung der Fläche und hieraus $\frac{\partial z}{\partial x} = P$, $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$, so ergibt die Gleichung: $z - c = (x - a)P + (y - b)Q$ in Verbindung mit $z = K(x, y)$ durch Elimination von z die Horizontalprojektion der Licht- und Schattengrenze oder der Berührkurve des von dem Punkt an die Fläche gelegten Tangentialkegels. Damit ist zugleich die erste Polarfläche des Punktes in bezug auf die Fläche aufgestellt, wenngleich diese Bezeichnung natürlich nicht auftritt. Es wird dann noch

die Gleichung des Tangentialkegels angegeben und bemerkt, daß damit zugleich die Aufgabe gelöst ist, den scheinbaren Umriß der Fläche in Zentralperspektive zu bestimmen.

Daran schließt sich die Lösung der allgemeineren Aufgaben, die gemeinsame Developpable zweier Flächen zu finden, und durch zwei gegebene Kurven eine abwickelbare Fläche zu legen. Monge stellt die Tangentialebene für beide Flächen

$$z_1 = K_1(x_1, y_1) \quad \text{und} \quad z_2 = K_2(x_2, y_2)$$

auf, nämlich:

$$z - K_1 = p_1(x - x_1) + q_1(y - y_1)$$

und

$$z - K_2 = p_2(x - x_2) + q_2(y - y_2). \tag{1}$$

Soll nun eine Ebene beide Flächen berühren, so müssen diese beiden Gleichungen identisch sein, d. h. es muß sein:

$$p_1 = p_2; \quad q_1 = q_2; \quad K_1 - p_1 x_1 - q_1 y_1 = K_2 - p_2 x_2 - q_2 y_2. \tag{2}$$

Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen und einer der Gleichungen (1) drei der Größen x_1, y_1, x_2, y_2, so erhält man die Gleichung einer Ebene,

$$z = Ax + By + C, \tag{3}$$

wo die Koeffizienten A, B, C Funktionen der vierten, nicht eliminierten Variabeln, z. B. x_1, sind, die also hier als Parameter auftritt. Differenziert man (3) nach diesem Parameter, und eliminiert ihn, so ergibt sich die Gleichung der gemeinsamen Developpabeln; sie stellt insbesondere einen Kegel dar, wenn

$$d\frac{d\left(\frac{dC}{dB}\right)}{d\left(\frac{dA}{dB}\right)} = 0$$

ist. — Im Anschluß daran werden verschiedene analytische Probleme erledigt, deren Lösungen im vorstehenden enthalten sind, um zu zeigen, „que l'Analyse peut tirer de très-grand secours de la connaissance des propriétés de l'étendue". Endlich folgt die Aufstellung der Differentialgleichungen der surfaces gauches, d. h. der allgemeinen Regelflächen, und die Lösung der Aufgabe, durch drei gegebene Kurven eine Regelfläche zu legen.

Nur kurz erwähnen wir eine Arbeit von Euler vom 8. März 1779: „De lineis curvis non in eodem plano sitis quae maximi vel minimi proprietate sunt praeditae"[1]). Sie enthält eine Anwendung des Methodus inveniendi, d. h. der Variationsrechnung auf Raumkurven, und sucht die Gleichungen $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$ einer solchen so zu bestimmen,

[1]) M. P. IV, p. 18—42.

daß $\int^{s} V dx$ ein Maximum oder Minimum wird, wo V eine Funktion von x, y, z und den Differentialquotienten von y und z nach x ist. Die Auflösung ist folgende: Euler setzt zunächst

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dp}{dx} = q; \quad \frac{dq}{dx} = r \ldots,$$

$$\frac{dz}{dx} = p'; \quad \frac{dp'}{dx} = q'; \quad \frac{dq'}{dx} = r' \quad \text{usw.}$$

Ferner

$$\frac{\partial V}{\partial x} = M; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = N; \quad \frac{\partial V}{\partial p} = P; \quad \frac{\partial V}{\partial q} = Q \ldots,$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = N'; \quad \frac{\partial V}{\partial p'} = P'; \quad \frac{\partial V}{\partial q'} = Q' \ldots$$

und findet als Bedingungen:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + - \cdots = 0,$$

$$N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} + - \cdots = 0.$$

Treten nur die Differentialquotienten erster Ordnung p und p' in V auf, so reduzieren sich diese Gleichungen auf:

$$N - \frac{dP}{dx} = 0; \quad N' - \frac{dP'}{dx'} = 0.$$

Diese Methoden werden auf einige Beispiele angewendet.

Unter den Arbeiten, die sich auf Flächenkurven (d. h. Raumkurven, die auf einer gegebenen Fläche liegen) beziehen, ist die bedeutendste die von Euler über geodätische Linien: „Accuratior evolutio problematis de linea brevissima in superficie quacunque ducenda“[1]) (25. Januar 1779). Es werden keine wesentlich neuen Resultate gefunden, da ja Euler die Aufgabe selbst schon früher gelöst hat (III[2], S. 817 ff.), bemerkenswert ist aber die Herleitung der Differentialgleichung und namentlich ihre Integration. Zunächst werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$dz = f dx + g dy; \quad df = \alpha dx + \beta dy; \quad dg = \beta dx + \gamma dy,$$

so daß das Linienelement ds einer beliebigen auf der Fläche gezogenen Kurve die Form erhält:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + (f dx + g dy)^2},$$

oder, wenn $dy = p dx$ gesetzt wird:

---

[1]) N. A. P. XV, p. 44—54.

$$ds = dx\sqrt{1 + p^2 + (f + gp)^2}.$$

Es soll nun das Integral

$$s = \int dx \sqrt{1 + p^2 + (f + gp)^2}$$

zu einem Minimum gemacht werden. Die Anwendung der von Euler in der Methodus inveniendi aufgestellten Regeln führt auf die Differentialgleichung $dp(1 + f^2 + g^2) + (g - fp)(df + pdg) = 0$. Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Eine erste Integration leistet Euler durch einige Substitutionen; er setzt nämlich

$$v = \frac{g - fp}{f + gp}; \quad f^2 + g^2 = h^2; \quad \frac{g}{f} = k; \quad s = \frac{v}{1 + h^2}.$$

Es ergibt sich so

$$\frac{ds}{1 + s^2} = \frac{dk}{(1 + k^2)\sqrt{1 + h^2}},$$

so daß wenigstens die Variable s isoliert ist.

Es ist von Interesse, daß die hier eingeführte Größe s eine einfache geometrische Bedeutung hat; ist nämlich w der Winkel, den eine geodätische Linie mit den Kurven $z = \text{const.}$ bildet, so ist $s = \operatorname{tg} w$; dieser Hinweis fehlt allerdings bei Euler, aber immerhin ist es bemerkenswert, daß Gauß die Integration der geodätischen Linie auf ähnliche Weise angegriffen hat[1]), nämlich durch Einführung des Winkels, den sie mit den Parameterkurven bilden. — Des weiteren ist bemerkenswert, daß Euler hier, wohl zum erstenmal, eine symmetrische Behandlung der drei Koordinaten eines Flächenpunktes und einer für sie abgeleiteten Differentialgleichung unternimmt, die er mit den Worten einleitet: „Universam hanc quaestionem ita tractare mihi est visum, ut omnes formulae pari ratione tres coordinatas x, y, z involvant, quo pacto speculationi potius consulatur quam usui; hancque ob rem investigationes sequentes subjungam". Er nimmt nun die Differentialgleichung der Fläche in der Form an:

$$pdx + qdy + rdz = 0,$$

und erhält als Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$d^2x(qdz - rdy) + d^2y(rdx - pdy) + d^2z(pdy - qdx) = 0,$$

die er noch in die Form setzt:

$$\frac{d^2s}{ds} = \frac{qd^2z - rd^2y}{qdz - rdy} = \frac{rd^2x - pd^2y}{rdx - pdz} = \frac{pd^2y - qd^2x}{pdy - qdx}.$$

[1]) Disquisitiones generales circa superficies curvas, Art. 18.

Schließlich wird die Integration für Rotationsflächen durchgeführt, deren Gleichung in der Form $\frac{x^2+y^2}{2}+f(z)=0$ angenommen wird, so daß $p=x$, $q=y$ wird, woraus durch eine erste Integration mit der Konstanten A folgt:

$$Ads = xdy - ydx.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten in der xy-Ebene

$$(x = v\cdot\cos\varphi;\quad y = v\sin\varphi)$$

folgt:

$$d\varphi = \frac{dv}{rv}\sqrt{\frac{r^2+v^2}{A^2+v^2}},$$

wo r eine Funktion von v ist, die den Meridian der Rotationsfläche bestimmt.

Es wird dem Ruhm und den Verdiensten von Gauß keinen Eintrag tun, wenn wir hier darauf hinweisen, daß verschiedene der Gedanken und Methoden, von denen er in den „Disquisitiones generales" mit so glänzendem Erfolg Gebrauch macht, sich (allerdings zum Teil in spezieller Form, oder nicht ausdrücklich formuliert) schon bei Euler finden, z. B. die sphärische Abbildung (S. 527), die Darstellung der Flächen in Parameterform (S. 529), die Übereinstimmung des Linienelements als Bedingung für die Abwickelbarkeit (S. 530) und endlich die Behandlung der Differentialgleichung der geodätischen Linien mit Hilfe des Winkels, den sie mit einer auf der Fläche befindlichen Kurvenschar bilden (S. 539).[1])

Die im vorigen Kapitel besprochenen Arbeiten Eulers über die Rektifikation von Kurven stehen in gewissem Zusammenhang mit Untersuchungen über rektifizierbare Kurven auf Flächen, sofern er auch hier die S. 480 angegebene Methode anwendet.[2]) Für die erste der hierher gehörigen Abhandlungen trifft dies allerdings nicht zu, wohl aber für die übrigen. Jene handelt: „De curva rectificabili in superficie sphaerica"[3]), bringt aber keine vollständige Lösung der Aufgabe, sondern leitet nur für das Bogenelement den Ausdruck her: $\frac{ds\cdot\sin s}{\operatorname{tg} r}$, wo r der sphärische Krümmungsradius, s der Bogen der Evolute ist. Die zweite Abhandlung heißt: „De lineis rectificabilibus in superficie sphaeroïdica quacunque geometrice ducendis"[4]) (4. Juli 1776). Es sollen also hier auf einem Rotationsellipsoid rektifizierbare Kurven gefunden werden. Der Weg zur Lösung ist der, daß in der xy-Ebene

[1]) Vgl. auch Euler, Opera posthuma I, p. 491—496, und Lagrange, Oeuvres XIV, p. 217, 221. S. Stäckel in Biblioth. Mathem. (3) II (1901), p. 123. [2]) Stäckel, Leipziger Berichte 1902, p. 102. [3]) N. C. P. XV (1770), p. 195 bis 216. [4]) N. A. P. III, p. 57—68.

nach dem angegebenen Verfahren eine rektifizierbare Kurve bestimmt, und der Bogen der gesuchten Flächenkurve der z-Koordinate proportional gesetzt wird, also:

$$s = nz; \quad ds = n \cdot dz.$$

Bezeichnet man das Bogenelement der Kurve in der xy-Ebene mit $d\sigma$, so daß:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2$$

ist, so ist:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\sigma^2 + \frac{ds^2}{n^2},$$

oder:

$$d\sigma = \frac{ds\sqrt{n^2-1}}{n} = dz\sqrt{n^2-1},$$

$$\sigma = s\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = z\sqrt{n^2-1}.$$

Die Gleichungen der Kurve in der xy-Ebene sind nun nach S. 480:

$$x = \frac{dv}{d\varphi}\cdot\sin\varphi - v\cos\varphi; \quad y = \frac{dv}{d\varphi}\cos\varphi + v\cdot\sin\varphi$$

und der Bogen σ ist dann:

$$\sigma = \frac{dv}{d\varphi} + \int v\,d\varphi.$$

Ist nun die Gleichung des Ellipsoids:

$$z^2 = c^2(1 - x^2 - y^2) = c^2\left[1 - v^2 - \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2\right],$$

so hat man nach den vorangehenden Gleichungen:

$$\frac{dv}{d\varphi} + \int v\,d\varphi = c\sqrt{1 - v^2 - \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2}\sqrt{n^2-1}.$$

Um diese Gleichung integrabel zu machen, setzt Euler:

$$v = \cos(\lambda\varphi + \alpha),$$

wobei sich für λ die Bedingung ergibt:

$$\frac{1-\lambda^2}{\lambda^2} = c^2(n^2 - 1)$$

und die Horizontalprojektion der gesuchten Kurve die Form erhält:

$$x = -\cos\varphi\cdot\cos(\lambda\varphi + \alpha) - \lambda\sin\varphi\sin(\lambda\varphi + \alpha),$$
$$y = \sin\varphi\cdot\cos(\lambda\varphi + \alpha) - \lambda\cos\varphi\sin(\lambda\varphi + \alpha);$$

für λ ist hierbei noch der aus der vorangehenden Gleichung sich ergebende Wert einzusetzen. Da über c keinerlei Voraussetzung ge-

macht ist, so gelten die Resultate für jedes Rotationsellipsoid, also auch für die Kugel, sowie für das Rotationshyperboloid.

In einer dritten Arbeit: „De curvis rectificabilibus in superficie coni recti ducendis“[1]) leitet Euler rektifizierbare Kurven auf dem Rotationskegel her; die Höhe ist $= a$, der Grundkreisradius $= b$, die Mantellinie $= c$, und rektifizierbare Kurven lassen sich nur finden, wenn $c : b$ ein rationales Verhältnis ist. Der Gang der Lösung ist ganz analog wie im vorigen Fall, nur ist der dort mit φ bezeichnete Hilfswinkel hier $= \vartheta$ gesetzt. θ bedeutet eine beliebige Funktion von ϑ; $\frac{d\theta}{d\vartheta}$ ist mit η bezeichnet; dann sind die Gleichungen der gesuchten Kurve:

$$x = \frac{a}{b} \frac{\theta}{\sin \eta}; \quad y = \frac{\theta \cos \frac{c}{b}(\vartheta - \eta)}{\sin \eta}; \quad z = \frac{\theta \sin \frac{c}{b}(\vartheta - \eta)}{\sin \eta};$$

für die Bogenlänge s ergibt sich

$$s = \frac{c}{b}\left(\int \theta d\vartheta + \frac{\theta}{\operatorname{tg} \eta}\right).$$

Mit verschiedenen sphärischen Kurven haben sich Lexell, Schubert und Fuß beschäftigt. Ersterer behandelt sphärische Epizykloiden in einer Abhandlung: „De epicycloïdibus in superficie sphaerica descriptis“[2]), ermittelt ihre Gleichung, die sphärische Tangente, das Bogenelement und den sphärischen Krümmungsradius. Schuberts Note: „De curva loxodromica“[3]) (14. August 1786) löst die Aufgabe, den loxodromischen Winkel für die Loxodrome zu finden, die zwei durch ihre sphärischen Koordinaten gegebene Punkte verbindet; sie hat mehr vom Standpunkt der Nautik Interesse. Fuß endlich untersucht, wohl zum erstenmal, die sphärischen Kegelschnitte in einer vom 25. Oktober 1787 datierten Abhandlung: „De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae“.[4]) Es wird der Ort der Punkte Y gesucht, für welche die Summe der sphärischen Entfernungen von zwei festen Punkten A und B konstant ist. Zu diesem Zweck wird von Y das sphärische Lot YX auf AB gefällt, und mit y bezeichnet, AX ist $= x$, $AB = 2a$, $AY + BY = 2c$ ge-

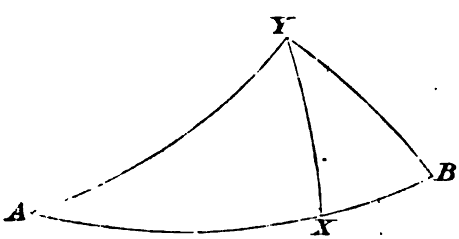


Fig. 59.

[1]) A. P. 1781, I, p. 60—73. [2]) Ebenda, 1779, I. p. 49—71. [3]) N. A. P. IV, p. 95—101. [4]) Ebenda, III, p. 90—99, vgl. auch S. 387.

setzt. Hierauf werden mit Hilfe sphärischer Dreiecke die Beziehungen hergeleitet:

$$\cos y = \frac{\sin c \cos c}{\sqrt{\cos c^2 \sin a^2 + \cos x^2(\cos a^2 - \cos c^2)}}$$

$$\sin y = \frac{\sqrt{(\cos a^2 - \cos c^2)(\cos x^2 - \cos c^2)}}{\sqrt{\cos c^2 \sin a^2 + \cos x^2(\cos a^2 - \cos c^2)}}.$$

Als „proprietas maxime memorabilis" hebt Fuß hervor, daß für $c = 90^0$ die sphärische Ellipse ein Großkreis wird, gleichviel, wie die Brennpunkte A und B liegen. Er berechnet sodann die beiden Halbachsen; die eine ist natürlich $= c$, für die andere, die mit g bezeichnet ist, ergibt sich:

$$\operatorname{tg} g = \frac{\sqrt{\sin c^2 - \sin a^2}}{\cos c}.$$

(Daß diese Gleichung sich auf die einfache Form bringen läßt:

$$\cos g = \frac{\cos c}{\cos a},$$

und daß hiernach c die Hypotenuse eines sphärischen rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b ist, wird nicht bemerkt.) Durch Einführung von g nimmt die Kurvengleichung die Form an:

$$\operatorname{tg} y = \frac{\operatorname{tg} g}{\sin c} \sqrt{\sin c^2 - \sin x^2}.$$

Ferner wird von der sphärischen Ellipse bewiesen, daß die Brennstrahlen AY und BY mit der Kurventangente in Y gleiche Winkel machen, und schließlich gezeigt, daß die Projektion der sphärischen Ellipse auf die zu ihrem Mittelpunkt als Pol gehörige Äquatorebene eine Ellipse ist, daß aber die Brennpunkte derselben nicht die Projektionen der Brennpunkte der sphärischen Ellipse sind.

Als letzte Abhandlung über Raumkurven ist endlich zu nennen: „Kästner, Cylindrorum rectorum se decussantium sectiones ad geometriam fornicum relatae".[1]) Es handelt sich also um die Durchdringung zweier Kreiszylinder, wie sie in der Architektur bei der Durchkreuzung zweier zylindrischen Gewölbe auftritt. Hier wird nur der Fall erörtert, daß die Achsen der beiden Zylinder sich schneiden. Ist ihr Winkel $= 2\alpha$, sind die Radien der Zylinder a und b, und nimmt man die Halbierungslinien des Winkels 2α und seines Nebenwinkels als Koordinatenachsen, so ist die Gleichung der Projektion der Schnittkurve auf die Ebene der Achsen: $xy = \frac{a^2 - b^2}{2}$, also eine

[1]) Comment. Goetting. X (1791), p. 30—54.

gleichseitige Hyperbel, woraus sich leicht die Gleichungen der Schnittkurve selbst herleiten lassen.

Wir verlassen nun die Raumkurven und wenden uns zu den krummen Flächen, dem Gebiet, in welches die hervorragendsten Leistungen unserer Periode fallen. Gleich bei den Arbeiten allgemeinerer Natur haben wir von zwei der schönsten Entdeckungen zu berichten; wir meinen die bekannten Sätze von Euler und Meusnier über die Krümmung der Oberflächen, und diesen werden sich nachher bei der Besprechung der Feuilles d'Analyse noch weitere anreihen. Vorher müssen wir jedoch noch einmal auf die schon früher (S. 535) erwähnte Arbeit von Tinseau: „Solution de quelques problèmes etc." zurückkommen, da sie einige interessante Bemerkungen auch über Flächen enthält. Tinseau stellt zunächst die Gleichung der Tangentialebene in einem Flächenpunkt x, y, z auf mit π, φ, ω als laufenden Koordinaten, und zwar in der eigentümlichen Form:

$$(x-\pi)dy\left(\frac{dz}{dx}\right)dx + (y-\varphi)dx\left(\frac{dz}{dy}\right)dy - (z-\omega)dxdy = 0,$$

wobei die Klammern nach der damals üblichen Schreibweise eine partielle Differentiation andeuten. Diese Gleichung wird nun sofort umgedeutet, indem den Koordinaten π, φ, ω feste Werte a, b, c erteilt werden. Sie stellt dann zusammen mit der Flächengleichung die Berührungskurve des vom Punkt a, b, c an die Fläche gelegten Tangentialkegels dar. Es liegt also ein ganz ähnlicher Gedankengang vor, wie bei Monge (s. S. 537), für den aber Tinseau die Priorität gebührt, da seine Arbeit zeitlich vorangeht. — Die Gleichung des Berührungskegels selbst wird gewonnen, indem man x, y, z aus den Gleichungen der Berührkurve und den beiden Gleichungen einer durch den Punkt (a, b, c) gehenden Geraden eliminiert. Tinseau macht auf die Bedeutung dieser Überlegungen für die Perspektive aufmerksam, gibt auch einen einfachen Beweis für den Satz vom Fluchtpunkt, daß die Horizontalprojektionen einer Schar von parallelen Geraden sich in einem Punkte schneiden, und bemerkt dazu: „Voici une démonstration bien simple de ce principe, dont les auteurs de perspective ont jusqu'ici cherché la preuve, les uns dans la métaphysique, les autres dans des considérations sur l'infini". — Diese Betrachtungen werden ebenso wie für den Kegel, auch für den Zylinder angestellt. Außerdem hat Tinseau in dieser Arbeit bewiesen, daß zwischen den Neigungswinkeln α, β, γ einer Ebene gegen die Koordinatenebenen die Beziehung besteht:

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

[1]) Die letzte Bemerkung Tinseaus ist übrigens unrichtig. Vgl. S. 585, Fußnote.

und daraus den bemerkenswerten Satz hergeleitet, daß das Quadrat eines ebenen Flächenstücks gleich der Summe der Quadrate seiner Projektionen auf drei zueinander senkrechte Ebenen ist; auf die Analogie dieses Satzes mit dem pythagoreischen Lehrsatz wird ausdrücklich hingewiesen. Der Rest handelt von einigen speziellen Regelflächen, und wird weiter unten, wo wir über die Einzeluntersuchungen berichten, nochmals zu erwähnen sein.

Eulers berühmter Satz über die Krümmungsradien der Normalschnitte einer Fläche steht in seinen „Recherches sur la courbure des surfaces".[1]) Die Untersuchung ist durch ziemlich umständliche Rechnungen geführt, von denen wir nur die Hauptresultate angeben. Euler betrachtet die Schnittkurve der Fläche mit einer beliebigen Ebene $z = \alpha y - \beta x + \gamma$, und findet für den Krümmungsradius ϱ dieser Kurve den Ausdruck:

$$\varrho = -\frac{[\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha q + 2\beta p + (\alpha p + \beta q)^2 + p^2 + q^2]^{3/2}}{[(\alpha - q)^2 r + (\beta + p)^2 t + 2(\alpha - q)(\beta + p)s]u},$$

wo p, q, r, s, t die bekannten Differentialquotienten sind, und zur Abkürzung $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = u$ gesetzt ist. Hieraus wird nun der Krümmungsradius r (natürlich nicht zu verwechseln mit dem Differentialquotienten r) eines beliebigen Normalschnitts hergeleitet, und zu diesem Zweck der Neigungswinkel ϑ der Schnittebene gegen die xy-Ebene, und der Winkel ζ, den ihre Spur in dieser Ebene mit der x-Achse macht, eingeführt. Es ergibt sich dann ein ziemlich komplizierter Ausdruck; mit Hilfe desselben werden zunächst die Krümmungsradien der Schnittebene, welche durch die z-Koordinate geht, und der zu ihr senkrechten Ebene berechnet, die Euler als „sections principales" bezeichnet. Nun wird der Winkel φ eingeführt, den die Ebene des beliebigen Normalschnitts mit der eines der Hauptschnitte bildet. Hierdurch ergibt sich:

$$r = -\frac{\frac{1}{\cos^2\varphi}(p^2 + q^2)u^3}{r(p - q\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot u)^2 + t(q + p\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot u)^2 + 2s(p - q\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot u)(q + p\,\mathrm{tg}\,\varphi \cdot u)},$$

also ein Ausdruck von der Form:

$$r = \frac{1}{L + M\cos 2\varphi + N\sin 2\varphi},$$

wo L, M, N Funktionen der Differentialquotienten p, q, r, s, t sind, die sich leicht angeben lassen. Aus dem letzten Ausdruck folgert nun Euler die wichtigen Sätze:

1. Die Krümmung zweier Flächenelemente stimmt überein, wenn

---

[1]) Hist. de l'Acad. Royale d. Sciences et Belles-Lettres à Berlin 1760, p. 119—143.

L, M, N für beide denselben Wert haben, oder durch Veränderung des Winkels φ (d. h. durch Drehung des Elements um seine Normale) ineinander übergeführt werden können.

2. Kennt man drei Werte von r, so kann man L, M, N, und damit alle übrigen bestimmen.

3. r nimmt einen größten oder kleinsten Wert an, wenn

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{N}{M}$$

ist. Diese extremen Werte (d. h. die Hauptkrümmungsradien im heutigen Sprachgebrauch) werden mit f und g bezeichnet.

4. Die Richtungen, in welche diese beiden extremen Werte fallen, stehen aufeinander senkrecht.

5. Für den Fall, daß einer von den extremen Werten von r in die durch $\varphi = 0$ bestimmte Ebene fällt, ist $r = \frac{1}{L + M \cos 2\varphi}$.

6. Kennt man f und g, so kennt man alle Werte von r; stimmen also die Hauptkrümmungsradien für zwei Flächenelemente überein, so haben diese dieselbe Krümmung („on peut prononcer hardiment, que ces deux éléments sont doués de la même courbure").

7. Die Eulersche Formel: Führt man in $r = \frac{1}{L + M \cos 2\varphi}$ die Werte f und g ein, so ergibt sich:

$$r = \frac{2fg}{f + g + (f - g)\cos 2\varphi}.$$

Nur in dieser Form, nicht in der jetzt gebräuchlichen:

$$\left(\frac{1}{r} = \frac{\cos \varphi^2}{f} + \frac{\sin \varphi^2}{g}\right)$$

tritt die Gleichung bei Euler auf. Den Schluß bildet eine auf obiger Formel beruhende geometrische Konstruktion des Flächenelements, wobei noch bemerkt wird, daß $r = 0$ und $r = \infty$ nicht als extreme Werte gelten können.

Neben dieser Arbeit steht ebenbürtig die von Meusnier über die Krümmungsradien schiefer Schnitte, die merkwürdigerweise die einzige mathematische Publikation dieses Mannes geblieben ist.

Jean Baptiste Marie Charles Meusnier, geb. 1754, war Oberstleutnant im Geniekorps der französischen Armee, bald darauf Divisionskommandeur und Mitglied der Pariser Akademie. Er fand den Heldentod bei der Verteidigung von Mainz gegen die belagernden Preußen, wo er schwer verwundet wurde und bald darauf starb (1793). Den schönen Satz, der heute noch seinen Namen trägt, hat er schon mit 22 Jahren entdeckt, und in einem „Mémoire sur la courbure des

surfaces"[1]) im Jahr 1776 der Akademie vorgelegt. Es enthält neben dem sogenannten Meusnierschen Theorem noch die Entdeckung einer fundamentalen Eigenschaft der Minimalflächen, nämlich, daß ihre Hauptkrümmungsradien überall gleich und entgegengesetzt sind, sowie die ersten speziellen Minimalflächen. Auch der glückliche Gedanke, eine Fläche in der Umgebung eines ihrer Punkte zu ersetzen durch eine Annäherungsfläche 2. Grades (jetzt Schmiegungsparaboloid genannt), taucht in dieser Arbeit zum erstenmal auf. Meusnier beginnt nämlich seine Untersuchung eines Flächenelementes damit, daß er die Flächengleichung auf ein Koordinatensystem (u, v, t) bezieht, dessen uv-Ebene die Tangentialebene und dessen t-Achse die Normale des betr. Punktes ist. Dann gibt es eine Fläche von der Form: $t = \frac{cu^2 + 2euv + fv^2}{2}$, welche dieselbe Krümmung hat, wie das Flächenelement. Wird nun das Koordinatensystem um einen Winkel φ, der durch $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2e}{c-f}$ bestimmt ist, um die Normale gedreht, so nimmt die Gleichung der Annäherungsfläche die Form an: $2t = Au'^2 + Bv'^2$, wo u' und v' die neuen Koordinaten sind und A und B von c, e, f und dem Winkel φ abhängen Damit beweist nun Meusnier folgenden Satz:

Jedes Flächenelement kann angesehen werden als erzeugt durch Rotation eines Kreises um eine zur Tangentialebene des Elementes parallele Achse. Ist r der Radius des Kreises, ϱ der Abstand der Rotationsachse von der Tangentialebene, so sind r und ϱ durch die Gleichungen bestimmt:

$$\frac{1}{r} = \frac{c + f \pm \sqrt{(c-f)^2 + 4e^2}}{2} \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{c + f \mp \sqrt{(c-f)^2 + 4e^2}}{2}.$$

Meusnier wählt das obere Vorzeichen, und er nennt r und ϱ die „rayons de courbure" des Flächenelementes. Es ist dies wohl das erste Vorkommen dieses Ausdrucks in der Flächentheorie; in Eulers Abhandlung[2]) findet er sich noch nicht. Daran schließt Meusnier zwei wichtige Folgerungen, die sich durch Berechnung des Krümmungsradius eines schiefen Schnittes ergeben. Als Achsen des Koordinatensystems (Fig. 60) nimmt er die Flächennormale AD, und die Richtungen AG und AL, in welche die „rayons de

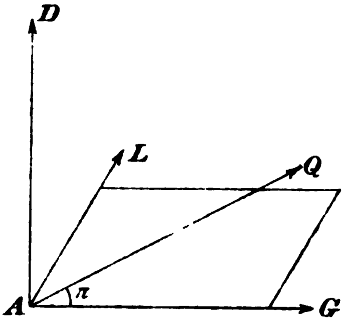


Fig. 60.

[1]) Mém. div. Sav. 1785, p. 477—510. [2]) Siehe S 545.

courbure" r und ϱ fallen. Ist nun AQ die Schnittgerade einer beliebigen, durch A gehenden Schnittebene mit der xy-Ebene, ω ihr Neigungswinkel gegen dieselbe, $\sphericalangle GAQ = \varkappa$, so erhält man für den Krümmungsradius R dieses Schnittes:

$$R = \frac{r\varrho \sin\omega}{r\sin\varkappa^2 + \varrho\cos\varkappa^2} = \frac{2r\varrho\sin\omega}{(r+\varrho)+(r-\varrho)\sin 2\varkappa}. \tag{1}$$

Setzt man $\omega = 90^0$, so ergibt sich der Krümmungsradius R' eines Normalschnittes, nämlich:

$$R' = \frac{2r\varrho}{r+\varrho+(r-\varrho)\sin 2\varkappa}. \tag{2}$$

Der Vergleich dieser Gleichung mit der Eulerschen Formel (S. 546) zeigt, daß r und ϱ nichts anderes sind, als die von Euler berechneten extremen Werte der Krümmungsradien der Normalschnitte. Das ist die erste der beiden Folgerungen. Die zweite ist das aus (1) und (2) sich sofort ergebende Meusniersche Theorem:

$$R = R'\sin\omega, \tag{3}$$

das Meusnier in folgende geometrische Form kleidet:

„Si l'on coupe un élément de surface par un plan qui lui soit perpendiculaire, qu'on imagine une sphère qui lui soit tangente, et dont le rayon soit égal au rayon de courbure de la section, dont nous venons de parler, qu'on fasse par l'intersection du plan coupant avec le plan tangent un autre plan quelconque, il fera, dans la sphère, et dans l'élément de surface des sections d'égale courbure."

Mit Zugrundelegung der Formel (2) wird nun die Art der Wölbung des Flächenelementes, und ihre Abhängigkeit vom Vorzeichen der Radien r und ϱ diskutiert, die Richtung bestimmt, für welche R unendlich groß wird, und der Spezialfall, daß r oder ϱ unendlich wird, erörtert. Sodann wird auf ein beliebiges Koordinatensystem übergegangen, und die Größen c, e, f, und damit auch die Hauptkrümmungsradien durch die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung von z nach x und y ausgedrückt. Es folgt noch eine Anwendung auf Rotationsflächen, und die Bestimmung der Flächen, für welche $r = \varrho$ ist, was natürlich auf die Kugel führt.

Der oben (S. 547) aufgestellte Satz über die Erzeugung eines Flächenelementes durch Rotation eines Kreises wird nun angewendet, um die wichtigste Eigenschaft der Minimalflächen herzuleiten, nämlich, daß $r + \varrho = 0$ ist. Meusnier berechnet unter Zugrundelegung dieser Erzeugungsweise den Inhalt eines Flächenstückchens von gegebener Begrenzung, und stellt die Bedingung dafür auf, daß dieser ein Minimum wird.

Er verfährt dabei folgendermaßen: Das Flächenelement entstehe durch Rotation eines unendlich kleinen Kreisbogens AmB, dessen Halbierungspunkt m und dessen Sehne $AB = 2\omega$ ist, um eine Achse HK, die der Sehne AB parallel ist, und von ihr den Abstand $AH = a$ hat. Der Radius r des Kreisbogens ist dann der eine, der Abstand mg des Mittelpunktes m von HK der andere Hauptkrümmungsradius ϱ des Elementes. Ist nun g der Schwerpunkt des Bogens AmB, so muß wegen der Guldinschen Regel das Produkt

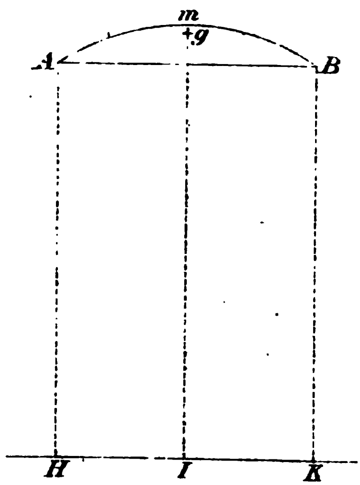


Fig. 61.

$$gI \cdot AmB$$

ein Minimum werden. Hierfür ergibt sich unter der Voraussetzung, daß ω sehr klein ist, daß also:

$$AmB = 2\omega + \frac{\omega^3}{2r}$$

gesetzt werden kann:

$$\omega\left[2\varrho + \frac{(\varrho - r)\,\omega^2}{3r^2}\right].$$

Zwischen den beiden Variabeln r und ϱ besteht aber die leicht herzuleitende Beziehung:

$$\varrho = a + \frac{\omega^2}{2r}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Gleichung ergibt sich durch Differentiation als Bedingung dafür, daß das Flächenelement ein Minimum werden soll, $r + \varrho = 0$.

Man verdankt also Meusnier den Satz, daß in jedem Punkt einer Minimalfläche die Hauptkrümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet sind. Auf Grund hiervon kann die Differentialgleichung der Minimalflächen leicht aufgestellt werden, da ja r und ϱ in Funktion der Differentialquotienten p, q, r, s, t (für die drei letzteren schreibt Meusnier: m, n, s) bekannt sind. Hierbei ergibt sich die bekannte Gleichung:

$$r(1 + q^2) + t(1 + p^2) - 2pqs = 0.$$

Meusnier bemerkt, daß man außer der Ebene noch keine Fläche kenne, welche dieser Gleichung genüge. Er findet nun zwei partikuläre Integrale, das eine dadurch, daß er die Gleichung zerlegt in $r + t = 0$

und $rq^2 + tp^2 - 2pqs = 0$. Die zweite lehrt, wie Monge gezeigt hat[1]), daß die Fläche erzeugt wird durch Bewegung einer Geraden parallel der xy-Ebene. Mit Zuziehung der ersten ergibt sich die windschiefe Schraubenfläche. Ein zweites Integral findet er, indem er die Rotationsflächen sucht, die zugleich Minimalflächen sind; dies führt auf das Katenoid. Meusnier ist also auch der Entdecker der ersten speziellen Minimalflächen.

In sehr eleganter Weise wird dann noch die Differentialgleichung der abwickelbaren Flächen aus der Bedingung abgeleitet, daß r oder ϱ unendlich wird, und schließlich gezeigt, daß für alle Regelflächen, die nicht abwickelbar sind, r und ϱ verschiedenes Vorzeichen haben.

Damit sind die allgemeinen Untersuchungen über die Theorie der Flächen erledigt, und wir wenden uns nun zu einer Gruppe von Arbeiten, die sich damit befassen, die Gleichungen von Flächen mit gegebenen Eigenschaften aufzustellen. Hierher gehören ja eigentlich die abwickelbaren Flächen auch schon als besonderer Fall. Zuerst steht hier Lagrange mit seinem berühmten „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les Maxima et les Minima des Formules intégrales indéfinies“[2]), wo nach den Methoden der Variationsrechnung die Differentialgleichung der Minimalflächen in der bekannten Form aufgestellt wird: $r(1+q^2)+t(1+p^2)-2pqs=0$. Dann folgt Euler mit einer interessanten Abhandlung: „Evolutio insignis paradoxi circa aequalitatem superficierum“.[3]) Es handelt sich hier um die Aufgabe, zwei Flächen zu finden, so daß die über demselben Stück der xy-Ebene stehenden Flächenteile gleich sind. Euler kommt zunächst darauf zu sprechen, daß hier ein wesentlicher Unterschied zwischen ebenen Kurven und Flächen besteht, insofern zwei Kurven, bei denen zu gleichen Abszissen gleiche Bögen gehören, stets kongruent sind, während dies bei zwei Flächen der oben genannten Art nicht zuzutreffen braucht. Dies ist das Paradoxon, von dem der Titel spricht. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß der obigen Forderung genügt wird, wenn p^2+q^2 für beide Flächen denselben Wert haben. Daß dies für zwei verschiedene Flächen überhaupt möglich ist, zeigt Euler an dem Beispiel der beiden Paraboloide

$$z = \frac{x^2+y^2}{2a} \quad \text{und} \quad z = \frac{xy}{a}.$$

Zwei Flächen dieser Art nennt er kongruent, und die Aufgabe, alle Flächen zu finden, die einer gegebenen „kongruent“ sind, kommt darauf hinaus, die Gleichung $p^2+q^2=f(x, y)$ zu integrieren, was Euler

---

[1]) Siehe S. 365. [2]) Miscell. Taurin. 1760. [3]) N. C. P. XIV, Pars I, 769, p. 104—128.

als ein „problema difficillimum“ bezeichnet. Doch gelingt ihm die Lösung wenigstens für die Ebene $z = a + mx + ny$. Hier ist also $p^2 + q^2 = m^2 + n^2$. Diese Gleichung integriert Euler auf folgendem Wege: er setzt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos\omega\sqrt{m^2+n^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin\omega\sqrt{m^2+n^2}$$

und findet nun durch partielle Integration:

$$z = \sqrt{m^2+n^2}\left[(x\cos\omega + y\sin\omega) + \int(x\sin\omega - y\cos\omega)\,d\omega\right].$$

Er macht nun folgenden Schluß, der in derselben oder in ähnlicher Weise öfters bei ihm wiederkehrt: Soll das Integral ausführbar sein, so muß $x\sin\omega - y\cos\omega$ eine Funktion von ω sein, die er mit Ω bezeichnet; so ergibt sich also die Flächengleichung durch Elimination von ω aus den beiden Gleichungen:

$$z = \sqrt{m^2+n^2}\left[(x\cdot\cos\omega + y\sin\omega) + \int\Omega\,d\omega\right]; \quad \Omega = x\sin\omega - y\cos\omega.$$

Es sind dies abwickelbare Flächen, die sich als Enveloppen einer Schar von Ebenen mit gleicher Neigung gegen die xy-Ebene ergeben. Denselben Satz samt Umkehrung hat Monge später in der oben (s. S. 535 ff.) besprochenen Arbeit bewiesen und in die Feuilles d'Analyse aufgenommen (s. S. 563).

Mit derartigen Aufgaben hatte Euler ein bis dahin noch wenig bearbeitetes Gebiet der Analysis, nämlich die Integration partieller Differentialgleichungen, betreten, und es war natürlich, daß er sich mit ähnlichen Untersuchungen, deren große Wichtigkeit er wohl erkannte, noch weiter beschäftigte. Er formulierte das Problem allgemeiner mit dem Titel seiner nächsten Arbeit hierüber: „De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata“[1] (2. Sept. 1776). In der Einleitung hebt er die Bedeutung derartiger Forschungen hervor, und bemerkt, daß sie himmelweit („toto coelo“) von der Behandlung der Funktionen einer Variabeln verschieden seien. Er nimmt dann gleich eine spezielle Aufgabe vor, nämlich die Flächen zu bestimmen, für welche das Stück ZN der Normalen zwischen Fläche und xy-Ebene einen konstanten Wert a habe; diese Aufgabe erscheint ihm deshalb besonders geeignet, weil hier die Resultate der analytischen Lösung, die „ob novitatem“ manchem nicht ganz einwandfrei (suspecta) erscheinen könnten, geometrisch ohne weiteres einleuchten. Evident ist, daß die zwei Parallelebenen zur xy-Ebene im Abstand a, sowie die Kugeln und Rotationszylinder, die beide berühren, der Forderung genügen. Deren analytischer Ausdruck ist:

---

[1]) N. A. P. VI, p. 77—94.

$$z\sqrt{1+p^2+q^2}=a.$$

Sie wird auf zwei Arten hergeleitet, zuerst geometrisch, dann analytisch auf Grund der Überlegung, daß ZN konstant bleibt, sowohl wenn x als wenn y allein variiert. Die Integration dieser Gleichung beruht auf einem ganz ähnlichen Gedanken wie in der vorigen Arbeit. Da nämlich:

$$p^2+q^2=\frac{a^2-z^2}{z^2},$$

so kann man setzen:

$$p=\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}\cos\varphi;\quad q=\frac{\sqrt{a^2-z^2}}{z}\cdot\sin\varphi;$$

setzt man diese Werte in $dz=pdx+qdy$ ein, so folgt durch teilweise Integration mit C als Integrationskonstante:

$$C-\sqrt{a^2-z^2}=x\cdot\cos\varphi+y\sin\varphi+\int(x\sin\varphi-y\cos\varphi)d\varphi.$$

Soll die rechte Seite auch integrabel sein, so muß $x\sin\varphi-y\cos\varphi$ eine Funktion von Φ sein, also

$$x\sin\varphi-y\cos\varphi=\Phi.$$

Damit ist die Aufgabe eigentlich gelöst; denn man braucht bloß für Φ irgend eine Funktion von φ einzusetzen, so ergibt die Elimination von φ aus den beiden letzten Gleichungen eine Fläche der verlangten Art. Der geometrische Charakter derselben wird jedoch deutlicher durch eine Umformung der Gleichungen. Euler setzt nämlich:

$$\sqrt{a^2-z^2}=v;\quad \cos\varphi\int\Phi d\varphi-\Phi\sin\varphi=t;$$

$$\sin\Phi\int\Phi d\varphi+\Phi\cos\varphi=u,$$

so daß also t als eine willkürliche Funktion von u angesehen werden kann. Dadurch ergeben sich die Gleichungen:

$$x=t-v\cos\varphi;\quad y=u+v\sin\varphi;\quad z=\sqrt{a^2-v^2}.$$

Diese lassen eine einfache geometrische Deutung zu: sind nämlich t und u rechtwinklige Koordinaten einer in der xy-Ebene willkürlich gezogenen Kurve, so entsteht die Fläche durch Bewegung eines Kreises vom Radius a, dessen Mittelpunkt auf der Kurve fortrückt, während seine Ebene stets normal zu der Kurve bleibt. Die Flächen sind also die später so genannten Kanal- oder Röhrenflächen. Euler hebt besonders hervor, daß bei derartigen Aufgaben nicht bloß willkürliche Konstanten, sondern willkürliche Funktionen auftreten, und daß

diese auch wirklich ganz beliebig, sogar diskontinuierlich[1]) angenommen werden können. — Auf die analytische folgt eine geometrische Lösung, als einfachstes Beispiel von Flächen dieser Art nennt Euler die Ringfläche, von der er sagt, daß sie wie eine Wurst aussehe („farciminis figuram mentiens"), und schlägt schließlich vor, die hier gefundenen Flächen als „gekrümmte Zylinder" (cylindri incurvati) zu bezeichnen. In derselben Abhandlung wird noch eine allgemeinere Aufgabe gelöst, nämlich daß das Stück ZN der Normalen nicht konstant, sondern eine Funktion Z von z sein soll, so daß also die Differentialgleichung der Fläche in diesem Fall ist:

$$z\sqrt{1+p^2+q^2} = Z.$$

Die Integration wird auf ganz analogem Wege bewerkstelligt und führt auf die Gleichungen:

$$x = t + v\cos\varphi; \quad y = u + v\cdot\sin\varphi; \quad v = \int\frac{z\,dz}{\sqrt{Z^2 - z^2}},$$

wo wieder t eine willkürliche Funktion von u ist.

Auch die geometrische Deutung ist eine ähnliche: es ist einfach an Stelle des Kreises eine beliebige, durch Z definierte Kurve getreten, d. h. eine Ebene, in der diese Kurve liegt, bewegt sich senkrecht zur xy-Ebene so, daß ein in ihr fest angenommener Punkt eine willkürliche Kurve beschreibt, und eine feste, durch diesen Punkt gehende Gerade stets in die Normale der Kurve fällt; dann beschreibt die in der beweglichen Ebene liegende Kurve eine Fläche der gesuchten Art, die man wohl als „Gesimsflächen" bezeichnet hat. Beide Flächenfamilien, die Kanal- und die Gesimsflächen hat Monge unter anderen Gesichtspunkten später auch untersucht, wie wir weiter unten sehen werden. Auch Euler hat sich noch einmal mit beiden Arten von Flächen beschäftigt in den beiden Abhandlungen: „Investigatio superficierum, quarum normales ad datum planum productae sint omnes inter se aequales"[2]) (28. Dezember 1777) und „De corporibus cylindricis incurvatis"[3]) (21. September 1778). Was diese Neues bieten, ist im wesentlichen der Satz, daß für beide Arten von Flächen Inhalt und Oberfläche nach der Guldinschen Regel berechnet werden kann, und daß dies auch dann noch gilt, wenn die Leitkurve nicht eine ebene, sondern eine Raumkurve ist.

Ebenfalls auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung führt eine Aufgabe, die auch durch Übertragung eines Problems von

[1]) Ob solche zulässig seien, war eine in jener Zeit mehrfach diskutierte Streitfrage. S. Abschn. XXVII. [2]) N. A. P. X, p. 41—46. [3]) Ebenda, XII, p. 91—100.

der Ebene auf den Raum entsteht, nämlich Flächen zu finden, die eine gegebene Schar überall rechtwinklig schneiden. Sie bildet den Gegenstand einer Abhandlung von Euler aus seinen letzten Lebensjahren: „De problemate Trajectoriarum ad superficies translato"[1]) (12. August 1782). Euler verfährt auch hier symmetrisch: für die gegebene Flächenschar (secandae) sei:

$$p\,dx + q\,dy + r\,dz = 0$$

die differenzierte Flächengleichung, für die gesuchte:

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

Dann ist die Bedingung der Orthogonalität:

$$pP + qQ + rR = 0.$$

Daneben besteht die allgemeine Integrabilitätsbedingung:

$$\left(P\frac{\partial Q}{\partial z} - Q\frac{\partial P}{\partial z}\right) + \left(Q\frac{\partial R}{\partial x} - R\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \left(R\frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial R}{\partial y}\right) = 0.$$

Nimmt man die Flächengleichungen nach z aufgelöst an, so ist die Bedingung der Orthogonalität:

$$pP + qQ + 1 = 0.$$

Euler behandelt nun den allgemeinen Fall derart, daß er zwei Integrale, u und v, sucht, die je eine Variable nicht enthalten, so daß also z. B. u nur x und y, v nur y und z enthält. Dann heißt z. B. für u die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial x}p + \frac{\partial u}{\partial y}q = 0,$$

die nach der gewöhnlichen Methode behandelt werden kann, sofern auch p und q von z frei sind. Ist so u, und auf dieselbe Weise v bestimmt, so genügt auch jede Gleichung von der Form

$$v = \Phi(u)$$

der Differentialgleichung. Euler nennt sie das „integrale completum"; ihre Herleitung geschieht jedoch in den meisten Beispielen, die er gibt, mit Hilfe des S. 551 erwähnten Schlusses. So ist für die Kugeln:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 = 0; \quad p = \frac{-x}{z}; \quad q = \frac{-y}{z},$$

also die Differentialgleichung der gesuchten Flächen:

[1]) M. P VII, p. 33—60.

$$1 - P\frac{x}{2} - Q\frac{y}{2} = 0.$$

Daneben ist:

$$dz = Pdx + Qdy.$$

Die Elimination von Q ergibt:

$$ydz - zdy = P(ydx - xdy),$$

oder

$$d\left(\frac{z}{y}\right) = Pd\left(\frac{x}{y}\right),$$

also

$$\frac{z}{y} = \int Pd\left(\frac{x}{y}\right).$$

Nun muß wieder, wenn die Integration ausführbar sein soll, P Funktion von $\frac{x}{y}$ sein. Dann ist aber auch $\int Pd\left(\frac{x}{y}\right)$ eine solche, also ist

$$\frac{z}{y} = F\left(\frac{x}{y}\right),$$

wo F noch eine willkürliche Funktion ist. Damit ist das „integrale completum" gefunden. Diese Methoden werden noch auf verschiedene Beispiele angewendet.

Nur kurz erwähnen wir hier eine Arbeit von Monge: „Sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes"[1]), da ihre wesentlichen Resultate den Feuilles d'Analyse an verschiedenen Orten einverleibt sind, und daher dort darüber berichtet werden wird. Monge zeigt an einer Reihe von Beispielen, daß eine Flächengattung, deren endliche Gleichung n willkürliche Funktionen enthält, durch eine partielle Differentialgleichung n^{ter} Ordnung definiert wird, die sich durch sukzessive Differentiation und schließliche Elimination herleiten läßt.

Die Einzeluntersuchungen über Flächen bieten, wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel hervorgehoben wurde, nicht gerade viel Bemerkenswertes. Verschiedene befassen sich mit der Komplanation und Kubatur bestimmter Zylinder- und Regelflächen, andere mit speziellen Regelflächen, wobei die Terminologie von der heute üblichen wesentlich verschieden ist.[2]) Die erste Untersuchung hierüber stammt von Braikenridge (vgl. III[2], S. 761): „Letter to Earl

---

[1]) Mém. de l'Acad. Roy. de Turin, 2. série, 1. partie, 1784/85, p. 19—30.

[2]) Nach Klügel (III[2], S. 98 ff.) entsteht ein Konoid dadurch, daß eine Kurve, deren Ordinaten beständig zunehmen, und die die Abszissenachse nicht schneidet, um diese Achse rotiert. Das Konoid im heutigen Sinne dagegen bezeichnet er als Conocuneus (ib. S. 302), das hyperbolische Paraboloid als kegelförmige Keilfläche. S. dagegen Tinseau, S. 556.

of Marchmont concerning the section of a solid, hitherto not considered by Geometers"[1]) (1759). Es handelt sich um Flächen, die man heute als Konoidflächen bezeichnet, und die Braikenridge folgendermaßen entstehen läßt: Gegeben eine Gerade und eine Kurve (directrix). Eine Ebene, die beide schneidet, bewegt sich parallel mit sich selbst; die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit der Geraden und der Kurve beschreibt dann die Fläche. Wird diese von einer beliebigen Ebene geschnitten, so ist die Schnittkurve im allgemeinen von einer doppelt so hohen Ordnung, als die Direktrix. Am ausführlichsten wird der Fall behandelt, daß auch die Direktrix eine Gerade ist, d. h. das hyperbolische Paraboloid. Dieselbe Fläche tritt auf bei Mauduit (Antoine René Mauduit, 1731—1815, Professor der Geometrie am Collège de France); seine Arbeit führt den langen Titel: „Mémoire sur la cubature des corps gauches, où l'on explique leur formation, la manière de les toiser sans être obligé de les décomposer; et les différents propriétés de ces corps par rapport aux courbes que l'on peut y trouver par l'intersection d'un plan"[2]) (1763). Ein solches „corps gauche" ist begrenzt von den Ebenen, die die vier Seiten eines windschiefen Vierecks $ABCD$ auf eine durch eine Ecke A gehende Ebene projizieren, ferner von dieser Ebene und endlich von einer Fläche, die von einer Geraden beschrieben wird, welche an zwei Gegenseiten, z. B. AB und CD so hingleitet, daß sie beide in derselben Zeit durchläuft. Der Inhalt des so definierten Körpers wird durch eine Integration ermittelt, ferner die Gleichung seiner Oberfläche für den Fall hergeleitet, daß die Projektionen von BC und AD (und damit auch die Projektion sämtlicher Lagen der erzeugenden Geraden parallel sind. Für diesen Fall (hyperb. Paraboloid) wird nachgewiesen — und das ist wohl das Bemerkenswerteste an der ganzen Arbeit —, daß auf der Fläche noch eine zweite Schar von Geraden sich befindet. Diese Entdeckung wird also Mauduit zuzuschreiben sein. Aus der Existenz dieser beiden Scharen von Geraden auf der Fläche zieht er dann den merkwürdigen Schluß, daß sie „le moins courbe possible" sei, d. h. daß sie sich am meisten der Ebene nähern. Auch Tinseau untersucht in seiner mehrfach erwähnten Arbeit im 2. Teil solche Flächen, die durch Bewegung einer Geraden entstehen, welche, stets einer Ebene parallel bleibend, an zwei gegebenen Kurven hingleitet. Er nennt diese Gattung von Flächen Paralleloide. Zuerst wird der Fall untersucht, daß die eine der Leitkurven eine auf der Richtebene senkrechte Gerade („Achse") ist, d. h. das gerade Konoid, das von Tin-

---

[1]) Phil. Trans., Vol. 51, P. I, p. 446—457. [2]) Mem. div. Sav. IV, p. 623 bis 634.

seau auch so bezeichnet wird. Von dieser Fläche weist er folgende Eigenschaften nach:

1) Die ebenen Schnitte parallel der Achse sind bezüglich des Inhalts proportional ihrer Entfernung von der Achse.

2) Das Volumen des von einem solchen Schnitt abgeschnittenen Stücks des Konoids ist gleich dem halben Produkt aus der Schnittfläche und ihrem Abstand von der Achse.

3) Zieht man durch den Schwerpunkt des in 2) beschriebenen Körpers eine die Achse schneidende Gerade parallel zur Richtebene, so wird diese vom Schwerpunkt im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Weiter ist die Rede von quadrilatères gauches, worunter wieder das hyperbolische Paraboloid verstanden ist, dessen Gleichung hier in der Form auftritt $Ky = xz$. Von den allgemeinen „Paralleloiden" werden dann noch ähnliche Sätze nachgewiesen, wie vom Konoid.

Mit Schraubenflächen haben sich u. a. Fergola und Kästner beschäftigt. Ersterer (La vera misura della volte a spira[1]), 1785) hat den, übrigens schon von Euler (s. S. 553) gefundenen Satz bewiesen, daß die Guldinsche Regel sich auch auf Schraubenflächen ausdehnen läßt, und in folgende Form gekleidet: Es ist Inhalt und Oberfläche eines durch Schraubenbewegung eines beliebigen Meridians um eine gegebene Achse erzeugten Körpers = Inhalt und Oberfläche des Rotationskörpers, der durch Umdrehung desselben Meridians um dieselbe Achse erzeugt wird. Kästner (Ad theoriam cochleae pertinens observatio geometrica)[2]) hat darauf aufmerksam gemacht, daß die übliche Ausdrucksweise, eine Schraubenfläche entstehe durch Aufwicklung einer schiefen Ebene auf einen Zylinder, falsch ist. Dies ist ohne Zerreißung („elementa hiatu dirimuntur", sagt Kästner) nicht möglich, da ja die windschiefe Schraubenfläche nicht zu den abwickelbaren Flächen gehört. Kästner stellt in dieser Arbeit auch die Gleichung der Schraubenlinie auf und zeigt, daß die Schmiegungsebene eines Punktes (der Ausdruck selbst kommt natürlich noch nicht vor) stets das Lot von dem Punkt auf die Achse enthält, und daß die Schnittgerade konsekutiver Schmiegungsebenen die Tangente der Kurve ist.

Zu erwähnen sind noch vier kleinere Arbeiten von Fontana[3]). In der ersten: „Sopra un errore che si commette da molti nell' assegnare la misura delli iperboloidi"[4]) berichtigt er einen von früheren Autoren begangenen Fehler, indem er bemerkt, daß der Inhalt des durch

---

[1]) Atti Acad. Napoli 1787. [2]) Dissert. math. et phys. Altenburg. 1771, p. 88 ff. [3]) Für den Bericht hierüber s. Fußnote S. 476. [4]) Mem. Soc. It., T. III, p. 507—509 (1786): Ricerche analitiche sopra diversi soggetti, Art. III.

Umdrehung der Linie $x^m y^n = a^{m+n}$ um die x-Achse erzeugten Hyperboloids, von $x = a$ bis $x = \infty$ nicht nur für $n = 2m$, sondern auch für $n > 2m$ unendlich ist; auf denselben Gegenstand bezieht sich die vierte (der Zeit nach) Schrift: „Sopra i conoïdi asimtotico-iperbolici“[1]. In der zweiten: „Sopra la misura d'alcuni solidi e superficie rotonde“[2]) wird der folgende, von Parent[3]) ohne Beweis ausgesprochene Satz nachgewiesen: Rotiert ein Kreissegment vom Zentriwinkel 90° um den zu seiner Sehne parallelen Durchmesser, so hat der dadurch erzeugte ringförmige Körper gleichen Inhalt und gleiche Fläche mit der denselben von innen berührenden Kugel. — In der dritten: „Sopra la massa di una sfera composta di materia eterogenea, la cui densità varie da uno strato sferico all' altre in ragione d'una qualunque potenza della distanza dal centro; e sopra qualche paradosso, che quindi deriva“[4]) berechnet Fontana die Masse M einer Kugel vom Radius r, unter der Voraussetzung, daß die Dichtigkeit einer Kugelschicht einer beliebigen Potenz n ihres Radius proportional sei. Er findet $M = \frac{4\pi\Delta}{(n+3)\,r^{n+3}}(r^{n+3} - o^{n+3})$, wo Δ die Dichtigkeit an der Oberfläche ist. Die Masse m ist endlich, logarithmisch unendlich, oder algebraisch unendlich, je nachdem $n \gtreqless -3$ ist. Das darf uns nicht befremden, da für ein negatives n die Dichtigkeit in unendlicher Nähe des Mittelpunktes unendlich groß ist. Daß nichtsdestoweniger M für $-3 < n < o$ endlich ist, hängt damit zusammen, daß der Inhalt einer Kugel von unendlich kleinem Radius unendlich klein von der dritten Ordnung ist, während die Dichtigkeit unendlich groß ist von der Ordnung $-n < 3$. Für $n = -3$ hat diese unendlich kleine Kugel endliche Masse, und es ist daher keineswegs unverständlich, daß die ganze Masse unendlich groß ausfallen kann.

Verschiedene Arbeiten befassen sich, von praktischen Gesichtspunkten ausgehend, mit der Ausmessung der Oberfläche und des Inhalts von Gewölben, Fässern usw., meist auf elementarem Wege. Wir gehen hierauf nicht weiter ein, wollen jedoch als curiosa zwei Stellen aus Kästner, „Über die Ausmessung bauchichter Körper, nebst Anwendung auf die Visierkunst“[5]) (1787) anführen. Er bespricht darin ihre Entstehung durch Rotation der Kurve um eine Achse, der sie die konkave Seite zuwendet; ist sie konvex gegen die Achse, so entsteht ein „negativer Bauch“; als Beispiel für ein derartiges Gebilde

[1]) Memorie matematiche, Pavia 1796, Mem. III. [2]) Ricerche sopra diversi punti concernente l'analisi infinitesimale et la sua applicazione alla fisica, Pavia 1793, Art. IV. [3]) Bd. III[2], S. 399. [4]) Memorie matematiche, Pavia 1796, Mem. II. [5]) Leipziger Archiv für reine und angewandte Mathematik 1787, S. 1–24.

führt er — die Schnürbrust an. Er polemisiert dann gegen Lambert, der für die Inhaltsberechnung der Fässer eine bloß angenähert richtige Formel angebe[1]), und bemerkt, daß bei „unrichtiger Verwaltung dieses Verfahrens (d. h. der Berechnung des Faßinhalts) jeder leidet, der nicht bloß Wassertrinker ist".

Und nun kommen wir zu dem Werk, das unstreitig unter allen bisher besprochenen den ersten Rang einnimmt, nämlich Monges „Feuilles d'Analyse". Der volle Titel lautet: Feuilles d'Analyse appliquée à la Géometrie à l'usage de l'École Polytechnique, publiées la première année de cette école (an 3 de la République), Paris. Das Exemplar, nach dem ich berichte[2]), trägt die Zeitangabe: Thermidor, an 9, ist also sechs Jahre später gedruckt. Wie der Titel besagt, ist das Werk kein systematisches Lehrbuch, sondern besteht aus losen Blättern (das mir zu Gebote stehende Exemplar ist nicht einmal paginiert), hervorgegangen teils aus Monges Vorlesungen an der polytechnischen Schule, teils aus früher erschienenen Abhandlungen, die nun hier gesammelt der Öffentlichkeit übergeben werden. Aber diese Blätter enthalten eine Fülle hochbedeutsamer Gedanken und Entdeckungen in einer geistvollen, durchweg originalen Darstellungsweise, bewundernswert in erster Linie durch das phänomenale räumliche Anschauungsvermögen, das dem „Vater der darstellenden Geometrie" zu Gebote stand; man hat den Eindruck, daß die Geraden und Ebenen, die Kurven und Flächen, um die es sich handelt, mit geradezu greifbarer Deutlichkeit vor Monges geistigem Auge standen; dazu kommt die fast verblüffende Sicherheit, mit der die analytischen Hilfsmittel aus einem vorher noch wenig bearbeiteten Gebiet, der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, auf die Raumgebilde und deren Elemente angewendet werden, wobei umgekehrt jene Theorien durch diese räumliche Interpretation eine wesentliche Förderung und Veranschaulichung erfahren. Fügen wir noch hinzu die Eleganz der Entwicklungen, die sich von umständlichen Rechnungen fast ganz fernhalten, so haben wir wenigstens die Hauptvorzüge des hervorragenden Werkes genannt. Freilich macht die oft überraschende Originalität von Monges Gedankengang das Studium des Werks nicht gerade leicht, aber der Leser wird durch die Früchte dieses Studiums für die gehabte Mühe reichlich entschädigt. — Versuchen wir in möglichster Kürze eine Vorstellung von dem reichen Inhalt zu geben.

Die drei ersten Nummern enthalten so ziemlich die ganze ana-

---

[1]) Leipziger Archiv für reine und angewandte Mathematik, 1786, S. 425 bis 446. [2]) Aus der Bibliothek des Herrn Prof. Dr. v. Brill in Tübingen.

lytische Geometrie der Ebene und der Geraden im Raum und die Lösungen aller vorkommenden Fundamentalaufgaben, also: Ziehen von Parallelen, Fällen von Loten, Bedingungen des Senkrechtstehens von Geraden und Ebenen, kürzeste Entfernung zweier windschiefen Geraden, Neigungswinkel gegen die Koordinatenebenen, alles in einer, man möchte sagen, klassischen Form dargestellt, über die man eigentlich bis heute nicht wesentlich hinausgekommen ist. Namentlich ist hervorzuheben die Verwendung der Elimination zur Herleitung von Schnittpunkten und Schnittpunktsbedingungen, an mehreren Stellen scheint es auch, als ob die Aufgaben und Methoden der deskriptiven Geometrie von Einfluß auf die Behandlungsweise gewesen wären, so namentlich bei den Aufgaben über das Fällen von Loten auf gegebene Ebenen.

Mit Nr. 4 beginnt die Behandlung der Flächenfamilien, die durch eine gemeinsame Eigenschaft definiert sind. Dieser Begriff ist eigentlich erst durch Monge in die Wissenschaft eingeführt und zur vollen Klarheit durchgearbeitet worden. Die Untersuchungen über diese Dinge nehmen auch den größten Raum in dem ganzen Werk ein, und bilden sozusagen dessen Grundidee, wenn man bei einem so überreichen Inhalt überhaupt von einer solchen sprechen kann. — Zunächst werden Tangentialebene und Normale aufgestellt, erstere in der Weise, daß einer beliebigen durch den betreffenden Flächenpunkt gehenden Ebene die Bedingung auferlegt wird, noch durch jeden beliebigen Nachbarpunkt zu gehen. Nachdem so die Tangentialebene bestimmt ist, wird nach den in Nr. 1—3 entwickelten Methoden leicht die Normale hergeleitet, die Monge außerdem noch durch den Schnitt zweier Normalebenen bekommt; letztere gewinnt er durch zwei Kugeln mit gleichem Radius, von denen die eine ihren Mittelpunkt in dem betreffenden Punkt, die andere in einem Nachbarpunkt hat. Die Ebene des Schnittkreises ist dann eine Normalebene der Fläche. Dabei wird der Übergang zum Nachbarpunkt einfach durch Differenzieren ausgeführt, ein Verfahren, das Monge im ganzen Werke vielfach anwendet.

Daran schließt sich die Aufstellung der Gleichung der Zylinderflächen, und zwar wird zunächst ihre partielle Differentialgleichung sehr einfach dadurch hergeleitet, daß man der vorher aufgestellten Tangentialebene einer allgemeinen Fläche die Bedingung auferlegt, einer gegebenen Geraden parallel zu sein. Hieraus ergibt sich sofort die gesuchte partielle Differentialgleichung: $ap + bq = 1$. Dann wird die allgemeine Gleichung in endlicher Form aufgestellt, und auch hier ist die Schlußweise überraschend einfach: Monge geht aus von den allgemeinen Gleichungen einer Geraden:

$$x = az + \alpha; \quad y = bz + \beta.$$

Soll diese Gerade einer gegebenen Richtung parallel sein, so müssen a und b konstant sein, dagegen sind α und β beliebig. Sie haben aber beide für alle Punkte einer bestimmten Geraden konstante Werte, und ändern beide zugleich ihre Werte, wenn man zu einer anderen Geraden übergeht. Und nun kommt wieder der einfache Schluß[1]): Ces deux quantités sont donc constantes ensemble et variables ensemble, donc elles sont fonctions l'une de l'autre. Man hat also $\beta = \varphi(\alpha)$, und damit $(y - bz) = \varphi(x - az)$ als allgemeine Gleichung der Zylinderflächen. Monge bemerkt hier ausdrücklich, daß φ nicht notwendig eine analytisch ausdrückbare Funktion zu sein brauche, da sie ja von der ganz willkürlichen Leitlinie abhängt, die auch unstetig (non soumis à la loi de continuité) sein könne[2]). Es folgt die Lösung der beiden Aufgaben, eine Zylinderfläche zu finden, 1) die durch eine gegebene Raumkurve geht, und 2) die eine gegebene Fläche berührt. In ganz analoger Weise werden in Nr. 5 die Kegelflächen und die Rotationsflächen untersucht. Bei ersteren wird auch die Aufgabe gelöst, die Fläche zu finden, die den geometrischen Ort der Berührkurven aller Tangentialkegel bildet, die man von einem festen Punkt als Spitze an alle Flächen einer einfach unendlichen Schar legen kann. Bei letzteren wird die Rotationsfläche bestimmt, die bei Umdrehung einer gegebenen Fläche um eine mit ihr fest verbundene Achse als Enveloppe sämtlicher Lagen der gedachten Fläche entsteht. Ebenso werden (Nr. 6) die Flächen behandelt, die durch Bewegung einer Geraden entstehen, welche stets parallel einer gegebenen Ebene bleibt, und dabei eine feste, auf dieser Ebene senkrechte Gerade schneidet, also die senkrechten Konoidflächen im heutigen Sprachgebrauch. Monge macht hier auch auf das Vorkommen solcher Flächen in der Technik (z. B. windschiefe Schraubenfläche) aufmerksam. Von besonderem Interesse ist Nr. 7 und 8, wo von der Enveloppe einer Flächenschar die Rede ist. Monge führt hier den in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen so wichtig gewordenen Begriff der Charakteristik ein. Die wesentlichen Punkte seiner Überlegungen sind folgende: Enthält die Gleichung einer Fläche $F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ zwei variable Parameter, α und β, die durch eine Gleichung $\beta = \varphi(\alpha)$ verbunden sind, so erhält man durch Variation von α eine einfach unendliche Flächenschar. Diese besitzt eine Enveloppe, deren Gestalt natürlich von der Funktion φ abhängt. Alle diese Enveloppen nun, die durch Abänderung der

---

[1]) Vgl. S. 536. [2]) Vgl. Fußnote [1]) S. 553.

Funktion φ entstehen, haben, wie Monge sich ausdrückt, un caractère général, une propriété commune, une même génération, unabhängig von der Natur der Funktion φ; dieser gemeinsame Charakter kann durch eine partielle Differentialgleichung ausgedrückt werden, der sämtliche Flächen dieser Art genügen, und die von φ ganz frei ist, während die endliche Gleichung natürlich eine willkürliche Funktion enthält. Hier spielt nun eine wichtige Rolle die Charakteristik; Monge versteht darunter die Schnittkurve zweier Flächen, deren Parameter nur um eine unendlich kleine Größe sich unterscheiden, d. h. die Schnittkurve der Flächen $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0$. Die Enveloppe ist der geometrische Ort der Charakteristiken und ergibt sich durch Elimination von α aus diesen beiden Gleichungen. Ebenfalls wichtig ist der Ort der Schnittpunkte dreier konsekutiven Flächen einer Schar; d. h. die Kurve, die definiert ist durch die drei Gleichungen

$$F = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Diese Kurve wird von sämtlichen Charakteristiken berührt, ist also die Enveloppe derselben; Monge nennt sie arête de rebroussement. Diese Überlegungen werden durch ein geeignetes Beispiel illustriert, nämlich durch die Kanalflächen mit ebener (in der xy-Ebene liegender) Leitkurve. Als Differentialgleichung derselben[1]) ergibt sich

$$z^2(1 + p^2 + q^2) = a^2.$$

Die Charakteristiken sind Kreise, deren Mittelpunkte auf der Leitkurve liegen und deren Ebenen normal zu derselben sind. Als Differentialgleichung der Charakteristiken ergibt sich:

$$p\,dy - q\,dx = 0,$$

und als Differentialgleichung der Rückkehrkanten (arêtes de rebroussement):

$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2).$$

Daran schließt sich die Lösung einiger Aufgaben über Kanalflächen, z. B. eine solche Fläche derart zu bestimmen, daß sie durch eine gegebene Raumkurve geht, oder eine gegebene Fläche längs einer Kurve berührt. Im folgenden Blatt (Nr. 9) behandelt Monge in derselben Art die Flächen, für welche die Linien größten Gefälls Geraden mit konstanter Horizontalneigung sind. Er zeigt, daß sie als Enveloppen einer Schar von Kreiskegeln angesehen werden können, deren Achsen

---

[1]) Sie ist schon von Euler (s. S. 552f.) angegeben worden

auf der (als Horizontalebene angenommenen) xy Ebene senkrecht stehen, und deren Mantellinien stets dieselbe Horizontalneigung haben. Es sind dieselben Flächen, die Euler als „kongruent" mit einer Ebene von derselben Horizontalneigung bestimmt hat[1]). Ihre Charakteristiken sind eben die Geraden, welche die Linien größten Gefälls darstellen, die Rückkehrkanten demnach Raumkurven, deren Tangenten stets dieselbe Horizontalneigung haben (Schraubenlinien eines beliebigen, auf der xy-Ebene senkrechten Zylinders). An dieses Beispiel knüpft Monge noch eine wichtige Bemerkung, nämlich daß die Differentialgleichung der Charakteristiken direkt aus der partiellen Differentialgleichung der betreffenden Flächenfamilie hergeleitet werden kann. Ist diese nämlich

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

und ist

$$\frac{\partial F}{\partial p} = P; \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q,$$

so ist die Differentialgleichung der Charakteristiken:

$$Pdy - Qdx = 0.$$

Als letztes Beispiel für Flächenfamilien, die durch eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung definiert sind, folgen in Nr. 10 die Flächen, welche durch Translation einer gegebenen Fläche längs einer Raumkurve, die auf einer gegebenen Fläche liegt, also noch durch eine willkürliche Funktion bestimmt wird, als Enveloppen entstehen.

Von Nr. 11 ab werden Flächenfamilien behandelt, die durch eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung definiert sind, und zwar zuerst die Regelflächen, deren Mantellinien alle einer gegebenen Ebene $Ax + By + Cz = 0$ parallel sind. Zur Definition der Fläche sind zwei Raumkurven (Leitkurven) nötig, die von jeder Mantellinie geschnitten werden. Monge stellt nun die Gleichung der Fläche in drei verschiedenen Formen auf:

1. Unabhängig von den Leitkurven; hierbei ergibt sich eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die er sehr elegant folgendermaßen herleitet: die Mantellinie eines Punktes $P(x, y, z)$ liegt erstens in der Tangentialebene der Fläche, also besteht für die Koordinaten x', y', z' eines ihrer Punkte die Gleichung:

$$p(x - x') + q(y - y') - (z - z') = 0. \tag{1}$$

Sie ist aber auch zweitens parallel der Richtebene, also hat man:

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0. \tag{2}$$

---

[1]) Siehe S. 560.

Dieselben Gleichungen gelten aber auch für einen auf derselben Mantellinie liegenden Punkt $P'(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$; unter Berücksichtigung von (1) und (2) ergibt sich:

$$(rdx + sdy)(x - x') + (sdx + tdy)(y - y') = 0 \tag{3}$$

und:

$$Adx + Bdy + C(pdx + qdy) = 0. \tag{4}$$

Die Elimination von $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ aus (1) — (4) ergibt dann sofort die gesuchte partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, nämlich:

$$(Cq + B)^2 r - 2(Cq + B)(Cp + A)s + (Cp + A)^2 t = 0.$$

Ehe die beiden anderen Gleichungsformen hergeleitet werden, zeigt Monge (Nr. 11), wie man in diesem Fall aus der Differentialgleichung der Flächen die der Charakteristiken finden kann. Ist nämlich die erstere:

$$\Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

und ist:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = R; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial s} = S; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = T,$$

so heißt die Differentialgleichung der Charakteristiken:

$$Rdx^2 - Sdxdy + Tdy^2 = 0.$$

Sie zeigt, daß in jedem Flächenpunkt die Charakteristik einen Doppelpunkt hat, außer in dem Fall, wo die Differentialgleichung in zwei rationale Linearfaktoren zerfällt, wo also zwei Scharen von Charakteristiken auf der Fläche vorhanden sind. In dem vorliegenden Beispiel ergibt sich als Differentialgleichung der Charakteristiken:

$$(Adx + Bdy + Cdz)^2 = 0,$$

d. h. ein vollständiges Quadrat, so daß man nur eine Schar von Charakteristiken erhält, nämlich eben die Mantellinien der Fläche.

2. Um die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung zu finden, welche diesen Flächen zukommt, geht Monge wieder aus von den Gleichungen (1) und (2), die eine Mantellinie der Fläche darstellen. Deren Projektion auf eine der Koordinatenebenen, z. B. die xz-Ebene, sei $x' = \beta z' + \gamma$. Dann ist, wenn zur Abkürzung

$$Ax + By + Cz = \alpha$$

gesetzt wird,

$$\beta = \frac{Cq + B}{Bp - Aq}; \quad \gamma = -\frac{B(z - px - qy) + \alpha q}{Bp - Aq}.$$

Nun haben für eine bestimmte Mantellinie die drei Größen α, β, γ einen bestimmten Wert, oder, wenn eine dieser drei Größen konstant ist, so sind es auch die beiden anderen; geht man aber zu einer anderen über, so ändern alle drei ihren Wert, sie sind also zugleich

konstant und zugleich veränderlich, folglich müssen je zwei durch eine Gleichung verbunden sein, z. B. $\beta = \varphi(\alpha)$. Man hat also als partielle Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\frac{Cq + B}{Bp - Aq} = \varphi(Ax + By + Cz).$$

Stellt man dieselbe Überlegung für die beiden anderen Projektionen an, so findet man noch zwei weitere Gleichungen, also im ganzen drei, von denen jede eine Folge der beiden anderen ist. Wendet man auf irgend eine derselben das oben zur Herleitung der Charakteristiken aus einer partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung angegebene Verfahren an, so findet man wieder:

$$Adx + Bdy + Cdz = 0.$$

3. Endlich läßt sich leicht die endliche Gleichung aufstellen, nämlich:

$$z = x \cdot \varphi(Ax + By + Cz) + y \cdot \psi(Ax + By + Cz).$$

Sie enthält zwei willkürliche Funktionen und ist von derselben Allgemeinheit, wie jede der beiden ersten Formen, deren gemeinsames Integral sie darstellt.

Auch hier schließt Monge einige Aufgaben über solche Flächen an, nämlich eine zu bestimmen, die durch zwei gegebene Kurven geht, oder eine, deren Mantellinien sämtlich zwei gegebene Flächen berühren; ferner eine Spezialisierung (Nr. 13) für den Fall, daß die Mantellinien alle der xy-Ebene parallel sind und die z-Achse treffen. Hier ergibt sich die Differentialgleichung, von der Meusnier Gebrauch gemacht hat[1]), nämlich:

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0.$$

Den Schluß bildet eine Bemerkung über das Vorkommen solcher Flächen in der Technik.

In Nr. 14 kommt sodann eine ausführliche Darlegung der Eigenschaften der abwickelbaren Flächen. Durch analoge Überlegungen wie vorher wird die sie definierende Gleichung in drei verschiedenen Formen aufgestellt: 1. Als partielle Differentialgleichung 2. Ordnung; 2. als eine ebensolche 1. Ordnung mit einer willkürlichen Funktion, 3. als endliche Gleichung mit zwei willkürlichen Funktionen; und es werden wieder die zwei gleichen Aufgaben wie oben für abwickelbare Flächen gelöst. Übrigens deckt sich der Inhalt dieses Blattes im wesentlichen mit der schon besprochenen Abhandlung von Monge über diesen Gegenstand[2]).

---

[1]) Siehe S. 550. [2]) Siehe S. 585 ff.

Nr. 15 behandelt nach denselben Methoden die Flächen, welche durch Translation einer gegebenen Fläche längs einer ganz beliebigen Raumkurve (die also nicht mehr, wie in Nr. 10, auf einer gegebenen Fläche angenommen wird) als Enveloppen entstehen. Die partielle Differentialgleichung derselben ist von der Form:

$$(rt - s^2)(RT - S^2) - rR - 2sS - tT + 1 = 0.$$

R, S, T sind dabei gegebene Funktionen, die folgendermaßen mit der transferierten Fläche zusammenhängen: ist diese bestimmt durch

$$z = F(x, y),$$

so kann man die beiden Gleichungen $p = \frac{\partial F}{\partial x}$ und $q = \frac{\partial F}{\partial y}$ nach x und y aufgelöst denken, so daß also $x = f_1(p, q) : y = f_2(p, q)$ ist. Monge zeigt nun zunächst, daß $\frac{\partial f_1}{\partial q} = \frac{\partial f_2}{\partial p}$ ist, daß also f_1 und f_2 als partielle Ableitungen einer Funktion von p und q, die er mit Γ bezeichnet, angesehen werden können. R, S, T sind dann die partiellen Ableitungen 2. Ordnung von Γ nach p und q. — Ähnlich erledigt sich die Aufgabe, die Flächen zu bestimmen, die durch Translation einer Raumkurve längs einer anderen Raumkurve erzeugt werden; am Schluß wird noch darauf hingewiesen, wie die entwickelten Methoden umgekehrt zur Integration einer partiellen Differentialgleichung dienen können, welche die obige Form hat.

Nr. 17 und 18 bringen eine der schönsten Entdeckungen von Monge, nämlich die Krümmungslinien einer Fläche. Dieser Teil kann unbedenklich als der Glanzpunkt des ganzen Werks bezeichnet werden, sowohl in bezug auf die hohe Bedeutung der Resultate, wie in bezug auf die Eleganz, Präzision und Klarheit der Entwicklung. Wir versuchen Monges Gedankengang in Kürze anzugeben. Er geht aus von den schon früher aufgestellten Normalengleichungen:

$$(x - x') + (z - z')p = 0; \quad (y - y') + (z - z')q = 0,$$

und sucht die Bedingung dafür, daß diese von der Normalen eines Nachbarpunktes $(x + dx,\ y + dy,\ z + pdx + qdy)$ geschnitten wird. Unter Berücksichtigung der obigen Gleichungen sind die Gleichungen dieser Nachbarnormalen:

$$\begin{aligned} dx + p^2dx + pqdy + (z - z')(rdx + sdy) &= 0,\\ dy + pqdx + q^2dy + (z - z')(sdx + tdy) &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung, daß diese Normale die erste schneidet, findet man durch Elimination von $(x - x')$, $(y - y')$, $(z - z')$ aus den vier Gleichungen der beiden Normalen. Da indes die letzten beiden nur noch

$z - z'$ enthalten, genügt es, $z - z'$ zu eliminieren, wodurch man erhält:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2[(1+q^2)s-pqt]+\frac{dy}{dx}[(1+q^2)r-(1+p^2)t]-(1+p^2)s+pqr=0. \quad (1)$$

Eliminiert man umgekehrt $\frac{dy}{dx}$, so ergibt sich:

$$(z-z')(rt-s^2)+(z-z')[(1+q^2)-2pqs+(1+p^2)t]+1+p^2+q^2=0. \quad (2)$$

Die beiden letzten Gleichungen werden nun geometrisch gedeutet. Die erste, die quadratisch in $\frac{dy}{dx}$ ist, sagt, daß es zu jedem Flächenpunkt P zwei Nachbarpunkte P_1 und P_2 auf der Fläche gibt, deren Normalen die des Punktes P schneiden. Die Projektionen der Richtungen PP_1 und PP_2 auf die xy-Ebene sind durch die Gleichung (1) bestimmt, aus der auch die bemerkenswerte Eigenschaft folgt, daß $PP_1 \perp PP_2$ ist. Die zweite liefert zwei Werte von $z - z'$, also in Verbindung mit den Gleichungen der Normalen zwei Punkte auf dieser, wo sie von den Normalen der Punkte P_1 und P_2 geschnitten wird und die als „centres de courbure" bezeichnet werden. Die Abstände dieser beiden Schnittpunkte ergeben sich als die Wurzeln der quadratischen Gleichung in R:

$$gR^2 + hkR + k^4 = 0,$$

wo:

$$g = rt - s^2; \quad k^2 = 1 + p^2 + q^2; \quad h = (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t.$$

Die beiden sich ergebenden Werte nennt Monge „rayons de courbure"; daß es die von Euler[1]) gefundenen extremen Werte der Krümmungsradien der Normalschnitte sind, wird nicht bemerkt. Nun folgt die geometrische Konstruktion der beiden orthogonalen Scharen von Krümmungslinien, die man erhält, indem man von jedem Flächenpunkt zu den beiden Nachbarpunkten weitergeht, deren Normalen die seinige schneiden, von diesen ebenso zu dritten Punkten usf. Man erhält so zwei Scharen von Kurven, deren Projektionen auf die xy-Ebene der Gleichung (1) genügen. Diese ist also die Differentialgleichung der Krümmungslinien. Sie läßt sich auch in die Form setzen:

$$dp(dy + qdz) = dq(dx + pdz).$$

Es wird dann durch geometrische Überlegungen gezeigt, daß die Flächennormalen längs jeder Krümmungslinie eine abwickelbare Fläche bilden; daß also für jede Fläche zwei Scharen von solchen Flächen

[1]) Vgl. S. 546.

existieren, und daß diese sich ebenfalls überall rechtwinklig schneiden. Davon wird nun sofort eine praktische Anwendung auf den Gewölbebau gemacht: nämlich man solle die hierzu erforderlichen Steine derart wählen, daß ihre Fugen die Krümmungslinien der Gewölbefläche bilden. Des weiteren wird dann entwickelt, daß jede dieser Flächen eine Rückkehrkante hat, die den Ort aller Krümmungszentra der Fläche längs der betr. Krümmungslinie darstellt. Die Gesamtheit aller dieser Rückkehrkanten bildet also eine aus zwei Mänteln bestehende Fläche, die der Ort aller Krümmungszentra der gegebenen ist, und von der zunächst die merkwürdige Eigenschaft nachgewiesen wird, daß die scheinbaren Umrisse der beiden Mäntel, von wo aus man sie auch betrachtet, sich rechtwinklig schneiden. Diese, rein geometrisch abgeleitete Bemerkung zeigt schon für sich allein, welche Sicherheit der räumlichen Anschauung Monge zu Gebote stand. Auch daß die Rückkehrkanten geodätische Linien dieser Zentrafläche sind, ergibt sich rein geometrisch.

Nun ist aber ein kleines Versehen zu erwähnen, das Monge passiert ist. Er stellt nämlich die Bedingung auf, daß die beiden Krümmungsradien gleich sein sollen, und findet (vgl. S. 567)

$$h^2 - 4k^2g = 0.$$

Diese Gleichung, sagt er, definiere eine Kurve (courbe sphérique) auf der Fläche, für deren sämtliche Punkte die beiden Hauptkrümmungsradien denselben Wert haben; der Ort der zugehörigen Krümmungszentra wäre dann die Schnittkurve der beiden Mäntel der Zentrafläche. Dabei hat er jedoch nicht bemerkt, daß $h^2 - 4k^2g$ sich als die Summe zweier Quadrate darstellen läßt, daß daher $h^2 - 4k^2g = 0$ eine imaginäre Fläche mit reeller Doppelkurve darstellt, woraus folgt, daß es nur einzelne reelle Punkte auf einer Fläche, nicht eine ganze Kurve gibt, für welche die beiden Krümmungsradien gleich sind. Dies stellt sich auch nachher an dem Beispiel heraus, das Monge betrachtet, nämlich am dreiachsigen Ellipsoid (Nr. 19 u. 20). Er stellt für diese Fläche die Differentialgleichung der Krümmungslinien auf, integriert sie und findet die bekannten Resultate; hier zeigt sich nun, daß es keine Kurve, sondern bloß vier Punkte gibt, für welche die beiden Krümmungsradien gleich sind. Auch hier weiß Monge sofort seinen theoretischen Entwicklungen eine praktische Gestalt zu geben. Er schlägt nämlich vor, dem zu erbauenden Saal für die gesetzgebenden Versammlungen eine elliptische Gestalt und der Decke die Form eines Ellipsoids zu geben. Die Kreispunkte wären durch helle Lampen zu markieren, die Krümmungslinien sollten an der Decke als „nervures de la voûte“ eine geschmackvolle Dekora-

tion geben; die Zwischenräume würden Licht- und Luftöffnungen darstellen. Ob dieser Vorschlag jemals praktisch ausgeführt worden ist, ist mir nicht bekannt. — Als Anwendung der hier entwickelten Theorie der Krümmungslinien betrachtet Monge folgende Beispiele: 1. Die Flächen, für welche die eine Schar von Krümmungslinien von ebenen Kurven gebildet wird, deren Ebenen alle parallel sind (Nr. 21—23). Es sind die schon von Euler in anderem Zusammenhang[1]) gefundenen Gesimsflächen; Monge gibt noch verschiedene Erzeugungsweisen dieser Flächen an; 2. die Flächen, für welche der eine Krümmungsradius konstant ist (Nr. 24 und 25). Hier ergeben sich die Röhrenflächen mit einer beliebigen Raumkurve als Leitkurve; der spezielle Fall, daß diese eine ebene Kurve ist, ist ja schon in Nr. 8 erledigt worden. 3. Die Flächen, für welche die Krümmungsradien gleich und gleichgerichtet sind (Nr. 26). Als einzige Fläche ergibt sich die Kugel, scheinbar allerdings noch eine Fläche, die folgendermaßen entsteht: Es sei eine Raumkurve und eine ihrer Evolventen gegeben; beschreibt man dann um jeden Punkt der Kurve eine Kugel, deren Radius gleich dem Stück der Tangente zwischen Kurve und Evolvente ist, so hat die Enveloppe aller dieser Kugeln die verlangte Eigenschaft. Diese Enveloppe reduziert sich aber bei genauerem Zusehen auf die Evolvente selbst, indem jede Kugel von der nachfolgenden nicht geschnitten, sondern einschließend berührt wird. Die Enveloppe ist dann der Ort dieser Berührpunkte, d. h. eben die Evolvente. 4. Das Beispiel, das die wichtigsten Ergebnisse liefert, nämlich die Flächen, für welche die Krümmungsradien gleich und entgegengesetzt gerichtet sind (Nr. 27 und 28). Die Bedingung hierfür ist nach den früheren Untersuchungen[2]) $h = 0$, d. h.

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0, \tag{1}$$

d. h. dieselbe Gleichung, die der „citoyen Lagrange" für die Minimalflächen gefunden hat.[3]) Meusnier wird nicht erwähnt; da seine Arbeit erst 1785 gedruckt wurde, hat Monge sie vermutlich noch nicht gekannt.

Er stellt nun zunächst nach der früher (S. 564) angegebenen Methode die Differentialgleichung der Charakteristiken auf und findet:

$$(1 + q^2)dy^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + p^2)dx^2 = 0. \tag{2}$$

Nimmt man dazu die beiden Gleichungen:

$$dp = rdx + sdy, \quad dq = sdx + tdy$$

und die Differentialgleichung der Fläche, so können r, t und $\frac{dy}{dx}$ eli-

[1]) Siehe S. 553. [2]) Siehe S. 567. [3]) Siehe S. 550.

miniert werden, wobei s von selbst mit herausfällt. Es bleibt dann eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung in p und q, nämlich:

$$(1 + q^2)dp - 2pq\,dp\,dq + (1 + p^2)dq = 0.$$

Diese ist leicht zu integrieren und ergibt, wenn α die Integrationskonstante ist:

$$(1 + \alpha^2) + (p - \alpha q)^2 = 0, \tag{3}$$

d. h eine Gleichung 2. Grades; die Fläche hat also zwei Scharen von Charakteristiken, die durch die beiden Linearfaktoren von (3) definiert sind. Bezeichnet man die Konstante für die eine Schar mit α, für die andere mit β, so lauten die Gleichungen:

$$p - \alpha q = i\sqrt{1 + \alpha^2}; \quad p - \beta q = -i\sqrt{1 + \beta^2}. \tag{4}$$

Setzt man die aus (4) sich ergebenden Werte von p und q in (2) ein, so ergibt sich die Differentialgleichung der Charakteristiken mit den Konstanten α und β an Stelle von p und q. Vorher macht Monge noch darauf aufmerksam, daß (2), da:

$$p dx + q dy = dz$$

ist, sich auch in die Form setzen läßt:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

d. h. er hat gefunden, daß die Linien von der Länge Null (in heutiger Bezeichnung) die Charakteristiken der Minimalflächen sind. — Stellt man nun nach (4) die Differentialgleichung der Charakteristiken auf, so zeigt sich, daß sie in die beiden linearen Gleichungen:

$$dy + \alpha dx = 0 \quad \text{und} \quad dy + \beta dx = 0$$

zerfällt, von denen jedoch die erste mit der zweiten Gleichung (4), die zweite mit der ersten zusammengehört, so daß die Differentialgleichungen der beiden Scharen von Charakteristiken schließlich sind:

$$\left.\begin{aligned} p - \alpha q = i\sqrt{1 + \alpha^2}; \quad & dy + \beta dx = 0; \\ p - \beta q = -i\sqrt{1 + \beta^2}; \quad & dy + \alpha dx = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Die Integration dieser Gleichungen ist schwierig, da im ersten Paar β, im zweiten α nicht als konstant betrachtet werden kann; durch ein scharfsinniges Verfahren wird sie aber doch ausgeführt, und so ergibt sich schließlich die allgemeine Gleichung der Minimalflächen mit zwei willkürlichen Funktionen Φ und Ψ, allerdings in imaginärer Form, indem die Koordinaten eines Punktes sich folgendermaßen durch die beiden Parameter α und β ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned}x &= -\Phi'(\alpha) + \Psi'(\beta);\\ y &= -\Phi(\alpha) + \alpha\Phi'(\alpha) + \Psi(\beta) - \beta\Psi'(\beta);\\ z &= i\int \Phi''(\alpha)\sqrt{1+\alpha^2}\,d\alpha + i\int \Psi''(\beta)\sqrt{1+\beta^2}\,d\beta\end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Eine geometrische Darstellung dieser Flächen vermag Monge jedoch nur in der Weise zu geben, daß er sie Element für Element zusammensetzt.

Damit werden die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung verlassen und Beispiele für solche der dritten Ordnung in Angriff genommen. Monge beginnt mit den allgemeinen Regelflächen (Nr 29 und 30), und stellt, durch ganz analoge Betrachtungen wie früher, die sie definierende Gleichung in vier verschiedenen Formen auf, nämlich:

1. als partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, wobei zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{s + \sqrt{s^2 - rt}}{t}$$

gesetzt wird. Die Gleichung heißt dann:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\alpha\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} + 3\alpha^2\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} + \alpha^3\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0;$$

2. als partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer willkürlichen Funktion, und zwar auf drei verschiedene Arten:

$$p + \alpha q = \varphi(\alpha); \quad y - \alpha x = \psi(\alpha); \quad z - (p + \alpha q) = \pi(\alpha),$$

wo α dieselbe Bedeutung hat wie vorher, und φ, ψ, π willkürliche Funktionen sind;

3. als partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit zwei willkürlichen Funktionen. Man erhält die Gleichung durch Elimination von α aus irgend zwei der in 2. aufgestellten drei Gleichungen, so daß also noch zwei von den drei Funktionen φ, ψ, π in die Gleichung eingehen;

4. in endlicher Form mit drei willkürlichen Funktionen, nämlich:

$$y - \alpha x = \psi(\alpha); \quad z - x\cdot\varphi(\alpha) = \pi(\alpha),$$

wo α ein variabler Parameter ist, durch dessen Elimination aus den beiden Gleichungen die Fläche in die Form $F(x, y, z) = 0$ gebracht werden kann.

Zunächst wird dann gezeigt, wie man aus der partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung ganz ebenso wie bei denen erster und zweiter Ordnung die Differentialgleichung der Charakteristiken

finden kann, und daß diese Methode auf Gleichungen beliebig hoher Ordnung anwendbar ist, die linear in den Differentialquotienten höchster Ordnung sind. Als zweites Beispiel werden noch die Flächen behandelt, die als Enveloppen einer Kugel von veränderlichem Radius entstehen, deren Mittelpunkt sich auf einer gegebenen Raumkurve bewegt (Nr. 31). Den Schluß des Ganzen bildet die schon früher (S. 531 ff.) besprochene Untersuchung der Evoluten und Krümmungsverhältnisse einer Raumkurve (Nr. 32—34).

Zum Schluß berichten wir noch kurz über die Fortschritte der Kartographie in unserem Zeitraum, soweit die mathematische Seite daran in Betracht kommt. Auch hier hat Euler die erste allgemeine Stellung und Lösung des Problems gegeben. Voran gehen einige Arbeiten von Kästner[1]), die sich jedoch nur mit der stereographischen und gnomonischen Projektion befassen, sowie ein Abschnitt aus dem III. Band von Lambert, Beyträge zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung (Berlin 1772), S. 105—192. In der Einleitung wird ein klarer Überblick über die verschiedenen Forderungen gegeben, die an eine Karte zu stellen sind (Winkeltreue, Flächentreue usw.) und gezeigt, inwieweit die verschiedenen Projektionsarten denselben genügen, und wie die Erfüllung einer Forderung die Vernachlässigung einer anderen nach sich zieht. Eine allgemeine Lösung der Aufgabe, die Kugel konform auf die Ebene abzubilden, gibt jedoch Lambert nicht, dagegen folgende Formeln für die stereographische Projektion:

$$dy = \frac{n\,dp}{\cos p} + m\,d\lambda; \quad dx = -\frac{m\,dp}{\cos p} + n\,d\lambda.$$

Hierbei bedeutet p die geographische Breite, λ die geographische Länge, m und n die partiellen Ableitungen von x und y nach λ. Die Arbeit verfolgt im weiteren Verlauf mehr praktische Zwecke; von Interesse ist jedoch noch die Bemerkung, daß die Mitteilung der obigen Formeln an Lagrange diesen zu seinen Untersuchungen über diese Fragen (s. S. 575 ff.) veranlaßt habe.

Euler entwickelt seine Methoden in einer Abhandlung: „De repraesentatione superficiei sphaericae super plano“[2]), und bemerkt einleitend, daß es sich um die Aufgabe handle, die Koordinaten eines Punktes x, y der Ebene als Funktionen der sphärischen Koordinaten (t = geogr. Länge, u = geogr. Breite) so darzustellen, daß die hierdurch bestimmte Abbildung gewissen Forderungen genüge.

---

[1]) Theoria projectionis stereographicae horizontalis. Diss. math. phys. Altenburg. 1771, p. 88 ff. (1766). Additio ad theoriam proj. ster. hor. Novi Goetting. Commentarii, T. 1, p. 138—198 (1770). Theoria projectionis superficiei sphaericae in planum tangens, oculo in centro posito. [2]) A. P. 1777, I, p. 107—132.

Zunächst werden nun die Bedingungen der Kongruenz durch analytisch-geometrische Betrachtungen entwickelt und gezeigt, daß es nicht möglich ist, diese zu erfüllen. Da also hiernach auf die Kongruenz verzichtet werden muß, kann man andere Bedingungen stellen, und deren analytischen Ausdruck entwickeln. Sollen z. B. Meridiane und Parallelkreise sich als zwei orthogonale Kurvensysteme abbilden, so muß:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

sein; sollen sie insbesondere in die Parallelen zu den Koordinatenachsen übergehen, so muß:

$$x = f(t); \quad y = \varphi(u)$$

sein. Dies wird auf die Merkatorkarte angewendet. Weiter wird eine Abbildung gesucht, bei der jedes Stück der Kugel sich als ein Stück der Ebene von gleichem Flächeninhalt abbildet, also die flächentreue Abbildung. Da das Flächenelement der Kugel $= dudt \cos u$, das der Ebene $= dxdy$ ist, so ist diese Forderung jedenfalls erfüllt, wenn:

$$x = t, \; y = \sin u$$

ist. Hierbei ist das Bild der Erdoberfläche ein Rechteck, und natürlich in den Polargegenden sehr stark verzerrt.

Nach diesen Einzelbeispielen wird nun die „Hypothesis, qua regiones terrae per similes figuras exhibentur“, d. h. die winkeltreue oder konforme Abbildung im heutigen Sinne eingehend behandelt. Da hierbei das Gradnetz der Erde sicher in zwei orthogonale Kurvensysteme übergeht, so ist jedenfalls notwendig, daß, wie oben,

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial t} = 0$$

ist. Euler setzt nun zur Abkürzung:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = p; \quad \frac{\partial x}{\partial t} = q; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = r; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = s.$$

Dann ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung der Winkeltreue:

$$dx = pdu + rdt \cos u; \quad dy = rdu - pdt \cos u.$$

Die Integration dieser Gleichungen wird auf doppelte Art — Methodus particularis und Methodus generalis — geleistet. Die erstere ist etwas umständlich, die zweite dagegen sehr bemerkenswert, weil hier zum erstenmal komplexe Größen zur konformen Abbil-

dung benutzt werden. Euler sucht nämlich eine lineare Kombination dieser Gleichungen so zu finden, daß die rechte Seite in ein Produkt übergeht, um dann die von ihm so oft mit Erfolg[1]) benutzte Schlußweise anwenden zu können. Eine solche ist, wie d'Alembert gezeigt hat, $dx + idy$.

Hierdurch ergibt sich:

$$dx + idy = (p + ir)(du - idt \cos u).$$

Euler setzt nun:

$$s = \lg\left(45^\circ + \frac{u}{2}\right); \quad z = \lg s - it,$$

so daß:

$$dz = \frac{ds}{s} + idt = \frac{du}{\cos u} - idt.$$

Es ist dann also:

$$dx + idy = (p + ir) \cos u\, dz,$$

und wenn die Integration ausführbar sein soll, muß $(p + ir) \cdot \cos u$ Funktion von z, nach ausgeführter Integration also auch $x + iy$ eine Funktion von z sein, die mit $2\Gamma(z)$ bezeichnet wird, so daß:

$$\Gamma'(z) = (p + ir) \cdot \cos u$$

ist. Dann ist also:

$$x + iy = 2\Gamma(z) = 2\Gamma(\lg s - it),$$

woraus sofort folgt:

$$x - iy = 2\Gamma(\lg s + it).$$

Hiernach sind also:

$$x = \Gamma(\lg s - it) + \Gamma(\lg s + it),$$
$$iy = \Gamma(\lg s - it) - \Gamma(\lg s + it)$$

die Gleichungen, welche die allgemeinste winkeltreue Abbildung definieren. x und y sind dabei stets reell. Die Gleichungen lassen sich noch etwas umformen, indem s an Stelle von z eingeführt wird vermöge der Gleichung

$$e^{\alpha z} = s^\alpha(\cos \alpha t - i \sin \alpha t),$$

wo α eine beliebige Konstante bedeutet. Die Funktion Γ von z geht natürlich hierbei auch in andere Funktion von s über, die mit Δ bezeichnet wird. Man erhält so:

$$x = \Delta[s^\alpha(\cos \alpha t - i \sin \alpha t)] + \Delta[s^\alpha(\cos \alpha t + i \sin \alpha t)],$$
$$iy = \Delta[s^\alpha(\cos \alpha t - i \sin \alpha t)] - \Delta[s^\alpha(\cos \alpha t + i \sin \alpha t)].$$

Das ist, wie Euler bemerkt, die allgemeinste Lösung der Aufgabe, eine Kugel so auf die Ebene abzubilden, daß die kleinsten Teile (figurae valde exiguae) ihren Bildern ähnlich werden. Wir möchten

[1]) Vgl. S. 551, 552, 555.

nicht unterlassen, noch einmal hervorzuheben, daß die ungemein fruchtbare Idee, zur Lösung dieser Aufgabe komplexe Größen zu verwenden, Eulers Eigentum ist.

Auch die Aufgabe, eine flächentreue Abbildung der Kugel auf die Ebene herzustellen, ist von Euler gelöst worden, und zwar für den Fall, daß das Gradnetz in zwei orthogonale Kurvensysteme übergeht; hier gibt allerdings Euler nur spezielle Lösungen. In einer unmittelbar folgenden Note („De projectione Geographica superficiei sphaericae"[1]) zeigt er noch, wie die stereographische Projektion einen Spezialfall der von ihm aufgestellten allgemeinen Formeln für die konforme Abbildung darstellt.

Sehr eingehend hat sich Lagrange in einer längeren Abhandlung: „Sur la construction des Cartes géographiques"[2]) mit der winkeltreuen Abbildung beschäftigt. Zwar geht die Aufstellung der Abbildungsformeln nicht wesentlich über das von Euler Geleistete hinaus; sie lauten nämlich bei Lagrange:

$$x + iy = f(u + it); \quad x - iy = \varphi(u - it),$$

wo f und φ noch willkürlich sind, aber natürlich eine reelle Abbildung nur dann ergeben, wenn sie konjugierte Funktionen sind. Dagegen tritt hier eine ganz neue Fragestellung auf, nämlich wie f und φ gewählt werden müssen, damit Meridiane und Parallelkreise in bestimmte, vorgegebene orthogonale Kurvensysteme der Ebene übergehen. Diese Frage wird für verschiedene besondere Fälle gelöst. Neu ist ferner, daß Lagrange das Vergrößerungsverhältnis in Betracht zieht; wird dies mit m bezeichnet und ist das Linienelement der Kugel:

$$ds^2 = du^2 + q^2 dt^2,$$

so ist:

$$m^2 = \frac{1}{q^2 f'(u + it)\varphi'(u - it)}$$

Er erörtert hierbei auch die Frage, wie der Meridian der Erde beschaffen sein müßte, wenn m konstant sein sollte, und findet natürlich, daß in diesem Fall die Meridiane gerade Linien sein müßten.

Die weiteren kartographischen Arbeiten von Schubert, Lorgna, Kästner u. a. haben mehr geographisches oder nautisches, als speziell mathematisches Interesse. Nur aus einer Abhandlung von Schubert: „De projectione sphaeroidis ellipticae geographica"[3]) ist einiges bemerkenswert; zunächst, daß dort von einer projectio figurae ellipticae conformis die Rede ist, was wohl das erste Vorkommen des Wortes

---

[1]) A. P. 1777, I, p. 133—142. [2]) Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres à Berlin 1779, p. 161—210. [3]) N. A. P. p. 130—146.

„konforme Abbildung" sein dürfte. Die Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, welchen Fehler man begeht, wenn bei der Kartenprojektion die Erde als Kugel angenommen wird. Hierbei wird ein nicht uninteressanter Satz bewiesen: wird ein Rotationsellipsoid von einem Punkt des Äquators aus auf eine zum Radius dieses Punktes senkrechte Ebene projiziert, so gehen sowohl die Meridiane, als die Parallelkreise in Ellipsen über, die dem Meridian des Ellipsoids ähnlich sind. Der Satz ist bemerkenswert durch seine Analogie mit dem bekannten Satz über die stereographische Projektion, daß jeder Kugelkreis wieder in einen Kreis übergeht.

Verbesserungen zu Abschnitt XXIV.

S. 461 letzte Zeile statt: of lies: on.

S. 494 Z. 14 statt: und damit r lies: und damit nach 2) r.

S. 508 Z. 2 v. u. ist der Satz „Zunächst ist ... Rede" zu streichen. Das Zitat [6]) gehört zu dem Worte „angenommen" auf Z. 1 v. u.

S. 537 Z. 6 v. u. beizufügen: Auch diese Abhandlung wurde in ihren wesentlichen Bestandteilen später in die F. d'A. aufgenommen.

S. 544 Z. 6 v. u. an „l'infini" das Zitat [1]) beizufügen.

S. 549 Z. 8 statt: mg lies: mJ.

S. 550 Fußnote [1]) statt: S. 365 lies: S. 565.

S. 552 Z. 14 statt: eine Funktion von Φ lies: eine Funktion Φ von φ.

S. 556 Z. 12 v. u. hinter Fläche beizufügen: (die in diesem Fall ein hyperbolisches Paraboloid ist).

S. 559 Z. 7 statt: bisher besprochenen lies: bisher in diesem Abschnitte besprochenen.

ABSCHNITT XXV

PERSPEKTIVE
UND DARSTELLENDE GEOMETRIE

VON

GINO LORIA

Die Perspektive vom Mittelalter bis zu Ende des 17. Jahrhunderts.

Unter dem Namen „Perspektive" (von perspicere = klar sehen) haben die Alten die Grundbegriffe und Grundlehren der geometrischen Optik zusammengestellt; dies ergibt sich hauptsächlich aus einem Werke des Euklid, das wir noch besitzen[1]). Diese Lehre wurde in Europa von Ibn Alhaitam gelehrt und verbreitet (I², S. 744). Sehr bald wurde sie ein Unterrichtsfach in den mittelalterlichen Universitäten; infolgedessen fand Johann Peckham, Bischof von Canterbury, es für notwendig, eine für die Schulen bestimmte Behandlung derselben zu schreiben (II², S. 98); Bradwardin hat dann dieselbe verschlimmert (S. 111); auf ähnlichen Grundlagen ist eine Perspektive des berühmten Witelo aufgebaut (S. 98).

Aber mit der Zeit und mit der Entwicklung der Kultur hat sich die Bedeutung jenes Wortes gänzlich verändert. Da der Sehprozeß sich durch geradlinige Lichtstrahlen vollzieht, welche von den verschiedenen Punkten des Objektes bis zu den Augen des Beobachters gehen, so ist jeder Augapfel der Mittelpunkt eines „Seh- oder perspektivischen Kegels". Man stelle sich nun vor, daß zwischen die Augen und das Objekt eine durchsichtige Fläche („Tafel") gesetzt werde, daß man den Punkt bestimme, wo dieselbe von jedem Sehstrahl geschnitten wird, und daß endlich dieser Schnittpunkt mit der-

---

Anmerkung zu Abschnitt XXV. Über die Geschichte der Perspektive ist die beste Quelle die „Histoire de la perspective ancienne et moderne" (Paris 1864), von M. Poudra, mit den Zusätzen, welche L. Cremona („Sulla storia della prospettiva antica e moderna" in der Rivista italiana di scienze, lettere ed arti, t. V, 1865, p. 226—231, 241—245) dazu gemacht hat, und P. Riccardi („Di alcune opere di autori italiani ommesse nella Histoire de la perspective di M. Poudra"; Bibl. math. 1889, p. 39—42). Über dasselbe Thema und die Geschichte der darstellenden Geometrie sehe man auch den I. Bd. von Chr. Wiener, „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" (Leipzig 1884).

[1]) „Euclidis Opera omnia", vol. VII, Lipsiae 1895; vgl. das IV. Kap. des III. Buches des Werkes von G. Loria, „Le scienze esatte nell' antica Grecia" (Mem. della R. Acc. die Modena, II. Reihe, XII. Bd., 1900).

selben Farbe versehen werde, welche der entsprechende Objektspunkt hat, so wird man eine Punktgruppe bekommen, welche im Auge dieselbe Empfindung hervorruft wie das gegebene Objekt. Nun bildet eben gerade die Bestimmung dieser Punktgruppe auf der Tafel den Zweck der modernen Perspektive. Diese besteht aus zwei Teilen: der „Linearperspektive“, welche die Schnittpunkte der Lichtstrahlen auf der Tafel geometrisch zu konstruieren lehrt, und der „Luftperspektive“, welche den Zweck hat, die Farben der verschiedenen Punkte des Bildes zu bestimmen. Nur die erstere kann als ein Teil der Mathematik betrachtet werden; daher werden wir hier nur auf die Werke, welche sie betreffen, eingehen. Ferner werden wir auch von unserer Analyse alle für Künstler oder von Künstlern bearbeiteten Werke ausschließen, welche nur empirische Zeichnungsvorschriften enthalten; sie werden von einigen als zur „praktischen Perspektive“ gehörig betrachtet.

Es erhellt aus dem eben Gesagten, daß die Perspektive die wissenschaftliche Grundlage der Malerei bildet; daher ist es wohl natürlich, daß die Maler die ersten waren, welche sich damit beschäftigt haben. Unter ihnen sind diejenigen, welche mit Euklid vertraut waren, zu endgültigen Schlüssen und rationellen Methoden gelangt. Um das zu beweisen, genügt es, daran zu erinnern, daß Johann van Eyck (1395—1440), welcher in Deutschland als Lehrer der Lehrer der Malerei betrachtet wird, den Ruf eines vortrefflichen Geometers genießt[1]). Andere Beweise derselben Behauptung liefert die ganze Geschichte des ersten Entwicklungsstadiums der in Rede stehenden Lehre. So verdanken wir dem vielseitigen Genius des Leon Battista Alberti (II², S. 292)[2]) den Grundbegriff von der „Perspektive eines Objektes“ als dem Durchschnitt der Tafel mit dem entsprechenden Sehkegel oder -Pyramide. Nach ihm begegnen wir Pier dei Franceschi, gewöhnlich della Francesca genannt (1406 oder 1416 geboren, 1492 gestorben), welcher, wahrscheinlich im Jahrzehnt 1470—1480, ein vollständiges Handbuch der Perspektive schrieb, das erste, welches in Italien, vielmehr in der Welt, das Licht erblickte; ein Handbuch, welches handschriftlich von vielen ausgenutzt oder besser geplündert wurde, und das erst vor sieben Jahren ge-

---

[1]) S. Günther, „Geschichte des math. Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525“ (Berlin 1887), S. 331. Nach G. J. Kern („Die Grundzüge der linear-perspektivischen Darstellung in der Kunst der Gebrüder van Eyck und ihrer Schule“, I. Bd.. Leipzig 1904) hat Johann van Eyck die Existenz des Fluchtpunktes gekannt und denselben verwertet; aber diese Behauptung wurde von K. Döhlemann im Aufsatze Die Perspektive der Brüder van Eyck (Zeitschrift f. Math. und Phys., III. Bd., 1905, S. 419—425) als unbegründet bewiesen. [2]) Vgl. G. Loria, „Per L. B. Alberti“ (Bibl. math. 1895, p. 9—12).

druckt wurde[1]). Um über ein solches Thema zu schreiben, war der berühmte Maler vortrefflich vorbereitet, da er als Jüngling die Geometrie gründlich studiert hatte; in der Tat sagt Vasari von ihm, daß er „raro nelle difficoltà dei corpi regolari e nell' aritmetica e nella geometria“ war, und daß „i libri meritamente gli hanno acquistato nome del miglior geometra che fusse nei tempi suoi“. In seinem Lehrbuche über die „Perspective“ hat Piero den Albertischen Begriff von der „Perspektive eines Körpers“ benutzt und weiterentwickelt; ferner hat er zuerst Verfahren angewandt, welche ihre volle Entwicklung viel später in der darstellenden Geometrie fanden (z. B. die Anwendung der Drehung der objektiven Figuren, um die Perspektive leichter zeichnen zu können) oder welche gewöhnlich unter dem Namen anderer gehen; endlich war er der erste, welcher, um die Perspektive eines Körpers zu erhalten, die entsprechenden Projektionen einer Reihe ebener Schnitte derselben betrachtete, und, bevor Leibniz den Begriff der Einhüllenden einer Kurvenschar noch im allgemeinen festgestellt hatte, sehr klar sah, daß alle die Kurven jener Reihe den Umriß des Körpers berühren.[2])

Als dritten in dieser Gruppe von Italienern, welche zugleich Maler und Geometer waren, finden wir Lionardo da Vinci, den Verfasser eines hinterlassenen „Trattato della pittura“ (Rom 1651), welches trotz des Titels kein organisches Werk, sondern nur eine Sammlung vereinzelter Bemerkungen ist, wo mehrmals ein „Trattato di prospettiva“ zitiert wird, welcher aber verloren gegangen zu sein scheint. Unter diesen Bemerkungen werden wir nur die folgende anführen: „Die Linearperspektive bezieht sich auf die Linien, um das Maß zu untersuchen, wie viel die zweite Sache kleiner sei als die erste, und die dritte als die andere, und also von Grad zu Grad bis zu der letzten Weite der sichtbaren Objekte. Ich habe durch die Erfahrung gefunden, daß wenn das andere Objekt ebensoweit von dem ersten entfernt ist, als das erste vom Auge absteht, gleichwohl das andere um die Hälfte kleiner als das erste sein wird, ob sie schon einerlei Größe unter sich haben. Und wenn das dritte

---

[1]) „Petrus Pictor Burgensis, De prospectiva pingendi, herausg. von Dr. Winterberg“ (Straßburg 1899); vgl. eine Mitteilung von G. Pittarelli in „Atti del congresso internazionale di scienze storiche, vol. XII, Rom 1904, p. 251 bis 266; Libri hat in der Note III des IV. Bd. seiner „Histoire“ eine klare Übersicht über die in Rede stehende Arbeit gegeben. [2]) Nach Ignazio Danti (vgl. das Vorwort seiner Auflage von Barozzi, von der wir später sprechen werden) und G. Pittarelli ist Piero auch der Verfasser des Buches „Über die regelmäßigen Polyeder“, welches Luca Paciuolo als sein Eigentum in seine „Divina proportione“ eingeschoben hat (vgl. II², S. 341).

Objekt in gleicher Weise von dem anderen entfernt ist, wird es um $\frac{2}{3}$ kleiner sein, und also von Grad zu Grad durch gleichen Abstand allezeit eine proportionale Verminderung statthaben." Ist es nun nicht überraschend, daß man diese empirische Bemerkung durch einfache geometrische Überlegungen als vollkommen richtig beweisen kann?[1])

Von einem letzten berühmten Maler müssen wir noch sprechen: von Albrecht Dürer, dessen geometrische Werke schon gründlich studiert wurden (II², S. 459—468)[2]). Darin findet man viele die Perspektive betreffende Stellen (sie wurden wahrscheinlich von Pietro dei Franceschi inspiriert) und die Beschreibung eines neuen und zwar des ältesten Apparates, um eine Perspektive mechanisch zu zeichnen. Ist das etwa hinreichend, um schließen zu können, daß Dürer „die erste darstellende Geometrie in deutscher Sprache geschrieben hat"?[3]). Oder ist es nötig und genügt es, um zu dieser Folgerung zu kommen, die zahlreichen deutschen Werke anzuführen[4]), welche von Dürers Werk inspiriert wurden und es zum Modell nahmen?

Aus den Händen der Künstler ist die Perspektive in die der Mathematiker übergegangen infolge einer der vornehmsten Arbeiten des Federico Commandino (II², S. 553)[5]). Es ist der Band des berühmten Kommentators, welcher die Überschrift trägt: „Ptolemaei Planisphaerium, Jordani Planisphaerium, Federici Commandini Urbinatis in Planisphaerium commentarius, in quo universa scenographices ratio quam brevissima traditur ac demonstrationibus confirmatur" (Venetiis 1558). Das Werk von Ptolemäus, um welches es sich hier handelt, enthält bekanntlich die Grundzüge der sogenannten „stereographischen Projektion"; das Buch von Jordanus Nemorarius behandelt dasselbe Thema ausführlicher. Der Kommentar Commandinos ist ein kurzer Traktat über die Linearperspektive, welcher zu dem Zweck geschrieben wurde, die Prinzipien festzustellen, welche der große griechische Astronom als Grundlagen seiner Projektionsmethode gewählt hat. Um diesen Zweck zu erreichen, setzt Commandino voraus, daß die betrachteten Figuren auf zwei zueinander orthogonale Ebenen bezogen werden (eine horizontale und eine verti-

---

[1]) Lambert, „Die freye Perspective", II. Aufl., II. Bd., S. 17. [2]) Vgl. auch Günther, a. a. O., S. 354—370. [3]) Gerhardt, „Geschichte der Mathematik in Deutschland" (München 1877), S. 25. [4]) Kästner, „Geschichte der Mathematik", II. Bd., Göttingen 1797, S. 9ff. [5]) Man sehe auch: Tiraboschi, „Storia della letteratura italiana", Vol. VII, Venezia 1796, p. 479—481; Libri, „Histoire des sc. math. en Italie", t. III, p. 113.

kale), daß die Tafel zu beiden rechtwinklig sei und daß das Auge sich auf der Vertikalebene befinde; die Tafel wird auf die Vertikalebene umgelegt vermittels Drehung um ihre Vertikalachse. Unter Annahme solcher Voraussetzungen gelangte Commandino zu zwei sehr bemerkenswerten Konstruktionen der Perspektive eines beliebigen Punktes der Horizontalebene, welche er sodann anwendet, um die Perspektive der Kreise einer Kugel zu finden. Eine der erwähnten Konstruktionen war schon bei den Praktikern im Gebrauch; aber Commandino kannte sie sicher nicht, denn er scheint die früheren Werke über die Perspektive nicht studiert zu haben, weil er ihre innige Verbindung mit den ptolemäischen Untersuchungen nicht bemerkt hatte. Diese Arbeit des großen Kommentators schien und war in der Tat auch zu einseitig und wissenschaftlich; die Maler und die Architekten, welche dieselbe benutzen wollten, fanden sie unvollständig und zu schwer; daher hielt es ein gelehrter Prälat, Daniele Barbaro (1513—1570)[1], für der Mühe wert, ein neues Lehrbuch über die Perspektive zu schreiben, welches zugleich dem Bedürfnisse der Praktiker und den Forderungen der Theoretiker genügte. Nachdem er sich daher mit Unterstützung eines gewissen Johann Zamberti mit jener Lehre genügend vertraut gemacht hatte, schrieb er ein Buch über: „La pratica della prospettiva; opera molto profittevole a pittori, scultori et architetti“ (Venezia 1559). Es ist ein Werk, welches hält, was es in seinem Titel verspricht; daher verdiente es die freundliche Aufnahme, welche es wegen seines reichen Inhalts allgemein fand. Der Geschichtschreiber darf aber nicht unterlassen, darauf hinzuweisen, daß Barbaro[2], nicht nur vieles von Piero della Francesca sich aneignete, sondern auch versuchte, das ganze Werk desselben in Mißkredit zu bringen, um von dem Leser den Verdacht eines Plagiats möglichst fern zu halten.

Auf Daniele Barbaro folgt der Zeit nach ein berühmter Künstler: Jacopo Barozzi aus Vignola, als Gesetzgeber in der Architektur unter dem Namen „Vignola“ allgemein bekannt (1507 bis 1573), welcher das Glück hatte, in einem sehr bedeutenden Mathematiker, Egnatio Danti[3]) (1537—1586), einen gewissenhaften Verleger und geistreichen Kommentator zu finden. Das in Rede stehende

[1]) Biographische Nachrichten über diesen Gelehrten findet man bei: Mazzucchelli, ‚Gli scrittori d'Italia“, T. II, P. I, p. 247; Tiraboschi, a. a. O., p. 474. [2]) Vgl. das Vorwort zu dem Werke von Vignola-Danti, von dem wir sogleich sprechen werden, und Pittarelli in der o. a. Mitteilung, S. 262. [3]) Vgl. Libri, t. IV, p. 87; Tiraboschi, a. a. O., p. 456—459, wo auch über andere Mitglieder der Familie Danti, die sich mit den Wissenschaften beschäftigten, berichtet wird.

Werk[1]) wurde 1530 verfaßt, ging handschriftlich durch viele Hände und wurde vom Verfasser mehrmals durchgesehen und umgearbeitet; der Sohn Vignolas übergab nach dessen Tode die letzte Bearbeitung Danti zur Veröffentlichung. — Vignola setzt, den Gewohnheiten seiner Zeit folgend, immer voraus, daß die Tafel vertikal sei, und daß man eine Horizontalebene als Träger aller betrachteten Figuren habe; von jedem Punkt des Körpers nimmt er die Orthogonalprojektion auf dieser Ebene und die entsprechende Höhe als gegeben an; und um die Perspektive dieses Punktes zu finden, beginnt er mit der Bestimmung der Perspektive seiner Orthogonalprojektion. Die so entstehende Beziehung zwischen der Horizontalebene und der Tafel ist[2]) eine Homologie, die vom Verfasser auf zweierlei Weise konstruiert wird. Mindestens eine von diesen Konstruktionen ist neu. Die Erläuterungen Dantis sind sehr bemerkenswert, nicht nur wegen ihres streng euklidischen Stils und wegen der wertvollen geschichtlichen Nachrichten, welche sie über die Untersuchungen der älteren Perspektiveforscher enthalten, sondern auch weil sie den Beweis von der in einigen besonderen Fällen vorhandenen Existenz der sogenannten „punti di concorso" enthalten, die ein wenig später ihren siegreichen Einzug in unsere Wissenschaft halten sollten. Diese vortrefflichen Kommentare und der große Wert des Originals selbst verschafften der Arbeit einen ungeheuren Erfolg; sie wurde mehrmals neu aufgelegt, ferner ins Lateinische, Französische, Englische, Deutsche und Russische übersetzt; man sagt sogar, daß Peter der Große es nicht verschmäht habe, dieselbe zu kommentieren![3])

Auch Giambattista Benedetti (II², S. 565)[4]) muß unter den Mathematikern aufgeführt werden, welche sich mit der Perspektive beschäftigten; denn der II. Teil seines Werkes „Diversarum speculationum mathematicarum et physicarum liber" (Taurini 1585) ist betitelt „De rationibus operationum perspectivae" und scheint den Zweck zu haben, einige bei den Malern übliche Verfahren zu berichtigen. Schon vor Benedetti hatte zwar Danti bereits die Notwendigkeit erkannt, derartige Berichtigungen zu geben; aber der Weg, welchen Benedetti einschlägt, um zum Ziele zu gelangen, ist zum Teil neu. Es möge noch bemerkt werden, daß der Verfasser für jedes Problem eine „figura corporea" und eine „figura superficialis"

[1]) „Le due regole della prospettiva pratica di M. Jacopo Barozzi da Vignola, con i commentari di Egnatio Danti". Roma, I. ed. 1583; II. ed. 1644. [2]) Eine Bemerkung von Chasles („Aperçu historique", II. Aufl., 1875, p. 348). [3]) Tiraboschi, „Biblioteca modenese", T. I (Modena 1781), p. 1761. Tramontini, „Elogio di G. Barozzi" (Modena 1825). [4]) Man sehe auch Libri, T. III, p. 121 und Note XXV.

(d. h. eine schematische und eine wirkliche Figur) gibt, ein System, welches von dem hochbedeutenden Gelehrten Guido Ubaldo del Monte (1545—1607) (vgl. II², S. 568)[1]), zu dem wir uns jetzt wenden, beständig verfolgt und ausgeführt wird.

Die hohe Bedeutung der Arbeiten del Montes über die Mechanik wurde von Lagrange und den nachfolgenden Historikern vollkommen erkannt (II², S. 568 ff.). Einen nicht minder hervorragenden Platz verdient er in der Geschichte der Geometrie als Verfasser der „Perspectivae libri sex“ (Pisauri 1600), eines Werkes, das nicht nur als einer der glänzendsten Edelsteine der italienischen Literatur, sondern auch als eines der höchsten Produkte des menschlichen Geistes überhaupt betrachtet werden muß. Alle diejenigen, welche es genauer kennen lernten, haben es sehr bewundert. Und wenn die Verehrerzahl nicht sehr groß ist, so beruht das darauf, daß viele Mathematiker es mit Unrecht für ein Werk hielten, das nur den Künstlern gewidmet sei, und diese hingegen zum größten Teil ein im reinsten euklidischen Stil geschriebenes Werk schwierig fanden. Um die außerordentliche Wichtigkeit der „Perspective“ del Montes zu beweisen, genüge es, darauf hinzuweisen, daß im I. Buch der Satz in seiner Allgemeinheit bewiesen ist, daß die Zentralprojektion eines Systems paralleler Geraden im allgemeinen ein Büschel ist, eine Tatsache, welche man zwar schon vorher empirisch festgestellt hatte, dessen rationelle Erklärung aber nicht einmal versucht worden war[2]). Daß der Verfasser sich der Bedeutung dieser Entdeckung wohl bewußt war, erhellt aus dem Titelblatt seines Bandes, wo man die nebenstehende Fig. 62 sieht mit dem Motto: „citra dolum fallimur“. Del Monte verdanken wir auch die Benennung „punctum concursus“ für den Mittelpunkt des Büschels, welches die Projektion eines Systems paralleler Geraden ist, eine Bezeichnung, welche die nachfolgenden Schriftsteller einstimmig annahmen. — Im II. Buch wird die Theorie

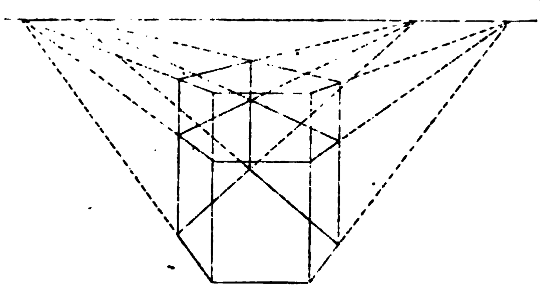


Fig. 62.

[1]) Vgl. Tiraboschi, a. a. O., p. 475—478. [2]) Als eine nicht uninteressante Kuriosität möge das Folgende erwähnt werden (vgl. S. 544): In Tinseaus Abhandlung „Solutions de quelques problèmes rélatifs à la théorie des surfaces courbes

von den Konkurspunkten auf die Konstruktion der Perspektive von Punkten der Horizontalebene angewandt (die Tafel immer vertikal vorausgesetzt); der Verfasser setzt zuerst die Konstruktion mittels einer Raumfigur auseinander, stürzt dann die Tafel auf die Horizontalebene um und gelangt so zu einer vollständig ausführbaren Konstruktion. Diese wird dann in nicht weniger als 23 verschiedenen Formen dargestellt, und der Verfasser fügt noch hinzu, daß andere nur der Kürze wegen nicht mitgeteilt wurden. Alle sind bemerkenswert, schon allein deswegen, weil der moderne Leser darin viele Begriffe, welche der Lehre der Homologie angehören, unbewußt angewandt finden wird. Ohne uns bei allen Anwendungen aufhalten zu wollen, welche der Verfasser von diesen Konstruktionen macht, bemerken wir nur, daß del Monte auch einige besondere Fälle der umgekehrten Aufgabe der Perspektive betrachtet hat, wie z. B. die folgenden: „einen Punkt zu bestimmen, dessen Perspektive man kennt“; „die Lage der Augen zu finden, wenn die Perspektive einer gegebenen Geraden bekannt ist“. — Der Zweck des III. Buches ist die Konstruktion der Perspektive der Höhen (über der Horizontalebene) der Raumfiguren zu zeichnen; der Verfasser betrachtet zuerst die Projektionen von Figuren, die in Ebenen liegen, welche zur Horizontalebene parallel sind, dann diejenigen, welche beliebigen Ebenen angehören, macht sodann viele Anwendungen davon und betrachtet schließlich die Perspektive auf nicht ebene Bildtafeln. Aus dem Inhalt des III. Buches ersieht man, daß es, um die Perspektive einer beliebigen Figur zu finden, notwendig ist, ihre Orthogonalprojektion auf die Horizontalebene („ac trito vocabulo plantam nos Itali appeliamus“) zu kennen und von jedem Punkt die entsprechende Höhe. Und nun ist der Hauptzweck des IV. Buches des in Rede stehenden Werkes der, beides für eine geometrisch definierte Figur zu bestimmen. Was der Verfasser lehrt, gibt sogleich die Darstellung jener Figuren durch die Methode der kotierten Ebene (wir gebrauchen diese moderne Ausdrucksweise, um klarer zu sein) und mit wenigen anderen Bemerkungen befähigt er uns auch, die Vertikalprojektion derselben zu finden. Bemerkenswert sind die Anwendungen auf die regelmäßigen Polyeder und den Kreis. — Im V. Buch wird ausführlich bewiesen,

---

et des courbes à double courbure“ (Mém. prés. par divers savants, T. IX, 1780, p. 593—642) findet man einen sehr einfachen Beweis des Satzes: „die Projektionen mehrerer paralleler Geraden gehen alle durch den Schnittpunkt der Tafel mit dem Strahle, welchen man vom Auge parallel zu jenen Geraden ziehen kann“, ein Prinzip, sagt Tinseau, „dont les auteurs de perspective ont jusqu'ici cherché la preuve, les uns dans la métaphysique, les autres dans les considérations sur l'infini“. Tinseau kannte gewiß nicht das Werk del Montes!

wie man das Gesagte auf die Zeichnung der Schatten anwenden kann (die Lichtquelle im Endlichen vorausgesetzt). — Das letzte Buch behandelt ein Gebiet, welches ein großes praktisches Interesse besitzt und daher die Aufmerksamkeit der Gelehrten von den Griechen bis Daniele Barbaro auf sich gezogen hatte: wir meinen die Zeichnung der Theaterbühnen. Auch für die zu diesem Zweck geeigneten Verfahren gelingt es del Monte, eine wissenschaftliche Grundlage zu geben. Daher behält seine „Perspective" bis zum Ende den Wert, welchen sie bereits auf den ersten Seiten hatte, und welcher ihn würdig machen würde, unter den Klassikern der exakten Wissenschaften zu erscheinen.

Wir müßten jetzt über das Werk „Opticorum Libri VI" berichten, das von Fr. d'Aiguillon in Antwerpen im Jahre 1613 veröffentlicht wurde; aber was über dieses vorzügliche Werk bereits gesagt wurde (II², S. 695), ist wohl hinreichend, um sich eine klare Vorstellung von seinem Inhalt und Zweck bilden zu können.

Ungefähr um dieselbe Zeit beschäftigte sich mit der Perspektive ein anderer und zwar sehr berühmter belgischer Geometer, Simon Stevin (II², S. 572). Sein „Traité d'optique" enthält seine diesbezüglichen Entdeckungen, über welche Chasles urteilt[1]): „... mais nous nous étonnons que l'on passe sous silence Stevin qui ... avait aussi innové dans cette matière, qu'il avait traité en géomètre profond, et peut-être plus complètement qu'aucun autre, sous le rapport théorique. Ainsi nous ne trouvons que dans cet auteur la solution géométrique de cette question, qui est l'inverse de la perspective: étant données, dans un plan et dans une position quelconque l'une par rapport à l'autre, deux figures qui sont la perspective l'une de l'autre, on demande de les placer dans l'espace de manière que la perspective ait lieu, et déterminer la position de l'œuil. Stevin, il est vrai, ne résout que quelques cas particuliers de cette question, dont le plus difficile est celui où l'une des figures est un quadrilatère et la seconde un parallélogramme ..." Chasles hätte auch hinzufügen können, daß Stevin den folgenden Fundamentalsatz der Methode der Zentralprojektion entdeckt und bewiesen hat: „Wenn sich die Bildtafel um ihre Schnittlinie mit der Horizontallinie dreht, und wenn sich zugleich der Beobachter um seine Füße dreht, und zwar so, daß er beständig parallel zur Tafel bleibt, so wird die Perspektive zwischen Horizontal- und Bildebene nicht gestört; sie bleibt auch dieselbe, wenn die genannten Ebenen zusammenfallen"[2]). Durch einige ge-

---

[1]) „Aperçu historique", p. 347. [2]) „Oeuvres de Stévin"; éd. Girard, p. 553 Vgl. G. Loria, „Vorlesungen über darstellende Geometrie", I. Bd., Leipzig 1907, S. 131.

schickt gewählte Anwendungen beweist Stevin die Nützlichkeit dieses schönen Satzes.

Girard Desargues, welcher eine so hervorragende Stellung in der Geschichte der theoretischen Geometrie einnimmt (II², S. 674—678), behauptet diese Stellung nicht minder in derjenigen der verschiedenen Zweige der Ingenieurwissenschaft. Ja vielmehr könnte man behaupten, daß die theoretischen Arbeiten Desargues' nichts anderes als Nebenprodukte seiner Bemühungen seien, um einigen praktischen bei Architekten und Malern üblichen Verfahren eine wissenschaftliche Grundlage zu geben. Eine solche Hypothese erscheint wohl gerechtfertigt, wenn man bedenkt, daß er im reifen Alter (Oktober 1647) erklärt hat: „je n'eus jamais de goust à l'estude ou recherche, n'y de la physique, n'y de la géometrie, sinon en tant qu'elles peuvent servir à l'esprit, d'un moyen d'arriver à quelques sorte de connaissance des causes prochaines des effets de choses qui se puissent reduire en acte effectif, au bien et commodité de la vie qui soit en usage pour l'entretien et conservation de la santé“[1]). Die älteste gedruckte Arbeit von Desargues ist eine „Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en dévis, avec leurs proportions, mésures, éloignements sans employer aucun point qui soit hors du champ de l'ouvrage“ (Lyon 1636; Oeuvres, I, p. 53—84). Sie fängt mit einem Verzeichnis neuer Namen an, um die Grundelemente der Lehre der Perspektive zu bezeichnen, Namen, welche von den Zeitgenossen des Desargues als überflüssig, schlecht gewählt und daher tadelnswert angesehen wurden[2]). Wenn diese in dieser Beziehung vielleicht nicht ganz unrecht haben, so haben sie es dagegen gewiß, als ihre Pfeile sich gegen die von ihm ersonnenen Methoden richteten, Methoden, deren Quintessenz die folgende ist: Eine beliebige Figur ist vollkommen bestimmt in bezug auf ein rechtwinkliges Trieder, dessen Kanten OX, OY, OZ seien, falls von jedem ihrer Punkte die Entfernungen von den Ebenen YOZ, ZOX, XOY gegeben sind. Ein Ähnliches gilt für eine ebene Figur. In beiden Fällen kennt man von den betrachteten Punkten die Cartesischen Koordinaten; umgekehrt kann man, wenn man von einem Raumpunkte P die Cartesischen Koordinaten x, y, z kennt, die Lage des Punktes wie folgt finden: Man trage auf OX die Strecke $OM = x$ ab, man ziehe von M die Strecke $MN = y$ parallel zu OY, endlich die Strecke $NP = z$ parallel zu OZ. Um nun die Perspektive von P zu finden, schlägt

---

[1]) „Oeuvres de Desargues“; éd. Poudra, Paris 1864, I. Bd., p. 487.

[2]) Vgl. die Urteile von Beaugrand und Curabelle in den „Oeuvres de Desargues“. II Bd., p. 355 und 388.

Desargues vor, diese Konstruktion vom Raume auf die Bildtafel zu übertragen (d. h. „de pratiquer la perspective conformement au géométral"). Der Leser wird hier gewiß den Grundgedanken der neueren Axonometrie klar ausgedrückt finden. In der Entwicklung desselben setzt Desargues voraus, daß die gegebene Horizontalebene als xy-Ebene angenommen werde, und deren Schnittlinie mit der Tafel als x-Achse sowohl auf der Tafel, als auch im Raume. Die zu OX parallelen Geraden haben als Projektionen eben andere zu OX parallele Geraden, während die zu OY oder OZ parallelen zwei Büschel nicht paralleler Geraden geben. Zwei Skalen äquidistanter Punkte auf OY und OZ („échelles de petits pieds") geben auf der Tafel zwei nicht-reguläre, aber konstruierbare Punktreihen. Mittels dieser und der obigen Büschel kann man, wie leicht ersichtlich ist, die Perspektive einer beliebigen Figur zeichnen.

Nicht nur ihre Neuheit ließ die Methode des Desargues den Zeitgenossen so schwierig erscheinen, sondern auch der Umstand, daß er sich damit begnügt hatte, seine Idee nur anzudeuten und auf ein besonderes Beispiel allein angewandt auseinanderzusetzen. Man muß noch hinzufügen, daß er keinen Gebrauch von den Konkurspunkten gemacht hat, deren Theorie del Monte schon festgestellt hatte; aber in einem den „contemplatifs" gewidmeten Anhang lehrte er die Transformation durch Projektion eines Systems paralleler Geraden in ein eigentliches Büschel, wie auch die (übrigens von Stevin schon beobachtete) umgekehrte Transformation, die stattfindet aus einem Büschel, dessen Mittelpunkt auf einer Parallelen liegt, die vom Auge auf die Tafel gezogen wird. In dieser Gruppe von Theoremen hat Desargues „une fourmilière de grandes propositions" erkannt. Zum Schlusse hat er versichert, in der Lage zu sein, das folgende wichtige Problem aufzulösen: „In der Ebene eines Kegelschnitts, dessen Perspektive man sucht, die Geraden zu bestimmen, welche in die Achsen dieser letzteren sich projizieren".

Im Jahre 1640 veröffentlichte Desargues ein anderes Werkchen mit dem Titel: „Brouillon-projet d'exemple d'une manière universelle touchant la practique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'architecture; et de l'eclaircissement d'une manière de reduire au petit pied en perspective comme en géometral et de tracer tous quadrans plats d'heures égales au sòleil" (Oeuvres I, p. 303 ff.). In dem Teil, welcher in diesem Augenblick allein uns interessiert, hat sich Desargues die Aufgabe gestellt, die Augen sowohl denjenigen zu öffnen, welche seinen Methoden jeden Wert ableugneten, da sie dieselben nicht verstanden hatten, als auch denjenigen, welche ihnen jede Originalität absprachen. Wenn man auch zugeben muß,

daß die zweite Veröffentlichung Desargues' weniger bündig geschrieben ist, als seine erste, so zeichnet sie sich doch nicht durch allzu große Klarheit aus, so daß man bezweifeln kann, ob er den ersten Zweck erreicht hat; es muß indessen bemerkt werden, daß er mehrere Personen nennt, welche imstande waren, seine Methoden anzuwenden. Unter diesen finden wir den „graveur" Abraham Bosse (1611—1678), welcher im Jahre 1648 ein Lehrbuch der Perspektive herausgab[1], in dem man eine wertvolle Note findet (vgl. Oeuvres de Desargues I, p. 303—358). Sie bildet eine wichtige Ergänzung zur ersten Broschüre Desargues', da man in derselben einige wichtige Hilfssätze zur Perspektive und Vorschriften für den Gebrauch des „optischen oder Proportionszirkels" beim perspektivischen Zeichnen findet. Wir haben die Pflicht, zu bemerken, daß die Priorität der Anwendung desselben Desargues in einem „Abrégé ou Racourci de la perspective par l'imitation" (Paris 1643) von Vaulezard abgestritten wurde, ein Werk, das in seiner sehr langen Überschrift unsern Geometer als „celui qui se vante d'avoir l'unique secret et les manières de la perspective"[2]) bezeichnet.

A. Bosse, von dem wir soeben gesprochen haben, ist derjenige, welcher mehr als alle anderen sich bemüht hat, den Ideen des Desargues zum Siege zu verhelfen. Unter seinen zu diesem Zweck geschriebenen Werken führen wir noch zwei andere an: das Buch „Moyen universel de pratiquer la perspective sur les tableaux ou surfaces irrégulières" (Paris 1653; vgl. Oeuvres de Desargues, II, p. 16—33), auch eine Frucht des Desarguesschen Unterrichts, dessen Thema schon von del Monte gestreift worden war[3]), und den „Traité des pratiques géométrale et perspective enseignés dans l'Académie royale de peinture et sculpture" (Paris 1656; Oeuvres de Desargues, II, p. 35—47), welcher zwar nach Desargues' Tod erschienen ist, aber dessen Methoden zur Konstruktion von Basreliefs auseinandersetzt, Methoden, welche Desargues die Würde des Begründers der Relief-Perspektive sichern. Es mag zuletzt noch bemerkt werden, daß mit den Untersuchungen des

---

[1]) „Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective par petits pieds comme le geometral, ensemble les places et les proportions, touches, teintes et couleurs", Paris 1648. — [2]) Poudra, „Histoire de la perspective", p. 310. Aus dem hier gegebenen Bericht erhellt, daß das „Abrégé" eine wissenschaftlich geschriebene Arbeit ist, welche die erste Andeutung des Problems gibt, eine Figur zu bestimmen, von der mehrere Perspektiven gegeben sind (Hauptaufgabe der neueren theoretischen Photogrammetrie).
[3]) Darin befindet sich der Umriß einer Ringfläche als die Einhüllende der Projektionen der Kreise der Fläche („Oeuvres de Desargues", II. Bd., p. 22).

Desargues über die Perspektive im allgemeinen wahrscheinlich die geheimnisvollen und jetzt verlorenen „Leçons de ténèbres" in engem Zusammenhang stehen, wo die Kegelschnitte als von einem erleuchteten Kreise geworfene Schatten betrachtet waren, das Licht im Endlichen vorausgesetzt, um keine Kurve auszuschließen.

Eine andere Schrift, in welcher die Methoden des Desargues erklärt und entwickelt sind, ist die „Perspective adressée aux théoriciens", die Poudra am Ende der Bosseschen „Perspective" eingeschaltet fand (Oeuvres de Desargues, I, p. 439—462); sie hat den Zweck, die Angriffe zurückzuweisen, welche gegen Desargues in dem Werke „La perspective spéculative et théorique. De l'invention du feu Sieur Alleaume" (Paris 1634) gerichtet worden waren.[1])

Einen ganz anderen Standpunkt Desargues gegenüber, dem von Bosse ganz entgegengesetzt, nahm Curabelle ein, dessen heftige und unbegründete Kritiken wahrscheinlich einer verdienten Vergessenheit anheimgefallen wären, wenn Poudra nicht in seiner Ausgabe der Werke des Desargues die Erinnerung an dieselben wieder aufgefrischt hätte. An diese gewissenhafte Publikation verweisen wir diejenigen unserer Leser, welche die Einzelheiten dieser sonderbaren Streitigkeiten kennen zu lernen wünschen, in deren Verlauf unter anderem auch eine Herausforderung erfolgte, nach der jeder der Widersacher dem anderen 100 Pistolen versprach für den Fall, daß es ihm gelänge, ihn von seinem Unrecht zu überzeugen. Um Curabelle jedoch teilweise zu entschuldigen, wollen wir auch bemerken, daß im Jahre 1642 ein Buch von Pater du Breuil ans Licht kam[2]), in dem die Ideen Desargues' in vollkommener Entstellung dargestellt sind von einem, der sie nicht verstanden hatte. Die von du Breuil begangenen Irrtümer wurden von Desargues selbst vor der Öffentlichkeit mit großer Heftigkeit zurückgewiesen; so entstand ein hartnäckiger Streit, welcher ungefähr 40 Jahre dauerte, und infolgedessen Bosse, der treue Beschützer des Desargues, seinen Lehrstuhl an der Akademie der schönen Künste verlassen mußte.

Als der Kampf immer heftiger wurde, setzte Desargues, um ihm ein Ende zu machen, einen Preis von 1000 Franken für denjenigen aus, welcher neue Verfahren zur Ausführung von Perspek

---

[1]) Aus dem Berichte, welchen Poudra („Histoire", p. 288—309) über dieses Werk gegeben hat, erhellt, daß darin eine Auflösung des Problems enthalten ist, die Perspektive einer Figur zu finden, deren Seiten und Ecken gegeben sind.

[2]) „La perspective pratique nécessaire à tous . . . par un Parisien, religieux de la Compagnie de Jésus"; vgl. Poudra, a. a. O., p. 271—287, wo auch über die folgenden verbesserten Auflagen berichtet wird und darin enthaltene Andeutungen über die Militär- oder Kavalierperspektive angegeben sind (s. S. 283).

tiven erfinden würde, die denjenigen des Desargues vorzuziehen wären; diese Zusage ist in einem an Bosse gerichteten Briefe enthalten, welcher das Datum des 25. Juli 1657 trägt und der Pariser Akademie vier Tage später mitgeteilt wurde und so weite Verbreitung in der Öffentlichkeit fand. Und nun schrieb „pour prétendre au prix que M. Desargues, homme savant et généreux, a proposé“, Pater Charles Bourgoing die „Perspective affranchie“ (Paris 1661), in welcher viele bemerkenswerte, auf die Anwendung der Konkurspunkte gegründete Konstruktionen ausgeführt werden. Wenn man bedenkt, daß Desargues die Hilfe der Konkurspunkte abgelehnt hatte, so muß man zugeben, daß der Verfasser in der Wahl seines Arbeitsgebietes äußerst geschickt war. Er versucht die Überlegenheit seiner eigenen Methoden über diejenigen von Desargues in sechs Punkten zu beweisen und nimmt zufrieden mit seiner Ausführung von seinem Buche mit den folgenden Versen Abschied:

„Parcourez l'univers banissant toute crainte,
Le monde ni l'enfer n'auront sur vous atteinte,
Car les plus grands efforts de la témérité
Mettent bas les armes devant la verité.“

Das 17. Jahrhundert, welchem die Wissenschaft von der Perspektive Forscher ersten Ranges, wie del Monte, Stevin und Desargues, verdankt, hat auch noch eine große Anzahl von sonstigen Bearbeitungen und Einzelbeiträgen hervorgebracht. Alle zu nennen ist unmöglich und wäre auch zwecklos; die wichtigsten aber verdienen wenigstens erwähnt zu werden.

So enthält der V. Band des „Cours mathématique“ von Peter Hérigone eine kurze Auseinandersetzung der uns beschäftigenden Lehre (Paris 1654, p. 190—217), wo auch die originelle Symbolik angewandt wird, deren Schöpfer er ist (vgl. Bd. II², S. 656).

Vor Hérigone (1633 oder etwa 1614) veröffentlichte zu Amsterdam Samuel Marolais die lateinisch geschriebenen „Prinzipien der Optik und der Perspektive“, welche bemerkenswert sind, weil sie den ersten Versuch darstellen, die Aufgaben der Perspektive arithmetisch zu lösen. Gerade unter diesem Gesichtspunkt erinnert diese Arbeit an eine spätere mit der Überschrift „Andreae Alberti duo libri, prior de perspectiva cum et praeter arithmeticam inventa, posterior de umbra ad eam pertinente“ (Norimbergae 1671), in welcher ausgeführt wird, wie man die Koordinaten des Bildes eines Punktes, dessen Koordinaten bekannt sind, bestimmen kann.

Mit Rücksicht auf den großen Ruhm, den ihr Verfasser genießt, wollen wir weiter die Arbeit des Pater Nicéron (1613—1646) „La perspective curieuse“ (Paris 1671) anführen, eine hinterlassene und

von unbekannter Hand stammende Bearbeitung des „Thaumaturgus opticus seu admiranda", ein Werk, dessen Druck am 2. August 1646 vollendet wurde; sie ist denjenigen zu empfehlen, die sich für die von der Zentralprojektion verursachten Verzerrungen interessieren. Die verzerrende Gewalt jener Operation scheint von Andreas Tacquet (1612—1660) wahrgenommen und überschätzt worden zu sein, da man auf dem Titelblatt der 2. Auflage (1707) des prächtigen Bandes seiner „Opera mathematica" einen durch die Sonne erleuchteten rechtwinkligen Rahmen sieht, welcher als Schatten einen Kreis wirft, und diese sonderbare Figur „mutat quadrata rotundi" als Motto trägt. Die Figur selbst dient als symbolischer Hinweis auf das II. Buch („Syllabus propositionum opticae") der „Opera", wo die Grundbegriffe der Perspektive bewiesen werden, um sie dann auf die Astronomie anzuwenden.

Zum Schluß dieser flüchtigen Musterung der Beiträge, welche das 17. Jahrhundert zur Perspektive gegeben hat, mag zweierlei bemerkt werden:

Erstens daß das großartige Werk von Guarini (vgl. Vorl., III², S. 14)[1]) nicht nur in seinem XXXII. Abschnitt ein Kapitel unserer heutigen darstellenden Geometrie enthält, welches, wie Chasles[2]) hervorhob, „traité de la projection sur des plans des lignes qui proviennent de l'intersection de la sphère, du cône et du cylindre entre eux et du développement, sur un plan, de ces courbes à double courbure", sondern daß auch sein XVI. Abschnitt zu derselben Lehre gehört. Dieser Abschnitt behandelt nämlich unter dem Titel De projecturis die früheren Arbeiten von Vitruv und Aiguillon, die Orthogonalprojektion auf eine Ebene und die stereographische Projektion einer beliebigen Figur. Der Vollständigkeit wegen soll auch gesagt werden, daß das in Rede stehende Werk kein Kommentar zu den Elementen Euklids ist, da es nicht nur von den klassischen Theorien der Geometrie, welche man bei Euklid, Archimed und Pappus findet, handelt, sondern auch die modernen, auf den Gebrauch der Trigonometrie und der Logarithmen gegründeten arithmetischen Methoden, um die geometrischen Probleme aufzulösen, um-

[1]) Sein vollständiger Titel ist der folgende: „Euclides adauctus et methodicus mathematicaque universalis Car. Em. II dicata, quae ne dum propositionum dependentiam, sed et rerum ordinem observat. Et complectitur ea omnia, quae de quantitatae tum discreta, tum continua abstracta speculari queunt. Resectis superfluis demonstrationibus, et requisitis omnibus profuse coadunatis. Singulis quoque Tractatus novis propositionibus adaucti sunt, et aliqui etiam ex integro adornati. Omnesque tum figuris, tum verbis clare, dilucideque propositi." Augustae Taurinorum, MDCLXXI. [2]) „Aperçu hist.", Note XVII.

faßt; daher findet man am Schluß desselben eine Tafel von den Sinussen und Tangenten.

Unsere zweite Schlußbemerkung betrifft das Werk von Milliet-Dechales, von dem schon zweimal gesprochen wurde (III², S. 4—6 und S. 15—18), welches sechs Bücher über die Perspektive enthält. Unter den dort bewiesenen Sätzen findet man auch den folgenden bemerkenswerten, oft zu Unrecht dem Lambert zugeschriebenen Lehrsatz: „Zwei parallele Geraden AC, BD werden von einer Transversale AB geschnitten. Durch einen Punkt C einer dieser Geraden zieht man die Geraden CD, CI, ... bis sie die andere Gerade schneiden. Man bestimmt dann ihre Schnittpunkte F, E, ... mit der Transversalen AB. Wenn man nun die beiden gegebenen Parallelen um die Punkte A, B rotieren läßt, so daß sie beständig parallel bleiben und den Punkt K, der dem Punkt C entspricht, mit den Punkten D, I, ..., welche den Punkten G, H, ... entsprechen, durch Gerade verbindet, so werden die Geraden KG, KH, ... noch durch die Punkte F, E, ... gehen.“ Es ist unmöglich, alle Anwendungen aufzuzählen, welche der Verfasser von diesem Satz macht; aber wir können nicht umhin, einige der wichtigen Probleme, welche er löst, wenigstens zu erwähnen; z. B. die Bestimmung des Fluchtpunktes aller Geraden auf der Tafel, welche rechtwinklig auf einer anderen Geraden dieser Tafel stehen, die Aufsuchung der Geraden, welche zwei untereinander rechtwinklige Gerade rechtwinklig schneidet, usw.

Die goldene Periode der theoretischen Perspektive.

So mannigfaltig und wichtig die Beiträge sind, welche das 17. Jahrhundert zur Perspektive geliefert hat, so sind nicht weniger bedeutend diejenigen, welche wir dem nächsten verdanken, in dessen Verlaufe diese Wissenschaft eine Höhe erreichte, über die wir heute noch nicht hinausgekommen sind. Der erste bedeutende Gelehrte, dem wir begegnen[1]), ist Wilhelm Jacob s'Gravesande, geboren am 27. September 1688 und als Leydener Universitätsprofessor am 28. Februar 1742 gestorben, der als Herausgeber der Werke von Huygens und Newton unseren Lesern schon bekannt ist (III²,

[1]) Wir haben im Text Ozanams (vgl. III², S. 102 und 270) keine Erwähnung getan, weil seine „Perspective théorique et pratique“ (Paris 1711) nichts Neues, aber viel Falsches enthält. Zu bemerken ist ferner, daß in seinen wohlbekannten „Récréations mathématiques et physiques“ (III. éd., Paris 1700) einige „Problèmes d'optique“ enthalten sind, welche unsere Wissenschaft betreffen.

S. 278 und 394). Die Arbeit, mit der er seine Laufbahn als Schriftsteller begann, ist eben diejenige, welche ihm einen Ehrenplatz in der Geschichte der Perspektive sichert; es ist der „Essai de perspective" (La Haye 1711), in welchem Johann Bernoulli sofort „plusieurs règles fort ingénieuses et très-commodes pour la pratique, qu'on ne trouve pas ailleurs"[1]) entdeckte. Das I. Kapitel dieses Werkes enthält zuerst eine Abhandlung, in der er die Nützlichkeit der Perspektive zu beweisen sucht und dann die Erklärungen der Grundbegriffe derselben gibt. Das II. Kapitel lehrt ihre wissenschaftlichen Grundlagen. Zuerst beweist der Verfasser, daß „eine zur Tafel parallele Gerade auch zu ihrer Projektion parallel ist", und daß „eine Figur, deren Ebene parallel zur Tafel ist, ihrer Perspektive ähnlich ist". Dann folgt die wichtige Bemerkung, daß, „wenn eine Gerade die Tafel in einem eigentlichen Punkte schneidet, ihre Perspektive die Verbindungslinie dieses Punktes mit demjenigen ist, in welchem die Tafel von der Parallele geschnitten wird, welche man vom Projektionszentrum jener Geraden ziehen kann". So gelangt er zur Bestimmbarkeit einer beliebigen Geraden durch ihre Spur- und Fluchtpunkte (vgl. auch Kapitel III, 3. Probl.); daraus folgt ferner, daß die Lage der Perspektive einer Geraden keine Veränderung erleidet, wenn das Projektionszentrum auf einer zu jener parallelen Geraden sich bewegen läßt. Im III. Kapitel werden die so gefundenen Prinzipien auf die Konstruktion der Perspektive von Figuren angewandt, welche in einer Horizontalebene liegen, die Tafel ursprünglich vertikal vorausgesetzt, und dann durch Drehung auf die Horizontalebene umgelegt. Unter den sieben Verfahren, welche der Verfasser auseinandersetzt, wählen wir die folgenden als Beispiele. In Figur 63 ist V der Projektionsmittelpunkt und O der Fußpunkt der Senkrechten, welche von ihm auf die Tafel gefällt wird; P ist ein beliebiger Punkt der Horizontalebene und H ihre Orthogonalprojektion auf die Tafel. Dann ist augenscheinlich die Perspektive von P der Schnittpunkt P' der Geraden VP und OH; daher teilt er die Strecke OH in dem Verhältnis $VO : PH$. Aus dieser Beobachtung leitet s'Gravesande die erste seiner Methoden ab. Es sei (Fig. 64) t die „ligne de terre" (Schnittlinie der Horizontal- und Bildebenen) und o die Parallele, welche zu ihr durch O gezogen ist; die Strecke OV sei zu o senkrecht und an Länge der

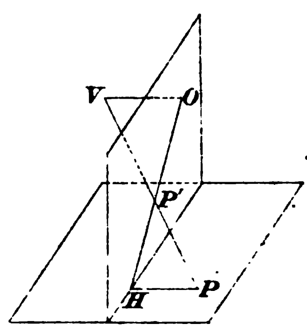


Fig. 63.

[1]) Poudra. „Histoire", p. 484.

Strecke VO in Fig. 63 gleich; die Geraden OH und VP schneiden sich dann augenscheinlich im gesuchten Punkte P'. Beschreibt man nun die Kreise, welche P resp. V als Mittelpunkte und die Strecken PH und UO als Halbmesser haben, so wird P' gewiß einer ihrer Ähnlichkeitspunkte sein; daher (IV. Methode) kann man P' auch finden als Schnittpunkt zweier den beiden Kreisen gemeinschaftlichen Tangenten. Betrachtet man nun (VI. Methode) einen zweiten Punkt Q der Horizontalebene, um Q' zu finden, so kann man sich die Tatsache zunutze machen, daß die Geraden PQ und $P'Q'$ auf der Geraden t sich schneiden; man bestimme nämlich den Punkt $PQ \,.\, t$ und verbinde ihn mit P'; die so entstehende Verbindungslinie wird VQ in Q' schneiden. Betrachtet man nun, nachdem man P' und Q' bestimmt hat, einen dritten Punkt R der Horizontalebene, um R' zu finden, so kann man den Umstand benutzen, daß PQR und $P'Q'R'$ perspektivische Dreiecke sind, mit V als Zentrum und t als Perspektivachse.

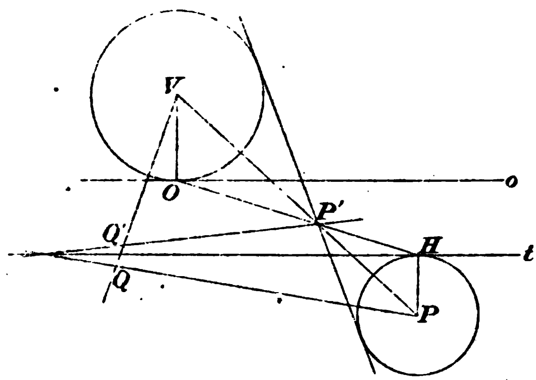


Fig. 64.

Um auch noch über die letzte der Methoden s'Gravesandes zu berichten, erwähnen wir, daß die von ihm angenommene Bildtafel rechtwinklig zur Horizontalebene steht und auf diese umgelegt wird; daher ist das, was s'Gravesande die Projektion einer Figur F nennt, eher das, was wir als Umlegung (F) derselben zu bezeichnen pflegen, während seine (der Horizontalebene angehörige) objektive Figur unseren Augen als eine Horizontalprojektion F' von F erscheint; und die von ihm gelöste Aufgabe kommt der Ableitung von F' aus (F) gleich: nun ist die von ihm vorgeschlagene Konstruktion von der-

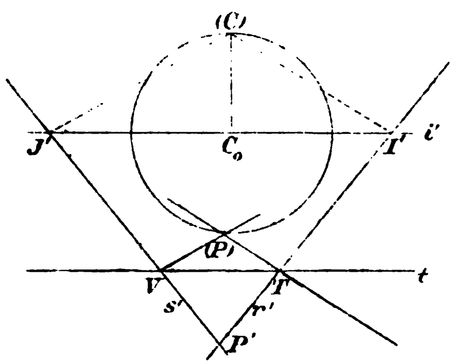


Fig. 65.

jenigen nicht verschieden, welche heutzutage in der Methode der Zentralprojektion angewandt wird, und an die wir durch die Fig. 65 unsere Leser erinnern wollen. Der Verfasser wendet seine Methoden auf die Bestimmung der Perspektive von Polygonen an und lehrt dann vier weitere Methoden zur Auffindung der Perspektive eines beliebigen Raumpunktes; unter diesen Methoden ist die erste besonders bemerkenswert, da sie von der Betrachtung der Orthogonalprojektion des Punktes unabhängig ist. Das IV. Kapitel beginnt mit der Voraussetzung, daß das Projektionszentrum von der Tafel sehr weit entfernt sei, so daß die Projektionsstrahlen als parallel angesehen werden können. Das V. Kapitel handelt von der Perspektive auf schiefe Ebenen, das folgende von derjenigen auf Ebenen, welche dem Horizont parallel sind, und das VII. von den Schatten. In dem folgenden kehrt der Verfasser zu den Problemen zurück, welche er im Anfange betrachtet hat, um zu zeigen, wie die dort angegebenen Auflösungen zu vereinfachen sind, und im letzten wendet er die erhaltenen Resultate auf die Gnomonik an, wobei er zu neuen und einfachen Konstruktionen gelangt. Nun, das Wenige, das wir hier über diese Jünglingsarbeit des hervorragenden niederländischen Gelehrten gesagt haben, scheint uns zu genügen, um zu beweisen, daß er dem Zweige der Mathematik, dessen Entwicklungsstadien wir hier verfolgen, eine außerordentliche Förderung gebracht hat.

Nicht minder wichtig und ersprießlich wurde die Wirkung, welche auf die Entwicklung der Perspektive ein großer Analyst ausübte, welcher auch eine große Rolle zur Zeit der Geburt der Infinitesimalrechnung spielte; wir meinen Brook Taylor (1685—1731; vgl. III², S. 378). — Im Jahre 1715 veröffentlichte er eine kurze Arbeit über die „Linear-Perspektive", welche vier Jahre später in verbesserter Auflage unter dem Titel „New principles of linear Perspective" erschien; aber der zu gedrängte Stil des Verfassers verhinderte, daß die Künstler, an die das Werk in erster Linie gerichtet war, es verstanden; daher veröffentlichte nach Taylors Tod John Colson (1680—1760) — eine andere der Personen in dem Drama, in dem Leibniz und Newton die Protagonisten waren! — eine neue mit Berichtigungen und Zusätzen versehene Auflage, deren vollständiger Titel lautet: „New principles of linear perspective: or the Art of Designing in a Plane, the representation of all sort of Objects, in a more and general simple Method, than has been hitherto done" (London 1749). Die Lektüre dieses kurzen, aber vortrefflichen Werkes bereitet dem modernen Leser eine der angenehmsten Überraschungen, da man, um es ganz kurz zu sagen, darin alle Grundbegriffe (nur etwa den „Distanzkreis" ausgenommen) und alle Methoden der Zentralprojektion vor-

findet, wie man sie z. B. in dem klassischen Lehrbuch von W. Fiedler angeführt findet.[1]) Zwar finden sich einige von diesen bereits in älteren Arbeiten über die Perspektive; es scheint aber, daß diese Arbeiten Taylor ganz unbekannt waren, und daß er nur die empirischen von den Malern befolgten Regeln kannte.

Um seine Ideen klar auseinanderzusetzen, sah sich unser Verfasser gezwungen, ein ganz neues System von Fachausdrücken zu schaffen, von dem wir glauben, hier eine kleine Probe geben zu müssen, um sie mit der modernen Nomenklatur zu vergleichen. Nach ihm ist die Linearperspektive die Kunst, eine beliebige Figur auf einer beliebigen Ebene genau zu zeichnen. Was er „point of sight" nennt, ist das „Projektionszentrum", während unser „Hauptpunkt" von ihm „centre of the picture" genannt wird; die durch diese Punkte begrenzte Strecke wird von ihm, wie auch heute noch, „Distanz" genannt. Zieht man durch das Projektionszentrum die zur Tafel parallele Ebene („directing plane" = „Verschwindungsebene"), so heißen ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden oder Ebene „directing point" (oder kürzer „director") resp. „directing line". Die „intersection" einer Geraden oder einer Ebene ist die entsprechende Spur, während das Beiwort „vanishing" unseren Fluchtelementen entspricht. Schon Taylor machte darauf aufmerksam, daß die „directing" und „vanishing" Geraden einer Ebene untereinander parallel sind. Endlich versteht er unter dem „seat" eines Punktes oder einer Geraden die entsprechende Orthogonalprojektion auf die Bildebene. Nachdem der Verfasser diese Definitionen vorausgeschickt hat, stellt er vier Lehrsätze ohne Beweis auf, die zwar nicht ohne weiteres evident sind, aber nicht zu seinem Thema gehören.[2]) Sie werden sogleich auf die Grundsätze der Perspektive angewandt; unter diesen erwähnen wir den Lehrsatz, nach welchem die Geraden, welche unter sich, aber nicht zur Tafel parallel sind, denselben Fluchtpunkt haben[3]), und daß dieser Punkt mit dem Hauptpunkt zusammenfällt, wenn jene Geraden die Tafel rechtwinklig schneiden; wenn aber mehrere Geraden unter sich und zur Tafel parallel sind, so sind auch ihre Projektionen untereinander parallel. Diese Sätze und die obigen Begriffe bilden die

---

[1]) Daß dieses Zusammentreffen „une rencontre qui n'est pas un rendez-vous" ist, erhellt daraus, daß das Taylorsche Werk bis nach dem Jahre 1858 Fiedler ganz unbekannt blieb. Man sehe den Aufsatz desselben „Meine Mitarbeit an der Reform der darstellenden Geometrie in neuerer Zeit" im Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver., 1905, S. 493. [2]) Der dritte dieser Sätze ist nicht ganz richtig, da drei Geraden, wenn sie sich je paarweise schneiden, entweder in einer Ebene liegen, oder durch denselben Punkt gehen. [3]) Es ist im Grunde genommen der Satz del Montes über den Konkurspunkt.

gesamten Werkzeuge, deren Taylor sich bedient, um alle beliebigen Perspektive-Aufgaben zu lösen, d. h. nicht nur die rein deskriptiver Natur, sondern auch diejenigen, in welchen man Orthogonalitätsbedingungen begegnet[1]), wie auch diejenigen, bei denen sich unter dem Gegebenen oder Gesuchten auch die Größen von Strecken oder Winkeln befinden.[2]) Daß man auf diese Weise im Besitz der nötigen Mittel sei, um die Perspektive jeder Figur zu zeichnen, wird von Taylor an mehreren ziemlich verwickelten Beispielen gezeigt. In einem Anhang wird dann noch bewiesen, daß vieles von dem, was er auseinandergesetzt hat, auch seine Gültigkeit behält, falls die Tafel nicht eben ist.[3])

Der zweite Teil des besprochenen Werkes ist sehr kurz, aber sehr bemerkenswert, insofern er in einigen Fällen die umgekehrte Aufgabe der Perspektive mit Erfolg angreift. Um unseren Lesern eine Idee der Grenzen und der Ordnung des behandelten Stoffes zu geben, möge es genügen, die von ihm betrachteten Probleme anzuführen: I. Es sind die Projektionen A, B, C dreier Punkte einer Geraden gegeben, wie auch der Fluchtpunkt der Geraden; es soll das Verhältnis $AC:BC$ bestimmt werden. II. Es sind die Projektionen dreier Punkte A, B, C einer Geraden und das Verhältnis $AC:BC$ gegeben; der Fluchtpunkt der Geraden ist zu bestimmen. III. Man kennt die Projektion eines Dreiecks, die Fluchtgerade seiner Ebene, den Hauptpunkt und die Distanz; gesucht ist die Art des Dreiecks. IV. Gegeben ist die Projektion und die Art eines Dreiecks, ferner die Fluchtgerade seiner Ebene; der Hauptpunkt und die Distanz sollen bestimmt werden. V. Die Projektion eines Trapezes gegebener Art ist bekannt; man soll die Fluchtgerade seiner Ebene, den Hauptpunkt und die Distanz finden. VI. Man kennt die Projektion eines rechtwinkligen Parallelepipedons; der Hauptpunkt, die Distanz und die Art der Raumfigur sind zu bestimmen.

Wir halten es für überflüssig, die Auflösungen dieser Aufgaben nach Taylor zu geben, da sie von den heute üblichen nicht verschieden sind. Lieber wollen wir bemerken, daß, während die Mathematiker Taylor in den Himmel hoben, weil er es verstanden habe, so viel Gutes und Neues auf nur 80 kleine Seiten zusammengedrängt zu haben, die Künstler nicht mit ihm zufrieden waren, weil sie sein

---

[1]) Hier eine stillschweigende Anwendung der Antipolarität in bezug auf den Distanzkreis. [2]) Der von Taylor angewandte Kunstgriff besteht in der Umlegung der betrachteten Ebene auf die Bildtafel, d. h. es ist der auch von uns angewandte. [3]) Ein anderer von Newton inspirierter Anhang gehört zur Physik.

Werk zu schwierig und zu wenig praktisch fanden.[1]) Um nun aber seinen Fachgenossen die Anwendung der Taylorschen Methoden leichter zu ermöglichen, schrieb der Maler Josuah Kirby (1716—1774) ein zweibändiges Werk mit dem langen Titel: „Dr. Brook Taylors Method of Perspective made easy both in theory and practice. In two books. Being an Attempt to make the Art of perspective easy and familiar to adapt it entirely to the art of design; and to make it an entertaining study to any gentleman who shall chose so polite an amusement" (Ipswich 1754). Wir wissen nicht, welche Aufnahme diese Arbeit gefunden hat, und ob der Verfasser seinen Zweck erreicht hat. Dagegen ist es aber zweifellos, daß jeder Mathematiker, der das Werk mit demjenigen Taylors vergleicht, finden wird, daß es einen entschiedenen Rückschritt gegen jenes bedeutet, da man die sehr schätzenswerten Eigenschaften von Allgemeinheit und Bündigkeit, denen wir beim Autor begegnet sind, beim Kommentator vergebens suchen wird. Allerdings hat Kirby das Verdienst, die älteren Perspektivmethoden im Zusammenhang dargestellt und die Anwendung derjenigen Taylors zur Bestimmung der Schatten auseinandergesetzt zu haben.[2])

Einen ähnlichen Zweck hat der „Traité de perspective linéaire" (Paris 1771) von S. N. Michel; er ist aber praktischer und elementarer als das Werk von Kirby, da er nur Definitionen und Beispiele enthält.

Der Beifall, mit welchem das Werk Taylors in der mathematischen Welt begrüßt wurde, findet seine Bestätigung in einigen Erscheinungen, welche der Geschichtsschreiber nicht unerwähnt lassen darf. Zuerst das monumentale Werk „Stereography or a general Treatise of Perspective in all its Branches" (London 1748) von H. Hamilton, welches viele Erörterungen über die Taylorschen Methoden enthält. Dann kann die italienische und französische Übersetzung des Taylorschen Werkes erwähnt werden. Der Verfasser der letzteren Arbeit[3]) ist uns unbekannt; der der ersteren aber

---

[1]) Vgl. Poudra, „Histoire", p. 529. [2]) Wollte man sich von der Pflicht befreien, der chronologischen Ordnung getreu zu folgen, so konnte man außer den im Texte angeführten Ereignissen noch ein anderes erwähnen, daß nämlich ein großer Geometer wie L. Cremona es nicht unter seiner Würde hielt, die Taylorschen Methoden in die moderne Sprache der Wissenschaft zu übersetzen; man sehe den Aufsatz „I principi della prospettiva lineare secondo Taylor", welcher mit dem Anagramm Marco Uglieni im III. Bd. (1865) des „Giornale di matematiche" veröffentlicht wurde. [3]) „Nouveaux principes de la perspective linéaire; traduction de deux ouvrages: l'un en anglais du docteur Brook Taylor, l'autre en latin de M. Patrice Murdoch", Amsterdam 1759.

ist ein Franzose, der Pater Jacquier (1711—1788; vgl. III², S. 841), wegen eines vortrefflichen Kommentars zu den Newtonschen „Principia" wohlbekannt, welchen er in Gemeinschaft mit Pater Lesueur (1703 bis 1770) geschrieben hat. Auch seine Bearbeitung des Taylorschen Werkes[1]) ist mit schätzbaren Anhängen versehen, von denen einige auch für uns in Betracht kommen, da sie mathematischer Natur sind. Der, welcher die Nr. 3 trägt (die Numerierung folgt der des Originals), bezieht sich auf die Erniedrigungserscheinung, welche die Höhe eines Gegenstandes darbietet, falls er sich von dem Auge des Beschauers entfernt, und die Bestimmung der Kurve (Hyperbel), auf welche man die gleich hohen Gegenstände einer Reihe verteilen muß, damit sie einem Beschauer als von gleicher Höhe erscheinen. Die folgende Anmerkung handelt von den verzerrenden Projektionen (Anamorfosi), welche entstehen, wenn der Gegenstand sich zwischen den Augen und der Tafel befindet; Jacquier zeigt den Zusammenhang dieser Lehre mit derjenigen von den Brennlinien. Der Sinn des Wortes „Schatten", welchem man in der Überschrift und im Text der V. Note begegnet, ist derselbe, wie der von Newton (vgl. III², S. 423) angenommene, da es sich bei Jacquier um Projektionen von Figuren handelt; mit jenem großen Mathematiker schließt er folgendermaßen: „Si in planum infinitum a puncto lucidum illuminatum umbrae figurarum projiciuntur, umbrae sectionum conicarum semper erunt sectiones conicae. Quaemadmodum circulus umbra projiciendo generat omnes sectiones conicas, sic parabolae quinque divergentes umbris suis generant et exhibent alias omnes secundi generis curvas." Um zu diesem wichtigen Resultate zu gelangen, bestimmt unser Verfasser die Cartesische Gleichung der Kurve, die man erhält, wenn man einen Kegel durch eine Ebene schneidet. Dasselbe Thema wird in der folgenden Note behandelt, welche die Überschrift „Von der Projektion der Kurven" trägt; in der letzten endlich werden die Eigenschaften der in der Astronomie angewandten Projektionen vorgetragen, d. h. die Projektionen einer Kugelfläche auf eine Ebene von einem Punkte der Oberfläche („stereographische" Projektion) oder von ihrem Mittelpunkt („gnomonische" Projektion) aus; beiläufig gibt der Verfasser eine neue Auflösung der folgenden schon von Descartes und de l'Hôpital behandelten Aufgabe: „die Kreisschnitte eines Kegels zu bestimmen, dessen Mittelpunkt und kegelschnittförmige Basis gegeben sind". Aus alledem geht klar hervor, daß Pater Jacquier den Einfluß, welchen die Zentralprojektion auf die Geometrie auszuüben bestimmt war, in

---

[1]) „Elementi di prospettiva secondo li principi di Brook Taylor con varie aggiunte spettanti all' ottica e alla geometria", Roma 1755.

seiner vollen Bedeutung erkannt hat. Ja, er hat sogar zu sehen geglaubt, daß ihr Bereich sich bis auf die Analysis erstrecken könnte, wie aus den folgenden Sätzen, mit denen er seinen Band schließt, ersichtlich ist: „Ich möchte dieses Buch mit der Bemerkung schließen, daß die Projektionsmethode auch bei den höchsten Rechnungen sehr nützlich sein kann. Die Projektion von Kurven und krummen Flächen bringt oft überraschende Vereinfachungen in ihrer Quadratur hervor. Aber dieser Gegenstand erfordert eine besondere Abhandlung, welche ich ans Licht zu bringen hoffe.“ Leider wurde dieses Versprechen nie gehalten!

Dem 18. Jahrhunderte verdanken wir ein anderes Werk über die Perspektive, das sich an Bedeutung mit der Taylorschen Perspektive messen kann, Lamberts „Freye Perspective“. Seinem Erscheinen aber gingen einige andere Arbeiten voraus, die unerwähnt zu lassen, unrecht wäre.

Edmond Sebastian Jeaurat (1724—1803), zuerst „Ingénieur-géograph“, dann Professor an der Pariser Kriegsschule, ist der Verfasser eines „Traité de perspective“ (Paris 1750), aus dem ein kompetenter Fachmann[1]) wertvolle neue Konstruktionen mitteilt. Später richtete er seine Gedanken auf die Astronomie und gedachte auf dieselbe die Methoden der Wissenschaft anzuwenden, mit der wir uns jetzt beschäftigen; so entstand die Abhandlung „Projection des éclipses de soleil, assujétie aux règles de la perspective ordinaire“ (Mém. de math. et phys. prés. par divers sav., T. IV, Paris 1763, S. 318—335); aber in dieser Abhandlung findet der Geometer nichts, was ihn interessieren könnte, und auch die Astronomen lernten darin kein neues Verfahren von praktischem Wert kennen[2]).

Einem anderen Astronomen, Nicolas Ludwig la Caille (1713—1762), verdanken wir die „Leçons élémentaires d'optique“, von denen wir nicht weniger als fünf Auflagen (Paris 1750, 1756, 1764, 1808, 1810) und eine lateinische Übersetzung kennen (Venedig 1774). Für uns hat gegenwärtig nur der III. Teil dieses Werkes Interesse, weil darin die Elemente der Perspektive mit Hilfe der Rechnung auseinandergesetzt sind. Der Verfasser nimmt drei orthogonale Koordinatenebenen, von denen die xz-Ebene mit der vertikal vorausgesetzten Tafel zusammenfällt; die xy-Ebene ist die durch das Auge geführte Horizontalebene; die yz-Ebene endlich geht auch durch das Auge, steht aber zu den zwei

[1]) Poudra, „Histoire“, p. 501. [2]) R. Wolf erwähnt wohl Jeaurat in seiner „Geschichte der Astronomie“ (München 1877), sagt aber von jener Abhandlung kein Wort.

anderen rechtwinklig. Auf der Tafel wird ebenso ein rechtwinkliges Koordinatensystem festgestellt, dessen x-Achse mit derjenigen des Raumsystems zusammenfällt. Dann sind die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Raumpunktes mit denjenigen x', y' seiner Projektion durch Gleichungen folgender Art gebunden:

$$x' = xd : (d + y); \quad y' = zd : (d + y);$$

wo d die Entfernung des Projektionszentrums von der Tafel bedeutet. Marolais (s. oben) hatte diese schon gefunden; la Caille drückte sie in Worten als Proportionen aus.

Einen ähnlichen Zweck verfolgt die Programmabhandlung „Perspectivae et projectionum theoria generalis analytica" (Leipzig 1752) des berühmten Professors A. G. Kästner (1719—1800). Dasselbe gilt von dem „Essai sur la perspective pratique par le moyen du calcul" (Paris 1756) von C. Roy, „graveur en taille douce". Roy weiß sehr wohl, daß schon vor ihm die Perspektive analytisch behandelt worden ist, bemerkt aber, daß „il est étonnant qu'il ne se trouve nulle application du calcul dans les traités de perspective donnés au public depuis quelques années, et qu'il faille recourir à celui de P. Tacquet, 1618, ou du P. Lamy". Wir müssen nun aber bemerken, daß man wohl mit Recht daran zweifeln darf, daß der Verfasser die von ihm angeführten Werke gekannt habe; denn Tacquet war im Jahre 1618 erst sechs Jahre alt, konnte daher weder Pater noch Autor sein; und außerdem ist in seinem uns bereits bekannten Buch über die Perspektive von Rechnungsanwendung überhaupt keine Rede; weiterhin bemerkt Montucla[1]) von dem „Traité de perspective" Lamys (1640—1715), daß er „est plus fait pour les peintres, et plus rélatif au coloris, que propre aux géomètres". Alles das glaubten wir nicht unbemerkt lassen zu dürfen, um die Verbreitung irrtümlicher Ansichten über die Geschichte der Anwendung der Rechnung auf die Perspektive zu verhindern.

Eine bedeutendere Originalität besitzt die Abhandlung „De perspectiva in theorema unum redacta" (Bonon. Comment. III. Bd. 1755, p. 169 bis 177). Man verdankt dieselbe Eustachius Zanotti (1709—1782), einem Schüler des Eustachius Manfredi (1674—1739) und zugleich Nachfolger desselben auf dem Lehrstuhle der Astronomie an der Universität zu Bologna. Indem Zanotti sich den Gebräuchen seiner Zeit anschließt, betrachtet er zwei Grundebenen MS und LF (Fig. 66), die erste horizontal, die zweite (die Tafel) vertikal; er setzt ferner voraus, daß die Tafel zwischen dem Beschauerauge O und dem zu betrachtenden Punkte N liege. Die Gerade NO schneidet die Tafel in dem

---

[1]) „Histoire des mathématiques", T. I. 2. Aufl., p. 711.

Punkte X der Projektion von N; wenn nun weiter OF und NI zur Tafel rechtwinklig sind, so wird X auf der Strecke IF liegen und dieselbe im Verhältnis $OF:NI$ teilen. Diese Bemerkung, eine Verallgemeinerung derjenigen, die wir schon bei s'Gravesande fanden, führt zu einer ebenen Konstruktion des gesuchten Punktes X. Um zu derselben zu gelangen, ziehen wir durch N die zur Horizontalebene rechtwinklige Gerade NM und eine beliebige Hilfsgerade, die die Ebene MS in H schneiden möge; so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck MHN, dessen spitzer Winkel MHN die Neigung α jener Hilfsgeraden zu der Horizontalebene darstellt. Ist ferner ML zur Tafel rechtwinklig, so ist $ILMN$ ein rechtwinkliges Parallelogramm und daher $MN = IL$. Nehmen wir nun zuletzt noch an, daß die

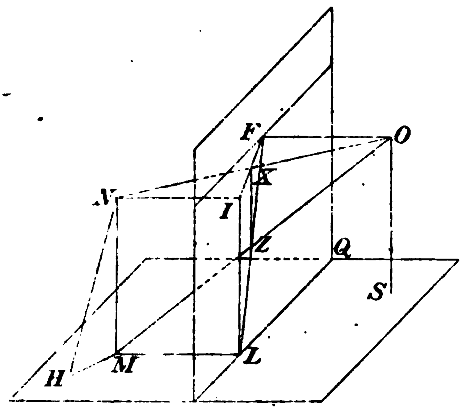


Fig. 66.

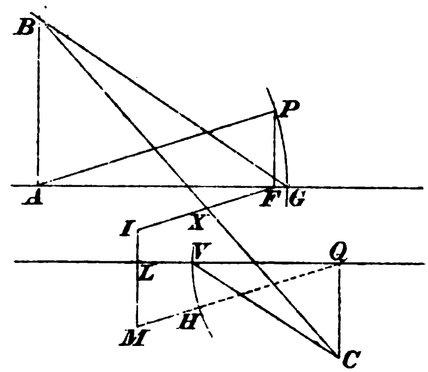


Fig. 67.

Tafel auf die Horizontalebene umgelegt werde, so wird die Fig. 67 entstehen. In dieser ziehen wir nun die zu LQ parallele Gerade FA und durch M die zu LQ rechtwinklige Gerade ML; ferner verlängern wir die Gerade ML so weit, bis die Verlängerung LI gleich der gegebenen Höhe des Punktes ist; der gesuchte Punkt X wird dann augenscheinlich auf die Gerade FI fallen. Es sei nun ferner Q der Schnittpunkt von MH mit der Grundlinie LQ und ferner die Strecke $QU = QH$. Durch U ziehen wir weiter die Gerade UC, so daß der Winkel $UCQ = \alpha$ wird, und durch F rechtwinklig zu FA die Strecke FP, die gleich der gegebenen Entfernung zwischen dem Auge und der Tafel sein soll. Die Gerade PA sei zu MQ parallel und die Strecke $AG = AP$. Zuletzt sei die Gerade AB zu PF parallel und die Gerade GB zu CU. Die Geraden FI und BC schneiden sich dann in dem gesuchten Punkte X. Um sich dessen zu vergewissern genügt es, festzustellen, daß X die Strecke FI in dem bereits angegebenen Verhältnis teilt. Zanotti beweist

dies in einer langen Erörterung euklidischen Stils, die hier wiederzugeben wir für überflüssig halten. Nur sei bemerkt, daß die obige Konstruktion eine beträchtliche Vereinfachung erfährt, falls der gegebene Punkt auf der Horizontalebene liegt; in diesem Falle wird sie mit einer schon von s'Gravesande vorgeschlagenen identisch.

Gerade von diesem besonderen Falle geht nun Zanotti in seinem „Trattato teorico-pratico di prospettiva" (Bologna 1766) aus, welcher, nach einem Biograph Zanottis[1]) eine siegreiche Konkurrenz mit demjenigen von Taylor-Jacquier bestand. In diesem findet sich nach einem Abschnitte, „welcher die Erklärungen enthält", ein zweiter mit der Überschrift „von der Ikonographie", und wo die oben angeführte Konstruktion s'Gravesandes durch die folgende ersetzt wird: Auf der Geraden, welche durch F (Fig. 68) zur Grundlinie („linea della terra") gezogen ist, trage man $FD =$ der Entfernung der Augen von der Tafel ab und auf der Grundlinie selbst $LQ = LM$; die Geraden LF und DQ schneiden sich dann in dem gesuchten Punkte Z, da er die Strecke LF in dem oben angegebenen Verhältnisse teilt. Von dieser Konstruktion leitet Zanotti in seinem III. Abschnitte („Von der Orthographie") eine andere ab, um die Perspektive eines beliebigen Raumpunktes N zu finden, die einfacher ist als die in seiner vorigen Abhandlung von 1755 auseinandergesetzte, und die daher eine Erwähnung verdient. Wir bemerken nämlich, daß aus der Fig. 66 die Proportion folgt

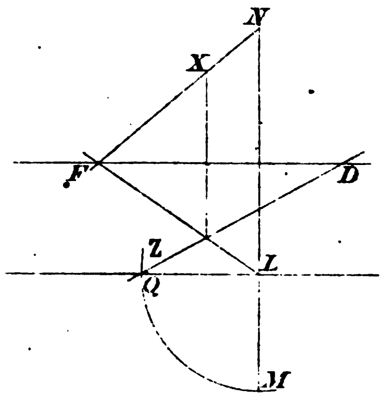


Fig. 68.

$$NM : XZ = FL : FZ,$$

und daß die Projektionen der Punkte M, N auf eine zur Grundlinie rechtwinklige Gerade fallen werden. Kehren wir nun zur Fig. 68 zurück und tragen wir auf der Verlängerung von ML die Strecke $LN =$ der Höhe des objektiven Punktes ab und verbinden F mit N, dann wird die Gerade FN die Gerade, welche durch Z parallel zu MLN gezogen wird, in der gesuchten Perspektive X von N schneiden. Der Kürze wegen wollen wir den Beweis für die Richtigkeit dieses

[1]) Man sehe den ursprünglich lateinisch geschriebenen „Elogio" von L. Palcani, welcher, ins Italienische übersetzt, als Einleitung zu der 2. Aufl. (Milano 1825) des in Rede stehenden „Trattato" dient.

Verfahrens hier nicht angeben und nur bemerken, daß Zanotti auch die Modifikationen zeigt, welche jene Konstruktion erfordert, wenn das Objekt zwischen das Auge und die Tafel fällt. — Der IV. Abschnitt des betreffenden „Trattato“ enthält die bekannten, schon von del Monte und Stevin angeführten Sätze über die Transformation eines Systems paralleler Geraden durch Projektion in ein eigentliches Büschel oder umgekehrt. Der V. Abschnitt betrifft die Schatten, der VI. Abschnitt die Perspektive von Kurven mit besonderer Berücksichtigung des Kreises, der VII. Abschnitt die Perspektive der regelmäßigen Polyeder und der VIII. Abschnitt, welcher rein praktischer Natur ist, die Perspektive der Zimmerdecken und der Bühnen. Die zwei letzten Abschnitte sind dagegen wieder theoretisch; der eine enthält eine Methode zur Zeichnung der Perspektive ohne Zuhilfenahme des Grundrisses [1]), während der andere sich mit der Wiederherstellung einer Figur beschäftigt, von der eine Perspektive bekannt ist. Das Werk schließt mit einem Nachworte „über verschiedene, die Perspektive betreffende Fragen“, welche nur für Künstler Interesse hat.

Mit Rücksicht darauf, daß es zweckmäßiger war, alle Beiträge, welche Zanotti zur Perspektive geliefert hat, im Zusammenhang zu betrachten, haben wir uns leider gezwungen gesehen, die chronologische Ordnung für einen Augenblick zu verlassen. Denn schon vor dem Erscheinen des „Trattato teorico-pratico di prospettiva“ war in Deutschland ein sehr originelles Werk veröffentlicht worden, dessen Verfasser Johann Heinrich Lambert (1728—1777) [2]) war. Während seines fast ein halbes Jahrhundert dauernden Lebens hat Lambert viele wertvolle mathematische und philosophische Arbeiten geschrieben, wobei er sich beständig bemüht, die Anwendungen der exakten Wissenschaften in das gehörige Licht zu setzen. Eine große und wohlverdiente Berühmtheit erlangte die Abhandlung „Insigniores orbitae cometarum proprietates“ (Wien 1761; Augsburg 1771), welche mindestens eine Erwähnung in jeder Geschichte der Geometrie verdiente, weil darin der schöne Satz (heute „Lambertscher Lehrsatz“ genannt) dargelegt wird: „In jeder parabolischen Bahnkurve eines Punktes hängt die Zeit, in welcher ein beliebiger Bogen beschrieben wird, nur von der entsprechenden Sehne und der Summe der Radiusvektoren der Bogenextreme ab“. Dieser Satz hat ein Analogon in dem folgenden, welchen man ebenfalls Lambert ver-

---

[1]) Wurde beim Schreiben dieses Abschnittes Zanotti etwa von Lambert beeinflußt, von dem wir gleich sprechen werden? [2]) Seine Biographie befindet sich im XXIII. Abschnitt, S. 408.

dankt: „Betrachtet man in zwei Ellipsen, welche einen gemeinsamen Brennpunkt haben, zwei Bogen, in welchen die Sehnen und die Radiusvektoren gleich sind, so ist das Verhältnis der entsprechenden Ellipsensektoren gleich der Quadratwurzel des Verhältnisses der entsprechenden Parameter". Lagrange und Laplace, auf die die Schönheit dieser Resultate großen Eindruck machte, haben versucht, dieselben analytisch zu begründen. Es gelang ihnen. Lagrange aber hat dabei gewissenhaft anerkannt, daß in diesem Falle die Geometrie Siegerin über die Analysis geblieben war.

„Die freye Perspective, oder Anweisung jeden perspectivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen"[1]), das Werk, welches Lambert einen Ehrenplatz in der Geschichte der Perspektive und der modernen Geometrie sichert, zeigt auch denjenigen, welche die wissenschaftliche Physiognomie des Verfassers nicht kennen, deutlich, daß dieser zugleich Mathematiker und Physiker war, und daß er in seinen wissenschaftlichen Studien stets seinen Blick auf die praktischen Anwendungen richtete. Sein Hauptziel war, das Zeichnen von Perspektiven unabhängig von einer vorhergehenden Zeichnung einer Orthogonalprojektion zu machen; es war ein natürlicher und wohlberechtigter Wunsch, den wir schon bei anderen angedeutet fanden, und den auch schon Taylor in seinem Werk erfüllt hatte. Lambert kannte wahrscheinlich dieses Werk nicht, jedenfalls gab er einen neuen Weg an, um jenes Ziel zu erreichen.

Diese allgemeine Bemerkung vorausgeschickt, wollen wir nun die acht Abschnitte des Lambertschen Werkes durchgehen, um ihren Inhalt kennen zu lernen:

I. Abschnitt. „Von den Gründen der Perspektive, und den Gesetzen, nach denen ebene Flächen und darauf stehende Körper entworfen werden." Als Erfahrungstatsachen nimmt Lambert die folgenden an: a) das Licht verbreitet sich geradlinig, b) die Tafel vertikal vorausgesetzt, haben die Vertikallinien eben solche Geraden als Projektionen. Er setzt ferner ein Beziehungssystem als gegeben voraus, dessen Ebenen die Tafel, die gegebene Horizontalebene und eine durch den Gesichtspunkt (oder das „Auge") gehende und zu den zwei anderen rechtwinklig stehende Ebene seien. Die Schnittlinie der Tafel mit der Horizontalebene nennt er Fundamental- oder Grundlinie („ligne de terre" in der französischen Übersetzung). Die Entfernung (Fig. 69) des Auges O von

[1]) I. Aufl., Zürich 1759; II. Aufl., ib. 1774. Man sehe auch „La perspective affranchie de l'embarras du plan géometral", Zurich 1759.

der Horizontalebene OS, heißt die „Höhe des Auges“, der Fußpunkt P des von O auf die Tafel gefällten Lotes ist der „Augenpunkt“ und die Länge der Strecke OP die „Entfernung“; endlich nennt er die durch den Augenpunkt gehende horizontale Gerade die „Horizontallinie“. Q sei der vierte Eckpunkt des rechtwinkligen Parallelogramms $POSQ$, C ein beliebiger Punkt der Horizontalebene und c die Projektion desselben. Ist q der Schnittpunkt der Geraden CS mit der Grundlinie, so wird q offenbar die Horizontalprojektion von c sein. Wir ziehen nun durch C in der Horizontalebene eine beliebige Hilfsgerade, welche die Grundlinie in M schneiden möge, und durch O die zu CM parallele Gerade, welche die Tafel in dem auf der Horizontallinie gelegenen Punkte p schneidet; pM wird die Projektion von lM sein. Alle zu CM parallelen Geraden haben als

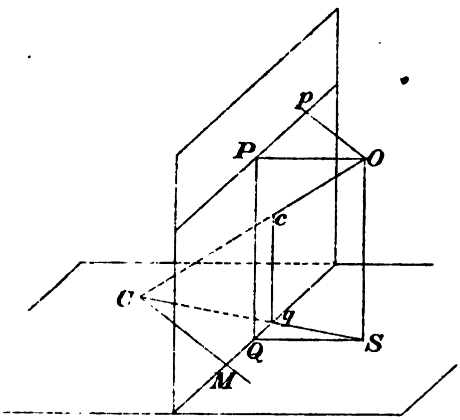


Fig. 69

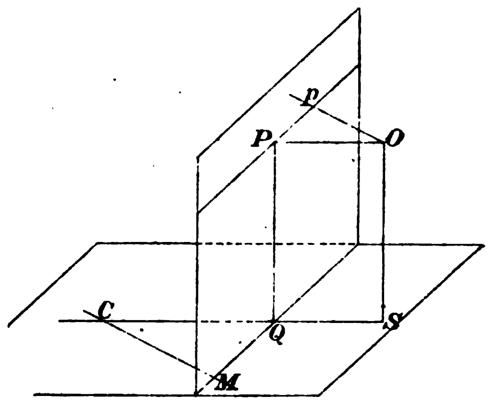


Fig. 70.

Projektionen Geraden, welche durch p gehen, einen Punkt, welcher nur von dem Winkel α abhängt, welchen sie mit der Grundlinie, oder von demjenigen $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ („Deklination“ genannt), welchen sie mit einer zur Grundlinie rechtwinkligen Geraden bilden. Um eine dieser Geraden festzustellen empfiehlt es sich (Fig. 70) den Punkt zu geben, in dem sie die Gerade SQ schneidet. Dann bemerken wir als Folge der dargelegten Konstruktion, daß Winkel $POp = QCM = \beta$ und deshalb auch $Pp = OP \operatorname{tang} \beta$ ist. Wenn nun β bekannt ist, so können wir von P aus auf der Horizontallinie die Strecke $OP \operatorname{tang} \beta$ abtragen. Wir erhalten so zwei Punkte, durch deren einen a die Projektionen aller Geraden der Horizontalebene, welche mit der Grundlinie den Winkel β bilden, gehen. Setzt man ferner voraus, daß $OP = PQ$ sei, so werden die Dreiecke PQp, POp kongruent

sein und infolge dessen auch die Winkel PQp, FOp und β. Beschreibt man dann auf der Tafel einen Kreis mit Q als Mittelpunkt und QP als Halbmesser und zieht durch q die auf der Tafel liegenden Geraden, welche mit QP die Winkel von 1^0, 2^0, ... bilden, so wird auf der Horizontallinie eine Reihe („Skala") von Punkten entstehen, welche wir entsprechend mit 1^0, 2^0, ... bezeichnen wollen. Mit Hilfe dieser Skala (welche sich schon bei la Caille vorfindet) kann man viele Konstruktionen auf der Tafel ausführen, sobald man bemerkt hat, daß zwei Gerade, deren Deklinationen β und β' sind, untereinander den Winkel $\beta' - \beta$ bilden. Aus dieser Beobachtung ergibt sich, daß, wenn zwei Geraden der Horizontalebene untereinander den Winkel $\varkappa$ bilden, ihre Projektionen durch zwei Punkte obiger Skala gehen, deren Zahlen den Unterschied γ haben. An dieser Stelle führt Lambert eine nur ihm eigentümliche Nomenklatur ein, die aus den folgenden Sätzen erhellt: I. Zwei Gerade der Tafel, welche durch denselben Punkt der Horizontallinie gehen, werden „parallele" genannt (weil sie die Projektionen paralleler Geraden sind). II. Eine auf der Horizontallinie rechtwinklig stehende Gerade heißt perpendikular (weil sie die Projektion einer Vertikallinie ist). III. Jedem Winkel auf der Tafel wird die Geradenanzahl zugeschrieben, welche der entsprechende Winkel der Tafel enthält. IV. Endlich behält auch das Bild jeder Strecke das Maß ihrer Länge auf der Horizontalebene bei. Mit Hilfe dieser Nomenklatur (welche die Grundlage einer „perspektivischen Geometrie" bildet) wird die Bedeutung folgender von Lambert aufgelösten Aufgaben klar werden: I. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden parallel ist. II. Durch einen auf einer Geraden gegebenen Punkt eine andere Gerade zu ziehen, welche mit der ersteren einen gegebenen Winkel bildet. III. Wenn die Seiten einer Figur und ihre Lage nebst den Winkeln gegeben sind, die Figur zu entwerfen. IV. Die Perspektive eines Kreises zu konstruieren, von dem man eine Sehne kennt, die einem Bogen von gegebener Größe entspricht. Betreffs der Lösung der metrischen Fragen bemerkt Lambert, daß, wenn $A'B'C'D'$ ein Viereck auf der Tafel ist, und wenn $A'B'$ und $C'D'$ in der Horizontallinie sich schneiden, während $A'C'$ und $B'D'$ untereinander parallel sind, $ABCD$ ein Parallelogramm sein wird und daher $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$ sind. Kennt man daher eine Skala, deren Träger eine zur Grundlinie parallele Gerade ist, so ist es leicht, jede zu derselben parallele Strecke zu messen. Die analoge Frage in bezug auf eine beliebige Strecke ist schwieriger; ihre Lösung gibt Lambert mit Hilfe des folgenden Problems: „Gegeben auf der Tafel ein Winkel, dessen Seite

$S'Q'$ horizontal ist. Der Punkt S' ist derart zu bestimmen, daß $RS = RQ$ sei".

II. Abschnitt. „Von der geschickten Lage des Auges und der Entfernung der Tafel von demselbigen." Bemerkungen und Ratschläge für die Künstler bestimmt.

III. Abschnitt. „Von verschiedenen Instrumenten, dadurch die Ausübung der Perspektive verkürzt wird." Das hauptsächlichste Instrument, dessen Gebrauch von Lambert angeraten wird, ist der „optische" oder „Proportionszirkel", dessen Anwendung, wie wir gesehen haben (S. 590), die Veranlassung zu einem Streit zwischen Desargues und Vaulezard um die Priorität der Erfindung gab. Lambert scheint diese Vorgänger nicht gekannt zu haben. Aber er war so überzeugt von dem Nutzen des Proportionszirkels, daß er ihn zum Gegenstand einer besonderen Publikation machte.[1])

IV. Abschnitt. „Die Ausübung obiger Regeln in ausführlichen Exempeln." Hier werden die im I. Abschnitt gegebenen Vorschriften auf die Zeichnung der Schatten angewandt.

V. Abschnitt. „Von der Entwerfung schiefliegender Linien und Flächen, und dessen, was darauf vorkommt." In diesem wichtigen Teil seines Werkes hat sich Lambert die Aufgabe gestellt, die Ergebnisse des I. Abschnitts in der Weise zu modifizieren, daß sie auch für den Fall anwendbar sind, daß die Tafel nicht vertikal ist. Unter den von ihm eingeführten Begriffen mögen diejenigen von der Spur („Knotenlinie" nach Lambert) und der Fluchtlinie („Grenzlinie" nach Lambert) einer Ebene (§§ 165—167), und der Begriff der entsprechenden Punkte einer Geraden angeführt werden. Für den Fall, daß die Orthogonalprojektion des Gesichtspunktes auf der Horizontalebene auf die Grundlinie fällt, gibt Lambert die Anweisung, auf der Horizontallinie der Tafel eine Skala zu entwerfen, analog derjenigen, welche im I. Abschnitt konstruiert und benutzt wurde. Unter den zahlreichen von ihm aufgelösten Aufgaben wollen wir diejenige erwähnen, welche die Gerade zu zeichnen versucht, die eine Ebene rechtwinklig schneidet, um den Leser darauf aufmerksam zu machen, daß das Lambertsche Verfahren sich vom unsrigen weiter entfernt, als das von Taylor angewandte.

VI. Abschnitt. „Verschiedene Anmerkungen und Beispiele, so zu Erläuterung dessen dienen, was erst von der Zeichnung schiefliegender Flächen gelehrt worden." Den Praktikern gewidmet!

---

[1]) „Kurzgefaßte Regeln zu perspektivischen Zeichnungen vermittelst eines zu deren Ausübung so wie auch zu geometrischen Zeichnungen eingerichteten Proportionalzirkels", Augsburg; I. Aufl. 1768; II. Aufl. 1770.

VII. Abschnitt. „Von der perspektivischen Entwerfung aus einem unendlich entfernten Gesichtspunkt." Die so entstehende Projektion wird von Lambert (nur in der 1. Auflage) „orthographisch", „militär" oder „kavalier" genannt. Er bemerkt, daß es dasselbe sei, eine endliche Figur von einem unendlich entfernten Mittelpunkt aus oder eine unendlich kleine Figur von einem endlich entfernten Zentrum aus zu projizieren. Die Wichtigkeit dieser Beobachtung für die Lehre von den Schatten wird ausführlich dargelegt, für den Fall, daß die Lichtquelle im Unendlichen liegt.

Der VIII. (letzte) Abschnitt behandelt die „Umgekehrten Aufgaben der Perspektive", ein Thema, welches, wie wir sahen, schon von del Monte und Vaulezard gestreift wurde, und dessen theoretische wie praktische Wichtigkeit außer Zweifel steht. Es handelt sich hier darum, die Bedingungen zu bestimmen, unter welchen eine gegebene Perspektive entworfen wurde, d. h. die Lage des Gesichtspunktes und der Tafel zu finden. Im gewöhnlichen Leben pflegt man diese Untersuchung durch praktische Versuche anzustellen, wenn man ein Gemälde betrachtet. Die Tatsache, daß Lambert jene Frage rationell lösen und ferner zwei orthogonale Projektionen eines Körpers aus einer Projektion ableiten wollte, hat dazu geführt, daß man ihn zu den Begründern der heutigen Photogrammetrie rechnet.[1]) Ausdrücklich sagt er zwar nicht, daß jene Aufgabe unbestimmt ist; stillschweigend aber wird diese Unbestimmtheit zugestanden und durch Hinzufügung neuer Angaben vermindert.[2]) In zahlreichen und interessanten Beispielen wird von Lambert die Auffindung der Lage des Gesichtspunktes in bezug auf die vertikal vorausgesetzte Tafel ausgeführt. Die Lösung des obigen Problems ist keine erschöpfende und konnte es auch nicht sein, da die Erscheinungsformen, unter denen es einem begegnen kann, unendlich sind; die Fälle aber, welche Lambert betrachtet und behandelt, sind sehr geschickt gewählt und behandelt.

Eine Fortsetzung, gewissermaßen einen Anhang zu diesen Abschnitten der „Freyen Perspective" bildet eine von Lambert hinterlassene Abhandlung mit dem Titel: „Die vornehmsten und brauchbarsten Grundsätze der Perspective, aus Betrachtung einer geometrisch gezeichneten Landschaft abgeleitet" (Hindenburgs Archiv 1799). Dieser Titel könnte den Glauben erwecken, daß diese Arbeit rein

---

[1]) Vgl. die schöne Rede von J. Schur, „J. H. Lambert als Geometer"; Jahresber. der Deutschen Mathem.-Ver., Bd. XIV, 1905, S. 196. [2]) Z. B. setzt er an einer Stelle voraus, daß ein auf der Tafel gezeichnetes Viereck die Perspektive eines Quadrates oder eines Rechtecks gegebener Art sei.

didaktischer Natur wäre; aber der folgende Auszug wird zeigen, daß ihr Zweck ein ganz anderer war, denn, um der Schlußkette Lamberts folgen zu können, ist es unbedingt notwendig, schon die Prinzipien der Perspektive zu kennen. Er bemerkt zunächst, daß die Maler die Regeln der Perspektive nicht befolgen; daher schlägt er eine Unterscheidung zwischen „Landschaft" und „Prospekt" vor, indem er den letzteren Namen den Landschaften vorbehält, bei denen jene Prinzipien streng befolgt werden. Indem er sodann einen (aus einem Turm und einem Haus bestehenden) Prospekt als gegeben voraussetzt, bestimmt er mit Hilfe desselben und durch ein sehr geistreiches Verfahren den „Horizont" und den „Augenpunkt"; dieses Verfahren hängt seiner Natur und seinem Zweck nach mit dem letzten Abschnitt der „Freyen Perspective" eng zusammen. Lambert schließt die Darlegung derselben durch die folgende Bemerkung: „Das bloße Augenmaß ist bei Zeichnungen von Aussichten etwas sehr Mißliches, und so sehr man auch den Malern die Übung desselben einschärft und den Gebrauch des Zirkels untersagt, so sehr könnten die Käufer und Liebhaber sich ausbitten, daß wenigstens bei Zeichnungen von Landschaften und Aussichten der Gebrauch des Lineals und Zirkels nicht nur gestattet, sondern als etwas schlechthin Unentbehrliches gefordert werde." Wurden diese vernünftigen Ratschläge von den Künstlern und ihren Mäcenaten befolgt? Wir haben Gründe genug, um daran zu zweifeln!

Fünfzehn Jahre nach der Veröffentlichung der „Freyen Perspective" machte sich das Bedürfnis nach einer Neuauflage fühlbar. Lambert beschränkte sich dabei auf einige kleinere Verbesserungen des Textes.[1]) Jedoch fügte er zu dem alten Bande einen neuen hinzu, welcher wichtige „Anmerkungen und Zusätze" enthält. In dem ersten dieser Zusätze gibt Lambert, mit freier Benutzung der Geschichtswerke des Montucla und Saverien, eine flüchtige Übersicht über die wichtigsten Arbeiten über Perspektive. In einem anderen gibt er kleine Zusätze zu der behandelten Lehre, welche sehr wohl auch im Text selbst hätten Platz finden können. Bei zwei längeren Zusätzen müssen wir einen Augenblick verweilen. In dem einen Zusatz (zu § 12) setzt Lambert die zahlreichen Verfahren zum Entwerfen von Perspektiven auseinander, welche vor ihm bereits durch Dürer, Danti usw. empfohlen worden waren; andere werden von ihm selbst hinzugefügt. Der zweite wichtige Zusatz reiht Lambert zu den Begründern der „Geometrie des Lineals".[2]) Da wir keinen Raum

[1]) Die Vermehrung der Paragraphen von 310 auf 315 ist nur scheinbar und die Folge eines Versehens, da dem § 310 der § 315 folgt. [2]) Chasles, „Aperçu historique", p. 186; Cremona, „Geometria projettiva", Torino 1873, p. 123.

haben, um den Inhalt desselben hier ausführlich wiederzugeben, wollen wir uns damit begnügen, die behandelten Aufgaben wiederzugeben und zu bemerken, daß ihre Auflösungen auf denselben Prinzipien beruhen, welche Lambert zur „perspektivischen Geometrie“ (m. s. S. 609) geführt haben:

I. Durch vier gegebene Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, sondern von denen jeder außerhalb des von den drei übrigen gebildeten Dreiecks liegt, vermittels des bloßen Lineals mehrere Punkte zu bestimmen, die mit den vier gegebenen in dem Umkreis einer Ellipse liegen. (Lambert bemerkt ausdrücklich, daß die Aufgabe unbestimmt ist, daß sie aber durch Hinzufügung eines fünften Punktes aufhört, unbestimmt zu sein, und so gelangt man zu einer sehr leichten Konstruktion des durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnittes.) II. Wenn ein Parallelogramm gegeben ist, bloß mit einem Lineal durch einen gegebenen Punkt eine Linie zu ziehen, die mit einer gegebenen Geraden parallel ist.[1]) III. Ein Kreis nebst seinem Mittelpunkt ist gegeben; auf eine gegebene Gerade von einem Punkt die Senkrechte mit bloßem Lineal zu ziehen. IV. Eine Linie sei in zwei gleiche Teile geteilt; dieselbe mit bloßem Lineal in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen.[2]) V. Es sind zwei Linien gegeben, welche sich in einem Punkte außerhalb der Tafel schneiden; mit bloßem Lineal und ohne Verlängerung dieser Linien durch einen gegebenen Punkt eine Linie zu ziehen, welche durch den Schnittpunkt der gegebenen Linien hindurchgeht. (Die von Lambert empfohlene Konstruktion ist noch heute in Gebrauch; sie stützt sich auf die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks.) VI. Zwei Linien sind beide in zwei gleiche Teile geteilt; zu einer gegebenen Geraden eine Parallele zu ziehen. VII. Den Pythagoraeischen Lehrsatz mit bloßem Lineal perspektivisch zu zeichnen. VIII. Ein Kreis und dessen Mittelpunkt ist gegeben; einen beliebigen Bogen desselben in zwei gleiche Teile zu teilen. IX. Zwei Strecken AC und BD mögen sich im Punkte E derart schneiden, daß $AE = EC$, $ED = 2BE$ ist. Es soll mit bloßem Lineal ein Parallelogramm gezeichnet werden. X—XII. Zeichnung von Parallelen mit anderen Systemen von Daten. XIII. Wenn der Winkel ABE gleich dem Winkel EBF ist, mit bloßem Lineal auf EB durch B die Senkrechte zu ziehen.[3])

---

[1]) Cremona, a. a. O., p. 57. [2]) Ebenda, p. 58. [3]) Wollte man alle Beiträge aufzählen, welche Lambert zur Perspektive gegeben hat, so müßte man auch die kurze Arbeit „Sur la perspective aërienne“ (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, année 1774, p. 74—80) erwähnen, wo die Anwendung der Mathematik auf die „dégradation de la couleur des objets par rapport à leur éloignement et à la constitution de l'atmosphère“ versucht wird; im Text haben

Um unseren Lesern eine Idee der von Lambert angewandten Verfahren zu geben, möge die Auflösung der V. Aufgabe dienen: „Sind AC und BD die Geraden, die in einem Punkte außerhalb der Tafel zusammenlaufen, und E der gegebene Punkt; durch E ziehe man zwei Geraden AH, GB und dann AB, GH, bis zu ihrem Durchschnitt K; aus K ziehe man die Gerade KCD und dann CH und GD; ist F der Durchschnittspunkt der letzteren, so ist EF die gesuchte Gerade.“

Die Ideen und Methoden Lamberts, welche, wie wir sahen (S. 606), wahrscheinlich schon auf E. Zanotti einen Einfluß ausübten, blieben ohne jegliche Wirkung auf einen italienischen Architekten, Maler und Professor Baldassare Orsini (1732—1810), welcher hier eine beiläufige Erwähnung verdient als Verfasser eines dreibändigen Werkes „Della geometria e prospettiva pratica“ (Rom 1773), in dem wir nichts Neues gefunden haben. Dagegen haben jene Ideen und Methoden einen warmen Bewunderer an einem deutschen Universitätsprofessor Johann Gustav Karsten (1752—1787) (vgl. S. 357) gefunden, der aus ihnen die Anregung zur Abfassung eines Teils seines kolossalen (achtbändigen) Werkes „Lehrbegriff der gesamten Mathematik“ (Greifswald 1767—1777) schöpfte, das er während seines Professorats in Halle a. S. herausgab.[1]) Es ist der vorletzte Band (1775) dieses Handbuchs („Die Optik und die Perspektive“), noch genauer sein II. Teil (S. 110 bis 928), wo der auch vom Verfasser zugestandene Einfluß von Lambert unverkennbar ist.[2]) Aber Karsten hat, wenn er auch Begriffe und Verfahren auseinandersetzt, die nicht sein Eigentum waren, in dieselben ein Element eingeführt, dessen Hilfe Lambert abgelehnt hatte, nämlich die Rechnung; auf diese Weise gelang es ihm, zu den Resultaten seines Vorgängers manches hinzuzufügen.

Nicht alle Kapitel der genannten Karstenschen Arbeit verdienen eine besondere Erwähnung in einer Geschichte der Linearperspektive; keines aber darf von dem außer Betracht gelassen werden, der eine

---

wir derselben keine Erwähnung getan, da sie eher zur Physik als zur Geometrie gehört (vgl. S. 580).

[1]) Mit Recht bemerkt Karsten, daß die von Lambert vorgeschlagenen Konstruktionen so einfach sind, daß sie nicht von der Kritik betroffen werden, die die Inauguraldissertation A. L. F. Meisters (1724—1788) „Instrumentum scenographicum, cujus ope ichonographia et orthographia invenire scenographiam exponit“ (Göttingen 1753) enthält. [2]) Die Perspektive in das System der gesamten Mathematik einzufügen, entspricht einer Gewohnheit, die man bis auf das Mittelalter zurückführen kann, und welcher sich, schon vor Karsten, A. G. Kästner (1719—1780) in seinem Unterricht getreulich anschloß; man sehe (vgl. S. 355) seine „Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie, ebene und sphärische Trigonometrie und Perspektive“ (I. Aufl., Göttingen 1758).

klare Idee von der Arbeit sich oder anderen verschaffen will. Indem Karsten der Gewohnheit seiner Zeit folgt, geht er zunächst von der Voraussetzung aus (I. Abschnitt), daß die Tafel vertikal, und daß ferner eine horizontale Ebene gegeben sei, auf welche alle betrachteten Figuren orthogonal projiziert werden; er weist sofort darauf hin, daß, wenn man die Perspektive der Punkte jener Horizontalebene zu finden weiß (Problem der „perspektivischen Ichonographie"), es dann auch leicht ist, diejenige eines beliebigen Punktes zu zeichnen (Problem der „Scenographie"). Nachdem er so die Wichtigkeit der perspektivischen Ikonographie außer Zweifel gesetzt hat, wendet sich der Verfasser zu ihrer Entwicklung und Anwendung (Abschnitt II bis IV) — wobei er interessante historische Nachrichten gibt — und den Gebrauch des Proportionszirkels erklärt, dessen Anwendung auf die Perspektive er auf Desargues zurückführt. Im V. Abschnitt werden in einfacher Weise die Formeln gefunden, welche die Cartesischen orthogonalen Koordinaten x, y der Horizontalebene mit den Koordinaten t, u ihrer Perspektive verbinden; in ihrer einfachsten Form lauten diese Formeln folgendermaßen:

$$t = Dx : L - x, \quad u = Dy : L - x,$$

deren Ähnlichkeit mit den bereits von Marolais und la Caille (s. S. 603) gefundenen augenscheinlich ist; D und L sind gewisse Konstanten der Aufgabe. Im VI. Abschnitt werden die Prinzipien der Szenographie gelehrt und in dem folgenden die Vorschriften zur Ausführung der Perspektive auf eine nicht vertikale Tafel. Hier verallgemeinert der Verfasser unter anderem auch die obigen Formeln und erweitert so bedeutend ihr Anwendbarkeitsgebiet; z. B. lernt man so alle Prinzipien zur Zeichnung der Schatten, Prinzipien, welche im XI. Abschnitt, unter der Überschrift „Allgemeine Theorie der Sciagraphie"[1]), entwickelt sind. Nicht der Wissenschaft, sondern der Kunst sind die Abschnitte IX und X gewidmet. Hier werden die Vorschriften gegeben, nach welchen die Lage des Augenpunktes gewählt werden muß. Weiter wird auf die Übelstände hingewiesen, die entstehen, wenn man eine Perspektive von einem Punkte aus betrachtet, der mit dem vom Zeichner der Perspektive gewählten Augenpunkte nicht zusammenfällt. Um nun aber solche Übelstände vermeiden zu können, sind Normen nötig, die dazu befähigen, die Lage des Augenpunktes für eine gegebene Perspektive zu finden; sie werden im

---

[1]) Nach Karsten wurde dieser Name zum ersten Male in der Abhandlung von J. M. Hase (1684—1742), „Sciagraphiae integri tractatus de constructionis mapparum omnis generis" (Lipsiae 1717) gebraucht.

XII. Abschnitt gelehrt, welchen man, wie den VII. Abschnitt der „Freyen Perspective", als einen Teil der heutigen Photogrammetrie ansehen kann. In der weiteren Erörterung geht Karsten von der Voraussetzung aus, daß das Projektionszentrum in das Unendliche rücke, und bestimmt die Modifikationen (Abschnitt XIII und XIV), welche die vorigen Konstruktionen, Formeln und Sätze erleiden; wir müssen dazu bemerken, daß unser Geometer, dem Beispiel Lamberts (I. Auflage) folgend, den Namen „orthographisch" auf alle Parallelprojektionen anwendet. Die Abschnitte XV—XVII enthalten eine interessante Theorie von den Kegelschnitten als Perspektiven des Kreises betrachtet. Als eine Fortsetzung derselben können die Abschnitte XXVIII bis XXX angesehen werden, wo die Projektionen der Kegelschnitte untersucht werden und insbesondere die Frage behandelt wird, welche Lage man dem Augenpunkt geben muß, um von einem gegebenen Kegelschnitt eine Projektion gegebener Art zu erhalten. Die übrigen Abschnitte XIX—XXVIII behandeln einen Gegenstand, welchen man heute lieber der mathematischen Geographie oder der Geodäsie zurechnet, nämlich die verschiedenen Arten der Projektion einer Kugel auf eine Ebene: stereographische, orthographische und Zentralprojektion. Es hat keinen Zweck, hier dabei zu verweilen.

Der Erfolg des Karstenschen Werkes erhellt daraus, daß sehr bald der Wunsch nach einer zweiten Auflage laut wurde. Diese Neuauflage wurde nach einem etwas anderen Plan hergestellt und trägt auch den Titel „Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften" (1778—1786). Hier wird im IV. Band, betitelt „Die optischen Wissenschaften" (1780), die Perspektive behandelt; aber während ihr in der 1. Auflage 818 Seiten gewidmet waren, muß sie sich in der zweiten mit ungefähr 100 Seiten begnügen. Die Abschnitte über die Kegelschnitte und die Kugelprojektionen fehlen hier nämlich; indem so die Behandlung von diesen ihr fremden und hinderlichen Bestandteilen befreit wird, wird sie zugleich einfacher und nähert sich den modernen Behandlungen dieser Disziplin.

Das wichtigste der elementaren Verfahren zur eindeutigen Darstellung einer Kugelfläche auf der Ebene wurde kurz darauf von einem berühmten Lehrer behandelt in seiner Antrittsvorlesung an der Universität Halle. Wir meinen die Abhandlung „Eine geometrische Entwicklung der Eigenschaften der stereographischen Projektion" (Halle 1788), in der Georg Simon Klügel die Überlegenheit der Geometrie über die Analysis beweisen wollte in Fragen, welche kurz vorher Karsten mit Hilfe der analytischen Trigonometrie behandelt hatte. Um seinen Zweck zu erreichen, hat der Verfasser nicht nur die charakteristischen Eigenschaften der ste-

reographischen Projektion geometrisch abgeleitet, sondern auch, durch Anwendung dieses Verfahrens, die Hauptfragen der sphärischen Trigonometrie und der Gnomonik ohne Zuhilfenahme der Rechnung gelöst.

Im Monat März desselben Jahres (1788) erschien in Verona das Büchlein „I. Torelli Veronensis, Elementa perspectivae libri II. Opus postumum recensuit et edidit J. B. Bertolini". Sein Verfasser ist Joseph Torelli[1]), welcher in Verona am 3. November 1721 geboren wurde, die juristische Doktorwürde in Padua erhielt und sich dann vollständig der Literatur und den Wissenschaften widmete. Außer einem an Poleni gerichteten Briefe, welcher „De rota sub aquis circumacta" (Verona 1747) handelt, hat er eine Arbeit philosophischer Natur „De nihilo geometrico" (Verona 1758; vgl. Absch. XXVI) und eine andere in euklidischem Stil „Geometrica" (Verona 1769) geschrieben, in welcher die folgenden drei Probleme aufgelöst sind: I. Durch zwei in der Ebene eines Kreises gelegenen Punkte einen anderen Kreis durchgehen zu lassen, welcher den ersten berührt. II. Gegeben zwei geradlinige Strecken; über denselben zwei ähnliche Kreissegmente zu beschreiben, deren Bogen sich berühren. III. In einem Punkte der Quadratrix des Dinostratus[2]) die Tangente zu ziehen[3]). Torelli starb in seinem Vaterlande am 18. August 1781. Die Früchte seiner langjährigen Forschungen über die archimedischen Handschriften wurden von der Universität Oxford angekauft und durch A. Robertson veröffentlicht; so entstand ein prächtiger Folioband, welcher Torelli die Unsterblichkeit sichert. Handschriftlich hinterließ Torelli auch einige Kapitel über die Perspektive, wozu er als Einleitung eine Abhandlung schreiben wollte, um zu beweisen, daß diese Lehre bereits den Alten wohl-bekannt war. Sie bilden kein eigentliches Lehrbuch, da sie Erklärungen, aber nicht Methoden enthalten; man darf auch nicht verschweigen, daß die häßlichen Figuren den Text eher verdunkeln, als ihn erläutern und dazu beigetragen haben werden, das Buch bei den Künstlern in Mißkredit zu bringen.

---

[1]) Vgl. die Lobrede, welche der berühmte Dichter Pindemonte auf Torelli schrieb, und die im III. Bd. der „Mem. della Soc. It. delle Scienze" (1784) veröffentlicht wurde. [2]) Die als „quadratrice scalena" bezeichnete Kurve ist von der gewöhnlichen Quadratrix nicht verschieden. [3]) Torelli gibt den griechischen Text (und die lateinische Übersetzung) des Passus der „Collectiones mathematicae" von Pappus, welcher jene Kurve betrifft, nach einer Vatikan-Handschrift, welche wahrscheinlich dieselbe ist, welche Hultsch benutzte; er schlug einige Varianten vor, welche dieser Gelehrte nicht gekannt zu haben scheint.

Die Vorläufer Monges.

Die „perspektivische" Literatur des 18. Jahrhunderts, welche unter so guten Auspizien mit s'Gravesande begann, erreichte ihren höchsten Glanzpunkt mit Taylor und Lambert, fand in Zanotti und Karsten würdige Fortsetzer, offenbart aber dann in Torelli unzweideutige Zeichen eines Verfalles[1]). Wenn auch noch einige der späteren Werke sich bedeutend über das Niveau der Arbeit Torellis erhoben haben, so kann man doch sagen, daß die Ära der Perspektive mit dem eben besprochenen Jahrhundert ihr Ende erreicht hat. Das hat seinen Grund darin, daß gerade an der Wende des 18. Jahrhunderts ein neuer Zweig der Mathematik eine bis dahin ungeahnte Blüte und einen gewaltigen Ertrag hervorbrachte, welcher den bisher von der Perspektive eingenommenen Platz eines „Verbindungsstriches" zwischen der Mathematik und den Zeichenkünsten einnehmen sollte. Um aber die Quelle dieses neuen mächtigen Gedankenflusses aufzudecken, müssen wir um einige Jahrhunderte zurückkehren. Und, während wir in der Malerei die Ursprünge der modernen Perspektive gefunden haben, müssen wir uns nun zur Architektur wenden, um die Genealogie der neuen Lehre zu bestimmen und ihre Geburtsurkunde zu erlangen.

Zu diesem Zweck möge zunächst bemerkt werden, daß Vitruvius, der berühmte Baumeister der Epoche des Julius Cäsar und Augustus, im I. Buch seiner „Architectura", von der „ichonographia" und „orthographia", d. h. dem „Grundriß" und „Aufriß" eines Gebäudes, als Hilfsverfahren zur Darstellung desselben, spricht; er hat diese Methoden wahrscheinlich von den Griechen entlehnt, hat aber das Verdienst, sie allgemein verbreitet zu haben, so daß seine Nachfolger sie ohne Ausnahme anwandten. Aber diese Urform einer sehr bekannten Methode der darstellenden Geometrie gibt zwar eine leichte und bequeme Art an, um die dreidimensionalen Figuren darzustellen, zeigt aber den Weg nicht, um auf dieselben die gewöhnlichen Operationen der Geometrie anzuwenden. Und zwar lehrt sie es deshalb nicht, weil der reine Architekt dessen nicht bedarf. Aber der praktische Architekt muß auch die Handwerker bei der Bearbeitung des Materials, beim Holz- und Steinschnitt anleiten; daraus erwuchs die Notwendig-

[1]) Ein im 18. Jahrhundert erhaltenes Resultat rein theoretischer Natur verdient hier noch angeführt zu werden; wir meinen den Satz, daß die Ordnung einer Kurve durch Projektion nicht erhöht werden kann: vgl. Waring, „Proprietates curvarum algebraicarum" (Cantabridgae 1772), Prop. 24—26. Vgl. S. 522.

keit einer neuen Hilfswissenschaft, der „Stereotomie". Empirische Vorschriften dieser Lehre sind im „Traité d'architecture" zu finden, welchen im Jahre 1757 Philibert de Lorme, ein Almosenier Heinrichs II., herausgab, ferner in den „Sécrets d'architecture" (La Flèche 1642) von Maturin Jousse, und vollständiger in dem Werk „Architecture des voûtes ou l'art de trait et coupe des pierres" (Paris 1634) von Pater Derand, dessen Regeln in den Abschnitt „De lapidum sectionum" des berühmten „Mundus mathematicus" (1674) von Milliet-Dechales übergegangen sind. Derjenige aber, welcher zuerst auch diesen Teil der Ingenieurwissenschaft streng wissenschaftlich zu behandeln begann, ist wiederum Desargues, von dem wir noch ein Werkchen über den Steinschnitt besitzen (Oeuvres de Desargues, éd. Poudra, I. Bd., p. 303—362); aber da er auch bei dieser Gelegenheit sich damit begnügte, seine Gedanken nur unklar an einem Beispiele auseinanderzusetzen, so blieb er fast unverständlich und daher ohne Einfluß, auch nachdem Bosse seinen verehrten Lehrer kommentiert hatte[1]); wer heute die Methoden von Desargues kennen zu lernen wünscht, wird im Poudraschen Kommentar (Oeuvres de Desargues, I. Bd., p. 362—382) eine wertvolle Hilfe dazu finden, vermittels deren er leicht ihre Analogie mit denjenigen wahrnehmen wird, welche unsere darstellende Geometrie anwendet, um die Aufgaben von den mehrkantigen Ecken und den Polyedern aufzulösen.

Das, was Desargues und Bosse nicht erreichen konnten, nämlich der Stereotomie eine beständig rationelle Richtung zu geben, gelang ein Jahrhundert später Amédée François Frézier. Dieser, 1682 in Chambéry geboren, war von seiner Familie zum Studium der Jurisprudenz bestimmt; aber seine Abneigung gegen die Pandekten war so groß, daß er im Jahre 1700, gegen den Willen seiner Eltern, in die französische Infanterie eintrat; sieben Jahre später wurde er gewürdigt, in das Ingenieurkorps einzutreten; die französische Regierung vertraute ihm mehrere wichtige Missionen an (unter anderen eine nach der Insel St. Domingo im Jahre 1719); zuletzt (1740) wurde er Direktor der Festungswerke der Bretagne; im Jahre 1746 wurde er zur Ruhe gesetzt und starb am 26. Oktober 1773. Gerade nun auf seiner Rückkehr von Amerika faßte er die Idee, das große Werk zu schreiben, welches seinem Namen einen Ehrenplatz auch

[1]) „Oeuvres de Desargues", I. Bd., p. 470 und II. Bd., p. 4. „Bosse donna un système tout différent qu'il tenoit de Desargues, lequel, par son obscurité et la nouveauté de son language, ne fut pas gouté", bemerkt Frézier in der Einleitung eines Werkes, von dem wir bald sprechen werden.

in der Geschichte der Geometrie sichern sollte. Es ist „La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture"[1]) (vgl. III², S. 793) mit dem folgenden Satz des Vitruvius als Motto: „geometria plura praesidia praestat architecturae". Frézier sieht, diesem Grundsatz folgend, von einer mechanischen Betrachtung vollständig ab und betrachtet den Steinschnitt ausschließlich vom geometrischen Standpunkt; infolgedessen besteht nach ihm diese Lehre aus folgenden Teilen: I. Untersuchung der Kurven, die entstehen, wenn Körper durch ebene oder nicht-ebene Flächen geschnitten werden; dieser Abschnitt der Stereotomie heißt „Tomomorphie". II. Beschreibung von Kurven auf gegebenen Flächen; dies ist das Ziel der „Tomographie". III. Untersuchung einfacher Methoden, um die Körper und ihre Schnitte auf einer Ebene darzustellen; diese Methoden, welche er unter dem Namen „Stereographie" zusammenfaßt, sind: a) die Ikonographie und die Orthographie; b) die Abwicklung der krummen Flächen auf eine Ebene, oder „Epipedographie"[2]); c) die „Goniographie". IV. Anwendung des Vorigen auf die Bestimmung der Flächenschnitte, die für den Stein- und Holzschnitt am wichtigsten sind („Tomotechnik"). Diese vier Hauptteile der Stereotomie werden der Reihe nach in den vier Büchern des Werkes von Frézier behandelt, dessen Inhalt wir jetzt kurz durchgehen wollen.

Das I. Buch besteht aus zwei Teilen. Der erste handelt von den ebenen Schnitten einiger Körper, wie Kugel, Kegel, Zylinder und „regulär-irregulärer" Figuren (Quadriflächen, Ringflächen, Helikoiden). In der Einleitung zum zweiten Teile des I. Buches bemerkt Frézier, daß Pater Courcier (1604—1692) in seinem Werke „De sectione superficiei sphaericae per superficiem sphaericam, cylindricae per cylindricam et conicae per conicam" (Divionae 1662) den Namen „curvitegae" den von ihm untersuchten Kurven gegeben hat; Frézier hat es dagegen vorgezogen, denselben Namen zu geben, welche aus „imbrex" (= hohler Dachziegel) abgeleitet sind; so entstanden folgende Neologismen: „cicloïmbre, ellipsimbre, ellipsoïdimbre, paraboloïdimbre, hyperboloïdimbre", Namen, welche ein moderner Geometer

[1]) Straßburg, t. I, 1737; t. II, 1738; t. III, 1739; 4°. S. XVI + 424 + 503 + 417 + 65, mit 27 + 68 + 69 lith. Tafeln. Eine II. Auflage trägt das Datum 1769; trotz wiederholter Versuche konnten wir uns diese nicht verschaffen. Im Jahre 1759 wurde ein Auszug dieses Werkes, betitelt „Éléments de stéréotomie à l'usage de l'architecture", veröffentlicht. [2]) Dieser Name wurde von Lagny (1660—1734) vorgeschlagen; man sehe die dritte seiner Abhandlungen über „La goniométrie" in den Pariser Mém. 1727.

wieder in Gebrauch gebracht hat[1]). Von diesen Kurven, welche alle besondere gewundene Linien vierter Ordnung der I. Art sind, setzt Frézier die Grundeigenschaften auseinander.

Der erste Teil des II. Buches lehrt, wie man den Kreis, die Kegelschnitte, die spirischen Linien und einige Spiralen beschreiben kann, ferner die Zusammensetzung von Kurven, welche die Form einer Ellipse oder Spirale haben; endlich die Auflösung von Aufgaben, welche sich auf die Normalen von Kegelschnitten oder anderer geometrischer Kurven beziehen. Der zweite Teil dieses Buches handelt von der Beschreibung von Kurven auf krummen Flächen; man begegnet hier vor allem der Definition von der orthogonalen Projektion und der Beziehung, die zwischen einer Strecke und ihrer Projektion statthat, endlich die Auflösung einiger Probleme, von denen wir die folgenden anführen wollen: auf einer Kugelfläche einen Kreis zu beschreiben; die Kreisschnitte eines Kegels oder Zylinders zu finden[2]); auf einer Kegelfläche Kegelschnitte von vorgeschriebener Art zu zeichnen; usw. Im dritten Teil beschäftigt sich der Verfasser mit den unebenen Linien, die Schnittlinien von Kugel-, Kegel- oder Zylinderflächen sind, wobei er seine Aufmerksamkeit besonders auf ihre Beschreibung lenkt, welche er mittels eines Systems paralleler Ebenen ausführt. Wie bekannt ist dies dasselbe Prinzip, das man noch heute in der darstellenden Geometrie anwendet, um die Schnittlinie zweier Flächen zu konstruieren; aber diese Methode ist auf die Schraubenlinien („limaces") nicht anwendbar, welche man auf einen Zylinder, einen Kegel oder eine Kugel zeichnen kann; und da diese Kurven sehr wichtig in der Theorie und Praxis sind, so lehrt Frézier, wie man sie nach besonderen Methoden beschreiben kann.

In direktem Zusammenhang mit der darstellenden Geometrie steht das III. Buch, wo der allgemeine Begriff „Projektion" auf die Darstellung vermittels der Ikonographie und Orthographie der Gewölbe angewandt wird; es erhellt daraus die Notwendigkeit, zwei Projektionen einer Figur zu betrachten, um dieselbe eindeutig darzustellen; über die Perspektive bemerkt unser Ingenieur (T. I, S. 271), daß „on n'en peut tirer aucun secours pour la coupe des pierres, parce qu'elle change les mesures des solides représentez, en diminuant les parties qui s'éloignent du devant du tableau". Alles das bildet

---

[1]) La Gournerie, „Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques", Paris 1867. [2]) Für einen besonderen Fall dieses Problems gibt Frézier zwei Lösungen, welche ihm Johann und Daniel Bernoulli mitgeteilt hatten.

den Inhalt der vier ersten Kapitel des genannten Buches; das fünfte ist der Abwicklung auf einer Ebene der Oberflächen von polyedrischen, konischen und zylindrischen Körpern und der Bestimmung der entsprechenden Gestalt, welche gegebene Linien infolgedessen annehmen, gewidmet. Ein letztes Kapitel löst die Aufgabe, die Dieder eines durch seine Flächen bestimmten Trieders zu finden; Frézier gibt zwei Auflösungen, die eine vermittels Umlegungen, während die andere von der Betrachtung des Tetraeders ausgeht, welcher entsteht, wenn das Trieder durch eine Hilfsebene geschnitten wird.

Das IV. Buch, welches die zwei letzten Bände füllt, gehört eher der Praxis als der Theorie an, da es zum Gegenstand die „Tomotechnik" hat; dessenungeachtet finden sich im Anfang desselben einige Betrachtungen über die Flächen, welche diejenigen interessieren werden, welche die Höhe der Entwicklung, welche in jener Zeit die Flächentheorie erreicht hatte, kennen lernen, oder ein Verzeichnis der besonderen, damals bekannten Flächen aufstellen wollen.[1]). Wir müssen noch bemerken, daß es Frézier gelang, die Richtigkeit und Nützlichkeit der Desarguesschen Methoden zu beweisen (T. II, S. 191); eine gründlichere Prüfung des IV. Buches des „Traité" von Frézier würde ferner mit voller Klarheit zeigen, daß in ihm ein ausgedehnter Gebrauch von Hilfsebenen, Umlegungen usw. gemacht ist, was seinen Wert noch beträchtlich in unseren Augen erhöht.

„Je sais bien" (bemerkt traurig unser Verfasser, S. IX des I. Bd.) „qu'aujourd'hui la géométrie linéaire n'est plus guères à la mode, à que pour se donner un air de science, il faut faire parade de l'analyse"; heute ist nun kein Zweifel mehr daran, daß zu der Umwälzung der öffentlichen Meinung zugunsten der Geometrie, welche an dem Ende des 18. Jahrhunderts erfolgte, Frézier das Seinige beigetragen hat; aber das Hauptverdienst daran gebührt doch dem unsterblichen Mathematiker, zu dem wir uns jetzt wenden wollen.

---

[1]) Bemerkenswert ist, daß Frézier als „schiefe Flächen" diejenigen betrachtet, welche man folgendermaßen erzeugen kann: 1. durch die Bewegung einer Geraden, welche beständig parallel zu einer Ebene bleibt und zwei feste Geraden schneidet („planolime"); 2. und 3. durch die Bewegung einer Geraden, welche immer eine Gerade und eine Kurve („mixtilime") oder zwei Kurven („doliolime") schneidet; 4. durch die Bewegung einer Kurve, welche zwei feste Linien schneidet („sphericolime").

G. Monge als Begründer der darstellenden Geometrie.

Jakob Monge war ein armer umherziehender Kaufmann aus Beaune, einer kleinen Stadt des Département de la Côte d'or (Burgund), dessen ganzes Streben danach ging, seinen drei Söhnen den Unterricht angedeihen zu lassen, welchen das Kollegium seiner Vaterstadt ihnen geben konnte. Alle drei entsprachen in reichem Maße den Erwartungen ihres Vaters; unter ihnen aber war es der älteste, Gaspard, geboren am 10. Mai 1746, welcher den Namen Monge unsterblich machen sollte.[1]) Kaum 14 Jahre alt, erregte er schon die Bewunderung seiner Umgebung, indem er eine Feuerpumpe herstellte, und im Alter von 16 Jahren durch die Zeichnung eines prächtigen Planes seiner Vaterstadt. Die Kunde von seiner hohen Begabung gelangte auch bis zu den Ohren der Oratoristen von Lyon, welche dem hoffnungsvollen Knaben den Unterricht in der Physik in ihrem Kollegium anvertrauten, wobei sie ihn zugleich für ihren Orden zu gewinnen suchten. Jakob Monge riet seinem Sohn ab und suchte ihn dafür zu bestimmen, die Unterstützung eines Oberstleutnants anzunehmen, welcher jenen Plan von Beaune voller Bewunderung kennen gelernt hatte und nun versuchte, dem Autor den Eintritt in die Militärschule des Geniekorps zu Mézières zu verschaffen. Aber die niedrige Herkunft erlaubte dem jungen Monge nicht, den Offiziersdegen zu tragen; daher mußte er sich mit einer Stelle in der Untersektion jener Schule, die für Praktiker bestimmt war, begnügen (1765). In dieser Stelle hatte er sich besonders mit einer Operation zu beschäftigen, welche man „défiler un fort“ nannte. Die geistreichen Modifikationen, welche er an den alten und sehr mühsamen Verfahren, nach welchen jene Operation bisher vollzogen wurde, vornehmen

---

[1]) Von Monge sprechen, mehr oder minder ausführlich, alle Geschichtswerke über das Kaiserreich und das Konsulat, wie auch die Denkschriften jener Zeit (vgl. z. B. „Mémoires de Madame Roland“ Paris 1884, II. Bd., p. 286). Aber die ergiebigste und beste Quelle über sein Leben ist die geistreiche Lobrede, welche Arago am 11. Mai 1846 an der Pariser Akademie hielt („Oeuvres complètes de F. Arago“, II. Bd., Paris 1854, S. 427 ff.). Man muß auch den „Essai sur les services et les travaux scientifiques de G. Monge“ (Paris 1819) von C. Dupin heranziehen, obgleich in ihm die politische Leidenschaft der Epoche sich bemerkbar macht. Andere Quellen sind im Intermédiaire des mathématiciens, Bd. XII, 1905, p. 47—48, Bd. XIII, 1906, p. 118—119, 202—203, und Bd. XIV, 1907, p. 11—13. Diejenigen, welche die ganze Familie Monge, von dem Urgroßvater des großen Geometers bis zu den letzten Nachkommen, kennen lernen wollen, mögen auf die „Généalogie de la famille de Gaspard Monge“ (Dijon et Paris 1904) von L. Morand verwiesen werden.

wollte, Modifikationen, welche im Keime bereits die Grundbegriffe der darstellenden Geometrie enthielten[1]), begegneten zuerst dem heftigsten Widerspruch seitens seiner Vorgesetzten; allein ihr Wert wurde endlich doch anerkannt, und nun erhielt unser Mathematiker dafür den Platz eines Repetitors. Gerade in diesen Jahren (1770—1773) faßte Monge zuerst seine epochemachenden Ideen über die Anwendung der Analysis auf die Geometrie (vgl. Abschn. XXIV), bearbeitete und veröffentlichte sie, damit sie ihm, in einer Zeit der Oberherrschaft der Algebra, als Reisepaß in das Reich der Mathematiker dienen sollten; und in der Tat soll, nach einer sehr verbreiteten Erzählung, Lagrange nach der Lektüre dieser Arbeiten Monges ausgerufen haben: „avec son application de l'analyse à la représentation des surfaces, ce diable d'homme sera immortel!" Nachdem so Monge den ersten Schritt in der Lehrlaufbahn, allerdings nicht ohne Mühe, getan hatte, wurden ihm die folgenden bedeutend leichter. Im Jahre 1768 erhielt er die Professur für Mathematik und drei Jahre später wurde ihm auch der Lehrstuhl für Physik anvertraut. 1780 übernahm er den Unterricht in der Hydraulik im Louvre, mit der Verpflichtung jedes Jahr sechs Monate in Paris zu wohnen; zugleich öffnete ihm die Akademie der Wissenschaften ihre Tore. Endlich wurde er, als Bezout starb, zu seinem Nachfolger als „Examinateur" der Marineschüler gewählt; infolgedessen siedelte er nun vollständig von Mézières nach der Hauptstadt über.

Es ist natürlich, daß Gaspard Monge, welcher aus dem Volke stammte und seinen Weg durch Kastenvorurteile zur Genüge versperrt gesehen hatte, sich mit ganzer Seele für die Prinzipien der französischen Revolution begeisterte. Ein glühender und schwärmerischer Charakter, warf er sich blindlings in den revolutionären Strom. Er war Mitglied der berühmten Kommission, welche der Welt ein allgemeines, auf vernünftiger Grundlage aufgebautes System der Maße und Gewichte gab, und wurde, nach dem 10. August 1792, Marineminister im zweiten Ministerium Roland; nachdem er die Verwaltung reorganisiert hatte, wollte er sich zurückziehen (12. Februar 1793), er mußte aber auf jenem Posten bis zum folgenden 10. Mai ausharren. Von den Regierungsgeschäften befreit, widmete Monge seine ganze wunderbare Arbeitskraft der Fabrikation von Kanonen- und Flinten-

[1]) Will man das Datum für die Entstehung dieser Lehren festsetzen, so sei darauf hingewiesen, daß in dem „Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces usw.", welches Monge am 11. Januar 1775 der „Académie des Sciences" vorlegte, die folgenden Sätze enthalten sind (p. 485—486): „les deux plans, l'un horizontal et l'autre vertical, auxquels on rapporte tout ce qui est dans l'espace par des projections orthogonales".

pulver, weil sein Vaterland damals einen großen Mangel daran hatte[1]), und der Gründung und Organisation zweier berühmter Schulen, der Normalschule[2]) und der polytechnischen Schule[3]), in denen er einer der beliebtesten Lehrer war: in der ersteren konnte er endlich die darstellende Geometrie öffentlich vortragen. Auch an der zweiten blieb er bis 1809 eine der größten Zierden. Von seinem Anteil an der Reorganisation des „Institut de France" müssen wir brevitatis causa schweigen und nur daran erinnern, daß Monge nach Italien gesandt wurde, um die Auswahl der Gemälde und Statuen, welche nach Paris geschickt werden sollten, zu leiten; bei dieser Gelegenheit lernte er den General Bonaparte kennen, mit dem ihn von da an eine Freundschaft fürs Leben verband. Von Bonaparte wurde er mit der Überbringung des Vertrages von Campo-Formio nach Paris betraut; mit Napoleon ging er dann auch nach Ägypten, wo er das „Institut d'Égypte" gründete und leitete; nach Frankreich zurückgekehrt wurde er Senator (1799) und dann Graf von Pélouze.

Als Bewunderer des Genies Napoleons verzieh der alte Republikaner ihm die Annahme der Kaiserkrone, und beim Lesen des berühmten XXIX. Bulletins des russischen Krieges erlitt er einen Schlaganfall. Aber er erholte sich schnell, und so finden wir ihn während der „hundert Tage" wieder an der Seite Napoleons. Es blieb der zweiten Restauration vorbehalten, sein Ende herbeizuführen. Als er nämlich das Dekret erfuhr (21. März 1816), das ihn nebst Carnot aus der Akademie ausstieß, verfiel er in einen Zustand der Apathie, aus dem ihn nicht einmal der Klang der „Marseillaise" erwecken konnte, und in dem er bis zu seinem am 18. Juli 1818 erfolgten Tode verblieb. Die damalige französische Regierung vermochte es nicht zu verhindern, daß die École polytechnique und die Akademie der Wissenschaften ihm glänzende Ehren erwiesen.

Aus obiger biographischen Skizze erhellt, daß die mathematischen Arbeiten Monges in zwei Teile zerfallen, welche man, obgleich sie beträchtliche Beziehungen zueinander haben, doch getrennt betrachten

---

[1]) Vgl. Monge, „Déscription de l'art de fabriquer les canons" (Paris, an II).
[2]) Diese durch ein Dekret des 9. Brumaire des III. Jahres der Republik (30. August 1794) gegründete Schule blieb nur während der vier ersten Monate des folgenden Jahres am Leben; Lagrange und Laplace lehrten an ihr Mathematik, Monge, mit Hilfe von Lacroix und Hachette, die darstellende Geometrie. Vgl. den prächtigen Band „Le centenaire de l'École normale" (1795 bis 1895), Paris 1895. [3]) Vgl. Jacobi, „Über die Pariser polytechnische Schule" (Werke, VII. Bd., Berlin 1891, S. 335—370). Der Organisationsplan dieser berühmten Anstalt ist im III. Cahier des „Journal de l'École polytechnique" zu finden.

muß; der eine umfaßt die Arbeiten über die darstellende Geometrie, der andere diejenigen über die Anwendung der Analysis auf die Geometrie, worüber man im vorigen Abschnitte ausführlich berichtet hat.

Zu Beginn unseres Berichtes über die Arbeiten der ersten Gruppe muß man daran erinnern, daß Monge auf dieselben durch die Anwendungen geführt wurde, welche man mit der neuen Methode auf die militärische Topographie machen konnte. Und hier liegt auch der Grund zu dem Verbot der Veröffentlichung der neuen Methoden, welches bis 1795 (Gründung der Normalschule) aufrecht erhalten blieb. Diese Methoden verbreiteten sich über die Grenzen Frankreichs hinaus in der ganzen gelehrten Welt, als er drei Jahre später das Werk veröffentlichte: „Géométrie déscriptive. Leçons données aux Écoles normales, l'an 3 de la République. Paris, an VII."[1])

In dem „Programm", womit dieser Band beginnt, wird die neue Lehre, welche Monge ihren Namen und die Würde einer Wissenschaft verdankt, als eins der Mittel hingestellt „pour tirer la nation française de la dépendence où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère"[2]); in Wirklichkeit aber wird sie, gemäß den Zwecken der Schule, an welcher Monge lehrte, in der Sprache der reinen Wissenschaft auseinandergesetzt. Diese erhabene Richtung zeigt sich schon klar auf den ersten Seiten, wo der Verfasser, nachdem er die zwei Ziele der darstellenden Geometrie (Darstellung der dreidimensionalen Figuren auf einer Ebene, Ableitung der Eigenschaften einer Figur aus einer Darstellung derselben) aufgestellt hat, sich zur Methode der doppelten Orthogonalprojektion wendet, indem er sich die Frage stellt, welches die besten Beziehungselemente seien, um die Lage eines Raumpunktes zu bestimmen. Können drei Punkte dazu dienen? Nein, weil zwei Punkte existieren, welche gegebene Entfernungen von drei gegebenen Punkten haben. Können drei Geraden dazu dienen? Nein, weil acht Punkte vorhanden sind, welche gegebene Entfernungen von drei Geraden haben.[3]) Können drei Ebenen dazu dienen? Ja! Denn, wenn es auch acht Punkte gibt, welche gegebene Entfernungen von

[1]) Die „Géométrie déscriptive", welche ins Deutsche von G. Schreiber frei übersetzt wurde („Lehrbuch der darstellenden Geometrie nach Monges Géométrie déscriptive vollständig bearbeitet"; Karlsruhe und Freiburg 1828), wurde kürzlich in die Sammlung „Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften" (Nr. 117) aufgenommen; die (treue) Übersetzung und die Noten gehören R. Haußner an. [2]) Anderswo (Journal polytechnique, T. I, p. 1) wird sie als „une espèce de langue nécessaire à tous les artistes" bezeichnet. [3]) In einer Note am Ende des Bandes wird die Existenz solcher Punkte erklärt, aber nicht bewiesen.

drei Ebenen haben, so kann man durch eine geschickte Vorzeichenwahl doch alle diese auf einen reduzieren: es ist das System, welches die analytische Geometrie des Raumes gewöhnlich anwendet. „Mais dans la géométrie déscriptive, qui a été pratiquée depuis beaucoup plus longtemps par un beaucoup plus grand nombre d'hommes, et par des hommes dont le temps était précieux, les procédés se sont encore simplifiés; et au lieu de la considération des trois plans, on est parvenu, au moyen des projections, à n'avoir plus besoin explicitement que de celle de deux.“ Und hier stellt nun der Autor den Begriff der „Orthogonalprojektion“ auf und beweist die Nützlichkeit der Anwendung zweier untereinander rechtwinkliger Projektionsebenen, einer horizontalen und einer vertikalen, welche man durch Drehung um ihre Schnittlinie[1]) zusammenfallen läßt. Die zwei Projektionen eines beliebigen Punktes fallen infolgedessen immer auf eine zu dieser Schnittlinie rechtwinklig stehende Gerade; und Monge gibt eine vorteilhafte und noch heute angewandte Methode zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte, deren Projektionen bekannt sind. Nachdem die Methoden festgestellt sind, nach denen man die Punkte und die Geraden darstellen kann, müßte man mit denjenigen sich beschäftigen, welche man auf die Polyeder anwenden könnte; dafür aber existiert kein allgemeines Verfahren, eine Tatsache, bemerkt Monge, ähnlich derjenigen, die die Algebra darbietet, in der es keine sichere und allgemeine Methode gibt, um eine Aufgabe in eine Gleichung umzusetzen; dies ist nicht der einzige Berührungspunkt zwischen den beiden Wissenschaften, und daher gibt Monge den Rat, die beiden gleichzeitig zu studieren.

Kein neues Prinzip ist nötig, um durch zwei Projektionen eine Kurve darzustellen. Um aber eine Fläche darzustellen, muß man seine Zuflucht zu ihrer (unendlich vieldeutigen) Erzeugbarkeit durch die Bewegung einer (i. A. auch in der Form veränderlichen) Kurve nehmen. Um daher eine Fläche darzustellen, stellt man ein System ihrer Kurven dar; ja, es ist sogar nützlicher, zwei solcher Systeme darzustellen, die man derart wählen soll, daß durch jeden Punkt der Fläche eine Kurve jedes Systems geht. Die konischen, die zylindrischen und die Rotationsflächen bieten interessante Erklärungen dieser Dar-

[1]) Diese Gerade wird nicht von Monge „ligne de terre“ genannt, wie Chr. Wiener (o. a. W., I Bd., S. 25) meint; sie wird immer durch die Buchstaben LM bezeichnet. Wir wollen noch bemerken, daß die zwei Projektionen eines Punktes P von Monge mit p, P bezeichnet werden; das jetzt übliche System P', P'' findet sich schon bei Lacroix und Brisson in ihren sogleich zu nennenden Veröffentlichungen.

stellungsmethoden; dasselbe gilt von den Regelflächen, deren Erzeugung durch die Bewegung einer Geraden, welche drei feste Direktrizen beständig schneidet, im I. Anhang zur 1. Auflage der „Géométrie descriptive" gelehrt wird. Das Verfahren zur Darstellung der Erzeugenden einer solchen Fläche war von Monge schon 20 Jahre vorher in der Abhandlung „Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes" (p. 435) bekannt gemacht; es ist zu bedauern, daß dieses Verfahren nicht nach Verdienst bekannt geworden ist, da es in einer Arbeit enthalten ist, welche scheinbar mit der darstellenden Geometrie nichts zu tun hatte.

Die einfachste aller Flächen ist die Ebene, welche man durch die Bewegung einer Geraden erzeugen kann, die eine andere Gerade immer schneidet und einer dritten parallel ist; als bestimmende Gerade einer Ebene ist es ratsam, diejenigen zu wählen, in welchen die betrachtete Ebene die Projektionsebenen schneidet; sie bilden die „traces" (Spuren) der Ebene, ein von Monge vorgeschlagener und allgemein angenommener Name.

Diese Begriffe erlauben, eine große Menge wichtiger Probleme aufzulösen; unter den unendlich vielen, die man behandeln könnte, wählt Monge die neun folgenden aus: Durch einen Punkt die Gerade zu ziehen, welche einer anderen parallel ist oder eine Ebene rechtwinklig schneidet, oder die Ebene, welche einer anderen parallel ist oder eine andere Gerade rechtwinklig schneidet (I—IV); die Schnittlinie zweier Ebenen zu finden (V); den Winkel zweier Ebenen, zweier Geraden oder einer Ebene mit einer Geraden zu bestimmen (VI—VIII); einen Winkel am Horizont zu reduzieren (IX). Wenn man auch über die Reihenfolge und die Auswahl solcher Fragen einen gewissen Vorbehalt machen kann (da nicht immer die schwierigeren den einfacheren folgen, und man nicht verstehen kann, warum z. B. die Bestimmung der Schnittlinie zweier Ebenen ex professo behandelt wird, während dies für den Schnittpunkt einer Ebene mit einer Geraden nicht geschieht), so muß man doch anerkennen, daß die Auflösungen so geistreich und von so wunderbarer Einfachheit sind, daß die Epigonen Monges i. A. keine besseren zu finden vermochten; die schönste unter allen scheint uns die allgemein bekannte des VI. Problems zu sein.

Mit dieser Aufgabe schließt der I. Abschnitt. Der II. Abschnitt handelt von den Berührungsebenen und den Normalen der Flächen. Die Berührungsebene in einem Punkt einer Oberfläche ist bestimmt durch die Tangenten in jenem Punkte an die entsprechenden zwei Erzeugenden (s. o.) derselben; daß die Ebene von der Wahl der Erzeugenden unabhängig ist, wird von Monge nicht bewiesen, ja nicht

einmal gesagt[1]); daß der Begriff der Berührungsebene auch bei der Anwendung nützlich sei, wird an zwei Beispielen gezeigt, von denen er das eine aus der Malerei, das andere aus der Gewölbekonstruktion entlehnt. Dann wendet er sich zu der Konstruktion von Berührungsebenen an zylindrischen, konischen und Rotationsflächen mit vertikal vorausgesetzter Achse; von den Tangentenebenen der Regelflächen handelt der III. Anhang zur 1. Auflage. Es folgt dann die Bestimmung der kleinsten Entfernung zweier schiefen Geraden, welche Monge durch die Berührungsebene eines Kreiszylinders ausführt; die Ausführung einer elementaren Konstruktion dieser Entfernung wird dem Leser als Übung überlassen.

Der Verfasser wendet sich dann zur Bestimmung von Berührungsebenen, deren Berührungspunkt nicht gegeben ist. Die erste Aufgabe dieser Art versucht die Ebenen zu finden, welche durch eine gegebene Gerade gehen und eine gegebene Kugelfläche berühren; Monge gibt zwei Auflösungen: 1. durch Umlegung der Ebene, welche senkrecht zur Geraden ist und durch den Kugelmittelpunkt geht, oder 2. durch Betrachtung des Kegels, welcher diese Kugel von einem Punkt jener Geraden aus projiziert. Mit dieser zweiten Auflösung wird die Darlegung der Haupteigenschaften der Polaren in bezug auf Kreise, Kegelschnitte und Quadriflächen verbunden[2]). Auf das obige Problem können diejenigen zurückgeführt werden, welche darin bestehen, durch einen Punkt die Ebene zu ziehen, welche entweder zwei Kugelflächen oder drei Kugelflächen berührt. An das letztere knüpft Monge die Darlegung der charakteristischen Eigenschaften der Ähnlichkeitspunkte von Kreisen[3]) oder Kugeln[4]) an. Die Bestimmung der Ebenen, welche durch einen Punkt gehen und einen Kegel oder Zylinder berühren, ist der Zweck der zwei folgenden Aufgaben, während der inhaltsreiche Abschnitt mit der Konstruktion der durch eine gegebene Gerade gehenden Berührungsebenen einer Rotationsfläche mit Vertikalachse schließt. Diese Aufgabe wird von Monge wie noch heute, durch Benutzung der Fläche aufgelöst, die durch Drehung der gegebenen Geraden um die Achse der Fläche erzeugt wird.

---

[1]) Der erste Versuch, die Existenz der Berührungsebene geometrisch zu beweisen, findet sich bei C. Dupin, „Développements de géométrie" (Paris 1813), p. 7. [2]) Vgl. E. Kötter, „Die Entwicklung der synthetischen Geometrie"; Bd. V des Jahresber. der Deutsch. Math.-Ver., S. 48, 88 und 112. [3]) Nach N. Fuß (Nova Acta Petrop., T. XIV, 1805) wurde Monge von d'Alembert inspiriert. [4]) In den diesbezüglichen Sätzen findet man einige Unrichtigkeiten, da Monge die Ebenen nicht betrachtete, von denen jede zwei innere und vier äußere Ähnlichkeitspunkte enthält.

„Die Schnittlinien krummer Flächen" bilden das Thema des IV. Abschnittes unseres Werkes. In der Einleitung zu demselben verweist Monge auf die bereits früher von ihm skizzierten Ideen betreffs der vollkommenen Übereinstimmung, welche zwischen den Operationen der Algebra und denen der darstellenden Geometrie besteht, und schließt mit der folgenden Bemerkung: „Il faut que l'élève s'accoutume de bonne heure à sentir la correspondance qu'ont entre elles les opérations de l'analyse et celle de la géométrie; il faut qu'il se mette en état, d'une part, de pouvoir écrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpetuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture". Nach diesen allgemeinen Betrachtungen setzt er die allgemeine Methode auseinander, um die Schnittlinie zweier Flächen F' und F'' punktweise zu zeichnen; der von Monge vorgeschlagene Kunstgriff ist derselbe, dessen wir uns heute noch bedienen; er besteht darin, daß man die gegebenen Flächen durch eine Reihe von Hilfsflächen F schneidet und die Kurven FF' und FF'', wie auch deren Schnittpunkte bestimmt. Wechselt man F, so wechseln auch diese Punkte, und so wird die verlangte Kurve $F'F''$ erzeugt. Im allgemeinen empfiehlt es sich, als Hilfsflächen horizontale oder vertikale Ebenen zu wählen; wenn aber F' und F'' Kegel oder Zylinder sind, so ist es vorteilhafter, andere Ebenen zu wählen; und wenn die Achsen zweier Rotationsflächen sich schneiden, so ist es das beste, F kugelförmig anzunehmen. Die von Monge untersuchten Fälle dieses allgemeinen Problems beziehen sich auf die Schnittlinien von Kegeln, Zylindern und Rotationsflächen, die sich entweder untereinander oder mit Ebenen schneiden; von den so entstehenden Kurven werden nicht nur die Projektionen der Punkte und Tangenten bestimmt, sondern, wenn es sich um Schnitte durch Ebenen handelt, auch die wahre Form und Größe (durch Umlegungen), oder ihre Abwicklung, falls sie auf Kegeln oder Zylindern beschrieben sind. Im allgemeinen ist dies alles in die folgenden Lehrbücher der darstellenden Geometrie ohne wesentliche Veränderungen übergegangen. Zu bemerken ist noch, daß Monge mehrmals von der Veränderung der Projektionsebenen spricht, ohne aber eine Anweisung zu geben, wie man dieselbe ausführen kann. Zum Schluß des besprochenen Abschnittes legt Monge die Robervalsche Tangentenmethode dar, ohne die Grenze ihrer Anwendbarkeit zu bestimmen[1]); er versucht auch, sie auf den Raum auszudehnen; die Kurve aber, welche er

[1]) Vgl. Duhamel, „Note sur la méthode des tangentes de Roberval" (Mém. des Sav. Étr., t. V, Paris 1838, p. 257—266).

als Beispiel wählte, ist nicht gewunden[1]) und die Anwendung selbst bedeutungslos!

Die Nützlichkeit obiger Konstruktionen für die Auflösung von Aufgaben von besonderem theoretischen und praktischen Interesse wird von Monge im IV. Abschnitte seines Werkes klar bewiesen, wo drei rein theoretische und drei praktische Aufgaben elegant aufgelöst werden.

Die ersteren haben zum Zweck die Bestimmung der Mittelpunkte der Um- und Inkugel eines Tetraeders und die Bestimmung der Punkte, deren Entfernungen von drei gegebenen Punkten gegeben sind (das analoge Problem der Bestimmung der Punkte, welche gegebene Entfernungen von drei gegebenen Geraden haben, wird dem Leser zur Übung aufgegeben).

Die übrigen drei Aufgaben betreffen die Vervollständigung einer topographischen Karte durch Winkelbeobachtungen von Bodenpunkten oder einem Ballon aus; gewiß sind sie während Monges Aufenthalt in Mézières entstanden. Bei diesen Aufgaben zeigt sich Monge mit der Methode der kotierten Projektionen in ihrer Anwendung auf die Topographie sehr vertraut, was nicht verwundern kann, da jene Methode in der Schule zu Mézières allgemein bekannt sein mußte. In der Tat ist es zwar wahr, daß der Geograph Ph. Bouache (1700—1773) die Niveaukurven (1738) einführte[2]), aber es war doch Châtillon[3]), der erste Direktor jener Schule, der auf die Idee kam, die bemerkenswerten Punkte eines Bodenstückes durch ihre Orthogonalprojektionen und ihre entsprechenden Höhen zu bestimmen; es war ferner ein anderer Genieoffizier, Milet de Mureau, welcher auf den Einfall kam, durch ein ähnliches Verfahren die Vertikalschnitte des Bodens darzustellen. Es sei zuletzt noch bemerkt, daß die Untersuchungen von Monge über die Tangentialebenen topographischer Flächen L. G. Dubuat-Nançay (1732—1787) dazu führten, die Ebenen durch ihre Geraden größter Neigung darzustellen; Monge selbst hat diese Darstellungsmethode auf beliebige Flächen ausgedehnt.

Nach dieser Abschweifung über die erste Entwicklungsstadie der Methode der kotierten Ebenen wollen wir zu unserem Hauptthema zurückkehren und bemerken, daß Monge jene praktischen Probleme auf die Bestimmung der Punkte zurückführt, welchen drei Rotationskegel oder drei Ringflächen mit parallelen Achsen gemeinschaftlich sind; die letzte Aufgabe, von der Monge irrtümlich annahm, daß sie

---

[1]) Eine Bemerkung von R. Haußner; vgl. S 626, Fußnote 1. [2]) J. de la Gournerie, „Discours sur l'art du trait et de la géométrie déscriptive", Paris 1855, p. 22. [3]) Das Folgende ist aus dem o. a. „Essai" von Dupin entnommen.

64. Grades sei, wurde im nächsten Jahrhundert der Gegenstand längerer und fruchtbarer Untersuchungen in der Schule von Nicola Fergola.[1])

Mit dem IV. Abschnitt endet der Teil des Mongeschen Werkes, welcher streng genommen zur darstellenden Geometrie gehört und, wie der Verfasser richtig bemerkt, in allen höheren Schulen gelehrt werden müßte; das übrige ist ein Abriß der Haupteigenschaften der Kurven, Developpabeln und beliebigen Flächen. Hier bemüht sich Monge die Bekanntschaft der Begriffe zu verbreiten, welche er in dem „Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure" (Mém. prés. par div. savants, T. X, 1785; vgl. oben S. 531) und in den anderen Abhandlungen festgestellt hatte, die die Grundlage seiner „Application de l'analyse à la géométrie" bilden (vgl. den vorigen Abschnitt). Mit sichtbarem Vergnügen verweilt er bei den Haupteigenschaften der Krümmungslinien der Flächen[2]), um dann auch die Anwendungen bekannt zu machen, welche man davon beim Steinschnitte (Gewölbekonstruktion) machen kann.

Aus diesem Berichte über das erste Lehrbuch der darstellenden Geometrie erhellt, daß es nach unseren heutigen Begriffen nicht vollständig genannt werden kann[3]); in einigen seiner Teile erscheint es dessenungeachtet als durchaus vollkommen, indem es u. a. die Keime aller Lehren enthält, welche später in diesem Zweige der Mathematik aufgetaucht sind. Aber der, welcher glaubt, daß es eine erschöpfende Darstellung der Kenntnisse Monges in demselben sei, würde einen groben Irrtum begehen. In der Tat hat Monge, nach Hachettes Bericht[4]), die alte Aufgabe der „kürzesten Dämmerung" verwandelt in die Untersuchung der Ebenen, welche zwei konzentrische Kegel zugleich berühren. Ferner findet man in dem Aufsatz, mit welchem das „Journal polytechnique" (Mois de Germinal, an III) beginnt, mehrere andere Probleme erwähnt, welche den Schülern der berühmten École polytechnique zur Auflösung vorgelegt wurden, z. B. die Aufgaben über das Trieder

---

[1]) Vgl. G. Loria, „Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce", § 5 des IV. Kap. [2]) Man sehe auch den berühmten Aufsatz „Sur les lignes de courbure de l'ellipsoïde" (Journ. de l'Éc. pol., II. Cah., p. 145—165), wo solche Krümmungskurven sorgfältig gezeichnet sind. [3]) Als unvollständig erschien sie Hachette, welcher die Notwendigkeit der „Suppléments" erkannte, die er dann in den Jahren 1811 und 1818 herausgab. [4]) „Du plus petit crépuscule" (Corresp. sur l'Éc. pol., T. I, p. 148—151). Vgl. K. Zelbr, „Das Problem der kürzesten Dämmerung", Zeitschr. f. Math. u. Phys., 41. Bd., 1896, Hist.-lit. Abt., insbesondere S. 153—156.

„ce qui comporte toute la trigonométrie sphérique"[1]); weiter die Darstellung des regulären Dodekaeders[2]) und die Konstruktion der Geraden oder Ebenen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und gegebene Neigungen zu den Projektionsebenen haben; endlich die Rotationsflächen, welche im Monges Buch immer durch die Rotation ebener Kurven erzeugt werden, werden im Aufsatz durch beliebige Kurven beschrieben. Zu den behandelten Flächen gesellen sich noch die Quadriflächen, die Konoiden und einige Helikoiden. Andere Probleme findet man in den Nachrichten über die Mongeschen Vorlesungen, welche man Eisemann[3]) verdankt[4]). Es handelt sich hier um neue Fälle der Aufgabe, die Schnittkurve zweier Flächen zu finden, einige neue Schraubenflächen (z. B. die Schraube von St. Giles) und einige elementare Aufgaben, welche man vermittels der Flächendurchschnitte auflösen kann. Aus diesen Nachrichten ersieht man, daß in jenen Vorlesungen auch Fragen der angewandten darstellenden Geometrie behandelt wurden, wie z. B. die Schattenlehre und die Perspektive; die von Monge dazu angewandten Methoden fanden sich auf einigen Blättern kurz skizziert, die nach Monges Tod glücklicherweise in die Hände seines bedeutenden und von ihm sehr geliebten Neffen und Schülers B. Brisson (1777 bis 1827) fielen; dieser hat sie einer genauen Durchsicht unterzogen und dann in die 4. Aufl. (1820) der „Géométrie descriptive" aufgenommen. Es ist unsere Pflicht, etwas darauf einzugehen.

Setzt man voraus, daß die Lichtquelle ein Punkt O sei, und daß alle zu betrachtenden Körper undurchsichtig seien, so kann man, wenn sie Polyeder sind, die Aufgabe der von diesen Körpern auf Ebenen geworfenen Schatten durch Anwendung der Grundaufgaben der darstellenden Geometrie leicht auflösen; auf dem Körper ist der beleuchtete Teil von dem dunklen durch ein schiefes Polygon abgesondert, welches man bestimmen kann auf Grund der Lage des Polyeders in bezug auf O. Wenn es sich aber um einen durch eine krumme Fläche begrenzten Körper handelt, so ist die Trennungslinie eine sehr wichtige Kurve, welche Monge in einer Abhandlung des Jahres 1775 schon betrachtet, und der er auf p. 694 seines „Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais" (Mém. de Paris 1781) den

---

[1]) Vgl. auch Hachette, „Solution complète de la pyramide triangulaire" (Corresp. sur l'Éc. pol., T. I, p. 41—51). [2]) Es mag hier erinnert werden, daß die Perspektive der regulären (konvexen wie auch Stern-) Polyeder sich schon (1568) bei W. Jamitzer (Bd. II[2], S. 582) findet. [3]) Es ist der Gelehrte, dem man eine partielle Ausgabe von Pappus (vgl. Pappus ed. Hultsch, S. XVIII) verdankt. [4]) Journal de l'Éc. pol., II. Cah., p. 100—106, III. Cah., p. 440—142, IV. Cah., p. 619—622.

Namen „ligne de contour apparent d'une surface“ gegeben hatte, welchen sie beibehalten hat. Um diese Linie zu konstruieren, zieht man von O Ebenen σ, welche wir der Bequemlichkeit halber auf einer Projektionsebene normal annehmen wollen; jede schneidet die Fläche in einer Kurve, welche konstruierbar und darstellbar ist; die Berührungspunkte der von O an Γ geführten Tangenten gehören dem gesuchten Umrisse an. Läßt man σ um O herumgehen, so wird dieser punktweise beschrieben. Alles das besteht auch, wenn O unendlich entfernt liegt. Wenn aber die Lichtquelle nicht ein Punkt, sondern eine Fläche ist, so müssen beträchtliche Modifikationen vorgenommen werden, von denen Euler schon in seiner großen Abhandlung „De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet“ (Nova Comment. Petrop., T. XIV, 1772) gesprochen hatte (vgl. S. 531) und womit sich Monge schon, unabhängig von Euler, in dem „Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surface courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres“ (Mém. prés. par divers sav., T. IX, 1780, p. 382 bis 420) beschäftigt hatte (vgl. S. 537). Diese großen Geometer stimmen darin überein, daß es notwendig sei, die zwei Schalen der Developpabeln zu betrachten, welche aus den Ebenen besteht, welche die leuchtende und die beleuchtete Fläche zugleich berühren; so entstehen im Raume eine Schatten- und eine Halbschattenregion, und auf der betrachteten Oberfläche zwei Umrisse. Alles das wird evident klar in dem Falle, daß beide betrachteten Flächen Kugeln sind, ein Fall, welcher von Monge und Brisson eingehend untersucht wird.[1])

Wenden wir nun unsere Aufmerksamkeit auf die Perspektive. Monge geht von der Voraussetzung aus, daß die objektive Figur F und das Auge O durch ihre Orthogonalprojektionen bestimmt und daß die Tafel beider Grundebenen normal sei. Infolgedessen (Fig. 71) kann man die Projektionen des Punktes P_1, welcher die Perspektive von P ist, sogleich zeichnen; um aber die wahre Form der erhaltenen Perspektive der gegebenen Figur F zu erhalten, muß man die Tafel in eine andere Lage bringen, was (Fig. 72) mittels der Koordinaten leicht geschehen kann. Ein ähnliches Verfahren kann in dem Falle angewandt werden, daß die Tafel nur auf der Horizontalebene normal

[1]) Man sehe auch: Monge und Hachette, „Sur la théorie des ombres et de la perspective; sur les points brillants des surfaces courbes“ (Corresp. sur l'Éc. pol., T. I, p. 295—305). Es möge noch der „Mémoire sur la détermination géométrique des teintes dans les desseins“ (Journ. de l'Éc. pol., I. Cah., p. 167—183) als ein Produkt des Mongeschen Unterrichts angeführt werden; er wurde von Dupuis bearbeitet auf Grund der verschiedenen von den „chefs de brigade“ der polytechnischen Schule gegebenen Materialien

ist. Beide Fälle sind als Anwendungen der neuen von Monge geschaffenen Wissenschaft interessant; an Umfang und Allgemeinheit können sie sich gewiß mit denjenigen Taylors und Lamberts nicht messen. Um die Ausführung der Perspektive zu erleichtern, weist Monge noch darauf hin, daß es überflüssig ist, die Perspektive der Punkte zu zeichnen, welche von dem Augenpunkt aus unsichtbar sind, daß die Perspektive einer Geraden eine Gerade ist, und daß endlich die Perspektiven paralleler Geraden ein eigentliches Büschel bilden. Ist die Tafel uneben, so kann man (bemerkt Monge) die Aufgabe der Perspektive gleichwohl durch Anwendung der darstellenden Geometrie lösen. Monge (oder Brisson?) bemerkt weiter, daß man eine Raumfigur durch zwei Perspektiven bestimmen kann; andere Beobachtungen über die Luftperspektive sind unserem Gegenstand fremd; nur sei der folgende Satz wiedergegeben: „In jedem Punkte einer Fläche ist die Lichtstärke dem Sinus

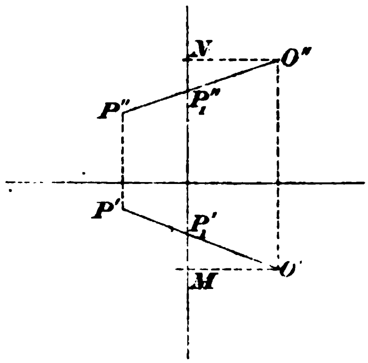


Fig. 71.

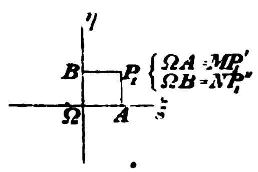


Fig. 72.

des Winkels direkt proportional, welchen der einfallende Strahl mit der Berührungsebene bildet und dem Quadrat der Entfernung vom leuchtenden Punkt umgekehrt proportional".

Zum Schluß unseres Berichtes über die Werke Monges über die darstellende Geometrie möge nicht unerwähnt bleiben, daß mit diesem großen Geometer die Wiedererweckung des Interesses der Mathematiker für die reine Geometrie zusammenhängt; ein solches Ergebnis verdanken wir nicht nur seinen unsterblichen Schriften, sondern auch seinem unübertrefflichen Unterricht an der Ecole polytechnique, welcher mehrere Hunderte von Studenten förmlich elektrisierte, so daß infolgedessen mehrere von ihnen bedeutende Gelehrte wurden.

Jetzt müssen wir noch bemerken, daß der Band „Géométrie déscriptive" von Monge später gedruckt worden ist, als die „Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes" (Paris 1796)[1]) von

[1]) Unser Bericht stützt sich auf die Seconde édition revue et augmentée. Paris an X (1802).

S. F. Lacroix (1765—1843) (vgl. S. 344), der der Reihe nach Professor der Mathematik an der Artillerieschule von Besançon (1788), an der Normalschule von Paris (1795) und an der dortigen polytechnischen Schule (1799) war. Sein Buch soll gewiß kein Kommentar zu den Mongeschen Vorlesungen sein, ist aber auf jeden Fall von denselben nicht ganz unabhängig. Die Geschichte seiner Entstehung erzählt C. Dupin folgendermaßen[1]: Lacroix war einer der Zuhörer der freien Vorlesungen über Geometrie, welche Monge im Louvre hielt; in diesen sprach Monge oft von den wunderbaren Beziehungen, welche zwischen den Operationen der Algebra und denjenigen der Geometrie existieren, wobei er sich beklagte, daß es ihm verboten sei, seine geometrischen Entdeckungen vorzutragen. „Tout ce que je fais par le calcul", sagte er, „je pourrais l'exécuter avec la règle et le compas; mais il ne m'est pas permis de vous révéler ces sécrets." Diese Andeutung hat die Neugierde von Lacroix stark erregt; er versuchte die Analysis von Monge in geometrische Konstruktionen zu übersetzen, überzeugte sich dabei selbst von der Wichtigkeit der Projektionsmethode, und auf diesem Wege gelang es ihm, die Fundamentalaufgaben der darstellenden Geometrie aufzulösen. Der angeführte Band bildet nun die Frucht dieser Untersuchungen. Das Werk führt auch den Nebentitel „Compléments de géométrie", und dieser komplementäre Zweck seines Buches wird ausdrücklich vom Verfasser auch in seiner Vorrede hervorgehoben, wo man die Bemerkung findet, daß, während die Auflösungen der planimetrischen Probleme vollkommen ausführbar sind, die der stereometrischen einen rein theoretischen Charakter besitzen, welchen man in der Praxis ihnen unbedingt nehmen muß. Eben dies ist der Zweck der von Lacroix dargelegten Methoden.

Der erste Abschnitt seiner „Essais" enthält die Grundlagen der Methode der doppelten Orthogonalprojektion und der Anwendungen derselben auf Punkte, Geraden, Ebenen und Kugeln. Die Art der Darstellung ist bei Lacroix minder glänzend, aber etwas methodischer als bei Monge und ist der heute von uns angewandten ähnlicher, als der älteren. Im zweiten Abschnitte sind die Hauptprobleme über die krummen Flächen aufgelöst (Durchschnitte und Tangentenebenen), mit besonderen Anwendungen auf zylindrische, konische, Rotations- und Regelflächen. Zuletzt beschäftigt sich der Verfasser mit der Perspektive unter einem Gesichtspunkt, der dem von Monge gewählten ganz ähnlich ist; seine Behandlung ist aber allgemeiner und

[1]) Vgl. den o. a. „Essai". Diese Geschichte wird in der Vorrede des „Cours de géométrie déscriptive" (I. Partie, Paris 1852) von Th. Olivier anders erzählt.

verschieden von der älteren, da Lacroix nur annimmt, daß die Tafel auf einer der Grundebenen normal sei, und sich, um die wahre Figur der Perspektive zu finden, einer Umlegung bedient. Aber er deutet auch ein anderes Verfahren an, zum Entwerfen einer Perspektive, welches demjenigen Lamberts ähnlich ist und übrigens auch nicht als neu hingestellt wird. Zum Schluß findet sich die Bemerkung, daß die darstellende Geometrie auf die Gnomonik anwendbar ist, wenn man diese Lehre wie Montucla definiert[1]); diese Anwendung wurde später durch einen Schüler Monges vollständig entwickelt[2]). In einem eingehenderen Bericht über die „Essais" würde auch der vortrefflichen pädagogischen Bemerkungen Erwähnung getan werden müssen, welche sie enthalten, und welche gewiß nicht wunder nehmen werden bei einem der besten Schriftsteller der mathematischen Pädagogik.

Dies sind die Anfänge der neuen Lehre, mit der der Name Monge für immer verbunden sein wird; die Geschichte ihrer weiteren Entwicklungsstadien gehört dem 19. Jahrhundert an.

---

[1]) „Histoire des mathématiques", 2. éd., T. I, p. 725. [2]) Lefrançois, „Mémoire sur la gnomonique" (Journ. de l'Éc. pol., XI. Cah., p. 261—271).

ABSCHNITT XXVI

INFINITESIMALRECHNUNG

VON

G. VIVANTI

Die Grundlagen der Infinitesimalrechnung.[1])

In dem vorhergehenden Zeitabschnitte wohnten wir einem der wichtigsten Ereignisse der Geschichte der Mathematik, der Geburt der Infinitesimalrechnung, bei. Die mit diesem Namen bezeichnete Lehre unterscheidet sich dadurch von allen übrigen Teilen der Mathematik, daß sie sich, wenigstens in der Form, in der sie von ihren Hauptbegründern, Leibniz und Newton, vorgetragen wurde, auf nicht echt mathematische Prinzipien stützt. Newton geht von dem Geschwindigkeitsbegriffe aus; Leibniz verlangt, man dürfe, ja man solle gewisse nicht verschwindende Größen vernachlässigen. Suchen wir eine Erklärung darüber in ihren Schriften, so finden wir bei Newton so gut wie nichts; Leibniz sagt zwar wiederholt aus, seine eigene Methode sei von der Archimedischen nur der Form nach verschieden, aber einen Beweis seiner Behauptung finden wir nirgends. Auch seine unmittelbaren Nachfolger besorgten eher die Entwicklung der Rechnungsmethoden als die Grundlegung der Theorie. Der Verfasser des III. Bandes konnte ja den Gegenstand in einigen wenigen Seiten erledigen.

Der Periode der Schöpfung folgt aber, wie gewöhnlich, eine Periode, in welcher das Werk der Schöpfer geordnet und vervollkommnet wird, eine Periode, die, wenn auch etwa nicht so glänzend, doch ebenso wichtig und fruchtbar ist als die frühere[2]), denn aus dieser Anordnungsarbeit entsteht, wenn sie von genialen Geistern geleistet wird, wohl manches wesentlich Neue und Wertvolle; so z. B. die Theorie der elliptischen Funktionen.

Eine Aufgabe der neuen Periode sollte selbstverständlich die sein, die Prinzipien der Infinitesimalrechnung auf einen festen Boden zu gründen. In dieser Hinsicht zeigen sich zwei entgegengesetzte Tendenzen; einerseits bestrebt man sich, die Stichhaltigkeit der Infinitesimalrechnung nachzuweisen, andererseits versucht man, die Leibnizsche Methode durch andere, vermeintlich strengere zu ersetzen.

---

[1]) Siehe Vivanti, Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica, 2. Aufl., Napoli 1901. [2]) Siehe Marie, Hist. des sc. math. et phys., VIII, Paris 1886, p. 67.

Als Hauptvertreter der ersten Tendenz kann man d'Alembert und Carnot, als Hauptvertreter der zweiten kann man Lagrange nennen.

D'Alembert (1717—1783, diese Vorl., III², S. 510) behauptet[1]), das Unendliche der Analysis sei nichts anderes als die Grenze, welcher das Endliche sich unbeschränkt nähert, ohne dieselbe jemals zu erreichen. Sagt man also, die Größe:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

sei unendlich, so ist damit nur gemeint, daß man stets so viele Glieder der Folge annehmen kann, daß die Summe derselben eine beliebig vorgeschriebene Größe übertrifft. Auf analoge Weise wird das Unendlichkleine erklärt. Die Differentialrechnung setzt sich vor, die Grenzwerte der Verhältnisse je zweier endlichen, durch bestimmte Gesetze verbundenen Größen auszuwerten; sie hat nur mit endlichen Größen zu tun; das Unendliche und das Unendlichkleine sind bloß Kunstwörter, die die Mathematiker erfunden haben, um die Ergebnisse ihrer Forschungen kürzer und einfacher aussprechen zu dürfen.

Dem d'Alembertschen Begriffe, nach welchem die Infinitesimalrechnung nur eine Grenzrechnung ist, schließt sich Kästner (1719—1800, diese Vorl., III², S. 576, IV, S. 456)[2]) an. Nimmt n unbeschränkt zu, so hat $\frac{an+b}{an}$ die Einheit zur Grenze; das läßt sich aber dadurch ausdrücken, daß man sagt, es dürfe die endliche Größe b gegen die unendliche Größe an vernachlässigt werden. Auf ähnliche Weise lassen sich die unendlichen und die unendlichkleinen Größen der verschiedenen Ordnungen rechtfertigen. Ist Z eine Funktion von z, welche für den Wert $z + e$ von z den Wert $Z + E$ annimmt, so heißt die Grenze, welcher sich $\frac{E}{e}$ bei abnehmenden E und e unbeschränkt nähert, das „Verhältnis der Differentiale" von Z und z; E und e heißen die „Differentiale". Auf Grund dieser Definition ergibt sich, unter der Voraussetzung, daß n eine ganze positive Zahl bezeichnet und $Z = z^n$ ist:

$$\lim \frac{E}{e} = nz^{n-1};$$

diese Formel läßt sich auf jeden reellen Wert von n erstrecken. Weiter unten mischt aber Kästner in die Definition des Differentials den Geschwindigkeitsbegriff ein. Die Differentiale dZ, dz von Z, z, sagt er, sind nicht die wirklichen Zuwächse dieser Größen, sondern die Zuwächse, welche dieselben in einer bestimmten Zeit erhalten

---

[1]) Mélanges de litt., d'hist. et de philos., Nouv. éd., T. 5, Amsterdam 1767, p. 239—252; Encyclopédie méthodique, Paris 1785, art. „Différentiel". [2]) Anfangsgründe der An. des Unendl., Halle, 1. Aufl. 1761, 2. Aufl. 1770.

würden, wenn sie sich diese ganze Zeit hindurch mit den Anfangsgeschwindigkeiten veränderten; das Verhältnis $\frac{dZ}{dz}$ ist also gleich dem Verhältnis der Geschwindigkeiten, es möge die Zeit endlich sein oder nicht, und wenn man die Zeit als unendlichklein ansieht, so geschieht das nur, um die Geschwindigkeiten als konstant betrachten zu dürfen. Die so verstandenen Differentiale sind nichts anderes als die Newtonschen Fluxionen. Man kann aber nach Maclaurin zeigen, daß das Verhältnis der Fluxionen von z^n und von z gleich nz^{n-1} ist; es stimmen also die Resultate der Fluxionsrechnung mit denjenigen der Leibnizschen Rechnung vollkommen überein, und man kann diese letztere mit Zuversicht gebrauchen.

Dieselben Ideen finden sich in Kästners Dissertation über das Unendliche[1]) wieder. Das Unendliche und das Unendlichkleine sind keine Größen; sie drücken bloß die Möglichkeit einer unbeschränkten Zu- oder Abnahme aus. Wenn wir sagen, das letzte Glied der Reihe:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

sei 0 und ihre Summe sei 1, so verstehen wir darunter nur, daß die Glieder der Reihe unbeschränkt abnehmen, und daß ihre Summe sich der 1 unbeschränkt nähert. Der Quotient zweier Funktionen einer Veränderlichen x nähert sich bei zunehmendem n dem Quotienten der Glieder höchster Ordnung; die Sache verhält sich daher ganz so, als wenn man alle übrigen Glieder unterdrückte.

Unter den Anhängern von d'Alembert muß auch Gerdil genannt werden. Hyacinth Sigismund Gerdil, Barnabit, geboren am 23. Juni 1718 zu Samoens in Savoyen, war der Sohn eines Notars. Kaum 19 Jahre alt, wurde er zum Professor der Philosophie an der Universität zu Macerata ernannt; später war er Professor der Philosophie und dann der Moraltheologie an der Turiner Universität. Der Ruhm seiner Gelehrsamkeit, Wohltätigkeit und Frömmigkeit ver-

[1]) Dissertationes mathematicae et physicae quas Societati Regiae Scientiarum Gottingensi annis 1756—1766 exhibuit A. G. Kästner, Altenburg 1771 (vgl. diese Vorlesungen, IV, S. 26), Diss. V: De vera infiniti notione (p. 35—38). Siehe auch Diss. XI: De translatis in dictione geometrarum (p. 79—88), Diss. XIII: De lege continui in natura (p. 142—149), wo ein früheres Inauguralprogramm des Verfassers mit dem Titel: De cautione in neglectu quantitatum infinite parvarum observanda (Leipzig 1746) zitiert wird. — Auf Kästners Ideen bezieht sich Ludolphus Hermannus Tobiesen (1771—1839) in seiner schon oben S. 26 erwähnten Schrift: Principia atque historia inventionis calculi differentialis et integralis nec non methodi fluxionum, Göttingen 1793.

breitete sich mehr und mehr. Der König wählte ihn zum Lehrer seines Sohnes, des späteren Karl Emanuel IV.; viele Akademien zählten ihn unter ihren Mitgliedern. Im Jahre 1777 wurde er Kardinal, und beim Tode von Pius VI. hätte er den päpstlichen Thron bestiegen, hätten sich nicht politische Gründe dagegen geltend gemacht. Er starb zu Rom am 12. August 1802. Seine Schriften sind sehr zahlreich und betreffen meistens Theologie und Philosophie.

Gerdil[1]) geht noch weiter als d'Alembert, indem er nicht nur behauptet, daß die unendlichen und unendlichkleinen Größen für die Infinitesimalrechnung entbehrlich sind, sondern auch, daß das absolut Unendliche unmöglich ist. Die sieben von ihm angeführten Beweise dieser Behauptung sind weder bündig noch wesentlich neu, und bieten für uns wenig Interesse dar.

Die Abhandlung von Gerdil gab zu einer ganz kurzen, aber interessanten Note Lagranges[2]) Veranlassung. In dieser Note bemerkt Lagrange, daß man in der Infinitesimalrechnung von unrichtigen Voraussetzungen ausgeht, daß aber andere in der Rechnung begangene Fehler die Unrichtigkeit aufheben; so z. B. ist es eine falsche Annahme, daß die Tangente die Verlängerung einer Seite eines Unendlichvieleckes sei; da man aber während der Rechnung Größen als verschwindend vernachlässigt, die bloß unendlichklein sind, so werden beide Unrichtigkeiten sich gegenseitig tilgen. Erst nachdem man bewiesen hat, daß eine solche Aufhebung wirklich stattfindet, sei man berechtigt, das Unendlichkleine als eine wirkliche Größe zu betrachten.

Der Begriff von der Ausgleichung der Fehler war nicht neu, er kommt schon ein Vierteljahrhundert früher bei Berkeley (diese Vorl., III², S. 741 ff) vor, ob es gleich keinen Beleg dafür gibt, daß Lagrange dessen Schriften gekannt hat. Merkwürdig ist es, daß Lagrange, gleich zu Anfang seiner glänzenden Laufbahn, auf die Diskussion von der Stichhaltigkeit der Prinzipien der Infinitesimalrechnung geführt wurde, ein Gegenstand, der ihn bis zu seinen letzten Jahren beschäftigte und auf welchen er nach mehr oder minder langen Intervallen wiederholt gekommen ist. Während er aber anfangs die Strenge der Infinitesimalrechnung zu verteidigen suchte, kam er später auf den Gedanken, diese Rechnung durch eine strengere zu ersetzen. Einen Grundriß seiner neuen Methode gab er in einer Abhandlung von 1772[3]), aber erst 1797 entwickelte er dieselbe in seinem berühmten

[1]) De l'infini absolu considéré dans la grandeur, Misc. Taur., T. II, 1760—61, P. III, p. 1—45. [2]) Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal, Misc. Taur., T. II, 1760—61, P. III, p. 17—18; Oeuvres, T. VII, Paris 1877, p. 597—599. [3]) Sur une nouvelle espèce de calcul relatif

Vorlesungen über analytische Funktionen[1]). In der Zwischenzeit (1784) hatte er durch die Berliner Akademie, deren Vorsitzender er war, die Gelehrten der ganzen Welt aufgefordert, das hochwichtige Problem aufzulösen; woraus erhellt, erstens, daß er damals mit seiner eigenen Lösung nicht ganz zufrieden war, zweitens, daß, wenn auch die Akademie eine der vorgelegten Abhandlungen krönte, die darin vorgeschlagene Methode seinen Geist so wenig befriedigte, daß er bald seine alten Ideen wieder aufnahm.

Über die erwähnte Preisfrage müssen wir etwas ausführlicher berichten. Man verlangte[2]) „eine lichtvolle und strenge Theorie dessen, was man Unendlich in der Mathematik nennt". „Die höhere Geometrie", lautete die Aufforderung, „benutzt häufig unendlichgroße und unendlichkleine Größen; jedoch haben die alten Gelehrten das Unendliche sorgfältig vermieden, und einige berühmte Analysten unserer Zeit bekennen, daß die Wörter unendliche Größe widerspruchsvoll sind. Die Akademie verlangt also, daß man erkläre, wie aus einer widersprechenden Annahme so viele richtige Sätze entstanden sind, und daß man einen sicheren und klaren Grundbegriff angebe, welcher das Unendliche ersetzen dürfe, ohne die Rechnungen zu schwierig oder zu lang zu machen."

Der Preis wurde der Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs (Berlin 1786)[3]) erteilt. Verfasser dieser Abhandlung war Simon Antoine Jean Lhuilier, geboren in Genf 1750, gestorben daselbst 1840, seit 1795 Professor der Mathematik an der Akademie in Genf, dessen Namen in mehr als einem Abschnitte dieses Bandes erscheint (s. o. S. 84, 432).

Lhuilier erhebt wohlbekannte Bedenken gegen den Unendlichkeitsbegriff. Es zerlegt z. B. eine Ebene den Raum in zwei gleiche Teile[4]), und dasselbe tut eine der ersteren parallele Ebene; jedoch ist

---

à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, Nouv. Mém. Berlin, 1772 (publ. 1774), p. 186—221; Oeuvres, T. III, Paris 1869, p. 441 bis 476.

[1]) Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies, 1. Aufl., Paris 1797, 2. Aufl., Paris 1813 (wieder abgedruckt in Oeuvres, T. IX, Paris 1881). Siehe auch: Discours sur l'objet de la théorie des fonctions analytiques, Journ. Éc. Polyt., VI. Cahier, T. II, 1799; Oeuvres, T. VII, Paris 1877, p 325—328.

[2]) Nouv. Mém. Berlin 1784 (publ. 1786), p. 12—13. [3]) Eine lateinische Bearbeitung erschien 1795 in Tübingen unter dem Titel: Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris.

[4]) „. . telles qu'on ne puisse rien dire de l'une qu'on ne puisse également dire de l'autre".

von den beiden letzteren Halbräumen der eine größer, der andere kleiner als einer der ersteren. Ferner kann der unendliche Raum keine Figur aufweisen; eine Figur setzt nämlich eine gewisse Einrichtung der Grenzen voraus, das Unendliche aber läßt keine Grenzen zu. Noch unbegreiflicher ist das Unendlichkleine; es sollte dieses eine jedes Größencharakters entbehrende Größe sein. In der Infinitesimalrechnung wird das Unendlichkleine bald als verschwindend, bald als nicht verschwindend betrachtet; jedoch gleichen sich die Rechnungen von selbst aus, da, was vernachlässigt wird, nicht unvergleichbar, sondern genau gleich Null ist. Es empfiehlt sich also, die Infinitesimalrechnung durch die Grenzmethode zu ersetzen, ohne jedoch die Ausdrucksweise und die Bezeichnungen der ersteren zu verlassen. Ob und wie Lhuilier seinen Gedanken ausgeführt hat, werden wir weiter unten sehen.

Die Berliner Preisfrage gab auch zu einer anderen Schrift Veranlassung, die aber der Akademie nicht vorgelegt wurde. Wenzeslaus Johann Gustav Karsten (s. o. S. 74, 357), Professor der Mathematik und Naturlehre in Halle, geboren 1732, gestorben 1787, war damals mit der Abfassung seines Handbuches der Analysis und höheren Geometrie beschäftigt und wurde natürlich dazu geleitet, die aufgeworfene Frage zu berücksichtigen. Hieraus entstand die erste seiner Mathematischen Abhandlungen, welche den folgenden Titel trägt: Vom Mathematisch-Unendlichen mit Rücksicht auf eine im Jahre 1784 aufgegebene Preisfrage. Wenn der Mathematiker sagt, es sei $\frac{1}{m} = 0$ für $m = \infty$, so bedeutet das nach Karsten, daß $\frac{1}{m}$ bei zunehmendem m beständig abnimmt, und daß die Gleichung $\frac{1}{m} = 0$ nur dann gelten würde, wenn m einen Wert erhielte, den es nicht erreichen kann, so lange man fortzählt. Auch das Unendlichkleine ist bloß eine Redensart; die Regeln der Infinitesimalrechnung lassen sich durch die Grenzmethode rechtfertigen, so daß es nutzlos erscheint, neue Methoden zu bilden, wie es die Akademie verlangt. Dieselben Begriffe, wenn auch unter einer etwas veränderten Form, finden sich in der fünften Abhandlung[1]) wieder, deren Titel ist: Vom Berührungswinkel und Krümmungskreise. Von den beiden entgegengesetzten Meinungen, deren Hauptvertreter Clavius

[1]) Die Titel der drei übrigen Abhandlungen lauten: 2. Von den Parallellinien, und den neuerer Bemühungen, die Theorie davon zu ergänzen; 3. Über eine Stelle in des Herrn Lamberts Briefwechsel, von verneinten und unmöglichen Wurzelgrößen; 4. Von den Logarithmen der verneinten und unmöglichen Größen.

und Le Peletier sind[1]), schließt sich Karsten derjenigen des letzteren an, indem er behauptet, der Berührungswinkel sei genau gleich Null. Er zeigt aber, daß diese Behauptung nicht im mindesten hindert, die Verschiedenheit der Krümmungsmasse der eine gemeinschaftliche Tangente besitzenden Linien zu begreifen.

Der Berliner Preisfrage verdanken wir vermutlich auch Carnots Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal, die zwar erst im Jahre 1797 erschienen, die aber, wie der Verfasser in seiner Vorrede angibt, schon lange fertig standen[2]).

Lazare Nicolas Marguerite Carnot, geboren am 13. Mai 1753 zu Nolay in Frankreich, wurde Genieoffizier, dann Mitglied der Assemblée nationale und des Konvents (1791), wo er für das Todesurteil des Königs stimmte. Als Mitglied des Comité de salut public (1793) verdiente er den ehrenvollen Beinamen eines organisateur de la victoire. Später war er Minister unter Napoleon; als dieser aber die Kaiserkrone annahm, trat Carnot ins Privatleben zurück. Nach dem unglücklichen russischen Feldzuge bot er wieder seine Dienste dem Vaterlande an, und zeichnete sich bei der Verteidigung von Antwerpen aus. Er war wieder Minister beim hunderttägigen Kaisertum Napoleons, und wurde nach dessen Falle in eine Proskriptionsliste einbegriffen; er erhielt seinen Wohnsitz in Magdeburg angewiesen, wo er am 22. August 1823 starb.

In seinen Réflexions unternimmt es Carnot, nachzuweisen, daß die Infinitesimalmethode ganz streng ist, und daß es daher keinen Grund dafür gibt, auf diese Methode zu verzichten. Dazu untersucht er zunächst, wie der menschliche Verstand zu dem Grundbegriffe dieser Methode gelangt sein möge. Die Unmöglichkeit, eine genaue Auflösung gewisser Probleme zu erhalten, führte, meint er, zum Versuche, dieselben annäherungsweise aufzulösen, indem man die Daten der Probleme durch andere ersetzte, die von diesen so wenig verschieden wären, daß man die in den Endresultaten entstehenden Fehler vernachlässigen dürfte. Carnot führt das folgende Beispiel an: Es solle die Tangente MT zu einem Kreis MBD in einem Punkt M geführt werden (Fig. 73). Sei a der Radius, C der Mittelpunkt, BD ein Durchmesser, MP die zu BD senkrechte durch M gehende Gerade; man setze:

$$DP = x, \quad MP = y,$$

[1]) Bd. II[2] u. III[2] passim; Vivanti, a. a. O. [2]) Eine deutsche Übersetzung mit sehr interessanten Noten ist von J. K. Hauff herausgegeben worden unter dem Titel: Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung (Frankfurt a. M. 1800). Auch eine italienische Übersetzung von G. B. Magistrini (Pavia 1803) liegt vor.

und suche, die Subtangente TP zu bestimmen. Dazu betrachte man den Kreis als ein Vieleck, und es sei NM eine Seite desselben, NO die Senkrechte zu DB durch N, MQ die Senkrechte zu NO durch M; die Verlängerung von NM gibt annäherungsweise die Tangente an, so daß die angenäherte Beziehung stattfindet:

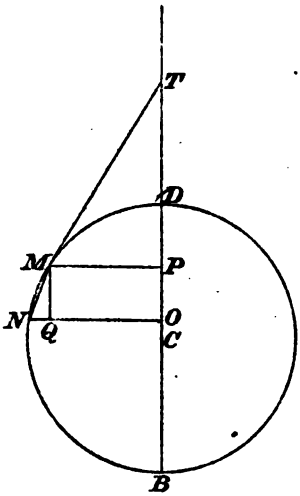


Fig. 73.

$$(1) \qquad \frac{MQ}{NQ} = \frac{TP}{y}.$$

Andererseits ist:

$$y^2 = 2ax - x^2,$$
$$NO^2 = 2a \cdot DO - DO^2;$$

diese letzte Gleichung läßt sich schreiben:

$$(y + NQ)^2 = 2a(x + MQ) - (x + MQ)^2,$$

und wenn man die erste Gleichung abzieht:

$$2y \cdot NQ + NQ^2 = 2(a - x)\,MQ - MQ^2,$$

oder:

$$\frac{MQ}{NQ} = \frac{2y + NQ}{2(a - x) - MQ},$$

also wegen (1):

$$(2) \qquad TP = y\,\frac{2y + NQ}{2(a - x) - MQ}.$$

Nun sind MQ und NQ kleiner als MN, folglich vernachlässigbar, und man hat annäherungsweise:

$$TP = \frac{y^2}{a - x}.$$

Es ist aber überraschend, daß diese Lösung nicht angenähert, sondern streng richtig ist. Woher kommt das? Da wir von einer ungenauen Voraussetzung ausgegangen sind, so ist die Gleichung (2) notwendig ungenau; sie ist es aber um so weniger, je kleiner MN ist, und wird ganz genau, wenn MN und somit MQ und NQ verschwinden. Es hat hier eine gegenseitige Aufhebung der Fehler stattgefunden[1]; und dasselbe geschieht in allen Fällen. Wie kann man

[1] Es kommt hier der Begriff von der Ausgleichung der Fehler vor, welchen man schon bei Berkeley und bei Lagrange gefunden hat; ob Carnot seine

aber erkennen, daß die Fehler sich aufgehoben haben? Die in den Rechnungen vorkommenden Größen sind teils bestimmt, wie TP, MP, BP, teils unbestimmt, wie MN, MQ, NQ; die letzteren schleichen sich in die Rechnungen ein, wenn wir zur Erleichterung gewisse Grössen durch andere ersetzen, die von diesen wenig verschieden sind, und von diesen ausschließlich hängen daher die Fehler ab, mit welchen die Resultate behaftet sind. Sobald also sämtliche willkürliche Größen aus den Rechnungen entfernt worden sind, können wir mit Sicherheit annehmen, daß die Fehler sich aufgehoben haben.

Kann eine willkürliche Größe (wie NO) so wenig verschieden von einer bestimmten (wie MP) angenommen werden, als man will, so sagt man, die letztere sei die **Grenze** der ersteren, und die Differenz (nämlich NQ) sei **unendlichklein**; eine unendlichkleine Größe ist also eine willkürliche Größe, welche die Null zur Grenze hat. Die ungenauen Gleichungen (wie (2)) werden zu genauen, sobald man die in denselben vorkommenden willkürlichen Größen durch deren Grenzen ersetzt. Dadurch erklärt sich, wie die scheinbar ungenaue Regel von der Vernachlässigung der unendlichkleinen Größen zu genauen Resultaten führen kann.

Will man aber die Unbequemlichkeit vermeiden, mit ungenauen Größen zu tun zu haben, so kann man die unendlichkleinen Größen als streng verschwindend betrachten, mit der alleinigen Vorsicht, die etwa vorkommenden Verhältnisse je zwei solcher Größen durch deren Grenzen zu ersetzen.

Wird also gefragt, ob man die unendlichkleinen Größen als verschwindend betrachten muß oder nicht, ein Dilemma, das zu vielen Diskussionen Veranlassung gegeben hat, so läßt sich antworten: man kann nach Belieben ebenso den einen wie den anderen Standpunkt behalten.

Ist so die Strenge der Infinitesimalrechnung gesichert, so bleibt nur noch übrig, zu bemerken, daß sie die Grenzmethode, mit welcher sie in den Resultaten übereinstimmt, an Einfachheit weit übertrifft, insofern sie sich vorsetzt, jeder Grenzbestimmung zu entbehren und mit bloß algebraischen Rechnungen zu verfahren. Wird man also, fragt Carnot, auf die unermeßlichen Vorteile verzichten, die die Infinitesimalmethode darbietet, aus Furcht, sich auf einen Augen-

---

Vorgänger gekannt hat oder nicht, möge dahingestellt bleiben. Einem anderen Vorgänger, N. Fiorentino, werden wir weiter unten begegnen. Es möge hier auch die Aussage von Segner (s. u.) erwähnt werden, daß das Gleichheitszeichen in einer Differentialgleichung nicht die Gleichheit, sondern das Streben nach Gleichheit bedeutet.

blick von dem genauen Verfahren der Elementargeometrie zu entfernen? Wird man einem ebenen und bequemen Wege einen dornigen Pfad vorziehen, auf welchem es so schwer ist, sich nicht zu verirren?

Der Standpunkt von Carnot ist richtig, aber sein Verfahren ist weder so einfach, als es sein dürfte, noch ganz vollständig. Um nachzuweisen, daß die ungenauen Gleichungen sich durch Vertilgung der unendlichkleinen Größen in genaue verwandeln, braucht man nur die unendlichkleine Größe als eine willkürliche Größe zu definieren: denn, da nach dieser Definition die unendlichkleinen Größen sich so klein annehmen lassen, daß die aus deren Vertilgung hervorgehenden Fehler kleiner sind als jede beliebig vorgegebene Größe, so sind diese Fehler genau gleich Null. Es findet also wirklich eine Aufhebung der Fehler statt, nicht aber durch gegenseitige Ausgleichung („compensation des erreurs"), wie Carnot meint, sondern dadurch, daß jeder Fehler für sich selbst zu Null wird. Es ist ferner zu beachten, daß sich Carnot mit der Bestätigung der Tatsache von der Fehleraufhebung begnügt, ohne nach deren Grunde zu suchen; hätte er das getan, so hätte er den Grund darin gefunden, daß, wie soeben gesagt, jeder Fehler für sich verschwindet.

Manche andere Schriftsteller bemühten sich, mit größerem oder kleinerem Erfolg, die Strenge der Leibnizschen Methode außer Zweifel zu legen.

Nach Johann Andreas von Segner (diese Vorl., III², S. 609, IV, S. 74)[1]) ist der Unendlichkeitsbegriff bloß ein negativer Begriff, denn unendlich ist was keine Grenzen hat; um auszudrücken, daß zwei parallele Linien nicht zusammentreffen, sagt man, sie schneiden sich im Unendlichen. Man kann aber dem Unendlichen eine positive Bedeutung geben. Behauptet man, zwei parallele Geraden haben einen im Endlichen liegenden gemeinschaftlichen Punkt, so begeht man einen desto kleineren Fehler, je größer der Abstand des Punktes ist; wäre also der Abstand größer als jede angebbare Größe, so würde der Fehler verschwinden. Bezeichnen wir mit M den Ozean, mit P einen Tropfen Wasser, so ist es uns unmöglich, das Verhältnis $\frac{M}{P}$ von $\frac{1}{0}$ zu unterscheiden, wenn sie auch voneinander sachlich verschieden sind, denn unser Begriff von M und von $M \pm P$ ist ganz derselbe; das zeigt, daß wir fähig sind, das Verhältnis $\frac{1}{0}$ gewissermaßen zu

[1]) Segner, Elementa analyseos finitorum, Halle 1758; Elementorum analyseos infinitorum Pars prima, Halle 1761. Pars secunda, Halle 1763.

begreifen. Die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{1}{0}$ ist nur dann möglich, wenn a beliebig zunehmen darf; sie drückt aus, daß die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{1}{n}$ für keinen nicht verschwindenden Wert von n besteht. Ist $\frac{a}{b} = \frac{1}{0}$, so heißt a unendlich in bezug auf b; ist b eine endliche Größe, so schreibt man $a = \infty$, und es folgt:

$$\infty \pm b = \infty,$$

wodurch sich alle Regeln der Differentialrechnung rechtfertigen lassen.

Jacopo Belgrado, Jesuit, geboren zu Udine 1704, gestorben daselbst 1789, Verfasser mehrerer mechanischer und physikalischer Schriften, veröffentlichte in höchst eleganter Ausstattung ein dem elfjährigen Herzog von Parma gewidmetes, zweibändiges Werk, welches über 200 meistens mechanische Probleme enthält.[1] In der Einleitung zum zweiten Bande spricht Belgrado seine Meinung über das Unendliche aus. Die Linie, sagt er, besteht aus Punkten und wird durch das Fließen eines Punktes erzeugt; der Punkt ist ein Unendlichkleines in bezug auf die Linie. Das Unendlichkleine ist also kein bestimmter Teil des Endlichen, es ist kleiner als jeder noch so kleine Teil. Hieraus folgt, daß zwei Größen einander gleich sind oder als solche betrachtet werden dürfen, wenn ihre Differenz unendlichklein ist. Nach Belgrado sind die Antworten von Leibniz auf die Angriffe Nieuwentijts (diese Vorl., III², S. 254) keineswegs überzeugend; er schließt sich den von Torelli in seinem Werke De nihilo geometrico auseinandergesetzten Begriffen an.

Da der letztgenannte, von seinen Zeitgenossen sehr geschätzte Mathematiker im III. Bande nicht berücksichtigt worden ist, so möge es uns erlaubt werden, hier diese Lücke auszufüllen.

Giuseppe Torelli (diese Vorl., IV, S. 34 und 617)[2], geboren zu

---

[1]) Belgrado, De utriusque analyseos usu in re physica, 2 Bde., Parma 1761—62. Der erste Band (De analyseos vulgaris usu in re physica) umfaßt 113 Probleme über Hydraulik (28), Mechanik (14), Astronomie (12), Optik (10), Ballistik (4), Zentrobarik (2), Pneumatik (6), Architektur (9), Meteorologie (2), Hygrometrie (1), Bewegung (8), Pendel (6), Stoß (4), Kohärenz (4), Akustik (1), Nautik (1), Geographie (1), Gnomonik (1), Zinse und Glücksspiele (4). Der zweite Band (De analyseos infinitorum usu in re physica) umfaßt 100 Probleme über Nautik (13), Hydrostatik (3), Hydraulik (9), Mechanik (7), Dynamik (14), Ballistik (3), Atmosphärik (3), Geographie (3), Architektur (2), Zentripetalkraft (14), Optik (9), Fortpflanzung der Bewegung (5), Schwingungsbewegung (6), Widerstände (9). [2]) Siehe drei Nachrufe von Ippolito Pindemonte (1753—1828) in dessen Werken; einer von diesen ist aus den Mem. Soc. It. (1) II, 2 (1784), p. III—XXXIV abgedruckt.

Verona am 3. November 1721, gestorben am 18. August 1781, war Dichter, Philosoph und Mathematiker. Sein Hauptwerk, welches neulich aus der Vergessenheit durch O. Stolz[1]) hervorgerufen wurde, ist: De nihilo geometrico libri duo (Verona 1758). Nach Torelli ist die Differentialrechnung nichts anderes als eine Rechnung mit Nullen. Man muß aber die metaphysische und die geometrische Null unterscheiden; die zwei Begriffe werden vom ersten bzw. zweiten Teil der folgenden Definition bestimmt: „Nihilum est, per quod unumquodque eorum, quae non sunt, dicitur nihilum. Dicitur autem unum non esse, quod antea cum esset, non esse amplius concipitur". Die geometrische Null steht zu sich selbst in demselben Verhältnis wie die Einheit zur Einheit. Die Vergleichung zweier gleichdimensionaler Größen ist „ejusdem generis" oder „diversi generis", je nachdem die beiden Größen von Null verschieden sind, oder eine derselben gleich Null ist. Auf diese Grundlagen sich stützend, beweist Torelli im ersten Buche eine Reihe von Sätzen, welche meistens die Vergleichung von Nullen oder von Unendlichen betreffen. Wird eine beliebige Größe von sich selbst subtrahiert, so entsteht die (geometrische) Null; denn dadurch hört auf zu sein, was früher war. Die Null $1-1$, welche aus der Subtraktion der Einheit von sich selbst entsteht, heißt „nihilum ordine primum"; und es ist $x - x = x(1-1)$. Bezeichnet x eine zweidimensionale Größe, und subtrahiert man jede ihrer Dimensionen von sich selbst, so ist das Produkt beider Differenzen $x(1-1)^2$; daher ist die Vergleichung der aus Subtraktion entstehenden Null $x(1-1)$ mit der aus Subtraktion und Multiplikation entstehenden $x(1-1)^2$ eine „comparatio diversi generis", da man dabei x mit x, $1-1$ mit $1-1$ und 1 mit $1-1$ vergleichen muß. Aus der Division von 1 mit 0 entsteht ∞. Es ist nämlich:

$$x(1-1) + x = x,$$

was beweist, daß man durch Division von x mit $1-1$ als Quotienten und als Rest x erhält; da aber der Rest dem Dividenden gleich ist, so kann die Division ohne Ende fortgeführt werden, und der Gesamtquotient ist eine Größe, welche keine Grenzen hat, d. i. eine unendliche Größe („quod autem nullos habet fines, illud infinitum esse dicitur"). — Daß die Torellische Methode nichts anderes ist als die maskierte Grenzmethode, erhellt aus den geometrischen Anwendungen, welche den Stoff des zweiten Buches bilden. Bezeichnen wir der Kürze wegen mit 0_α die aus der Größe α entstehende Null $\alpha(1-1)$, so ist allgemein:

---

[1]) Größen und Zahlen, Leipzig 1891.

$$\frac{0_\alpha}{0_\beta} = \frac{\alpha(1-1)}{\beta(1-1)} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ist insbesondere y die Ordinate, v die Subtangente einer Kurve, so hat man:

$$\frac{0_y}{0_v} = \frac{y}{v};$$

da aber zur Bestimmung der Tangente (d. i. derjenigen Geraden, welche früher die Kurve in zwei Punkten schnitt, jetzt aber sie nicht mehr schneidet) nötig ist, das Verhältnis $\frac{y}{v}$ zu kennen, so kann man sich statt dieses vorsetzen, das Verhältnis $\frac{0_y}{0_v}$ zu bestimmen. Diese Bestimmung geschieht für die Parabel folgendermaßen. Es seien (Fig. 74) A der Scheitel, F, E zwei beliebige Punkte der Kurve, BF, IE die zugehörigen Ordinaten, D der Durchschnitt von IE mit der durch F parallel zur Achse gezogenen Geraden, H, G die Schnittpunkte der Sehne FE und der Tangente in F mit der Achse, AC das latus rectum. Dann ist:

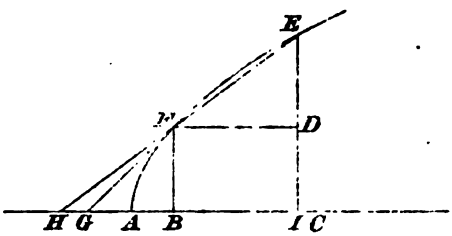


Fig. 74.

$$AC \cdot AI = IE^2,$$

oder:

$$AC(AB + BI) = (ID + DE)^2 = (BF + DE)^2,$$

ferner:

$$AC \cdot AB = BF^2,$$

also:

$$AC \cdot BI = 2BF \cdot DE + DE^2,$$

oder:

$$AC(HI - HB) = 2BF(IE - BF) + (IE - BF)^2.$$

Fällt E mit F zusammen, so ist:

$$HI - HB = GB - GB = 0_v, \quad IE - BF = BF - BF = 0_y,$$

also:

$$AC \cdot 0_v = 2BF \cdot 0_y + 0_y^2.$$

Da aber die Vergleichung der beiden Glieder rechts eine comparatio diversi generis ist, so erhält man durch Vernachlässigung von 0_y^2 („neglecto ab altera parte nihilo orto ex BF in semetipsum ducto"):

$$\frac{0_y}{0_v} = \frac{AC}{2BF}.$$

Weitere Anwendungen seiner Methode hat Torelli in einer späteren Schrift mit dem Titel Geometrica (Verona 1769) gegeben, wo er einige geometrische Probleme zuerst durch die reine Geometrie, dann durch die Nullrechnung auflöst. Diese Schrift bietet nichts Merkwürdiges dar, ausgenommen etwa einen kuriosen Fehler (s. o. S. 617); Torelli meint, eine neue Quadratrix (quadrataria scalena) erfunden zu haben, und bemerkt nicht, daß diese mit der gewöhnlichen Quadratrix übereinstimmt.

Eine lange Diskussion über die Prinzipien der Infinitesimalrechnung enthält der höchst interessante Briefwechsel zwischen Lambert und von Holland aus den Jahren 1765 und 1766.[1]) Beide sind darüber einig, daß das Unendlichkleine bloß eine Fiktion ist. Der Infinitesimalbegriff gibt aber, wie von Holland bemerkt, der Meinung Veranlassung, die Differentialrechnung sei nur eine Annäherungsmethode; besser ist, Null zu nennen, was Null ist. Man muß jedoch zwischen verschwundenen und verschwindenden Größen unterscheiden; die ersteren sind sämtlich gleich, die letzteren dagegen können auch verschieden sein, je nach der Geschwindigkeit, mit welcher die Größen nach Null streben. So ist z. B.:

$$\frac{a^2 - x^2}{a - x} = \frac{0}{0} = 2a$$

für $x = a$. Die Vernachlässigung von dx^2 rechts in der Formel:

$$d(x^2) = 2x dx + dx^2$$

geschieht nicht precario modo, sondern notwendig; es ist nämlich:

$$d(x^2) = 2x dx + dx^2 = (2x + 0)0 = 2x \cdot 0 = 2x dx.$$

Ist $\frac{A}{C} = 1$ für $A = C = 0$, so kann man, „so oft von letzten Verhältnissen die Rede ist", A statt C und C statt A nehmen; so z. B. kann man den Bogen durch die Sehne ersetzen, was zum ungenauen und dem Stetigkeitsprinzip widersprechenden Begriffe einer aus unendlich vielen Strecken bestehenden Kurve geführt hat. Nicht minder fiktiv als das Unendlichkleine ist das Unendliche, welches ein negativer Begriff ist und eine Unmöglichkeit ausdrückt. Diese Unmöglichkeit ist aber, wie von Holland scharfsinnig bemerkt, von solcher Beschaffenheit, daß man sich derselben unbeschränkt annähern darf, während man das Gleiche von der Unmöglichkeit $a\sqrt{-1}$ nicht sagen kann; wollte man in positiver Form ausdrücken, daß Gott un-

[1]) Lamberts deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von Johann Bernoulli, 5 Bde., Berlin 1781—87; Bd. I, S. 11 ff.

sterblich ist, so könnte man sagen, er sterbe nach der Zeit $a\sqrt{-1}$, nicht aber, er sterbe nach der Zeit ∞.

Der später als „Prinzip von der Ersetzung der Infinitesimalgrößen" bezeichnete Grundbegriff ist in das klarste Licht gesetzt worden von Riccati und Saladini in ihren noch weiter unten zu besprechenden Institutiones analyticae (2 Bde., Bologna 1765—1767). Vincenzo Riccati (vgl. diese Vorl., III[2], S. 474, IV, S. 457), Jesuit, Sohn des berühmten Jacopo Riccati, geboren den 11. Januar 1707 zu Castelfranco bei Treviso, gestorben daselbst den 17. Januar 1775, war Professor der Literatur und Rhetorik zu Piacenza, Padua und Parma, dann Professor der Mathematik zu Bologna; er schrieb über Mathematik, Physik und Mechanik, und beschäftigte sich auch mit hydraulischen Fragen. Girolamo Saladini, Cölestinermönch, geboren zu Lucca 1731, gestorben zu Bologna den 1. Juni 1813, lehrte an der Universität zu Bologna erst Geometrie, dann Astronomie, dann höhere Mathematik. Die Grundlagen der Infinitesimalmethode, so lehren Riccati und Saladini, lassen sich auf ein einziges Lemma reduzieren, daß nämlich zwei Größen, deren Unterschied kleiner werden kann als jede vorgegebene Größe, zuletzt einander gleich werden. Haben wir also mit zwei derartigen Größen zu tun, so können wir dieselben der Kürze wegen einander gleich setzen; dadurch wird gar nichts vernachlässigt, da unendlich kleine Differenzen weglassen nichts anderes ist als genaue Gleichungen zwischen den Grenzen schreiben.

Die Ideen von Euler über das Unendlichkleine sind schon bekannt (diese Vorl., III[2], S. 749) und kommen auch in seiner Integralrechnung (1768) wieder vor; dieselben zu rechtfertigen und ihre Übereinstimmung mit dem Grenzbegriff zu zeigen, bestrebt sich sein Kommentator Johann Philipp Grüson (s. o. S. 72)[1]), Professor der Mathematik am Kadettenkorps in Berlin, dann an der Bauakademie und an der Universität, geboren zu Neustadt-Magdeburg am 2. Februar 1768, gestorben zu Berlin am 16. November 1857, der aber seinerseits, sonderbar genug, die Notwendigkeit fühlte, die Leibnizsche Methode durch eine neue Methode zu ersetzen (siehe unten).

Auch eine kleine Schrift von Luino vom Jahre 1770[2]) ist, trotz

---

[1]) Grüson, Supplement zu L. Eulers Differenzialrechnung, worin ausser den Zusätzen und Berichtigungen, auch noch andere nützliche analytische Untersuchungen, welche grösstentheils die combinatorische Analysis betreffen, enthalten sind, Berlin 1798. [2]) Oggetto e principii del mètodo flussionario, Milano 1770, nach Poggendorff.

ihres Titels, der Verteidigung nicht nur der Fluxions-, sondern auch der Infinitesimalmethode gegen die Angriffe von Berkeley (diese Vorl., III², S. 737 ff.) gewidmet. Francesco Luino, Jesuit, geboren zu Lugano am 25. März 1740, gestorben zu Mailand am 7. November 1792, lehrte Astronomie und Mathematik zu Mailand, dann an der Universität zu Pavia; mußte aber wegen seiner zu kühnen philosophischen Ansichten diese Stadt verlassen und wanderte nach Mantua, wo er eine philosophische Schule stiftete. — Luino sagt, er hätte von seiten Berkeleys einen Lobspruch der Mathematik und zugleich des Glaubens erwartet, sowie auch den Schluß, daß die Prinzipien der Mathematik freilich begreiflicher sind als die des Glaubens, daß aber die Klarheit der ersteren nicht größer ist als die Glaubwürdigkeit der letzteren, und daß die menschliche Vernunft so wenig verletzt wird durch Aneignung der dunkelsten Dogmen, als durch Anerkennung der überzeugendsten mathematischen Beweise. Nach dieser Vorbemerkung kommt Luino zu seinem Hauptgegenstande, wobei er aber zur Klarlegung der Prinzipien der Differentialrechnung keinen wesentlichen Beitrag liefert. Er erwähnt eine Schrift von Boscovich[1]): De natura et usu infinitorum, et infinite parvorum (Rom 1740), in welcher gezeigt wird, daß sich die Fehler, die man dadurch begeht, daß man Größen durch andere ersetzt, die sich von diesen um Größen niederer Ordnung unterscheiden, während der Rechnung gegenseitig aufheben.

Auch Odoardo Gherli, Dominikaner, Professor der Theologie und Mathematik, geboren zu Guastalla bei Reggio 1730, gestorben zu Parma am 6. Januar 1780, spricht in seinen Elementi[2]) analoge

---

Riccardi (Bibl. mat. it.) sagt, daß diese Schrift keine typographische Angabe enthält, und auch das von mir durchgesehene, der Universitäts-Bibliothek zu Pavia gehörende Exemplar trägt weder Druckort noch Datum.

[1]) Der Abt Ruggiero Giuseppe Boscovich (s. o. S. 420), geboren zu Ragusa am 18. Mai 1711, war zugleich Philosoph, Dichter, Geodät, Astronom und Archäolog. Er wurde oft vom Papst über technische und ökonomische Fragen zu Rate gezogen, beschäftigte sich mit einer Gradmessung im päpstlichen Staat, machte lange Reisen und entdeckte die Trümmer von Troja. Er lehrte in Pavia, Mailand und Pisa, worauf er nach Frankreich übersiedelte als Direktor der optischen Abteilung der Marine. Später war er wieder in Italien, um die Drucklegung seiner Werke zu besorgen, welche in Bassano in fünf Bänden erschienen; aber der Schmerz, dieselben nicht so sehr gesucht zu sehen, als er hoffte, trübte seinen Geist, und nicht viel später starb er in Mailand, am 13. Februar 1787 (A. Fabroni, Elogio dell' Ab. Ruggiero Giuseppe Boscovich, Mem. Soc. It. (1) IV (1788), p. VII—XLVI). [2]) Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure, 7 Bde., Modena 1770—1777 (s. o. S. 47, 76).

Ideen aus. Die veränderlichen Größen werden als aus dem Fließen eines erzeugenden Elementes entstanden gedacht. Die zwischen 0 und einem endlichen Zuwachse liegenden Größenstufen heißen, wenn sie kleiner sind als jede angebbare Größe, unendlichklein. Solche Größen kommen in der Differentialrechnung vor; diese ist aber nicht auf dieselben begründet, sondern bedient sich dieser Größen, um die Grenzen veränderlicher Größen zu bestimmen, so daß die Differentialrechnung nichts anderes ist, als die Methode von den letzten Verhältnissen. Da also bei der Berechnung dieser Verhältnisse die unendlichkleinen Differenzen der veränderlichen Größen verschwindend sind, so dürfen sie vernachlässigt werden.

Nur der Vollständigkeit wegen erwähnen wir eine kleine Schrift von H. W. J. von Stamford[1]), geboren zu Bourges, gestorben zu Hamburg am 16. Mai 1807, Hauptmann im preußischen Ingenieurkorps, welche nichts Interessantes darbietet.

Mit den Grundlagen der Infinitesimalrechnung beschäftigte sich lange und wiederholt Johannes Schultz[2]), Hofprediger und Professor der Mathematik in Königsberg, geboren zu Mühlhausen am 11. Juni 1739, gestorben zu Königsberg am 27. Juni 1805, welcher auch ein

---

[1]) Versuch, die Grundsäzze des Differential- und Integralkalkuls vorzutragen, ohne die Begriffe von den unendlichkleinen Größen hineinzubringen, Berl. Mag. der Wiss. und Künste, II 1 (1784), S. 3—36. [2]) De geometria acustica seu solius auditus ope exercenda, Diss. prima, Königsberg 1775; De geometria acustica nec non de ratione 0:0 ceu basi calculi differentialis, Diss. secunda, Königsberg 1787. — Versuch einer genauen Theorie des Unendlichen, Königsberg-Leipzig 1788. — Anfangsgründe der reinen Mathematik, Königsberg 1790. — Kurzer Lehrbegriff der Mathematik, 3 Bde., Königsberg 1797—1806. — Da der Titel der ersten dieser Schriften den Leser wohl stutzig machen kann, so halten wir es für angemessen, etwas davon zu sagen. Schultz setzt sich als Zweck vor, die Probleme der Feldmessungskunst mit alleiniger Hilfe des Gehörs aufzulösen. Will man drei Punkte B, C, D mit einem unsichtbaren Punkte A verbinden, so kann man aus der Kenntnis der Zeiten, in welchen ein und derselbe in A geschehene Schuß in B, C, D gehört wird, die Differenz der Abstände AB, AC, AD entnehmen; es kommt also alles auf das folgende geometrische Problem an: Die Abstände AB, AC, AD zu bestimmen, wenn BC, BD, $\widehat{BCD}$, $AB-AC$, $AC-AD$ gegeben sind. Liegen die zu betrachtenden Punkte nicht sämtlich in einer Ebene, so muß man vier Stationen B, C, D, E annehmen, und es entsteht das Problem· Die Kanten AB, AC, AD, AE einer viereckigen Pyramide zu bestimmen, wenn die Differenzen dieser Kanten und die Basis $BCDE$ gegeben sind. — Gehören im ersten Problem B, C, D einer und derselben Geraden an, so kommt AB in der Form $\frac{0}{0}$ vor, was dem Verfasser die Gelegenheit darbietet, ein langes Scholium den Prinzipien der Differentialrechnung zu widmen.

besonderes Werk diesem Gegenstande widmete. Schultz denkt die Infinitesimalgrößen als genau gleich Null, und die Differentialrechnung als eine Rechnung mit Nullen, welche die Bestimmung der letzten Verhältnisse der Inkremente als Zweck hat; man erhält dieselben dadurch, daß man in den Verhältnissen der Inkremente die Inkremente selbst gleich Null setzt, woraus folgt, daß die Differentialrechnung ganz streng ist. Das von Null verschiedene Unendlichkleine ist bloß eine Fiktion, welche aus der Analysis verbannt werden muß. Daß $\frac{0}{0}$ einen verschwindenden, endlichen oder unendlichen Wert annehmen kann, läßt sich wie folgt beweisen. Betrachtet man $\frac{0}{0}$ als ein Verhältnis, so gelten die Relationen:

$$0:0::\begin{cases} a:b \\ \infty:1, \\ 0:a \end{cases}$$

weil:

$$b\cdot 0 = a\cdot 0,\quad 1\cdot 0 = \infty\cdot 0,\quad a\cdot 0 = 0\cdot 0;$$

betrachtet man dasselbe als einen Bruch, so gelten die Relationen:

$$\frac{0}{0} = \begin{cases} \frac{a}{b} \\ \infty, \\ 0 \end{cases}$$

weil:

$$\frac{a}{b}\cdot 0 = 0,\quad \infty\cdot 0 = 0,\quad 0\cdot 0 = 0.$$

Leitet man aus $x = y^2$ die Relation $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{1}$ ab, so ist dieses nichts anderes als $\frac{0}{0} = \frac{2y}{1}$; die Nullen dx, dy sind der Quantität nach gleich, der Qualität nach verschieden. Die Ähnlichkeit mit den Eulerschen und Torellischen Nullen ist einleuchtend.

Weiter verbreitet sich Schultz über den Begriff vom Unendlichen. Einige von seinen Bemerkungen über diesen Gegenstand verdienen hervorgehoben zu werden, da sie manche Ideen im Keime enthalten, deren Entwicklung der G. Cantorschen Mannigfaltigkeitslehre vorbehalten war. Das absolut Unendliche hat eine reelle Existenz; die absolut unendlichen Größen sind nicht sämtlich gleich und lassen sich untereinander vergleichen. Die „allereinfachste und erste" unendliche Menge ist $1 + 1 + \cdots$; sie kann durch ∞ bezeichnet werden. Dann ist auch $2 + 2 + \cdots = \infty$, denn jedes 2 kann durch $1 + 1$ ersetzt werden. In anderer Beziehung ist aber $2 + 2 + \cdots = 2\infty$, denn man kann die Reihe $2 + 2 + \cdots$ in die zwei Reihen $1 + 1 + \cdots$,

$1 + 1 + \cdots$ spalten. Welcher von den beiden Standpunkten der richtige sei, hängt von der Natur der in jedem besonderen Falle zu behandelnden Frage ab. Hat man mit einer Linie zu tun, so kann $2 + 2 + \cdots$ nichts anderes als $1 + 1 + \cdots$ bedeuten (m. a. W., es kommt auf dasselbe hinaus, ob man auf eine Gerade unendlich viele Strecken von der Länge 1 oder von der Länge 2 nimmt); bewegt man sich dagegen in der Ebene oder im Raume, so kann man die Reihe in andere zerlegen, so z. B. kann man die Strecken $1 + 1 + \cdots$ auf einer Geraden und die Strecken $1 + 1 + \cdots$ auf einer anderen nehmen, woraus $2 + 2 + \cdots = 2\infty$ folgt. In analogem Sinne kann man schreiben:

$$1 + 3 + 5 + \cdots = \infty^2.$$

Der Satz, daß das Ganze größer ist als jeder Teil, besteht nicht unbedingt für unendliche Größen, wie sich leicht aus der Bemerkung folgern läßt, daß alle Halbstrahlen einander kongruent sind.

Die zweite Abteilung des Versuches ist der „Meßkunst des Unendlichgroßen" gewidmet. Es ist kaum nötig hervorzuheben, daß dieser Gegenstand jedes Interesses entbehrt; der Verfasser selbst schließt, nachdem er sich bemüht hat, einen unendlichen Kurvenast zu rektifizieren, daß die Länge eines solchen Astes immer $\infty\gamma$ ist, wo γ eine endliche Größe bezeichnet, so daß die Rektifikation nutzlos erscheint.

Eine andere mehr philosophische als mathematische Schrift ist der J. Schultz gewidmete Versuch von Bendavid.[1]) Lazarus Bendavid, geboren zu Berlin am 18. Oktober 1762, gestorben daselbst am 28. März 1832, ist wohl bekannt als eifriger Kantianer; er hatte aber eine so ausgezeichnete mathematische Bildung, daß Kästner von ihm sagte, er wäre würdig, jeden Lehrstuhl Deutschlands, mit alleiniger Ausnahme des von ihm selbst innegehabten, zu besteigen.

Bendavid wirft sich drei Fragen vor: Was ist das mathematische Unendliche? Darf man hoffen, in der Rechnung mit unendlichen Größen eine gleiche Evidenz zu erreichen, wie in der Elementargeometrie? Welchen Einfluß hat die Klarheit der Prinzipien auf die Stichhaltigkeit der Resultate? — Unendlich heißt eine Größe, wenn sie nicht meßbar ist; das Unendliche stellt also nicht eine Quantität, sondern eine Eigenschaft dar. Die Unmeßbarkeit kann entweder vom Fehlen jeder Quantität herrühren (wie z. B. für einen Punkt), oder von der Unmöglichkeit, die Quantität vollständig anzugeben (wie z. B.

[1]) Versuch einer logischen Auseinandersetzung des mathematischen Unendlichen, Berlin 1789.

für tang $\frac{\pi}{2}$); im ersten Falle heißt die Größe unendlichklein, im zweiten unendlichgroß. Das Unendliche fällt, als Gegenstand der Arithmetik betrachtet, mit der Null zusammen. Diese sonderbare Behauptung wird wie folgt bewiesen. Jede Größe kann, vom arithmetischen Standpunkte aus, nur in bezug auf eine Maßeinheit gedacht werden; nur die Null läßt sich absolut denken; da also das Unendliche nicht meßbar ist und daher nur absolut gedacht werden kann, so muß es mit der Null übereinstimmen. Dies festgesetzt, fragt sich Bendavid, wie ein solcher Begriff in der Arithmetik Platz finden kann. Diese Frage, welche aus den Prämissen ganz logisch folgt, hätte wohl Bendavid von der Unhaltbarkeit seiner Ideen überzeugen sollen; dagegen beantwortet er sie dadurch, daß er die mathematischen Resultate auf den Gewißheitsgrad von Analogieschlüssen herabsetzt. Es gibt, sagt er, physische und metaphysische Begriffe, die wir nur unvollständig besitzen, und aus welchen wir zwar nicht apodiktische, wohl aber problematische Sätze ableiten können; man kann z. B. aus der zwischen der Erde und dem Monde stattfindenden Ähnlichkeit schließen, daß es auch im Monde Berge, Flüsse, lebende Wesen gibt. Auf gleiche Weise verfährt man in der Mathematik. Die Ausdrücke $\infty + a$, $dx + a$, wo ∞ das Unendlichgroße, dx das Unendlichkleine bezeichnet, haben für sich selbst keine Bedeutung; denn man kann nicht eine Eigenschaft und eine Größe zusammenaddieren. Von den zwei Summanden muß also einer wegfallen. Im ersten Fall verschwindet der zweite Summand, da das Unendliche nicht mehr unendlich wäre, wenn es sich durch Hinzufügung einer Größe a vermehren ließe; im zweiten Fall ergibt sich $dx + a = a$ durch Analogie mit den sehr kleinen Größen. Das Produkt $n\infty$ drückt die Wiederholung eines und desselben Begriffes aus, wie z. B. n Tangenten von rechten Winkeln; als Summe betrachtet ist $n\infty = \infty$. Daß $\frac{a}{\infty} = dx$, folgt aus Analogie; man kann auch bemerken, daß $\frac{a}{\infty}$ eine auf ein unendliches Maß bezogene endliche Größe darstellt. Auf ähnliche Weise lassen sich andere infinitäre Ausdrücke, wie $\frac{a}{0}$, $dx + dx$, adx usw. deuten. Aus dem Gesagten schließt Bendavid, daß die Theorie des Unendlichen als eine „unmathematische Wissenschaft" angesehen werden darf, welche keineswegs die Evidenz der Elementarmathematik besitzen kann; daß aber dennoch ihre Schlüsse ganz streng sind, da der Begriff vom Unendlichen widerspruchsfrei ist. Wir möchten fast sagen: je unmathematischer die Bendavidsche Theorie des Unendlichen ist, desto unphilosophischer ist sein Schlußsatz!

Nachdem wir die Verteidiger der Infinitesimalmethode besprochen haben, kommen wir auf diejenigen, welche diese Methode durch andere bekannte oder neue zu ersetzen versuchten.

Noch am Anfang unserer Periode begegnen wir einem englischen Gelehrten, mit dessen Namen eine merkwürdige, am passenden Orte zu besprechende Entdeckung im Gebiete der elliptischen Integrale verbunden ist, John Landen, Mitglied der Royal Society, geboren am 23. Januar 1719 zu Peakirk bei Peterborough, gestorben am 15. Januar 1790 zu Milton. In seiner Residual analysis[1]) nennt er Spezialwert des Quotienten $\frac{y-y_1}{x-x_1}$, wobei y, y_1 ähnliche Funktionen von x, x_1 darstellen, den Wert dieses Quotienten für $x_1 = x$; er bezeichnet den Spezialwert von $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ mit $[x \,\acute{-}\, y]$. Die Berechnung solcher Ausdrücke, oder die residual division, geschieht aber selbstverständlich durch Grenzübergang, so daß die Landensche Methode nichts wesentlich Neues darbietet.

Ein hierher gehöriger, nicht sehr bekannter italienischer Schriftsteller ist Niccola Fiorentino. Geboren in Unteritalien, war er Oberaufseher der königlichen Schulen zu Bari, dann Advokat und Professor der Mathematik zu Neapel, und starb an dem Galgen am 12. Dezember 1799, ein Opfer der damals in dem neapolitanischen Königreich wütenden Reaktion.[2]) Im Jahre 1782, bei Gelegenheit einer in Neapel stattgefundenen öffentlichen Diskussion über eine mechanische Frage, gab er ein kleines Buch heraus mit dem Titel: Saggio sulle quantità infinitesime e sulle forze vive e

---

[1]) Der ausführliche Titel ist: The residual analysis, a new branch of the algebraic art, of very extensive use, both in pure mathematics, and natural philosophy, Book I (vereinzelt), London 1764.

[2]) Es möge uns erlaubt sein, sein Todesurteil (5. Dezember 1799) hier wiederzugeben: „Niccola Fiorentino, ch'era stato da Sua Maestà degnato per molti anni dei governi regi; per aver spiegato nell' entrata dei Francesi il suo carattere diametralmente opposto al suo benefattore, per aver dato alla luce due proclami in istampa, uno diretto ai giovani cittadini studiosi, relativo al vantaggio del governo repubblicano e l'imposture contro le sacre persone, e l'altro contenente un ragionamento sulla tranquillità della repubblica, per esser stato autore di un Inno a S. Gennaro per la conservazione della libertà, pieno di scostumatezze; per esser stato autore delle note in stampa alla costituzione della repubblica; e finalmente per esser stato ascritto nell' elenco della Società popolare, con aver aggiunto al suo nome e cognome di essere vero democratico; è stato condannato a morir sulle forche colla confisca dei beni, con essersi disposta l'esecuzione della sentenza" (A. Sansone, Gli avvenimenti del 1799 nelle Due Sicilie, Palermo 1901, p. 274). — Siehe auch: P. Colletta, Storia del reame di Napoli, Capolago 1834, Bd. II, p. 166 bis 168.

morte[1]), wobei der eigentlichen Behandlung des Hauptgegenstandes ein langer Abschnitt über unendlichkleine Größen vorangeht, welcher allein uns interessiert. In bezug auf die in der höheren Analysis anzuwendenden Methoden ist Fiorentino Eklektiker. Die beste Methode, sagt er, ist die Cavalierische; sie ist lichtvoll, gedrängt, elegant, und gibt zu keinem Bedenken Veranlassung. Da aber nicht alle mit dem, was aus der Indivisibilienmethode abgeleitet wurde, zufrieden sein werden, und da andererseits auch die Fluxionsmethode sicher und elegant ist, so hält es Fiorentino für gut, die Infinitesimalmethode vermittels der Fluxionsmethode zu prüfen. Vergleicht man die nach den beiden Methoden gegebenen Beweise der Formel für die Ableitung eines Produktes xy, so bemerkt man, daß der als eine unendlichkleine Größe zweiter Ordnung zu vernachlässigende Bestandteil $dxdy$ eigentlich aus dem Grunde vernachlässigbar ist, daß er der Fluxion von xy nicht angehört. Von der Infinitesimalrechnung darf man nur das behalten, was sich durch die Fluxionsmethode nachweisen läßt; das übrige ist unsicher. Daß dennoch die Infinitesimalrechnung zu richtigen Resultaten führt, rührt davon her, daß die Fehler sich gegenseitig aufheben.

Auch Jakob II. Bernoulli erklärt sich für die Fluxionsmethode[2]); er äußert aber den Wunsch, daß die langen und peinlichen Maclaurinschen Beweise ohne Beeinträchtigung der Strenge vereinfacht werden mögen. J. Bernoulli gehört einer Familie an, die in der Geschichte der Infinitesimalrechnung eine Hauptrolle gespielt hat. Sein Vater war Johann II. (diese Vorl., III², S. 325). Er wurde am 17. Oktober 1759 in Basel geboren, war Substitut seines Onkels Daniel von 1780 bis zu dessen Tode (1782) am Lehrstuhl der Physik, konnte aber seine Nachfolge nicht erhalten. Er war in Italien als Sekretär des österreichischen Gesandten in Venedig, und machte Bekanntschaft mit manchen italienischen Geometern. Nach Lexells Tode (1786) wurde er zum Adjunkten an der Petersburger

---

[1]) Das Buch trägt weder Datum, noch Druckort. Der Verfasser sagt aber, er habe zu Neapel „im vergangenen November" von einer dort geschehenen Diskussion gehört, über welche d'Alembert und Lagrange um ihre Meinung gefragt worden wären, und man findet in Lagranges Briefwechsel (Oeuvres T. XIV, Paris 1892, p. 279—282) ein Schreiben vom 18. Oktober 1781, welches sich unzweifelhaft auf denselben Gegenstand bezieht, so daß man mit Sicherheit schließen kann, das Buch sei zu Neapel im Jahre 1782 gedruckt worden.

[2]) Essai d'une nouvelle manière d'envisager les différences ou les fluxions des quantités variables, par M. Bernoulli, Mém. Acad. Turin 1784—85 (publ. 1786), Mém. des corresp., p. 141—153; es folgt eine Addition von Caluso (p. 153—159). Daß der Verfasser Jak. II. Bernoulli ist, erhellt aus einer Note zu einer alsbald zu besprechenden Abhandlung von Caluso.

Akademie ernannt; später wurde er ordentlicher Akademiker und Professor der Kadetten (1788). Im Jahre 1789 heiratete er eine Tochter von Johann Albrecht Euler, Sohn Leonhard Eulers; zwei Monate später, am 3. Juli 1789, während er sich in der Newa badete, wurde er vom Schlag gerührt, und starb bald darauf. Seine Schriften, welche in den Nova Acta Acad. Petrop. erschienen sind, betreffen sämtlich die Mechanik, mit alleiniger Ausnahme der soeben angeführten.[1])

Wie J. Bernoulli uns erzählt, lehrte ihn sein Vater die Größen nicht als zu- oder abnehmend, sondern als mit der „Anlage" („disposition") zu- oder abzunehmen behaftet zu betrachten; so sind dx, dy die Anlagen von x, y. Die Anlagen sind, wie Bernoulli erkennt, von den in der Fluxionsrechnung vorkommenden Geschwindigkeiten nicht wesentlich verschieden; andererseits wird die durch den neuen Begriff zu erzielende Vereinfachung ganz auf Kosten der Strenge erhalten. Sehen wir zu, wie Bernoulli die Anlage eines Produktes xy berechnet. Wäre nur x veränderlich, so wäre ydx die Anlage von xy; wäre nur y veränderlich, so wäre sie xdy; sind also x und y zugleich veränderlich, so finden beide Anlagen zugleich statt, und die Gesamtanlage ist $ydx + xdy$. Aber auch die vermeinte Einfachheit verschwindet, sobald schwierigere Aufgaben vorliegen, und Bernoulli selbst bekennt andererseits, daß sich die von ihm bei der Auflösung dieser Aufgaben befolgte Methode mit der Grenzmethode deckt.

Auch der schon genannte Caluso ist unter die Anhänger der Fluxionsmethode zu rechnen. Tomaso Valperga di Caluso, geboren 1737 in Turin, gehörte einer angesehenen Familie an. Nachdem er seinem König als Marineoffizier gedient hatte, zog er sich als Geistlicher nach Neapel zurück, von wo er später (1769) nach seinem Vaterlande zurückkehrte. Dort war er Sekretär der Akademie der Wissenschaften, Direktor der Sternwarte und Professor der orientalischen Sprachen an der Universität. Er starb am 1. April 1815. Seine zahlreichen Schriften beziehen sich auf Philosophie, Sprachwissenschaft und Literaturgeschichte; auch ist er Verfasser von italienischen, lateinischen und griechischen Dichtungen. Seine Freundschaft mit Vittorio Alfieri ist allbekannt; der berühmte Tragödienschreiber sagte, er verdankte es Caluso, wenn er sich der Unwissenheit entzogen habe, in welche er bis zu seinem 27. Jahre getaucht gelegen war.

---

[1]) Précis de la vie de M. Jacques Bernoulli, Nov. Acta Acad. Petrop. VII, 1789 (publ. 1793), Hist., p. 23—32.

Caluso widmet eine lange Abhandlung[1]) der Verteidigung der Fluxionsmethode; er bekämpft besonders die Meinung, der Geschwindigkeitsbegriff sei ein der reinen Analysis fremdartiges Element. Er versucht aber auch, den Grund der Richtigkeit der durch die Infinitesimalmethode erhaltenen Resultate aufzudecken. Dazu bedient er sich der Rechnung mit unmöglichen Größen — so nennt er die unendlichen und die unendlichkleinen Größen. Ist:

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + Ax,$$

und dividiert man mit x^n, so ist für $x = \infty$:

$$\frac{y}{x^n} = a + \frac{b}{\infty} + \cdots + \frac{A}{\infty^{n-1}};$$

es ist aber:

$$\frac{b}{\infty} = 0, \cdots, \frac{A}{\infty^{n-1}} = 0,$$

folglich:

$$\frac{y}{x^n} = a.$$

Dividiert man dagegen mit x, so ist für $x = 0$:

$$\frac{y}{x} = a \cdot 0^{n-1} + b \cdot 0^{n-2} + \cdots + A = A.$$

Hieraus folgt die Regel, daß man für $x = \infty$ nur das Glied mit dem größten, für $x = 0$ nur dasjenige mit dem kleinsten Exponent beibehalten muß.

Es ist schon oben erwähnt worden, daß Lagrange den Versuch machte, die Infinitesimalmethode durch eine neue Methode zu ersetzen. Es ist jetzt Zeit, seine Ideen auseinanderzusetzen.

Lagrange befolgt einen Weg, der dem gewöhnlichen umgekehrt ist. In der Infinitesimalrechnung geht man nämlich von der auf Grenzbetrachtungen sich gründenden Definition der Ableitungen der ersten und der höheren Ordnungen aus, um zum Beweis der Taylorschen Reihenentwicklung zu kommen, deren Koeffizienten die mit Zahlenfaktoren behafteten Ableitungen aller Ordnungen der zu entwickelnden Funktion sind. Ließe sich daher, so denkt Lagrange, die Taylorsche Entwicklung einer Funktion direkt auffinden, so könnte man aus derselben sämtliche Ableitungen der Funktion ohne weiteres ablesen.

Nun gibt aber die Reihentheorie eine Entwicklung von der Form:

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + \cdots.$$

[1]) Des différentes manières de traiter cette partie des mathématiques que les uns appellent calcul différentiel et les autres méthode des fluxions, Mem. Acad. Turin, 1786—87 (publ. 1788), p. 489 bis 590.

Um indessen nichts unbewiesen zu lassen („mais pour ne rien avancer gratuitement“), will Lagrange vor allem zeigen — was niemand vorher getan habe —, daß die Reihe, ausgenommen für besondere Werte von x, keine gebrochenen Exponenten enthalten darf. Käme nämlich eine gebrochene Potenz $i^{\frac{m}{n}}$ von i vor, so müßte sie von in $f(x)$ existierenden Wurzelgrößen herrühren; $f(x)$ wäre also eine mehrwertige Funktion, und die Ersetzung von x durch $x+i$ würde weder die Anzahl, noch die Beschaffenheit dieser Größen umändern, so daß $f(x)$ und $f(x+i)$ für jedes Wertepaar x, i eine gleiche Anzahl von verschiedenen Werten erhalten würden. Andererseits ließe sich jeder Wert von $f(x)$ mit jedem Werte von $i^{\frac{m}{n}}$ kombinieren, so daß sich eine weit größere Anzahl von Werten für $f(x+i)$ ergeben müßte, woraus der Widerspruch.

Dieses vorausgeschickt, muß man beachten, daß, da sich $f(x+i)$ für $i=0$ auf $f(x)$ reduziert, die Differenz $f(x+i)-f(x)$ für $i=0$ verschwindet, also eine positive Potenz von i als Faktor enthalten muß („... sera ou pourra être censée multipliée par une puissance positive de i“), deren Exponent nach dem Gesagten notwendig ganzzahlig ist. Man kann also schreiben:

$$f(x+i)=f(x)+iP.$$

Eine analoge Schlußweise ergibt:

$$P=p+iQ,\quad Q=q+iR,\quad R=r+iS,\ldots,$$

also:

$$f(x+i)=f(x)+ip+i^2q+i^3r+\cdots. \tag{3}$$

Die Bestimmung von $p, q, r, \ldots$ läßt sich entweder durch direkte Berechnung, oder durch Fortschaffung der etwa vorkommenden Wurzelgrößen, oder endlich durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten bewerkstelligen. Ein Beispiel mag die Anwendung der drei Methoden erleuchten, wobei wir uns freilich, der Kürze wegen, auf die Berechnung von p beschränken.

Es sei $f(x)=\sqrt{x}$. Man hat:

$$\text{a)}\quad iP=\sqrt{x+i}-\sqrt{x}=\frac{i}{\sqrt{x+i}+\sqrt{x}},$$

also:

$$P=\frac{1}{\sqrt{x+i}+\sqrt{x}},$$

und für $i=0$:

$$p=\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{b)}\quad \sqrt{x+i}=\sqrt{x}+iP,$$

also:

$$x + i = x + 2iP\sqrt{x} + i^2P^2,$$

oder:

$$1 = 2P\sqrt{x} + iP^2,$$

woraus für $i = 0$ abermals folgt:

$$p = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{c)} \quad \sqrt{x+i} = \sqrt{x} + ip + i^2q + \cdots,$$

also:

$$x + i = (\sqrt{x} + ip + i^2q + \cdots)^2 = x + 2ip\sqrt{x} + i^2(2q\sqrt{x} + p^2) + \cdots,$$

und hieraus durch Vergleichung der beiderseitigen Koeffizienten der ersten Potenz von i:

$$p = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ist so die Reihe (3) ermittelt worden, so muß man sehen, ob sie konvergent ist. Betrachtet man i als die Abszisse, iP als die Ordinate einer Linie, so geht diese durch den Koordinatenursprung, und so lange dieser kein singulärer Punkt ist, nähert sich die Linie beständig der Abszissenachse; es läßt sich folglich i so klein annehmen, daß iP kleiner sei als eine beliebig vorgegebene Größe. Es ist also z. B. für hinreichend kleine Werte von i:

$$iP < f(x),$$

und man kann analog erhalten:

$$iQ < p, \quad iR < q, \ldots,$$

oder:

$$i^2Q < ip, \quad i^3R < i^2q, \ldots.$$

Es ist aber:

$$iP = ip + i^2q + i^3r + \cdots,$$
$$i^2Q = i^2q + i^3r + \cdots,$$
$$i^3R = i^3r + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

man kann also i so klein annehmen, daß für diesen Wert und um so mehr für alle kleineren Werte von i jedes Glied der betrachteten Reihe größer ausfällt als die Summe aller darauffolgenden Glieder, womit die Konvergenz nachgewiesen ist.

Die Lagrangesche Methode erlaubt uns also, sämtliche Ableitungen einer Funktion durch rein algebraische Operationen zu erhalten. Leider gibt sie zu manchen Bedenken Anlaß, auf deren Erör-

terung wir hier verzichten müssen.[1]) Merkwürdig ist es, daß Lagrange selbst an der Allgemeinheit seiner Methode zweifelt, welche, nach seiner Aussage, auf eine Funktion „insofern als sie in eine Reihe entwickelbar ist" („autant que cette fonction est susceptible d'être réduite en une série") angewandt werden kann.

Analoge, aber bei weitem nicht so bekannte neue Methoden sind der antecedental calculus von James Glenie (Glenie oder Glennie, geboren zu Fyfe 1750, gestorben zu Chelsea am 23. November 1817, Artillerieoffizier im amerikanischen Kriege, dann Professor der Mathematik an der Militärschule der East India Company), die Exponentialrechnung von Johann Pasquich (Geistlicher, Professor und Astronom zu Ofen, geboren zu Wien 1753, gestorben daselbst am 15. November 1829), und der calcul d'exposition von dem schon oben erwähnten J. Ph. Grüson.[2])

Der antecedental calculus stimmt, wie der Erfinder selbst sagt, mit der Fluxionsrechnung überein; der antecedental einer Funktion ist ihre Ableitung, der antecedent ist ihr Integral.

Pasquich hält jede Rechnung, welche die Differentialrechnung zu ersetzen zum Zwecke hat, für ganz entbehrlich; andererseits aber denkt er, seine Methode verdiene wegen ihrer „Einfachheit, Gründlichkeit und Allgemeinheit" eine größere Beachtung als jede andere ana-

---

[1]) Siehe S. Dickstein, Zur Geschichte der Principien der Infinitesimalrechnung. Die Kritiker der „Théorie des fonctions analytiques" von Lagrange in der Cantor-Festschrift (Leipzig 1899), S. 65—79. [2]) Glenie, A short paper on the principles of the antecedental calculus, Trans. R. Soc. Edinburgh, IV (1798), p. 65—82. Von zwei früheren, in dieser Schrift zitierten Arbeiten von Glenie, Universal comparison und Antecedental-calculus, konnte ich keine Kenntnis haben. — Pasquich, Anfangsgründe einer neuen Exponentialrechnung, Archiv der reinen und angew. Math. II (1798), S. 385—424. Siehe auch eine Anmerkung des Herausgebers des Archives (Hindenburg), wo eine im Intelligenzblatt der Allg. litt. Zeit. 1798, Nr. 99 erschienene Nachricht von Pasquich über seine neue Rechnung und desselben Unterricht in der mathematischen Analysis und Maschinenlehre angeführt wird. — Grüson, Le calcul d'exposition inventé par J. Ph. G., Mém. Acad. Berlin 1798 (publ. 1801), p. 151—216, 1799 und 1800 (publ. 1803), p. 157—188. — Ein anderer Versuch, die Leibnizsche Methode zu verdrängen, rührt von L. F. A. Arbogast (1759—1803) her, der im Jahre 1789 der Pariser Akademie eine Schrift vorlegte mit dem Titel: Essai sur des nouveaux principes de calcul différentiel et intégral, indépendants de la théorie des infiniment petits, et de celle des limites. Da aber die Abhandlung nicht veröffentlicht wurde, und die Arbogastsche Methode erst 1800 im Druck erschien (Arbogast, Calcul des dérivations, Strasbourg 1800), so möge die Besprechung dieser Methode dem Verfasser des V. Bandes überlassen werden.

loge. Er geht von diesem Postulat aus: Jede Funktion y von x läßt sich unter der Form:

$$y = Ax^a + Bx^b + \cdots$$

annehmen, sei es, daß sie wirklich diese Form besitzt, oder daß sie auf dieselbe durch Reihenentwicklung gebracht werden kann. Setzt man nach der heutigen Schreibweise:

$$y = \Sigma A x^a,$$

so heißt die Funktion:

$$\varepsilon y = \Sigma a A x^a$$

das Exponential von y, y die exponentiierte Funktion von εy. Aus dieser Definition ergeben sich von selbst die Regeln für die Bestimmung des Exponentiales einer Summe, eines Produktes, einer Potenz und eines Quotienten; es folgt dann die Binomialreihe und die Taylorsche Entwicklung. Dieser letzteren bedient sich Pasquich zur Auffindung des Exponentiales einer beliebigen Funktion. Aus der Entwicklung:

$$\Delta y = \frac{\varepsilon y}{1!x}\Delta x + \frac{\varepsilon^2 y}{2!x}\Delta x^2 + \cdots,$$

wo allgemein:

$$\varepsilon^{n+1} y = \varepsilon \frac{\varepsilon^n y}{x}$$

ist, folgt nämlich:

$$\frac{x\Delta y}{\Delta x} = \frac{\varepsilon y}{1!} + \frac{\varepsilon^2 y}{2!}\Delta x + \cdots;$$

dieses Verhältnis nähert sich bei unbeschränkt abnehmendem Δx dem Werte $\frac{\varepsilon y}{1!}$, so daß εy die Grenze von $\frac{x\Delta y}{\Delta x}$ ist. Findet man allgemein für ein beliebig kleines Δx sowohl:

$$\frac{x\Delta y}{\Delta x} > Z + p\Delta x + \cdots,$$

als

$$\frac{x\Delta y}{\Delta x} < Z + P\Delta x + \cdots,$$

so ist notwendig $\varepsilon y = Z$. Das mag wohl genügen, um den Leser zu überzeugen, daß Pasquich nur neue Namen für altbekannte Sachen eingeführt hat.

Eine auffallende Ähnlichkeit, selbst in der Nomenklatur, mit der Pasquichschen Methode zeigt die Grüsonsche[1]).

[1]) In der oben erwähnten Nachricht bemerkt Pasquich, daß Grüson in der Vorrede zur Übersetzung der Lagrangeschen Funktionentheorie seinen neuen Exponierungscalcul voranmeldet; er versichert aber, er sei seit neun Jahren im Besitz seiner Exponentialrechnung, und habe dieselbe vor fünf Jahren dem Prof. Kraft in St. Petersburg und dann einigen deutschen Gelehrten mitgeteilt.

Nach Grüson ist seine Methode, die er noch vor der Herausgabe des Lagrangeschen Werkes erfunden habe, einfacher und lichtvoller als die der Infinitesimalrechnung, da sie sich nur wohlbekannter algebraischer Prinzipien bedient. Man kann aber voraussehen, daß die Einfachheit auf Kosten der Strenge erhalten wird. Wie es scheint, nimmt Grüson als selbstverständlich an, daß jede Funktion sich in eine Reihe von ganzen oder gebrochenen Potenzen der Veränderlichen entwickeln läßt. Sein Verfahren ist folgendes. Ist F eine Potenzreihe von x mit ganzen positiven Exponenten, so findet offenbar dasselbe für F^m für jedes ganze und positive m statt; es läßt sich ferner nachweisen, daß auch $\frac{1}{F}$, und folglich $\frac{1}{F^m}$, in eine solche Reihe entwickelbar ist. Grüson will zeigen, daß $F^{\frac{m}{n}}$ dieselbe Form hat wie F. Da F^m und F^n gleiche Form haben, so muß dasselbe, sagt er, von $F^{\frac{m}{n}}$ und F folgen. Da aber, fügt er am Ende seiner zweiten Abhandlung hinzu, mein Beweis einige Zweifel im Geiste der Geometer nachgelassen hat, so gebe ich einen zweiten an, der nichts zu wünschen übrig läßt. Enthielte die Entwicklung einer Funktion f eine gebrochene Potenz von x, so würde diese Potenz ebenfalls in f^r vorkommen, welche auch die ganze Zahl r sei. Nimmt man nun:

$$f = F^{\frac{n}{m}}, \quad r = m$$

an, so folgt $f^r = F^n$; es würde sich dann ergeben, daß F^n eine gebrochene Potenz von x enthalten sollte, was unmöglich ist. Das Resultat kann auch auf irrationale Potenzen einer Funktion F erstreckt werden, freilich aber auf Grund der folgenden Hilfssätze, die, wie leicht zu sehen, wesentlich der Grenztheorie angehören: Können x, y kleiner gemacht werden als jede angebbare gleichartige Größe, und ist:

$$A < B + x, \quad A > B - y,$$

so ist $A = B$. Ist:

$$U = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots,$$
$$V = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots,$$
$$W = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

ferner:

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1, \ldots, a_n = c_n,$$

wo n eine bestimmte Zahl bezeichnet, und ist V für alle Werte von x zwischen U und W enthalten, so folgt:

$$b_0 = a_0, \quad b_1 = a_1, \ldots, b_n = a_n.$$

Aus dem Gesagten läßt sich schließen, daß jede algebraische

oder transzendente Funktion von x nach ganzen positiven Potenzen von x entwickelbar ist.

Ist dieses festgestellt, und bezeichnet $F + \Delta F$ den Wert der Funktion:

$$F = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + \cdots$$

für den Wert $x + \Delta x$ von x, so ergibt sich sogleich:

$$F + \Delta F = F + (A\alpha x^{\alpha} + B\beta x^{\beta} + \cdots)\frac{\Delta x}{x} + Q\Delta x^2.$$

Grüson schreibt:

$$\mathfrak{E} F = A\alpha x^{\alpha} + B\beta x^{\beta} + \cdots,$$

und nennt diese Größe das Exponential (l'exponentielle) von F. Die Methode, welche lehrt, das Exponential einer Funktion zu finden, oder umgekehrt von dem Exponential einer Funktion zur Funktion selbst wieder emporzusteigen, heißt Expositionsrechnung (calcul d'exposition).

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß nicht alle, die sich mit Infinitesimalrechnung beschäftigten, es für nötig hielten, sich über die logischen Grundlagen derselben aufzuhalten; wir führen unter anderen in dieser Hinsicht die Lehrbücher von Saladini[1]), Marie und Bezout usf. an.

Lehrbücher der Infinitesimalrechnung.

Als wir versuchten, den allgemeinen Charakter unseres Zeitabschnittes in bezug auf den von uns zu behandelnden Zweig der Mathematik zu schildern, sagten wir, es sei diese eine der Anordnung und Vervollständigung der früher ermittelten Resultate besonders gewidmete Periode gewesen. Ein Zeugnis dafür ist die ungemeine Fülle von Lehrbüchern der höheren Analysis oder der gesamten Mathematik, die unserer Periode ihre Entstehung verdanken. Wir wollen eine rasche Übersicht dieser Werke übernehmen, die wir, bei der Unmöglichkeit jeder systematischen Anordnung, chronologisch durchmustern werden. Unsere Aufmerksamkeit werden wir vorläufig nur auf den Allgemeinplan jedes Buches und auf die darin befolgte Methode lenken, während wir uns vorbehalten, das etwa vorkommende wissenschaftlich Neue an den gebührenden Orten zu besprechen. Wir schmeicheln uns keineswegs, ein vollständiges Verzeichnis der in unserer Periode erschienenen Lehrbücher unseren Lesern vorzustellen; das aber dürfen wir mit Sicherheit behaupten, daß das Unterlassene nicht imstande

[1]) Elementa geometriae infinitesimorum, Bononiae 1760.

sein kann, die Umrisse unseres wissenschaftlichen Bildes auch im mindesten zu verändern.[1])

Heinrich Wilhelm Clemm, Professor und Prediger zu Bebenhausen bei Tübingen, dann Professor zu Stuttgart und Tübingen, geboren zu Hohen-Asperg am 13. Dezember 1725, gestorben zu Tübingen am 27. Juli 1775, gab zu Stuttgart im Jahre 1759 ein Lehrbuch der Mathematik mit dem Titel: Erste Gründe aller mathematischen Wissenschaften heraus, von welchem wir nur eines zu bemerken haben, daß nämlich der Verfasser die Infinitesimalrechnung nach der Fluxionsmethode, aber mit der Ausdrucksweise der Leibnizschen Methode behandelt.

Ebenfalls im Jahre 1759 erschien die Geometria algebrica von Giambattista Caraccioli, geboren zu Rom am 29. Dezember 1695, gestorben daselbst 1765.[2]) Der zweite Band dieses Werkes behandelt die Elemente der Infinitesimalrechnung und deren Anwendung auf Kurvenlehre auf Grund der beiden L'Hospitalschen Postulate.

Aus dem Jahre 1760 haben wir ein ausführliches Handbuch von Karsten[3]), welches aber nichts Merkwürdiges darbietet.

---

[1]) Trotz der außerordentlichen Güte und Bereitwilligkeit der italienischen und ausländischen Bibliotheksdirektoren, welchen wir hier unseren wärmsten Dank aussprechen, waren uns die folgenden Werke unzugänglich: Martin, Institutiones mathematicae, London 1759; Müller, Traité analytique des sections coniques, fluxions et fluentes, Paris 1760; Mormoraj, Elementa analyseos, Pisa 1761; Berthelot, Cours de mathématiques, Paris 1762; Bergmann, Lectiones mathematicae, Prag 1765; Condorcet, Traité du calcul intégral, Paris 1765; Kies, Analyseos infinitorum quaedam specimina, Tübingen 1765; Beck, Praelectiones mathematicae, Salzburg 1768—1780; Mako von Kerek, Calculi differentialis et integralis institutio, Wien 1768; Sauri, Cours complet de mathématiques, Paris 1774; Wydra, Primae calculi differentialis rationes, Prag 1774; Schmiedel, Institutiones calculi differentialis et integralis, Breslau 1775; Fontaine, Nouveau plan des mathématiques, Annecy 1777; Girault de Keroudou, Leçons analytiques du calcul des fluxions et des fluentes, Paris 1777; Antoni, Principii di matematica sublime, Torino 1779; Beck, Institutiones mathematicae, Salzburg 1781; Langsdorf, Ausführung der Erläuterungen über die Kästnersche Analysis des Unendlichen, Gießen 1781; Rauch, Elementa sectionum conicarum et calculi infinitèsimalis, München 1790; Minzele, La grandezza discreta analizzata nelle sue finite ed infinitesime funzioni, Napoli 1798; Rohde, Anfangsgründe der Differentialrechnung, Potsdam 1799. [2]) Der ausführliche Titel ist: Geometria algebrica universa quantitatum finitarum, et infinite minimarum. Adjectus in fine est commentarius de curva cochlea, Romae 1759. Eine biographische Skizze über Caraccioli von G. Loria liest man in Boll. bibl. st. sc. mat. VI, 1903, p. 33—38. [3]) Mathesis

Im Jahre 1761 erschien der erste Teil der schon erwähnten Elementa analyseos finitorum von Segner. Als „Differentialgleichung" einer gegebenen Gleichung zwischen X und Y bezeichnet Segner diejenige Beziehung, die sich dadurch ergibt, daß man X, Y durch $X \pm x$ bzw. $Y \pm y$ ersetzt; in einer solchen Gleichung bedeutet $=$ nicht die Gleichheit, sondern das Streben nach Gleichheit. Die Elementa behandeln, wie fast alle gleichartigen Werke dieser Zeit, nicht nur die Infinitesimalrechnung, sondern auch die Anwendung derselben auf ebene Kurven und auf algebraische Gleichungen.

Ebenfalls im Jahre 1761 erschienen die schon erwähnten Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen von Kästner. Bei diesem Buche haben wir uns im vorigen Kapitel ziemlich lange aufgehalten. Nur eins wollen wir hier anführen: ein Verfahren zur Ableitung des Differentiales eines Logarithmus, welches, von seinem geometrischen Gewande entblößt, folgendermaßen lauten mag. Es sei $y = c^x$, und bezeichnen wir mit m, n die gleichzeitigen Zuwächse von x und y, so hat man:

$$n = c^x(c^m - 1).$$

Setzen wir $m = \frac{1}{r}$, wo r eine ganze positive Zahl bezeichnet, ferner:

$$q = c^{\frac{1}{r}} - 1,$$

so ist:

$$n = c^x q = yq,$$

folglich:

$$\frac{ym}{n} = \frac{m}{q}.$$

Es ist aber $\frac{m}{q}$ von y unabhängig und von Null verschieden; bezeichnen wir diese konstante Größe mit a, so ist:

$$y\frac{m}{n} = a,$$

oder:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y}.$$

Aus demselben Jahre stammen die Analyseos infinite parvorum sive calculi differentialis elementa (Pisa 1761) von Ranieri Bonaventura Martini (1723—1774), Arzt und Professor

---

theoretica elementaris atque sublimior in usum academicarum praelectionum, Rostock und Greifswald 1760. — Ein anderes didaktisches Werk von Karsten ist: Mathematische Analysis und höhere Geometrie, Greifswald 1786. Siehe auch: K. Rohde, preußischer Lieutenant, Erläuterungen über Herrn Karstens mathematische Analysis und höhere Geometrie, Berlin 1789.

der Philosophie aus Pisa. Einer kurzen Entwicklung der Grundsätze der Differentialrechnung folgt in diesem Buche eine ausführliche Auseinandersetzung der Infinitesimalgeometrie der ebenen Kurven. Der Verfasser geht von der Definition des Unendlichkleinen als einer Größe aus, die als über jede Grenze abnehmend gedacht werden kann. Er handelt mit unendlichkleinen und unendlichgroßen Größen mit einer Freiheit, die freilich im 18. Jahrhundert üblich war. So zum Beispiel bemerkt er, daß die Subtangente in einem vielfachen Punkte die Form $\frac{0}{0}$ annimmt und folglich unendlich ist; selbstverständlich ist er genötigt, hinzuzufügen, daß man nicht hieraus schließen darf, daß die Subtangente wirklich unendlich ist, sondern daß es mehrere Subtangenten gibt. Daß $\frac{0}{0} = \infty$ (Martini schreibt dafür 00), wird wie folgt nachgewiesen. Es sei (Fig. 75) ACB ein Kreisquadrant, AD

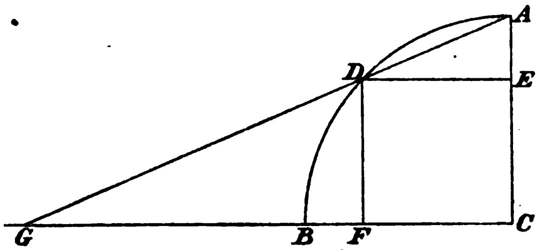


Fig. 75.

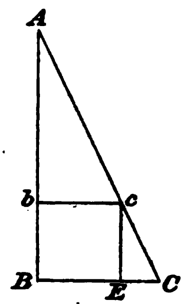


Fig. 76.

eine Sehne desselben, G der Schnittpunkt von AD mit BC, E die Projektion von D auf AC, F die auf BC, und setzen wir $AC = a$, $DE = y$; dann ist:

$$FG = \frac{DE \cdot DF}{AE} = \frac{y\sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}};$$

ist nun $y = 0$, so wird AG parallel zu BC, und es ist:

$$FG = \frac{0}{0} = \infty.$$

Es ist merkwürdig, daß Martini dieses Ergebnis als ganz allgemein betrachtet, während der Begriff von den verschiedenen Ordnungen des Unendlichkleinen ihm offenbar nicht fremd war, da er an einem anderen Orte bemerkt, daß, wenn in einem Dreieck ABC (Fig. 76) die Basis BC unendlich klein von der ersten Ordnung ist, AB und AC als parallel betrachtet werden dürfen, und $EC = dy$ unendlich klein von der zweiten Ordnung ist; daß ferner, wenn A unendlich weit ist,

die Seiten „fient inter se magis parallela“, und $dy = \frac{1}{\infty^4}$; daß, wenn daneben $BC = \frac{1}{\infty^3}$, dann $dy = \frac{1}{\infty^4}$ ist.

Noch im Jahre 1761 begegnen wir einem bekannteren italienischen Gelehrten, Paolo Frisi (siehe oben S. 19), Barnabiten, geboren zu Mailand am 13. April 1728, gestorben daselbst am 22. November 1784. Seit seiner ersten Jugend widmete sich Frisi der Mathematik gegen den Willen seiner Vorgesetzten, die beabsichtigten, aus ihm einen Theologen zu machen, und die erst dann davon abstanden, seine Neigung zu bekämpfen, als sein Wert von der gelehrten Welt öffentlich anerkannt wurde. Er lehrte Mathematik zu Pisa, dann zu Mailand; die ersten Akademien und Gesellschaften von ganz Europa zählten ihn unter ihre Mitglieder, Fürsten und Könige erteilten ihm die höchsten Ehren. Den großen Ruhm, dessen er sich erfreute, verdankt Frisi besonders seinen astronomischen und hydraulischen Schriften; wohlbekannt sind auch seine Lobreden auf Galilei und Cavalieri. Auf die reine Mathematik bezieht sich eine Abhandlung über die Fluxionsmethode, welche den zweiten Teil des 1761 erschienenen zweiten Bandes der Dissertationum variarum[1]) bildet. Wie der Verfasser angibt, ist diese eine Erweiterung einer vor neun Jahren in Mailand herausgegebenen Schrift.[2]) Frisi setzt sich als Zweck vor, die Maclaurinschen Methoden zu vereinfachen; sein Verfahren ist aber eine Vermischung der Fluxions- mit der Infinitesimalmethode, und zwar finden wir neben der Definition der Fluxion die des Differentials, welches der Unterschied zweier Ordinaten oder Bögen usw. ist, wenn diese einander unendlich nahe sind, so daß man den Unterschied als unendlich klein und die Ordinaten oder Bögen als einander gleich ansehen darf. Die Abhandlung besteht aus zwei Abteilungen, deren erste die Theorie behandelt, während die zweite den geometrischen Anwendungen gewidmet ist. Die Entwicklung der Theorie beschränkt sich auf die Bestimmung der Fluxion eines Produktes, einer Potenz mit rationalem Exponenten und eines Polynoms. Um die in der zweiten Abteilung befolgte Methode zu charakterisieren, mag es hinreichen, darauf hinzuweisen, daß der

[1]) Der erste Band (Lucca 1759) enthält eine Dissertation über die Präzession der Nachtgleichen, eine über die Atmosphäre der Himmelskörper und eine über die Natur des Äthers, von denen die erste von der Berliner, die zweite von der Pariser Akademie gekrönt wurde. Der zweite Band (Lucca 1761) enthält eine Dissertation über die Unregelmäßigkeiten der Bewegungen der Planeten, eine über die Fluxionsmethode und eine dritte mit dem Titel: Meditationes quaedam metaphysicae. [2]) De methodo fluxionum geometricarum et ejus usu in investigandis praecipuis curvarum affectionibus dissertatio, Mailand 1753.

Ausdruck der Subtangente aus der Ähnlichkeit der beiden rechtwinkligen Dreiecke erhalten wird, deren Katheten einerseits die Subtangente und die Ordinate, andererseits dx und dy sind. Gegenstand dieser Abteilung ist die Bestimmung der größten und kleinsten Ordinaten, der singulären Punkte und des Krümmungsradius einer ebenen Linie und der Fläche des durch die Schraubenbewegung einer ebenen Figur erzeugten Körpers.

Im Jahre 1762 erschien in London ein Büchelchen mit dem Titel: Mathematics, dessen Verfasser, Rev. William West, am 1. Oktober 1760, 53 Jahre alt, gestorben war. Herausgeber war John Rowe, der, wie sich aus dem Vorwort ergibt, selbst ein Werk mit dem Titel: An introduction to the doctrine of fluxions verfaßt haben soll, dessen zweite Auflage damals soeben erschienen war. Das Büchelchen zerfällt in zwei Kapitel, deren zweites (Miscellaneous questions) der Infinitesimalrechnung fremd ist, während das erste (Fluxions) der Theorie der Maxima und Minima gewidmet ist (was an seinem Orte besprochen werden soll), mit Ausschluß der ersten fünf Seiten, die einen ganz kurzen Abriß der Fluxionsrechnung darbieten. Während aber der Verfasser von der üblichen Definition der Fluxionen ausgeht, bemerkt er zu unserer Überraschung bei der Aufsuchung der Fluxion von xy, daß man in dem Zuwachse $x'y + xy' + x'y'$ den Term $x'y'$ vernachlässigen darf („may be rejected"), weil x' und y' unendlich klein („infinitely little") sind.

Im Jahre 1763 gab Emerson zu London sein Werk: The method of increments heraus. William Emerson (s. o. S. 30), Sohn eines Schulmeisters, geboren zu Hurworth am 14. Mai 1701, gestorben daselbst am 20. Mai 1782, war ein sehr sonderbarer Mann; er machte sich einen Ruhm daraus, sich roh und schmutzig zu zeigen, und man erzählt, er habe dieselben Kleider 20 Jahre hindurch gebraucht; er war in der theoretischen Musik sehr gewandt, aber so unglücklich in der Praxis, daß es ihm nicht einmal gelang, die Violine zu stimmen. Emerson ist Verfasser von zahlreichen mathematischen Werken, deren eins soeben erwähnt wurde, während andere an den passenden Orten besprochen werden sollen.

Im folgenden Jahre erschien die schon oben besprochene Residual analysis von Landen, welche als ein Lehrbuch der Differentialrechnung und ihrer geometrischen Anwendungen angesehen werden darf.

Noch in demselben Jahre begegnen wir einem Namen, der in der Mathematik eine dauernde Stelle eingenommen hat. Étienne Bezout (s. o. S. 74)[1]) geboren zu Nemours am 31. März 1730 aus einer armen Familie.

[1]) Éloge de M. Bézout, Hist Acad. Paris 1783 (publ. 1786), p. 69–75.

widmete sich gegen den Willen seines Vaters der Mathematik. Er wurde Mitglied der Akademie 1758, Examinator der Marinegarden 1763, und als solcher war er mit der Abfassung eines Lehrbuches der Mathematik beauftragt, welches im folgenden Jahre erschien.[1]) Im Jahre 1768 wurde er Examinator der Artillerie, und einige Jahre später (1770) gab er eine neue Auflage seines Cours heraus, wobei er die alten Anwendungen seinem neuen Berufe gemäß durch andere ersetzte. Zugleich beschäftigte er sich mit denjenigen Untersuchungen über algebraische Gleichungen, welchen sein Name anhaftet. Als Beispiel seines Mutes und seiner Gewissenhaftigkeit erzählt man, daß er einige Kandidaten, die zu Toulon an den Blattern krank waren, an ihrem Bette examinierte, um ihnen den Schaden zu ersparen, den der Aufschub des Examens verursachen würde. Er beschloß sein ruhiges und glückliches Leben am 27. September 1783.

Der Cours de mathématiques[2]) besteht aus fünf Teilen: Arithmetik, Geometrie und Trigonometrie, Algebra und analytische Geometrie, Mechanik und Infinitesimalrechnung, Schiffahrt. Daß wir „Mechanik und Infinitesimalrechnung" und nicht umgekehrt gesagt haben, ist nicht ein Versehen von unserer Seite, sondern entspricht der im vierten Bande des Cours befolgten Anordnung; es ist aber zu beachten, daß die Mechanik mit lauter elementaren Mitteln entwickelt wird. Die Behandlung der Infinitesimalrechnung bietet nichts Besonderes, als daß Bezout durchgängig mit Differentialen arbeitet, so daß man die Definition der Ableitung in seinem Lehrbuche umsonst suchen würde.

Es ist bekannt, welchen Beifall die 1748 erschienenen Instituzioni analitiche von Maria Gaetana Agnesi (diese Vorl., III[2], S. 822) in und außer Italien fanden. Es war aber nunmehr nötig, dieses Lehrbuch durch ein anderes zu ersetzen, welches die inzwischen erreichten Resultate umfassen sollte. Diesen Zweck setzten sich Riccati und Saladini mit ihren mehr als 1100 Quartseiten starken Institutiones analyticae (vgl. S. 457 ff.) vor. Welche Fortschritte dieses Lehrbuch gegenüber dem Agnesischen darbietet, ergibt sich aus den Vorworten zu den zwei Bänden, von denen der erste der endlichen, der zweite der unendlichen Analysis gewidmet ist. Als uns interessierende Zusätze sind folgende zu bezeichnen: Begriff des Unendlichkleinen, Gebrauch der Reihen in der Infinitesimalrechnung, Beweis der Prinzipien der Integralrechnung auf Grund der Reihen, Integration

[1]) Cours de mathématiques à l'usage de la marine. [2]) Die uns vorliegende Auflage (von den Jahren IX und X des republikanischen Kalenders) ist eine Verschmelzung der beiden Cours und enthält sowohl die Anwendungen auf Schiffahrt als die auf Artillerie.

von Kreis- und Hyperbelfunktionen, Rektifikation der Kegelschnitte. Der erste dieser Punkte ist schon oben berührt worden; auf andere werden wir weiter unten wieder kommen. Aus dem Vorwort entnehmen wir auch, welchen Anteil jeder der beiden Verfasser an dem Werke hatte, und welche ihre Arbeitsweise war.[1]) Vom methodologischen Standpunkte aus bieten die Institutiones eine wichtige Neuigkeit dar, die Verschmelzung der Differential- mit der Integralrechnung; das erste Buch (des II. Bandes) enthält die elementaren Differentialformeln, denen die bezüglichen Integralformeln gegenüberstehen, und die Integrationsmethoden mit Anwendung auf Quadraturen und Rektifikationen; das zweite behandelt die direkte und inverse Tangentenmethode; das dritte betrifft die Differentiale höherer Ordnung nebst den bezüglichen geometrischen Anwendungen, und die Variationsrechnung.

Es möge auch bemerkt werden, daß unsere Autoren den ursprünglichen Integralbegriff wieder aufgenommen haben (was sie dadurch ausdrückten, daß sie die Prinzipien der Integralrechnung auf die Reihentheorie begründeten). In der Vorgeschichte der Infinitesimalrechnung war, was wir jetzt als Integral bezeichnen, eine Fläche, also eine Summe unendlich vieler Elemente. Nachdem man aber die folgenreiche Entdeckung machte, daß Differentiation und Integration umgekehrte Operationen sind (diese Vorl., III², S. 156, 165), bezeichnete man als Integral einer Funktion $f(x)$ diejenige Funktion, deren Ableitung $f(x)$ ist. Was die Wissenschaft dieser Entdeckung verdankt, ist niemandem unbekannt; es ist aber noch immer interessant, zu zeigen, daß gewisse Integrationen sich auch auf Grund der ursprünglichen Definition des Integrals als einer Summe ausführen lassen. Dazu geben Riccati und Saladini drei Methoden, welche auf die durch die Gleichungen:

$$a^{m-1}y = x^m, \quad a^{m-1}x = y^m$$

definierten Funktionen y von x angewandt werden.[2])

---

[1]) „Totius operis methodum Riccatus diposuit; conscribenda vero capita amice divisa sunt. Quae magis subobscura, magisque erant difficilia, Riccatus magno studio clara, perceptuque reddidit facilia; quin etiam antequam in lucem proferret, ea adolescentibus quibusdam suis auditoribus addiscenda tradidit, atque experientia comperit, ea perquam facillime percipi, ac penetrari. Caetera vero Saladinus collegit, explicavit, ac multum de suo addidit. Is scripta deferebat amico socio, quibus perpensis, atque approbatis, illud tantum addebat quod necessaria operis connexio postulabat. Stilum vero, si lector identidem mutatum cernat, plurimos hunc librum latine reddidisse sciat."

[2]) Vgl.: V. Riccati, De quadratura curvarum tradita per summas generales serierum, Comm. Acad. Bon. V 2, 1767, p. 432—445.

Die Institutiones analyticae, von welchen Saladini zehn Jahre später einen Auszug in italienischer Sprache herausgab[1]), boten zu lebhaften Diskussionen Gelegenheit. Im Jahre 1773 erschien im Giornale de' letterati ein ausführlicher Bericht von dem Abt Gioacchino Pessuti[2]), wo das Werk als eines der besten und vollständigsten Lehrbücher der Analysis bezeichnet wird, aber einige „kleine Flecken" hervorgehoben werden, deren einer die Verschmelzung der Differential- und Integralrechnung ist. Ein Schreiben von V. Riccati an Pessuti vom 29. August 1773, welches eine heftige Verteidigung seiner Reform enthält, wurde erst nach V. Riccatis Tode von dessen Brüdern veröffentlicht.[3]) Pessuti erwiderte darauf mit seinen Riflessioni analitiche (Livorno 1777), welche wiederum eine lange Antwort von seiten eines ungenannten Verfassers hervorriefen.[4])

Im Jahre 1767 kommt ein schon bekannter Name wieder vor, der von Emerson, als Verfasser eines kleinen Buches: The arithmetic of infinites, and the differential method; illustrated by examples (London 1767). Die „arithmetic of infinites", oder die Indivisibilienmethode, ist die Kunst, die Potenzen der Glieder einer arithmetischen Reihe von unendlichkleiner Differenz zu summieren. Sie wird besonders auf die Berechnung von geometrischen Größen angewandt, welche als aus unteilbaren Elementen zusammengesetzt betrachtet werden; es ist aber zu beachten, daß diese Elemente nicht wirklich unteilbar sind, und nur „by reason of similitude" unteilbar genannt werden. Die „differential method" ist die Differenzen- und Interpolationslehre.

Im Jahre 1768 erschienen die Élémens du calcul intégral von Lesceur und Jacquier, den beiden Minoriten, welchen man einen

---

[1]) Institutioni analitiche del conte V. Riccati compendiate da G. Saladini, Bologna, I. Bd. 1776, II. Bd. 1775. [2]) Institutiones analyticae di V. Riccati e J. Saladini (Rezension ohne Namen des Verfassers), Nuovo Giornale de' letterati d'Italia (Modena) 1773, I, p. 30—73, II, p. 219 bis 287, III, p. 78—123. Daß Pessuti der Verfasser ist, ergibt sich aus p. 144 des XV. Bandes des Giornale. [3]) Lettera all' autore della relazione delle Istituzioni analitiche dell' Ab. Co. Vincenzo Riccati, inserita nel Nuovo Giornale de' letterati d'Italia, Tomo I, II e III, Nuova Raccolta d'Opuscoli scientifici e filologici XXX, 1776, Op. III, p. 8—25. — Den auf die im Texte berührte Frage sich beziehenden Teil dieses Schreibens kann man lesen in Loria, Il Giorn. de' Lett. d'Italia etc., Cantor-Festschrift, Leipzig 1897, S. 241—274.
[4]) Risposta alle Riflessioni analitiche del Sig. Ab. G. Pessuti sopra una lettera scrittagli dal Sig. Ab. Co. V. Riccati, N. Giorn. lett. XV, 1778, p. 144—204. Nach Riccardi ist Verfasser derselben Giordano Riccati, Bruder von Vincenzo (aus Treviso, 1709—1790, siehe diese Vorl. III², S. 474).

bekannten Kommentar zu den Principia von Newton verdankt. Thomas Leseur, geboren zu Réthel 1703, gestorben zu Rom am 22. September 1770, war zusammen mit François Jacquier (1711 bis 1788; diese Vorl., III², S. 841) Professor der Mathematik und der Theologie zu Rom; beide wurden im Jahre 1763 nach Parma berufen als Lehrer des Infanten, welchem sie ihr Lehrbuch der Integralrechnung widmeten. Von diesem aus mehr als 1100 Seiten bestehenden Werke wollen wir nur sagen, daß es für eins der besten Lehrbücher seiner Zeit gehalten wurde, und daß dieses Urteil nach unserem Ermessen ganz richtig ist.

Das Jahr 1768 zeichnet sich aber besonders durch die Erscheinung eines der wichtigsten Werke unserer Periode, der Institutiones calculi integralis (Petersburg 1768, 1769, 1770) von L. Euler (1707—1783; diese Vorl., III², S. 549) aus. Dieses großartige Werk besteht aus drei starken Quartbänden, denen ein vierter nach des Verfassers Tode von der Petersburger Akademie 1794 hinzugefügt wurde. Bei der außerordentlichen Wichtigkeit desselben halten wir es für nötig, den allgemeinen Plan in seinen Hauptlinien wiederzugeben:

Erstes Buch (Liber). Integration der Funktionen einer Variabeln.

I. Abteilung (Pars). Untersuchung der Beziehungen, in welchen nur Differentiale erster Ordnung vorkommen.

1. Abschnitt (Sectio). Integration der Differentialformeln.

2. Abschnitt. Integration der Differentialgleichungen.

3. Abschnitt. Auflösung der Differentialgleichungen, in welchen die Differentialgrößen nicht linear auftreten.

II. Abteilung. Untersuchung der Beziehungen, in welchen Differentiale höherer Ordnung vorkommen.

1. Abschnitt. Differentialgleichungen zweiter Ordnung (mit zwei Variabeln).

2. Abschnitt. Differentialgleichungen von höherer Ordnung.

Zweites Buch. Integration der Funktionen mehrerer Variabeln.

I. Abteilung. Funktionen von zwei Variabeln.

1. Abschnitt. Untersuchung der durch eine Relation zwischen ihren ersten Differentialen definierten Funktionen von zwei Variabeln.

2. Abschnitt. Dasselbe für die zweiten Differentiale.

3. Abschnitt. Dasselbe für die höheren Differentiale.

II. Abteilung. Funktionen von mehr als zwei Variabeln.

Anhang (Appendix). Variationsrechnung.

Zusatz (Supplementum). Entwickinng einiger besonderer Fälle der Integration von Differentialgleichungen.

Wir wollen ferner die Verteilung der Kapitel des 1. Abschnittes

der I. Abteilung des 1. Buches anführen, welcher allein unseren Abschnitt betrifft:

1. Kap. Rationale Funktionen.
2. „ Irrationale Funktionen.
3. „ Reihenintegration.
4. „ Logarithmische und exponentiale Funktionen.
5. „ Aus Winkeln oder Sinussen gebildete Funktionen.
6. „ Entwicklung der Integrale nach Sinussen und Kosinussen von vielfachen Bögen.
7. „ Angenäherte Integration.
8. „ Bestimmte Integrale.
9. „ Entwicklung der Integrale in unendliche Produkte.

Der vierte Band enthält 29 teils schon erschienene, teils der Petersburger Akademie vorgelegte, aber noch nicht herausgegebene Abhandlungen, welche elf Supplemente zu den einzelnen Kapiteln der ersten drei Bände bilden.

Was den Stoff des Werkes betrifft, so werden wir öfters Gelegenheit haben auf denselben zurückzukommen. Hier begnügen wir uns damit, die Eulersche Definition des Integrals anzuführen: $\int X dx$ ist diejenige veränderliche Größe, deren Differential $X dx$ ist. Selbstverständlich behält Euler auch hier seinen Begriff von dem strengen Nullsein der in bestimmten gegenseitigen Verhältnissen stehenden Differentiale bei (diese Vorl., III², S. 749); er bemerkt, daß der Gebrauch des Zeichens $\int$, welches summa bedeutet, von einem unangemessenen („parum idoneo“) Begriffe herrührt, nach welchem ein Integral als die Summe sämtlicher Differentiale zu betrachten wäre; was mit nicht besserem Rechte zugegeben werden darf, als daß die Linie aus Punkten bestehen möge.

Dem Jahre 1769 gehören die Anfangsgründe der Analysis der unendlichen Größen (Berlin) an von Georg Friedrich Tempelhoff, einem preußischen Artillerieoffizier, geboren zu Tramp am 17. März 1737, gestorben zu Berlin am 13. Juli 1807, der die große Ehre hatte, im Jahre 1778 den von der Berliner Akademie für eine Arbeit über die Kometen bestimmten Preis mit Condorcet zu teilen.

In den Jahren 1769—1771 gab der schon oben erwähnte Caraccioli seine Introduzione alla matematica per mezzo del calcolo universale[1]) heraus, deren vierter und letzter Teil der Infinitesimal-

[1]) Zwei Bände, Velletri 1769 und 1771. Eine lateinische Ausgabe war früher unter dem Titel: Isagoge in universam mathesin zu Neapel erschienen.

rechnung gewidmet ist. Den Ausgangspunkt bildet das Newtonsche Lemma, nach welchem zwei veränderliche Größen, deren Differenz kleiner als jede angebbare Größe ist, endlich einander gleich werden.

Das Datum 1770 trägt der erste Band eines schon oben besprochenen Werkes, welches gewissermaßen als eine Enzyklopädie der Mathematik bezeichnet werden darf: Gli elementi teorico-pratici delle matematiche pure (Modena 1770—1777) von O. Gherli. Die Elementi zerfallen in sieben Quartbände, von welchen der erste die Arithmetik, der zweite die Algebra, der dritte die Geometrie, der vierte die analytische Geometrie, der fünfte die Differentialrechnung, die zwei letzten die Integralrechnung behandeln. Sie geben alles damals Bekannte in ausführlicher Entwicklung wieder; wesentlich neues tragen sie nicht hinzu.

Ein ganz kleines und unerhebliches Büchlein ist die Pertractatio elementorum calculi integralis discentium bono typis commissa (Prag 1771) von Johann Tessanek (s. o. S. 30), Jesuit und Professor der höheren Mathematik, geboren in Böhmen 1728, gestorben zu Prag 1788.

Einem anderen italienischen Gelehrten, Francesco Maria Gaudio, geboren zu S. Remo bei Genua 1726, gestorben 1793, gehört ein dem von Gherli verfaßten analoges Werk, die Institutiones mathematicae, deren vier Oktavbände in Rom in den Jahren 1772—1779 gedruckt wurden.

Wieder in Italien erschien eine Dissertation[1]) von Carlo Francesco Gianella, Jesuit, geboren zu Mailand am 13. Juni 1740, gestorben am 15. Juli 1810, Mitglied der Turiner Akademie seit ihrer Stiftung und Professor zu Mailand und zu Pavia. Gianella geht vom Begriff der Fluxion aus, bedient sich aber der Leibnizschen Bezeichnung, und lehrt zuletzt, wie die Infinitesimalmethode als ein „compendium" der Fluxionsmethode angesehen werden darf.

Der schon erwähnte Paolo Frisi gab in den Jahren 1782—1785 seine Werke[2]) in drei Bänden heraus, von denen der erste, der Algebra und analytischen Geometrie gewidmet, uns allein interessiert, während die zwei übrigen Mechanik und Kosmographie betreffen. Die Kapitel 11—15 des ersten Bandes behandeln die Infinitesimalrechnung und ihre Anwendung auf Kurvenlehre; Frisi erwähnt seine nunmehr 30 Jahre alte Schrift über Fluxionen, und fügt hinzu, er habe seit-

---

[1]) De fluxionibus earumque usu Dissertatio a Carolo Francisco Gianella S. J. Phys. Prof. proposita a D. Rocco Marliani propugnata, Mailand 1777. [2]) Pauli Frisii Opera, Mailand 1782, 1783, 1785.

dem gefunden, daß alles auf ein einziges Axiom ankommt: Zwei veränderliche Größen, welche von einander um weniger als jede vorgegebene Größe verschieden sind, werden schließlich einander gleich; was mit einer Bekehrung von der Fluxions- zur eigentlichen Grenzmethode gleichbedeutend ist.

Ebenfalls in Italien erschien das Werk (s. o. S. 450): **Magnitudinum exponentialium logarithmorum et trigonometriae sublimis theoria nova methodo pertractata** (Florenz 1782) von Ferroni. Pietro Ferroni, geboren zu Florenz am 22. Februar 1744, gestorben daselbst im November 1825, war kaum 20 Jahre alt Professor der Mathematik an der Universität zu Pisa; später lehrte er in Florenz und wurde Mathematiker, d. h. Bau- und Flußoberaufseher des Großherzogs von Toskana. Er beschäftigte sich vorzüglich mit angewandter Mathematik, und gab wertvolle Studien über die Theorie der Gewölbe heraus. Von dem oben erwähnten Werk betrifft nur ein kleiner Teil die Infinitesimalrechnung, nämlich das 10. Kapitel, welches sich auf das Integral $\int \frac{dx}{x}$ bezieht, und das 8. Kapitel, wo Ferroni lehrt, wie man die Differentialquotienten der logarithmischen und exponentialen Größen ohne Gebrauch der Geometrie berechnen kann. Es ist zu beachten, daß die Formel:

$$\frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{x}$$

damals häufig aus der Betrachtung der logarithmischen Kurve abgeleitet wurde. Dagegen bedient sich Ferroni der Reihenentwicklung:

$$\lg x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots,$$

woraus folgt:

$$d \lg x = dx[1 - (x-1) + (x-1)^2 - \cdots] = \frac{dx}{x}.$$

Er verfährt auch so: aus:

$$\lg x = \infty \left(x^{\frac{1}{\infty}} - 1\right)$$

ergibt sich:

$$d \lg x = \infty \cdot \frac{1}{\infty} x^{\frac{1}{\infty}-1} dx = \frac{dx}{x}.$$

Was die Exponentialfunktion betrifft, hat man:

$$a^x = 1 + \frac{x \lg a}{1!} + \frac{x^2 \lg a^2}{2!} + \cdots,$$

also:

$$d \cdot a^x = \lg a \cdot dx\left(1 + \frac{x \lg a}{1!} + \frac{x^2 \lg a^2}{2!} + \cdots\right) = a^x \lg a \cdot dx;$$

oder auch:

$$a^x = \left(1 + \frac{x \lg a}{\infty}\right)^\infty,$$

woraus folgt:

$$d \cdot a^x = \infty\left(1 + \frac{x \lg a}{\infty}\right)^{\infty - 1} \frac{\lg a \cdot dx}{\infty} = \left(1 + \frac{x \lg a}{\infty}\right)^\infty \lg a\, dx = a^x \lg a\, dx.$$[1]

Nach diesen aus Italien herrührenden Werken müssen wir zwei in Österreich erschienene Schriften erwähnen, die Vorlesungen über

---

[1]) Um besser zu zeigen, mit welcher Unbefangenheit Ferroni mit unendlichen und verschwindenden Größen handelt, wollen wir noch einige Formeln aus Kap. 10 entnehmen. Aus:

$$\frac{x^m}{m} = \frac{1}{m} + \log x + \frac{m \log x^2}{2} + \frac{m^2 \log x^3}{6} + \cdots$$

folgt für $m = 0$:

$$\frac{x^0}{0} = \int_0^x \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + \log x.$$

Es ist auch:

$$\log 0 = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right),$$

also:

$$\int_0^x \frac{dx}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \log x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$
$$+ \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots.$$

Aus:

$$\int x^m dx = \int dx\left(1 + \frac{m \log x}{1!} + \frac{m^2 \log x^2}{2!} + \cdots\right)$$
$$= x + \frac{m}{1} x \log x + \frac{m^2}{2!} x \log x^2 + \cdots$$
$$- mx \qquad - \frac{m^2}{1} x \log x - \cdots$$
$$+ m^2 x \qquad + \cdots$$
$$= x(1 - m + m^2 - \cdots) + x \log x \left(\frac{m}{1} - \frac{m^2}{1} + \cdots\right)$$
$$+ x \log x^2 \left(\frac{m^2}{2!} - \cdots\right) + \cdots$$

folgt für $m = -1$:

$$\int x^{-1} dx = \infty x - \frac{\infty x \log x}{1} + \frac{\infty x \log x^2}{2!} - \cdots + B = \infty x e^{-\log x} + B$$
$$= \infty x^{\frac{1}{\infty}} + B = B + (1 + (x-1))^{\frac{1}{\infty}},$$

usw.

Mathematik[1]) von Vega, und die Elementa calculi differentialis et integralis (Prag und Wien 1783) von Stanislaus Wydra (1741—1804, s. o. S. 20), Professor der Mathematik an der Universität zu Prag.

Georg Freiherr von Vega (s. o. S. 437) ist weitbekannt als Verfasser eines noch heute in Gebrauch bleibenden logarithmisch-trigonometrischen Handbuches. Seine Vorlesungen zerfallen in zwei Bände, von welchen der erste die Rechenkunst und Algebra, der zweite die theoretische und praktische Geometrie, die geradlinige und sphärische Trigonometrie, die höhere Geometrie und die Infinitesimalrechnung enthält. Wie der Verfasser selbst in seiner Vorrede erkennt, enthält sein Werk nichts wesentlich Neues; es möge nur bemerkt werden, daß die Integration von:

$$x^m dx (\alpha + \beta x + \gamma x^2)^{\frac{p}{2}}$$

für ganzzahlige m und p, und von:

$$x^m dx (\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n})^{\frac{p}{2}}$$

für ganzzahlige $\frac{m+1}{n}$ und p dadurch erzielt wird, daß man die Trinome in Binome durch die Beziehung:

$$x = z - \frac{\beta}{2\gamma} \quad \text{oder} \quad x^n = z^n - \frac{\beta}{2\gamma}$$

umformt.

Die Elementa von Wydra sind, ihrem Titel gemäß, ein elementares Lehrbuch der Infinitesimalrechnung und ihrer Anwendungen, wobei die Infinitesimalmethode durchgängig gebraucht wird.

Zwei andere ganz elementare Schriften sind die Brevi elementi di calcolo differenziale (Milano 1784) von Gaetano Allodi, Adjunkt am Observatorium zu Mailand, und das Lehrbuch der Infinitesimalrechnung von Vito Caravelli (aus Montepeloso in Basilicata, 1724—1800, s. o. S. 34) und Vincenzo Porto.[2])

Ein Werk, von welchem in Italien weit mehr gesprochen wurde, als es dies verdiente, ist das zweibändige, mehr als 1200 Quartseiten starke Lehrbuch von Nicolai: Nova analyseos elementa.[3]) Giovanni

---

[1]) Der ausführliche Titel ist: Vorlesungen über Mathematik sowohl überhaupt zu mehrerer Verbreitung mathematischer Kenntnisse in den K.-K. Staaten, als auch insbesondere zum Gebrauche des K.-K. Artillerie-Corps. Das Werk, dessen erste Auflage das Datum 1782 trägt, ist dem Artillerie-Corps gewidmet. Uns liegt eine spätere Ausgabe (Wien 1821) vor, die aus der vierten Auflage des ersten Bandes und aus der sechsten des zweiten gebildet ist. [2]) Trattato del calcolo differenziale di Vito Caravelli, e del calcolo integrale di Vincenzo Porto, per uso del regale Collegio Militare, Napoli 1786. [3]) T. I, Pars prima, Patavii 1786;

Battista Nicolai, geboren zu Venedig am 30. März 1726, gestorben zu Schio bei Vicenza am 15. Juli 1793, war Schüler von Jacopo Riccati, lehrte zu Treviso und dann an der Universität zu Padua. Nicolai denkt, die gemeine Analysis sei ganz wertlos, was davon herrühre, daß man nicht genau wisse, was „Einheit" bedeutet. Die Einheit ist, wie er uns lehrt, dem Werte, der Natur, der Dimension, dem Systeme, der Lage nach unbestimmt; jede Zahl kann als Einheit angenommen werden. Von dieser trivialen Wahrheit ausgehend, verwickelt er sich in ein solches Netz von Unsinn, daß wir zu viel Raum verschwenden müßten, wollten wir unseren Lesern eine genaue Idee davon geben. Aus den ungemein weitschweifigen Entwicklungen von Nicolai die Quintessenz entnehmend, können wir folgendes sagen: Da die Einheit willkürlich ist, so kann man das Negative auf eine negative Einheit beziehen, wodurch dasselbe als positiv erscheint; es ist also $-1 = 1$.[1]) Ja noch mehr, jede Zahl ist jeder anderen Zahl gleich.[2]) Dadurch wird das Imaginäre aus der Analysis verdrängt, da sowohl $\sqrt{AB}$ als $\sqrt{BA}$ (wo AB eine Strecke bezeichnet) einen reellen Wert hat.

Derartige Ideen konnten nicht umhin, die höchste Verwunderung überall zu erregen, um so mehr, als sich Nicolai, wie es scheint, der allgemeinen Achtung erfreute. Die Elementa und die früheren Riflessioni sulla possibilità della reale soluzione analitica del caso irreducibile (Padua 1783) wurden von allen Seiten heftig bekämpft[3]), und Silio, der freilich die tiefste Verehrung gegen

---

T. I, Pars altera (nach des Verfassers Tode vom Abt Vincenzo Chiminello, Adjunkt am Observatorium zu Padua, herausgegeben), Patavii 1798. Lag es etwa im Sinne des Verfassers, noch einen zweiten Band hinzuzufügen?

[1]) Wir wollen hier wenigstens ein Beispiel von dem Übergange vom Positiven zum Negativen anführen:

$$a = a^1 = a^{0+1} = \frac{a}{a} a^1 = \frac{1}{1} a^1 = \frac{0}{0} a^1 = \frac{1-1}{1-1} a^1 = \frac{-1+1}{1-1} (-a)^1$$

$$= \frac{0}{0} (-a)^1 = (-a)^1 = \left(\frac{-1+1}{1-1}\right) (-1) (a)^1 = 0^0 (-a^1) = -a^1 = -a$$

(Bd. I 1, p. 29). Die Gleichheit der positiven und der negativen Größen wurde von Chiminello in seinen Riflessioni su la verità di alcuni paradossi analitici verteidigt. [2]) „$1^0(1^0)^0 = g^0(g^0)^0$ ut quisque facile videt. Sed $1^0(1^0)^0 = 1(1^0)^0$; ergo erit etiam $1 \cdot (1)^0 = 1^{0+1} = 1(g^0) = g\left(\frac{1}{1}\right)^0 = g(g^0) = g^{0+1}$, sive $1 \cdot 1 = 1\frac{g}{g} = g\frac{1}{1} = g\frac{g}{g}$" (Bd. I 2, p. 57). [3]) Lettera del Sig. Petronio Maria Caldani (s. o. S. 152) al Rev. Padre Jacquier, Antol. Romana X, 1784, p. 33—37. — Lettera del Sig. P. M. Caldani al

Nicolai zeigt, sagt, seine Elemente sollten besser analytische Rätsel oder analytisches Labyrinth betitelt werden.

Von der 1786 erschienenen Exposition von Lhuilier haben wir schon oben gesprochen[1]); es möge hier nur weniges hinzukommen. Lhuilier bezeichnet als das Differentialverhältnis $\frac{dP}{dx}$ von zwei veränderlichen Größen P, x die Grenze des Verhältnisses ihrer gleichzeitigen Zuwächse, wobei $\frac{dP}{dx}$ nicht als ein wirkliches Verhältnis, sondern als ein unzerlegbarer Ausdruck gelten muß. Er beweist dann, auf Grund der Binomialformel, daß das Differentialverhältnis von x^n und x durch nx^{n-1} gegeben ist, und bemerkt, daß dieses Ergebnis ganz allgemein ist, da die Binomialformel sich für jeden beliebigen Exponent algebraisch nachweisen läßt. Demnach kann man das Differentialverhältnis einer jeden algebraischen Funktion von x (in bezug auf x) bestimmen, da jede solche Funktion in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Was die transzendenten Funktionen betrifft, benutzt Lhuilier die Taylorsche Entwicklung.

Wir begegnen nunmehr wieder einem italienischen Schriftsteller, dem Pater Angelo Luigi Lotteri, Mönch aus dem Orden der

---

Sig. N. N., ebenda, p. 61—62. — Lettera d'un dilettante d'analisi ad un suo amico sulla risposta inserita nel giornale no. 37 da' confini d'Italia alla lettera del Sig. P. M. Caldani al P. Jacquier intorno ai calcoli del Sig. Ab. Nicolai, ebenda, p. 249—254. — Risposta al Sig. prof. di Camerino autore delle riflessioni (stampate nel giornale letterario dai confini d'Italia no. 43) sulla lettera del Sig. P. M. Caldani diretta al P. Jacquier, ebenda, p. 313—318. — Riflessioni del prof. di matematica nell' università di Camerino alla risposta data al suo articolo inserito nel num. 13, 1784 del giornale letterario da' confini d'Italia, ebenda, p. 401—405, 409—414. — Postille alle Riflessioni del prof. di matematica etc., Antol. Romana XI, 1784, p. 33—40, 41—46, 49 bis 54, 57—62. — Lettera del Sig. Co. Giordano Riccati al Sig. Ab. Contarelli intorno alle Riflessioni sulla verità di alcuni paradossi analitici, creduti comunemente paralogismi, contenute nel n. 1 e 2 del Giornale letterario dai confini dell' Italia 1784, Nuovo Giorn. Lett. (Modena) XXVIII, 1784, p. 256—266. — Antonio Eximeno Valentini (Jesuit, 1732—1798), De studiis philosophicis et mathematicis instituendis (angeführt in einem Flugblatt von 12 Seiten s. l. et a. mit dem Titel: Lettera ad un amico del Sig. Arciprete Nicolai professore di analisi nella Università di Padova). — Guglielmo Silio Borremans (aus Sizilien), professore di analisi nella R. Accademia Militare, Osservazioni critiche su i nuovi elementi di analisi dell' abate Nicolai, Napoli 1787. — Was das Giornale letterario dai confini d'Italia ist, habe ich nicht ermitteln können.

[1]) Einen ausführlichen Bericht über dieses Werk findet man in: Vivanti, Il concetto d'infinitesimo etc.

Hierosolymiten. Geboren zu Bollate bei Mailand am 24. November 1760, war er 1787 Repetitor, 1798 Professor an der Universität zu Pavia. Als im Jahre 1799 die Studien an dieser Universität unterbrochen wurden, ging er nach Como als Professor am dortigen Lyceum, kam aber im nachfolgenden Jahre, bei der Wiedereröffnung der Universität, nach Pavia zurück als Substitut von Gregorio Fontana, welcher als Mitglied des Corps législatif der zisalpinen Republik von Pavia ferngehalten wurde, bis er später zum Professor der Einleitung in die Infinitesimalrechnung ernannt wurde. Er starb zu Mailand am 23. Januar 1839. Die Geschichte seines Lehrbuches der Infinitesimalrechnung[1]) erzählt er wie folgt. Nachdem d'Alembert, sagt Lotteri, den Spuren Newtons folgend, die Infinitesimalmethode durch die Grenzmethode ersetzte, wodurch die Analysis viel lichtvoller geworden ist, sind zahlreiche Lehrbücher der Infinitesimalrechnung in allen Ländern erschienen. Unter diesen zeichnet sich ein von einem ungenannten preußischen Offizier[2]) zum Gebrauche der Ingenieure und der Artillerie verfaßtes kleines Buch aus. Lotteri fing an, dasselbe zu übersetzen, sah aber bald ein, daß manche Berichtigungen und Zusätze nötig waren, und daher zog er es vor, das Werk in eine etwas verschiedene Form zu bringen; dazu bediente er sich zum Teil selbständiger Forschungen, entnahm aber die Theorie der Krümmung und der singulären Punkte dem Lehrbuche von Cousin (s. u.), die Integralrechnung dem von Bezout. Vier Zusätze von Fontana betreffen den Integrallogarithmus, eine Differentialgleichung zweiter und eine dritter Ordnung, und die Ausdehnung der Taylorschen Formel auf Funktionen von mehreren Veränderlichen.

Von zwei Lehrbüchern von Schultz haben wir schon früher gesprochen; wenn auch in ihnen der Begriff vom Unendlichen vorkommt, so beschäftigt sich doch keins von beiden mit der Infinitesimalrechnung.

Ein Werk von nicht ganz entschiedenem Charakter ist die Teoria dell' analisi[3]) von Pietro Franchini (s. o. S. 313), geboren zu Partigliano bei Lucca am 24. April 1768, gestorben zu Lucca am 26. Januar 1837, Professor der Philosophie am bischöflichen Seminar zu Veroli bei Rom. Es besteht aus vier Abschnitten: I. Theorie der Rechnungen,

---

[1]) Principj fondamentali del calcolo differenziale e integrale appoggiati alla dottrina de' limiti, Pavia 1788. [2]) War er etwa der schon oben erwähnte Tempelhoff? oder von Massenbach, Verfasser der: Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung zum Gebrauch der Ingenieurs und Artilleristen, von einem K. Pr. Offizier, Halle 1781?
[3]) Teoria dell' analisi da servire d'introduzione al metodo diretto, ed inverso de' limiti, 3 Bde., Roma 1792—93.

oder der vier arithmetischen Operationen; II. Von den Quellen der Analysis; es sind 15 Theorien, nämlich: 1. Faktoren eines Monoms. 2. Kombinationen. 3. Potenzen. 4. Wurzeln. 5. Proportionen, Progressionen, Reihen. 6. Kettenbrüche. 7. Teilbrüche. 8. Logarithmen. 9. Kreisfunktionen. 10. Polygonometrie. 11. Endliche Differenzen. 12. Grenzwerte. 13. Maxima und Minima. 14. Endliche und unendlichkleine Größen. 15. Stetige Funktionen; III. Theorie der Gleichungen; IV. Von der Analysis im allgemeinen (endliche bestimmte und unbestimmte Analysis).

Der oben genannte Cousin hatte zu Paris im Jahre 1777 ein Werk mit dem Titel: Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral herausgegeben, welches neu bearbeitet im Jahre 1796 unter dem veränderten Titel: Traité du calcul différentiel et du calcul intégral erschien. Jacques Antoine Joseph Cousin, geboren zu Paris am 29. Januar 1739, gestorben daselbst am 28. Dezember 1800, führte bis zu seinem 50. Jahre ein ruhiges Leben als Professor der Mathematik und Physik; in den trüben Zeiten der Republik nahm er an den Staatssachen auf die ehrenhafteste Weise teil und starb als Mitglied des Senates und des Institut national. Es ist kaum nötig zu sagen, daß er ein Anhänger von d'Alembert ist; als Grundlagen zu seiner Entwicklung der Infinitesimalrechnung dienen die wohlbekannten Prinzipien der Grenztheorie.

Das Jahr 1797 ist für uns besonders wichtig, da in diesem Jahre die Theorie des fonctions analytiques von Lagrange herausgegeben wurde. Wir haben schon oben versucht, den Standpunkt von Lagrange zu schildern; wir wollen nunmehr sehen, wie er von diesem aus zu Werke geht. Seine Methode zur Auffindung der Ableitungen ist, wenn man die Exponentialreihe als bekannt voraussetzt, auf die Funktionen x^m, a^x, $\lg x$ sehr leicht anwendbar; für die trigonometrischen Funktionen bedient er sich der Eulerschen Formeln (diese Vorl., III², S. 708), welche diese Funktionen mit der Exponentialfunktion in Verbindung setzen.

Mit gleicher Leichtigkeit ergibt sich die Ableitung einer Summe, eines Produktes, eines Quotienten von Funktionen; ist z. B.:

$$y = pq,$$

so erhält man:

$$y + iy' + \cdots = (p + ip' + \cdots)(q + iq' + \cdots) = pq + i(pq' + p'q) + \cdots,$$

also:

$$y' = pq' + p'q.$$

Die Ableitung einer Funktionsfunktion $y = f\,p(x)$ erhält man folgendermaßen. Es ist:

$$p + o = p(x+i) = p + ip' + \cdots,$$
$$y + iy' + \cdots = f(p+o) = f(p) + of'(p) + \cdots$$
$$= f(p) + (ip' + \cdots)f'(p) + \cdots = f(p) + ip'f'(p) + \cdots,$$
also:
$$y' = p'f'(p).$$

Ist nunmehr $y = f(p, q)$, und setzt man $x + i$ statt x in p, so wird die Funktion:
$$f + ip'f_p' + \cdots[1]),$$
setzt man dagegen $x + i$ statt x in q, so erhält man:
$$f + iq'f_q' + \cdots;$$
es ergibt sich folglich durch die gleichzeitige Einsetzung von $x + i$ in p und in q:
$$f + iq'(f_q' + + \cdots) + ip'(f_p' + \cdots),$$
also:
$$y' = p'f_p' + q'f_q'.$$

Ist $y = f(x)$ eine implizite, durch die Gleichung:
$$F(x, y) = 0$$
definierte Funktion von x, und setzt man:
$$F(x, f(x)) = \varphi(x),$$
so erhält man aus $\varphi(x)$ nach Ersetzung von x durch $x + i$:
$$\varphi(x) + i\varphi'(x) + \cdots;$$
es ist aber $\varphi(x) = 0$ für jeden Wert von x, folglich ist $\varphi'(x) = 0$ oder:
$$F_x' + y'F_y' = 0,$$
woraus sich ergibt:
$$y' = -\frac{F_x'}{F_y'}.$$

Die Regel von L'Hospital wird folgendermaßen bewiesen. Es sei:
$$y = \frac{f(x)}{F(x)}, \quad f(a) = F(a) = 0;$$
aus:
$$yF(x) = f(x)$$
ergibt sich:
$$y'F(x) + yF'(x) = f'(x),$$
und hieraus für $x = a$:

---

[1]) Lagrange bezeichnet die partiellen Ableitungen von $f(p, q)$ nach p, q, wo p, q Funktionen von x sind, mit $f'(p)$, $f'(q)$, dagegen die Ableitungen von $f(x, y)$ nach x, y mit $f'(x, y)$, $f_1(x, y)$.

$$y = \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Wäre auch:

$$f'(a) = F'(a) = 0,$$

so würde man erhalten:

$$y = \frac{f''(a)}{F''(a)},$$

usw.; und es ist nicht zu befürchten, daß sämtliche Ableitungen verschwinden mögen, denn es wäre dann:

$$f(a + i) = 0, \quad F(a + i) = 0$$

für jeden Wert von i.

Darauf kommt **Lagrange** auf die Aufstellung der nach ihm benannten Restformel und auf die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Was die Funktionen von zwei Variablen betrifft, so nimmt **Lagrange** als selbstverständlich an, daß $f(x+i,\ y+o)$ sich überhaupt in eine nach steigenden Potenzen von i, o fortschreitende Reihe entwickeln läßt, deren erstes Glied $f(x, y)$ ist. Um das Gesetz dieser Reihe zu finden, setze man zuerst $x + i$ statt x; dann ist:

$$f(x + i, y) = f(x, y) + if_x'(x, y) + \frac{i^2}{2} f_{xx}''(x, y) + \cdots.$$

Setzt man jetzt $y + o$ statt y, so folgt:

$$f(x + i, y + o) = f(x, y + o) + if_x'(x, y + o) + \frac{i^2}{2} f_{xx}''(x, y + o) \cdots$$

Es ist aber:

$$f(x, y + o) = f(x, y) + of_y'(x, y) + \frac{o^2}{2} f_{yy}''(x, y) + \cdots,$$

$$f_x'(x, y + o) = f_x'(x, y) + of_{xy}''(x, y) + \cdots,$$

$$f_{xx}''(x, y + o) = f_{xx}''(x, y) + \cdots,$$

also.

$$f(x + i, y + o) = f(x, y) + if_x'(x, y) + of_y'(x, y) + \frac{i^2}{2} f_{xx}''(x, y) + iof_{xy}''(x, y) + \frac{o^2}{2} f_{yy}''(x, y) + \cdots.$$

Läßt man dagegen zuerst y um o, dann x um i zunehmen, so wird man analog erhalten:

$$f(x + i, y + o) = f(x, y) + if_x'(x, y) + of_y'(x, y) + \frac{i^2}{2} f_{xx}''(x, y) + iof_{yx}''(x, y) + \frac{o^2}{2} f_{yy}''(x, y) + \cdots.$$

Aus dem Vergleich der beiden Entwicklungen folgt der bekannte Satz (diese Vorl., III², S. 759, 881):

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Die Funktionen von mehr als zwei Variablen werden analog behandelt. Die erste Abteilung des Werkes schließt mit der Untersuchung der partiellen Differentialgleichungen.

Die zweite Abteilung ist den geometrischen Anwendungen gewidmet. Lagrange bemerkt, daß die Alten die Tangente als eine solche Gerade definierten, daß zwischen derselben und der Kurve keine andere Gerade liegen könne; später betrachtete man die Tangente entweder als eine Sekante mit zusammenfallenden Schnittpunkten, oder als die Verlängerung einer Seite eines Unendlichvieleckes, oder als die Richtung der Bewegung, durch welche die Kurve beschrieben werden könne. Hieraus entstanden einerseits die algebraischen, auf die Gleichheit der Wurzeln der Gleichungen gegründeten, andererseits die differentiellen, die Verhältnisse von unendlichkleinen Differenzen oder von Fluxionen benutzenden Methoden. Unser Verfahren, fährt Lagrange fort, gestattet uns, die Begriffe und die Methoden der Alten wieder aufzunehmen.

Es mögen:

$$y = f(x), \quad y = F(x)$$

zwei Kurven darstellen. Damit sie einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen, muß sein (für einen gewissen Wert von x):

$$f(x) = F(x).$$

Um die beiden Linien in der Nähe dieses Punktes untereinander zu vergleichen, setzen wir $x + i$ statt x; der Unterschied der beiden Ordinaten ist dann:

$$f(x+i) - F(x+i) = i(f'(x) - F'(x)) + \frac{i^2}{2}(f''(x) - F''(x)) + \cdots;$$

er ist um so kleiner, je mehr Glieder rechts verschwinden. Es sei nunmehr:

$$y = \varphi(x)$$

eine dritte, durch denselben Punkt gehende Linie, so daß:

$$f(x) = F(x) = \varphi(x)$$

ist, und setzen wir:

$$D = f(x+i) - F(x+i) = i(f'(x)) - F'(x)) + \frac{i^2}{2}(f''(x+j) - F''(x+j)),$$

$$\Delta = f(x+i) - \varphi(x+i) = i(f'(x)) - \varphi'(x)) + \frac{i^2}{2}(f''(x+j) - \varphi''(x+j)),$$

wo j in den beiden Formeln verschieden sein kann. Damit die dritte Linie zwischen den beiden anderen liege, muß D für ein beliebig kleines i absolut größer sein als Δ. Ist nun:

$$f'(x) = F'(x), \quad f'(x) = \varphi'(x),$$

so ist:

$$D = \frac{i^2}{2}(f''(x+j) - F''(x+j)),$$

und man kann i so klein annehmen daß Δ absolut größer als D wird. Die dritte Linie kann also nur dann zwischen den beiden anderen liegen, wenn $f'(x) = \varphi'(x)$. Ist insbesondere:

$$F(x) = a + bx,$$

so daß $y = F(x)$ eine Gerade darstellt, so nehmen die Beziehungen:

$$f(x) = F(x), \quad f'(x) = F'(x)$$

die Form:

$$f(x) = a + bx, \quad f'(x) = b$$

an, und die Gleichung der Geraden wird:

$$q = f(x) - xf'(x) + pf'(x), \tag{1}$$

wo p, q die laufenden Koordinaten bezeichnen. Ist die dritte Linie ebenfalls eine Gerade, so daß:

$$\varphi(x) = g + hx,$$

und soll diese durch den betrachteten Punkt gehen, so muß sein in diesem Punkte:

$$f(x) = g + hx;$$

soll sie ferner zwischen den beiden ersten Linien liegen, so muß sein:

$$f'(x) = h.$$

Hieraus ergibt sich aber:

$$g = a, \quad h = b.$$

Es kann also keine Gerade zwischen der Linie $q = f(p)$ und der Geraden (1) liegen; und diese letztere ist die Tangente.

Ein analoges Verfahren kann auf die Untersuchung des Schmiegungskreises und überhaupt der Berührungen irgendwelcher Ordnungen angewandt werden.

Setzt man ferner $\frac{1}{i}$ statt x, und stimmen die Reihenentwicklungen von $f\left(\frac{1}{i}\right)$, $F\left(\frac{1}{i}\right)$ nach steigenden Potenzen von i in den ersten, zweiten, . . . Gliedern überein, so läßt sich beweisen, daß die

Linie $y = \varphi(x)$ in den Punkten, deren Abszissen $x > \frac{1}{i}$ sind, zwischen den beiden Linien $y = f(x)$, $y = F(x)$ nicht liegen kann, wenn die Reihenentwicklung von $\varphi\left(\frac{1}{i}\right)$ nicht wenigstens in ebensovielen Gliedern mit den übrigen übereinstimmt, woraus sich der Begriff von den Asymptoten ganz leicht ergibt.

Was wir bisher gesagt haben, ist wohl hinreichend, um dem Leser einen klaren Begriff von dem Lagrangeschen Verfahren zu geben, und wir dürfen daher über das übrige ziemlich rasch hinweggehen. Die Bedingung dafür, daß der Abszisse x die größte oder kleinste Ordinate zukommt, ergibt sich aus der Betrachtung, daß:

$$f(x+i) - f(x)$$

ein von dem Vorzeichen von i unabhängiges Vorzeichen besitzen muß. Zum Zwecke der Berechnung der Fläche $F(x)$ einer ebenen Linie $y = f(x)$, wo $f(x)$ eine monotone Funktion bezeichnet, bemerkt Lagrange, daß $F(x+i) - F(x)$ zwischen $if(x)$ und $if(x+i)$ liegen muß; es ist aber:

$$f(x+i) = f(x) + if'(x+j),$$
$$F(x+i) = F(x) + iF'(x) + \frac{i^2}{2} F''(x+j),$$

folglich liegt:

$$iF'(x) + \frac{i^2}{2} F''(x+j)$$

zwischen den Größen:

$$if(x), \quad if(x) + i^2 f'(x+j);$$

hieraus ergibt sich leicht:

$$F'(x) = f(x).$$

Bezeichnet $f(x)$ die Fläche des ebenen Schnittes eines Körpers, so ergibt $F(x)$ dessen Inhalt.

Die Rektifikationsformel wird folgendermaßen erhalten. Nach Archimed ist der Bogen AFB (Fig. 77) länger als die Sehne AB und kürzer als $AE + EB$, wobei E den Schnittpunkt der Tangenten AC, BD in A und B bezeichnet; nun ist aber die Neigung von AC gegen die Ordinatenachse kleiner, die von BD größer als die von AB, folglich:

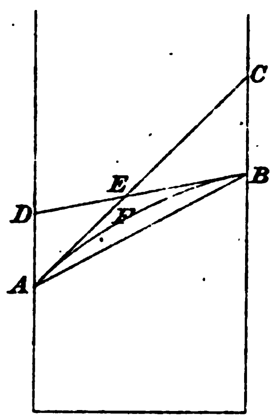


Fig. 77.

$$AB > BD, \quad AC > AE + EB,$$

und endlich:

$$AC > AFB > BD,$$

oder:

$$i\sqrt{1+f'^2(x)} > AFD > i\sqrt{1+f'^2(x+i)}$$

Hieraus ergibt sich, wenn $\Phi(x)$ die Bogenlänge bezeichnet:

$$\Phi'(x) = \sqrt{1+f'^2(x)}.$$

Es folgt dann die Theorie der Raumkurven und Oberflächen und der Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen, die Variationsrechnung und die Theorie der Quadraturen und Kubaturen.

Die dritte Abteilung enthält die mechanischen Anwendungen, auf welche wir nicht einzugehen brauchen.

Noch im Jahre 1797 erschien der erste Band des umfangreichen und trefflichen Traité du calcul différentiel et du calcul intégral (Paris, an V, VI [1797—98], 2 Bde.) von Sylvestre François Lacroix, geboren zu Paris 1765, gestorben am 26. Mai 1843. Sohn einer armen Familie, wollte sich Lacroix der Schiffahrt widmen; bald aber erkannte er, daß sich diese Wissenschaft auf Mathematik gründet, und gab sich daher mathematischen Studien eifrig hin. Seine Mühe war von dem besten Erfolg gekrönt (s. o. S. 344). Als Zeugen seiner schriftstellerischen Tätigkeit liegen uns manche Lehrbücher von hohem didaktischem Werte vor. Der Gedanke, ein Lehrbuch der Infinitesimalrechnung abzufassen, wurde ihm durch die Lagrangesche Abhandlung von 1772 (s. o. S. 644) eingeflößt. Im Jahre 1787 fing er an, den Stoff zu seinem Werke zu sammeln und einige Fachmänner um Rat zu fragen. Man kann aber Lacroix nicht unter die Anhänger Lagranges zählen. Freilich gibt er die Lagrangesche Definition der Ableitung an und bestimmt dementsprechend die Ableitungen der elementaren Funktionen; aber er zeigt bald nachher, daß die Ableitung die Grenze der entsprechenden Zuwächse der Funktion und der Veränderlichen ist, und bezeichnet als Gegenstand der Differentialrechnung die Bestimmung der Grenzen der Zuwachsverhältnisse von veränderlichen Größen, wenn die Beziehungen zwischen diesen Größen bekannt sind. An einem anderen Orte bemüht er sich zu beweisen, daß die Infinitesimalmethode nicht angenähert, sondern streng genau ist, und daß Leibniz mit der Metaphysik der Infinitesimalrechnung ganz im reinen war.

Viel Neues bietet das Buch nicht dar; es mag daher genügen, auf die Einteilung des Stoffes kurz hinzuweisen.

Der erste Band, der Differentialrechnung gewidmet, zerfällt in eine Einleitung und fünf Kapitel. In der Einleitung werden die

Definitionen von Funktion und Grenze gegeben, und die Grundsätze der Grenztheorie aufgestellt. Das 1. Kapitel beginnt mit der Lagrangeschen Definition der Ableitung; es werden dann, wie schon gesagt, die Ableitungen der elementaren Funktionen bestimmt und die Hauptsätze der Differentialrechnung nachgewiesen, und es wird zum Schlusse gezeigt, daß die Ableitung die Grenze des Zuwachsverhältnisses ist, was zur oben angeführten Definition der Differentialrechnung führt. Das 2. Kapitel behandelt die analytischen Anwendungen der Differentialrechnung: Reihenentwicklungen, unbestimmte Ausdrücke, Maxima und Minima. Bemerkenswert ist hier die Untersuchung einiger Fälle, in welchen die Taylorsche Reihenentwicklung nicht zulässig ist. Hat man:

$$f(x) = (x - a)^n,$$

wo n positiv und kleiner als 1 ist, so enthält das erste Glied der Entwicklung eine positive Potenz, die übrigen aber sämtlich negative Potenzen von $(x - a)$, und man kann also nicht $a = 0$ setzen. Das rührt davon her, daß $(x - a + k)^n$ sich für $x = a$ auf k^n, d. h. auf eine nicht ganze Potenz von k reduziert, was mit der allgemeinen Form der Entwicklung nicht verträglich ist. Ist $f(x)$ allgemein irrational, hört aber für $x = a$ auf, es zu sein, so muß k in $f(a + k)$ irrational auftreten, und daher kann $f(a + k)$ durch keine Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von k dargestellt werden. Das 3. Kapitel enthält eine Abschweifung über algebraische Kurven, das 4. und 5. die Theorie der ebenen Kurven und diejenige der Raumkurven und Oberflächen.

Der zweite Band enthält die Integralrechnung und zerfällt ebenfalls in fünf Kapitel, nämlich: 1. Integration der Funktionen einer Veränderlichen; 2. Geometrische Anwendungen der Integralrechnung; 3. Gewöhnliche Differentialgleichungen; 4. Funktionen von mehreren Veränderlichen; 5. Variationsrechnung.

Differentiation und Integration.

1. Differentiation.

Die Differentialrechnung war in allen ihren wesentlichen Teilen von Leibniz geschaffen worden und hatte noch am Schlusse der vorigen Periode in Eulers Lehrbuche eine erschöpfende Behandlung erhalten. Es war also von unserer Periode kein beträchtlicher Beitrag zu erwarten. Und so ist es wirklich. Nur eines verdient als ganz neu angezeigt zu werden, die Einführung der symbolischen Bezeichnung in die Infinitesimalrechnung durch Lagrange.

Lagrange[1]) schreibt die Taylorsche Entwicklung folgendermaßen:

$$\Delta u = e^{\frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\psi + \cdots} - 1,$$

und geht dann zur allgemeinen Formel über:

$$\Delta^\lambda u = \left(e^{\frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\psi + \cdots} - 1\right)^\lambda;$$

diese Formel läßt sich auch auf den Fall eines negativen λ erstrecken, so daß:

$$\Sigma^\lambda u = \frac{1}{\left(e^{\frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\psi + \cdots} - 1\right)^\lambda},$$

wo $\Sigma^\lambda u$ durch die Beziehungen:

$$\Delta \Sigma^\lambda u = \Sigma^{\lambda - 1} u, \ldots, \Delta \Sigma u = u$$

definiert ist. Der Übergang von $\Delta^\lambda u$ zu $\Sigma^\lambda u$, bemerkt Lagrange, ist nicht auf ersichtliche und strenge Prinzipien gegründet, er ist aber nichtsdestoweniger richtig, wovon man sich a posteriori zu überzeugen imstande ist, und hängt mit der zwischen den positiven Potenzen und der Differentiation einerseits, zwischen den negativen Potenzen und der Integration andererseits obwaltenden Analogie zusammen. Es wäre jedoch wohl schwierig, einen direkten analytischen Beweis davon zu geben.

Betrachten wir, der Einfachheit wegen, den Fall einer einzigen Veränderlichen. Da:

$$e^\omega - 1 = \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \cdots$$

ist, so folgt:

$$(e^\omega - 1)^\lambda = \omega^\lambda (1 + A\omega + B\omega^2 + \cdots),$$

und hieraus durch logarithmische Differentiation:

$$\lambda\left(\frac{e^\omega}{e^\omega - 1} - \frac{1}{\omega}\right) = \frac{A + 2B\omega + \cdots}{1 + A\omega + B\omega^2 + \cdots}$$

oder:

$$\frac{A + 2B\omega + \cdots}{1 + A\omega + B\omega^2 + \cdots} = \lambda\left(\frac{1}{\omega - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} - \cdots} - \frac{1}{\omega}\right) = \lambda \frac{\frac{1}{2!} - \frac{\omega}{3!} + \cdots}{1 - \frac{\omega}{2!} + \frac{\omega^2}{3!} - \cdots},$$

woraus folgt:

---

[1]) In der schon oben (S. 644) angeführten Abhandlung: Sur une nouvelle espèce de calcul etc.

$$A = \frac{\lambda}{2}, \quad B = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda+1}{2}A - \frac{\lambda}{6}\right] = \frac{\lambda}{24} + \frac{\lambda^2}{8}, \cdots,$$

und:

$$\Delta^\lambda u = \frac{d^\lambda u}{dx^\lambda}\xi^\lambda + \frac{\lambda}{2}\frac{d^{\lambda+1}u}{dx^{\lambda+1}}\xi^{\lambda+1} + \left[\frac{\lambda}{24} + \frac{\lambda^2}{8}\right]\frac{d^{\lambda+2}u}{dx^{\lambda+2}}\xi^{\lambda+2} + \cdots.$$

Für negative Indices hat man dann:

$$\Sigma^\lambda u = \frac{1}{\xi^\lambda}\int^\lambda u dx^\lambda - \frac{\lambda}{2}\frac{1}{\xi^{\lambda-1}}\int^{\lambda-1} u dx^{\lambda-1} + \cdots;$$

es ist insbesondere für den Index -1:

$$\Sigma u = \frac{1}{\xi}\int u dx + \alpha u + \beta\xi\frac{du}{dx} + \cdots,$$

wo $\alpha, \beta, \ldots$ die Werte von $A, B, \ldots$ für $\lambda = -1$ bezeichnen. Durch diese Formel kann man die Summe einer Reihe angeben, deren allgemeines Glied bekannt ist.

Die Formeln von Lagrange sind von P. S. Laplace[1]) auf eine andere Weise bewiesen worden.

Einiger kleineren Beiträge müssen wir hier Erwähnung tun.

Johann Friedrich Pfaff (s. o. S. 216) gibt in seinem Inauguralprogramm von 1788[2]) eine neue Methode zur Aufstellung der Grundformeln der Differentialrechnung. Seinen Ausführungen liegen die beiden folgenden Hilfssätze zugrunde: a) Sind x, y unabhängige Veränderliche, P, Q, P_1, Q_1 Funktionen von x, y, so folgt aus:

$$Pdx + Qdy = P_1dx + Q_1dy$$

notwendig $P = P_1$, $Q = Q_1$; b) Sind X, Y ähnliche Funktionen von x bzw. y, und ist $X = Y$, so folgt $X = Y = \text{const.}$ — Will man nun die Ableitung von $\log x$ ermitteln, so setze man $\frac{d\log x}{dx} = \varphi(x)$; es folgt dann aus:

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

durch Differentiation:

$$\varphi(xy)(xdy + ydx) = \varphi(x)dx + \varphi(y)dy,$$

also:

$$y\varphi(xy) = \varphi(x), \quad x\varphi(xy) = \varphi(y),$$

und hieraus:

---

[1]) Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure de la terre et sur les fonctions, Mém. Sav. Étr. VII, 1773 (publ. 1776); Oeuvres VIII, Paris 1891, p. 279—321. [2]) Programma inaugurale in quo peculiarem differentialia investigandi rationem ex theoria functionum deducit; simulque praelectiones proximo semestre hiberno habendas indicit J. F. Pfaff, Helmstädt 1788.

$$x\varphi(x) = y\varphi(y) = \text{const.},$$

oder $\varphi(x) = \frac{C}{x}$. Die Potenz x^m und die Kreisfunktionen lassen sich analog behandeln. Aber auch die soeben benutzte Formel:

$$d(xy) = xdy + ydx$$

kann durch diese Methode nachgewiesen werden. Es sei:

$$d(xy) = Pdx + Qdy,$$

wo:

$$P = \varphi(x, y), \quad Q = \varphi(y, x);$$

setzt man $y + z = v$, so ist:

$$xv = xy + xz,$$

also:

$$dx\varphi(x, v) + (dy + dz)\varphi(v, x)$$
$$= dx\varphi(x, y) + dy\varphi(y, x) + dx\varphi(x, z) + dz\varphi(z, x).$$

Es folgt hieraus:

$$\varphi(x, v) = \varphi(x, y) + \varphi(x, z), \quad \varphi(v, x) = \varphi(y, x) = \varphi(z, x),$$

also:

$$\varphi(y, x) = \psi(x), \quad \psi(y + z) = \psi(y) + \psi(z);$$

aus dieser letzten Funktionalgleichung ergibt sich aber:

$$\psi'(y + z) = \psi'(y) = \psi'(z) = C,$$

oder

$$\psi(x) = Cx,$$

daher ist:

$$d(xy) = C(ydx + xdy).$$

Setzt man schließlich $y = 1$, so ergibt sich $C = 1$, womit die vorgelegte Formel bewiesen ist.

Man kann durch analoge Betrachtungen zur Taylorschen Reihenentwicklung gelangen. Setzt man $d\varphi(z) = \psi(z)dz$, so ist:

$$d\varphi(x + y) = \psi(x + y)(dx + dy),$$

also:

$$\psi(x + y) = \frac{\partial\varphi(x + y)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi(x + y)}{\partial y};\text{[1]}$$

ist umgekehrt $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, so folgt $P = \varphi(x + y)$. Schreibt man demnach:

---

[1]) Pfaff schreibt $\frac{d^x\varphi(x + y)}{dx}$, $\frac{d^y\varphi(x + y)}{dy}$.

$$\varphi(x+y) = p + p_1 y + p_2 y^2 + p_3 y^3 + \cdots,$$

so hat man für $y = 0$:

$$p = \varphi(x),$$

ferner:

$$\frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x} = p' + p_1' y + p_2' y^2 + \cdots,$$

$$\frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial y} = p_1 + 2p_2 y + 3p_3 y^2 + \cdots,$$

woraus folgt:

$$p_1 = p' = \varphi'(x), \quad p_2 = \frac{1}{2} p_1' = \frac{1}{2}\varphi''(x), \quad p_3 = \frac{1}{3} p_2' = \frac{1}{2\cdot 3}\varphi'''(x), \cdots,$$

und schließlich:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + y\varphi'(x) + \frac{y^2}{2}\varphi''(x) + \frac{y^3}{2\cdot 3}\varphi'''(x) + \cdots.$$

Andere, aber nichts wesentlich Neues enthaltende Beweise des Taylorschen Lehrsatzes gaben Lhuilier[1]), Christoph Friedrich von Pfleiderer (1736–1821; s. o. S. 28, 29, 35)[2]), Professor der Physik und Mathematik an der Universität zu Tübingen, und Simon Gurieff (1766—1813)[3]), Professor der Mathematik zu Petersburg. Lagrange[4]) brachte den Rest auf die nach ihm benannte Form; G. Fontana[5]) dehnte die Taylorsche Formel auf Funktionen von mehreren Veränderlichen aus.

Als eine Vervollständigung seines Lehrbuches der Integralrechnung kann man eine Schrift von Euler[6]) ansehen, in welcher er eine ein-

---

[1]) A. a. O. [2]) Theorematis Tayloriani demonstratio, Tübingen 1789. Es ist diese eigentlich eine Dissertation, welche unter von Pfleiderers Vorsitze von J. C. Harprecht und G. F. Seiz verteidigt wurde (s. o. S. 131). [3]) Observations sur le théorème de Taylor, avec sa démonstration par la méthode des limites; application de ce théorème, ainsi démontré, à la démonstration du binome de Newton, dans le cas où l'exposant est une quantité fractionnaire, négative et incommensurable avec l'unité; suivie de la résolution d'un problème qui concerne la méthode inverse des tangentes, par le moyen de ce théorème (1799), Nova Acta Acad. Petrop. XIV, 1797—98 (publ. 1805), p. 306—335. [4]) Th. des fonctions analytiques. [5]) In Lotteri, a. a. O. [6]) De transformatione functionum, duas variabiles involventium, dum earum loco aliae binae variabiles introducuntur (1779), Mém. Acad. St. Pétersb. III, 1809 bis 1810 (publ. 1811), p. 43—56. Euler hatte in seinen letzten Lebensjahren der Petersburger Akademie eine große Fülle von Abhandlungen vorgelegt; er hatte auch den Wunsch geäußert, daß die Denkschriften der Akademie vierzig Jahre hindurch nach seinem Tode Schriften aus seiner Hand enthalten möchten (s. o. S. 470). Dieser Wunsch wurde pünktlich erfüllt. Euler starb 1783; und im Jahre 1830, nachdem in allen von der Akademie herausgegebenen Bänden mehrere Abhandlungen von Euler aufgenommen worden waren, während andere ein besonderes zweibändiges Werk ausgemacht hatten (Opuscula analytica, Petersburg 1783,

fachere Auflösung des folgenden Problemes entwickelt: Ist die Funktion $f(x, y)$ gegeben, und sind x, y bekannte Funktionen von t, u, so sollen die Ableitungen jeder Ordnung von $f(x, y)$ nach x, y durch t, u ausgedrückt werden.

Nicolao Colletti[1]), Geistlicher und Professor der Philosophie, bemerkte die folgenden Analogien, die sich freilich aus der Definition des Differentiales von selbst ergeben: Die m^{te} Differenz von:

$$d(d+1)\cdots(d+m-1)$$

ist konstant; dasselbe findet für das m^{te} Differential von:

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m$$

statt. Die m^{te} Differenz der m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen ist konstant; dasselbe geschieht vom m^{ten} Differentiale von x^m. Die m^{te} Differenz von:

$$d(d+n)\cdots(d+(m-1)n)$$

ist $m!n^m$; das m^{te} Differential von x^m ist $m!dx^m$.

Zum Schlusse müssen wir einige Betrachtungen Eulers über die unendlichkleinen und die unendlichgroßen Größen erwähnen[2]). Euler bemerkt, daß es neben den unendlichgroßen Größen, welche durch ganze und gebrochene Potenzen von x dargestellt werden, noch andere gibt, deren Ordnung unendlich kleiner ist als die von $x^{\frac{1}{n}}$ für jedes noch so große n. Eine solche ist $\log x$, wie sich durch L'Hospitals Regel nachweisen läßt; andere derartige Größen sind $\log\log x$, $\log\log\log x$ usw. Dagegen ist die Ordnung von a^x größer als die von x^n für jedes noch so große n.

Das logarithmisch Unendliche nennt Fontana[3]) infinitum ordinis semper infinitesimi oder infinitum paradoxum. Gre-

---

1785), enthielten die Archive der Akademie noch 14 ungedruckte Schriften, die in einem Supplementband (Mémoires XI) zusammen mit 4 Schriften von Schubert und 13 von Fuß publiziert wurden. Selbstverständlich müssen wir alle von Euler hinterlassenen Schriften als unserer Periode angehörig betrachten, wenn sie auch viel später zum Druck gelangt sind.

[1]) Colletti, Dissertazioni d'algebra, Torino 1787 (1. Dell' uso dei segni +, e — nel calcolo delle quantita. 2. Consenso del calcolo differenziale col calcolo delle quantità finite. 3. Metodo per determinare nelle curve la ragione delle coordinate, dalla ragione della differenza delle coordinate fra di loro, ovvero dell' una, o l'altra, o di amendue insieme coll' arco corrispondente. Saggio nelle sezioni coniche). [2]) Euler, De infinities infinitis gradibus tam infinite magnorum quam infinite parvorum, Nova Acta Acad. Petrop. 1778, P. I (publ. 1780), p. 102–118. [3]) Disquisitiones physico-mathematicae, nunc primum editae, Pavia 1780. Disq. 13. De infinito logarithmico.

gorio Fontana, geboren zu Nogarolo bei Rovereto in Tirol am 19. Oktober 1735, ein Mönch aus dem Orden der Scolopii, lehrte in Sinigallia, wo die Freundschaft mit Giulio Fagnano (diese Vorl., III², S. 485) die Neigung zur Mathematik in ihm erweckte. Im Jahre 1764 wurde er Professor der Philosophie an der Universität zu Pavia und Direktor der dortigen Bibliothek; vier Jahre später wechselte er seinen Lehrstuhl mit dem von Boscovich (s. o. S. 656) freigelassenen der Mathematik und Physik. Im Jahre 1800 verließ er die Universität als emeritierter Professor und zog nach Mailand als Mitglied der legislativen Versammlung; früher war er von Napoleon zu einem Dezemvir der zisalpinen Republik ernannt worden. Er starb zu Mailand am 26. August 1803[1]).

Genauer gesagt, nennt Fontana infinitum paradoxum dasjenige, welches von einer unendlichkleineren Ordnung ist als das „Unendliche erster Ordnung" $\left(1+1+\cdots \text{ oder } a+a+\cdots \text{ oder } \frac{1}{1-1} \text{ oder } \frac{a}{1-1}\right)$; er begründet die Existenz und bestimmt die Form eines solchen Unendlichen auf folgende Weise. Setzt man:

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + \gamma,$$

so kann γ weder Null noch endlich sein, noch die Form $\frac{p}{n}$ haben, wo p endlich ist; es muß also notwendig sein:

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{p}{n},$$

wo p das infinitum paradoxum ist. Hieraus folgt:

$$\frac{1}{n}\log n = \frac{p}{n} - \frac{p^2}{2n^2} + \cdots = \frac{p}{n},$$

also $p = \log n$.

---

[1]) In einem Dokumente der K. Polizeikommission zu Pavia liest man die folgende Notiz über Fontana (Mem. e doc. per la storia dell' Univ. di Pavia e degli uomini illustri che v'insegnarono, Pavia 1877—78): „Fontana Gregorio di Rovereto, delle Scuole pie, professore nella R. Università di Pavia, occulto giacobino ed ateo anche prima dell' ingresso dei Francesi in Lombardia, e scellerato di professione, fu chiamato a Milano da Bonaparte appena giuntovi, ove condusse seco certo Massa (rivoluzionario fuggito da Napoli), per la formazione della costituzione cisalpina; avanti la resa di Mantova, e mentre si batteva il Castello di Milano, intervenne ad un pranzo di molti Giacobini fattosi nella sala di questo teatro, ove recitò alcuni suoi sonetti contro il pontefice da esso chiamato Barionna, poscia si portarono tutti al Gravellona cantando canzoni scellerate contro li Sovrani con gran scandalo del popolo; per di lui opera furono impiegati l'Alpruni ed il detenuto Borletti di lui confidente, ed è noto il pravo di lui genio dimostrato anche nel Corpo legislativo, di cui è sempre stato individuo. Egli è a Milano."

2. Integration.

Bei weitem länger werden wir uns bei der Integralrechnung aufhalten.

Um systematisch zu verfahren, wollen wir den zu behandelnden Stoff folgendermaßen einteilen:

A. Prinzipien der Integralrechnung und verschiedenartige Fragen.
B. Integration von rationalen Funktionen.
C. Integration von irrationalen Funktionen.
D. Integration von transzendenten Funktionen.
E. Reihenintegration, angenäherte Integration.
F. Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen.
G. Vielfache Integrale.

A. Prinzipien der Integralrechnung und verschiedenartige Fragen.

Vor allem müssen wir eine Schrift erwähnen, die alles in der Integralrechnung früher Gemachte bekämpft, und eine Revolution in diesen Wissenszweig bringen will. Daß aber das Interesse der Abhandlung nur im Namen des Verfassers liegt, einem Namen, der in diesem Bande häufig vorkommen soll, wird der Leser bald von selbst einsehen. Sie trägt den Titel: Sur la méthode du calcul intégral[1]) und rührt von der Feder Lamberts her. Nach Lambert sind die Analysten, aus Ungeduld, neue Integrale zu berechnen, voreilig, unsystematisch und sozusagen tappend fortgeschritten; man sollte von vornherein nicht die Differentiale, sondern die Integrale klassifizieren, und dann Symptome ableiten, nach welchen die Differentiale klassifizierbar sein würden. Eine erste Klassifikation der Integrale ist die in algebraische und transzendente. Eine algebraische Funktion kann verschiedenen Typen angehören, von welchen Lambert die folgenden aufzählt: 1. Einfache rationale Funktionen, oder Polynome; 2. Rationale Brüche; das Differential ist ebenfalls rational, und sein Nenner ist, von eventuellen Reduktionen abgesehen, das Quadrat des Nenners des Integrals; 3. Wurzelgrößen; das Differential enthält dieselbe Wurzelgröße, mit einem rationalen Faktor multipliziert; 4. Algebraische Summen von Wurzelgrößen; das Differential zerfällt in mehrere Summanden; 5. Produkte und Quotienten von Wurzelgrößen; 6. Summen von solchen Größen; 7. Produkte von Wurzelgrößen und rationalen Größen; 8. Summen von solchen Produkten; 9. Quotienten von solchen Summen, usw.

[1]) Hist. Acad Berlin 1762 (publ. 1769), p. 441—484.

Ein Beispiel mag die Anwendung dieser Klassifikation beleuchten. Es liege ein rationales Differential vor, welches stets auf die Form:

$$dy = \frac{P}{Q^2}\,dx$$

gebracht werden kann, wo P, Q Polynome bezeichnen. Ist das Integral rational, so muß es die Form:

$$y = \frac{z}{Q}$$

haben, wo z ganz und rational ist, so daß es der zweiten Klasse angehört. Setzt man dann:

$$z = A + Bx + Cx^2 + \cdots,$$

so wird man versuchen, die Größen A, B, $C\ldots$ durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten zu erhalten; erweist sich das als möglich, und ist nur eine endliche Anzahl von diesen Größen von Null verschieden, so ist das Integral rational.

Was die nicht algebraischen Integrale betrifft, erkennt Lambert, daß man den richtigen Weg eingeschlagen hat, da man mit den einfachsten, durch Tabellen angebbaren Fällen angefangen und dann versucht hat, die übrigen auf diese zurückzuführen. Es wäre aber nötig, Reduzierbarkeitssymptome zu haben, aus welchen sich auch die Reduktionsmethode ergeben möchte; und in dieser Hinsicht schlägt Lambert eine Klassifikation der transzendenten Integrale vor, auf welche wir unterlassen, näher einzugehen.

Aus dem schon oben angeführten Briefwechsel zwischen Lambert und von Holland ergibt sich, daß sich auch der letztere um eine Reform der Integralrechnung bemühte; so versuchte er (18. Juli 1765) aus dem Verhältnis zweier Differentiale das Verhältnis der bezüglichen Integrale herzuleiten, was ihm selbstverständlich nicht gelang; später (6. Dezember 1767) zeigte er, wie sich alle Integrale der Differentiale $\frac{dx}{y}$, $\frac{x\,dx}{y}$, $\frac{x^2dx}{y}$, …, wo $y = \sqrt{bx - x^2}$, durch eins derselben ausdrücken lassen, und sagte, daß die Integralrechnung viel vollständiger würde, wenn dies im allgemeinen möglich wäre.

Eine gründliche Erneuerung der Integralrechnung wurde auch von Johann von Pakussi[1]) (oder Pacussi oder Pacassi, geboren zu Görz im Dezember 1758, gestorben zu Wien am 8. Juni 1818, Hofbaurat und Wasserbauinspektor) ersonnen. Er gibt diese Regel

[1]) Pakussi, Abhandlung über eine neue Methode zu integrieren, Wien 1785. – Versuch einer neuen Methode zu integrieren, Phys. Arbeiten der einträchtigen Freunde (Wien) II, 1786. — Joh. Bernoulli in Lamberts Briefwechsel III, p. 368—372. — Siehe die Einwürfe von L. Oberreit in Lamberts Briefwechsel V, p. 344ff.

an: Liegt ein Integral $\int P dx$ vor, so quadriere man Pdx und teile mit $d(Pdx)$; dann setze man (man weiß nicht warum) $dx^2 = xd^2x$; das Resulttat ist der Wert des Integrales. In Formeln:

$$\int P dx = \frac{P^2 dx^2}{Pd^2x + P'dx^2} = \frac{P^2 x}{P + P'x}.$$

Für die Integrale:

$$\int (ydx + xdy), \quad \int \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

muß man auch die Relation $dy^2 = yd^2y$ berücksichtigen. Selbstverständlich führt diese vermeintliche Integrationsmethode nur in ganz besonderen Fällen zu richtigen Resultaten, und es ist sehr leicht, Beispiele anzugeben, für welche sie nicht gelingt.

Samuel Vince (gest. 1821)[1]) gibt eine neue Methode, die er continuation nennt, zur Herleitung von neuen aus bekannten Integralformeln; so z. B. drückt er:

$$\int \frac{x^m dx}{(a^n + x^n)^r}, \quad \int \frac{x^n dx}{(a + bx^m + cx^{2m})^r}, \quad \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \int x^n dx \sqrt{\frac{x^m - a}{x^m - b}}$$

durch:

$$\int \frac{x^m dx}{a^n + x^n}, \quad \int \frac{x^n dx}{a + bx^m + cx^{2m}}, \quad \int \frac{x^n dx}{1 - x^2}, \quad \int \frac{x^n dx}{x^m - b}$$

aus.

Es gehören hierher vier Abhandlungen von Euler, welche einige unbestimmte Fragen der Integralrechnung betreffen.[2])

Es seien[3]) einige, z. B. drei Funktionen p, q, r von v gegeben; man soll eine derartige Funktion x von v auffinden, daß pdx, qdx, rdx integrierbar sind. Setzen wir:

$$\frac{dq}{dp} = q', \quad \frac{dr}{dp} = r', \quad \frac{dr'}{dq'} = r'',$$

nehmen wir ferner eine Funktion x''' von v willkürlich an und setzen:

$$x'' = \frac{dx'''}{dr''}, \quad x' = \frac{dx''}{dq'}, \quad x = \frac{dx'}{dp};$$

---

[1]) A new method of finding fluents by continuation, Philos. Trans. LXXVI, 1786, p. 432—442. [2]) Euler hat sich auch mit vielen anderen analogen Fragen vom Standpunkte der Differentialgeometrie aus beschäftigt; siehe Abschn. XXIV. [3]) Specimen singulare analyseos infinitorum indeterminatae (1776), Nova Acta Acad. Petrop. III, 1785 (publ. 1788), p. 47 bis 56. — Solutio problematis ad analysin infinitorum indeterminatam referendi (1781), Mém. Acad. St.-Pét. XI, 1830, p. 92—94.

dann ist x die gesuchte Funktion. Es ergibt sich nämlich:

$$\int p\,dx = px - \int x\,dp = px - \int dx' = px - x',$$

$$\int q\,dx = qx - \int x\,dq = qx - \int q'\,dx' = qx - q'x' + \int x'\,dq'$$
$$= qx - q'x' + \int dx'' = qx - q'x' + x''.$$

$$\int r\,dx = rx - \int x\,dr = rx - \int r'\,dx' = rx - r'x' + \int x'\,dr'$$
$$= rx - r'x' + \int r''\,dx'' = rx - r'x' + r''x'' - \int x''\,dr''$$
$$= rx - r'x' + r''x'' - \int dx''' = rx - r'x' + r''x'' - x'''.$$

Euler berücksichtigt auch den Fall, in welchem verlangt wird, daß einige der Quadraturen $\int p\,dx$, $\int q\,dx$, ... bestimmten Typen angehören mögen. Ein verwandtes Problem ist folgendes: Zwei solche Funktionen q, z einer Veränderlichen t zu finden, daß $\int q\,dz$ algebraisch ist und $\int \frac{dz}{z}\sqrt{q^2-1}$ sich durch einen Kreisbogen ausdrücken läßt. Man nehme dazu eine willkürliche Funktion u von t, und setze:

$$v = \frac{du}{dt}, \quad p = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x = \frac{1}{\frac{dp}{dt}}, \quad y = \int p\,dx = px - \int x\,dp = px - t,$$

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad q = \frac{z\sqrt{1+p^2}}{x+py};$$

dann findet man:

$$\int q\,dz = \frac{x}{\sqrt{1-v^2}} - u, \qquad \int \sqrt{q^2-1}\,\frac{dz}{z} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}.$$

Man kann sich vornehmen[1]), alle Differentiale dW zu bestimmen, die mit zwei oder mehreren vorgegebenen Funktionen p, q, ... multipliziert algebraisch integrierbar werden. Für zwei Funktionen p, q wird die Lösung des Problems durch:

$$dW = \frac{p(dq\,d^2v - dv\,d^2q) + q(dv\,d^2p - dp\,d^2v) + v(dp\,d^2q - dq\,d^2p)}{(p\,dq - q\,dp)^2},$$

oder, nach der heutigen Schreibweise, durch:

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} p & q & v \\ p' & q' & v' \\ p'' & q'' & v'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}^2,$$

---

[1]) Euler, De formulis differentialibus, quae per duas pluresve quantitates datas multiplicatae fiant integrabiles (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VII, 1789 (publ. 1793), p. 3—21.

gegeben, wo v eine willkürliche Funktion ist; man findet:

$$\int p\,dW = \frac{p\,dv - v\,dp}{p\,dq - q\,dp}, \quad \int q\,dW = \frac{q\,dv - v\,dq}{p\,dq - q\,dp}.$$

Ein anderes Problem, dessen Lösung man Euler verdankt, ist folgendes, welches in der Theorie der rechtwinkligen Trajektorien einer Oberfläche vorkommt[1]): Sind p, q, P, Q Funktionen von $\frac{y}{x}$, so soll man eine solche Funktion Π von x, y bestimmen, daß:

$$dv = \frac{p\,dx + \Pi q\,dy}{\Pi P + Q}\, x^{n-1}$$

integrierbar ist.

Auch mit der Integration von Differentialen zweiter Ordnung beschäftigte sich der unermüdliche Euler.[2]) Er fand als die Integrierbarkeitsbedingung für $\int V dp$:

$$2\,N dp + dM + p\,dN = 0,$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$, V eine Funktion von x, y, p ist, und:

$$dV = M dx + N dy + P dp,$$

und wandte das erhaltene Resultat auf die folgenden besonderen Fälle an:

a) $V = Px + Qy$, wo P, Q Funktionen von p sind; es muß zwischen P und Q die Beziehung:

$$P' + pQ' + 2Q = 0$$

bestehen, worauf sich P durch Q oder Q durch P ausdrücken läßt.

b) $V = (Mx + Ny)\Pi$, wo von den Funktionen M, N, Π von p die zwei ersten vorgegeben sind; man erhält:

$$\Pi = \frac{C}{K(M + Np)},$$

wo C eine Konstante bezeichnet und:

$$\log K = \int \frac{N dp}{M + Np}.$$

[1]) Euler, Solutio problematis analytici difficillimi (1782), Mém. Acad. St-Pét. XI, 1830, p. 125—130. [2]) Euler, De formulis differentialibus secundi gradus, quae integrationem admittunt (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793 (publ. 1798), p. 3—26.

c) $V = (px - y)^{n-1}(Px + Qy)$, wo P, Q zu bestimmende Funktionen von p sind; es ergibt sich:

$$P' + pQ' + (n+1)Q = 0.$$

d) $\check{V} = (px - y)^{n-1}(Mx + Ny)\Pi$, wo M, N, Π dieselbe Bedeutung haben als unter b); es muß sein:

$$\Pi = \frac{C}{K^n(M + Np)}.$$

Die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Bestimmung der Fläche eines sphärischen Dreiecks möge hier Platz finden. Der Gedanke, die höhere Analysis auf die sphärische Trigonometrie anzuwenden, war nicht neu; Euler hatte sogar nachgewiesen, wie sich diese ganz elementare Lehre aus den Prinzipien der Variationsrechnung herleiten lasse (diese Vorl., III², S. 560, 867).

Kästner[1]) beschränkt sich darauf, die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks zu bestimmen, da jedes Dreieck als die Summe oder die Differenz zweier rechtwinkligen Dreiecke angesehen werden darf.

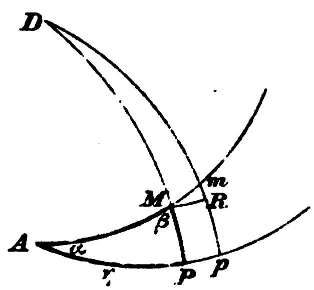


Fig. 78.

Es sei (Fig. 78) AMP ein sphärisches Dreieck mit einem rechten Winkel P; der Pol von AP, D, muß auf der Verlängerung von MP liegen. Wir führen durch D einen anderen, von DMP unendlich wenig abweichenden größten Kreis Dmp, und durch M einen zu AP parallelen kleineren Kreis MR. Dann ist $MRpP$ das Element einer Zone, und die Fläche von $MRpP$ ist bekanntlich $Pp \cdot \sin PM$. Setzen wir:

$$MAP = \alpha, \quad AMP = \beta, \quad AP = \eta, \quad \cos AP = z;$$

dann ist:

$$Pp = -\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad \operatorname{tang} PM = \sin\eta \operatorname{tang}\alpha, \quad \cos\beta = \cos\eta \sin\alpha,$$

also:

$$\sin PM = \frac{\sqrt{1 - z^2}\operatorname{tang}\alpha}{\sqrt{1 + (1 - z^2)\operatorname{tang}\alpha^2}} = \frac{\sqrt{1 - z^2}\sin\alpha}{\sqrt{1 - z^2\sin\alpha^2}},$$

und:

---

[1]) Dissertationes mathematicae et physicae. Diss. IX. De quaestione, quot sphaerae aequales inter datam mediam poni possint, ut omnes illam, et circumpositarum sibi vicinae, se mutuo tangant (p. 62—75).

$$MRpP = -\frac{ds \sin \alpha}{\sqrt{1 - s^2 \sin \alpha^2}}.$$

Es ist aber:

$$MRpP = MmpP = d \cdot AMP,$$

folglich:

$$AMP = \text{const.} - \arcsin (\cos \eta \sin \alpha),$$

und nach Bestimmung der willkürlichen Konstante:

$$AMP = \alpha - \arcsin (\cos \eta \sin \alpha) = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}.$$

An einer anderen Stelle[1]) beschreibt **Kästner Girards** Verfahren zur Bestimmung des Inhalts eines sphärischen Dreiecks mit dem Zusatze, es sei sonderbar, daß hier **Girards** „Scharfsinnigkeit" die Rechnung des Unendlichen übertreffe.

Dagegen behandelt **Jean Paul de Gua de Malves** (diese Vorl., III[2], S. 576)[2]) direkt das allgemeine Dreieck. **De Guas** Verfahren kann in der heutigen Bezeichnungsweise wie folgt geschildert werden.

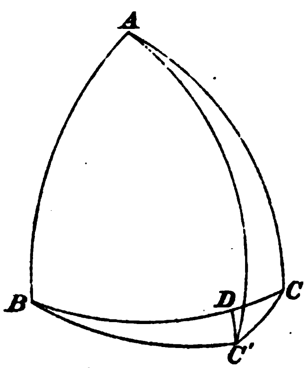


Fig. 79.

Es sei (Fig. 79) ABC ein sphärisches Dreieck, AC' ein zu AC unendlich nahe liegender, gleichlanger Bogen; man nehme auf BC den Bogen $BD = BC'$, und ziehe die zu AC bzw. BC senkrechten Bögen von kleineren Kugelkreisen CC', $C'D$. Bezeichnet man durch $\mathfrak{S}$ die Fläche, durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Kosinusse der Seiten und der Winkel des vorgegebenen Dreiecks, so ist:

$$-d\mathfrak{S} = \text{Fläche } BCC' - \text{Fläche } ACC',$$

oder auch, durch Vernachlässigung einer unendlichkleinen Größe zweiter Ordnung:

$$-d\mathfrak{S} = \text{Fläche } BCD - \text{Fläche } AC'C.$$

Es ist auch:

$$CD = d \cdot \arccos \mathfrak{a} = -\frac{d\mathfrak{a}}{\sqrt{1 - \mathfrak{a}^2}},$$

---

[1]) **Kästner**, Geometrische Abhandlungen II, Göttingen 1790, S. 424.

[2]) Diverses mesures, en partie neuves, des aires sphériques et des angles solides, triangulaires et polygones, dont on est supposé connaître des élémens en nombre suffisant, avec des remarques qu'on croit pouvoir contribuer à simplifier les intégrations de plusieurs équations différentielles à inconnues actuellement séparées, Hist. Acad. Paris 1783 (publ. 1786), p. 344—362.

$$C'D = CD \cdot \operatorname{tang} C'CD = CD \operatorname{cotg} ACD = -\frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{1-\mathfrak{C}^2}}\frac{d\mathfrak{a}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}},$$

$$CC' = \frac{C'D}{\cos C'CD} = \frac{C'D}{\sin ACD} = -\frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{C}^2}}\frac{d\mathfrak{a}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}}.$$

Ferner ist $\sin AC = \sqrt{1-\mathfrak{b}^2}$ der Radius des Bogens CC', also:

$$C'AC = \frac{CC'}{\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}} = -\frac{d\mathfrak{a}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}\sqrt{1-\mathfrak{C}^2}};$$

andererseits ist bekanntlich 2π sinvers AC oder $2\pi(1-\mathfrak{b})$ die Fläche der Kugelkalotte, deren Differential das Dreieck $AC'C$ ist, also:

$$\text{Fläche } ACC' = (1-\mathfrak{b})\, C'AC = -\frac{(1-\mathfrak{b})\,d\mathfrak{a}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}\sqrt{1-\mathfrak{C}^2}}.$$

Man findet analog:

$$\text{Fläche } BC'D = -\frac{(1-\mathfrak{a})\,\mathfrak{C}\,d\mathfrak{a}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}\sqrt{1-\mathfrak{C}^2}} = -\frac{\mathfrak{C}\,d\mathfrak{a}}{(1+\mathfrak{a})\sqrt{1-\mathfrak{C}^2}}.$$

Hieraus folgt:

$$-d\mathfrak{S} = -\frac{\mathfrak{C}\,d\mathfrak{a}}{(1+\mathfrak{a})\sqrt{1-\mathfrak{C}^2}} + \frac{(1-\mathfrak{b})\,d\mathfrak{a}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}\sqrt{1-\mathfrak{C}^2}}.$$

Es ist aber wegen bekannter trigonometrischer Sätze:

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}},$$

$$\sqrt{1-\mathfrak{C}^2} = \frac{\sqrt{(1-\mathfrak{a}^2)(1-\mathfrak{b}^2)-(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}} = \frac{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2+2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}}}{\sqrt{1-\mathfrak{a}^2}\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}},$$

also:

$$-d\mathfrak{S} = -\frac{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\mathfrak{b})\,d\mathfrak{a}}{(1+\mathfrak{a})\,\mathfrak{d}} + \frac{(1-\mathfrak{b})\,d\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}} = \frac{d\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}} - \frac{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\,d\mathfrak{a}}{(1+\mathfrak{a})\,\mathfrak{d}},$$

wo:

$$\mathfrak{d} = \sqrt{1-\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2-\mathfrak{c}^2+2\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}} = \sqrt{(1-\mathfrak{a}^2)(1-\mathfrak{b}^2)-(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\mathfrak{b})^2}.$$

Nun ist, da nur $\mathfrak{a}$ verändert worden ist, während $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ konstant bleiben:

$$-\frac{d\mathfrak{a}}{\mathfrak{d}} = \frac{-\dfrac{d\mathfrak{a}}{\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}\sqrt{1-\mathfrak{c}^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\mathfrak{c})^2}{(1-\mathfrak{b}^2)(1-\mathfrak{c}^2)}}} = d \arccos \frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}\mathfrak{c}}{\sqrt{1-\mathfrak{b}^2}\sqrt{1-\mathfrak{c}^2}} = d \arccos \mathfrak{A},$$

$$d\mathfrak{S} = d \arccos \mathfrak{A} + \frac{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\,d\mathfrak{a}}{(1+\mathfrak{a})\,\mathfrak{d}}.$$

Um das zweite Differential zu integrieren, erwägen wir folgendes. Enthält $d\mathfrak{S}$ den Summand $d \arccos \mathfrak{A}$, so muß es der Symmetrie wegen auch $d \arccos \mathfrak{B}$ und $d \arccos \mathfrak{C}$ enthalten; es ist aber:

$$-d\mathfrak{B} = -d\frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{c}\mathfrak{a}}{\sqrt{(1-\mathfrak{c}^2)(1-\mathfrak{a}^2)}} = \frac{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\mathfrak{b})d\mathfrak{a}}{\sqrt{(1-\mathfrak{c}^2)(1-\mathfrak{a}^2)}\,(1-\mathfrak{a}^2)},$$

und analog:

$$-d\mathfrak{C} = \frac{(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\mathfrak{c})d\mathfrak{a}}{\sqrt{(1-\mathfrak{b}^2)(1-\mathfrak{a}^2)}\,(1-\mathfrak{a}^2)},$$

also:

$$d\arccos\mathfrak{B} = \frac{(\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\mathfrak{b})d\mathfrak{a}}{(1-\mathfrak{a}^2)\mathfrak{b}},\quad d\arccos\mathfrak{C} = \frac{(\mathfrak{b}-\mathfrak{a}\mathfrak{c})d\mathfrak{a}}{(1-\mathfrak{a}^2)\mathfrak{b}},$$

$$d\arccos\mathfrak{B} + d\arccos\mathfrak{C} = \frac{(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})\,d\mathfrak{a}}{(1+\mathfrak{a})\mathfrak{b}},$$

und endlich:

$$d\mathfrak{S} = d\arccos\mathfrak{A} + d\arccos\mathfrak{B} + d\arccos\mathfrak{C} = d(A+B+C),$$

oder:

$$\mathfrak{S} = A + B + C + \text{const.}$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstante muß man bemerken, daß für $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ die Fläche des Dreiecks $\frac{\pi}{2}$ ist. Es ergibt sich hieraus:

$$\text{const.} = -\pi,$$

und schließlich:

$$\mathfrak{S} = A + B + C - \pi.$$

B. Integration von rationalen Funktionen.

Diese Aufgabe war schon früher von Leibniz und Johann Bernoulli (diese Vorl., III[2], S. 272 ff.) vollständig aufgelöst worden.[1]) Es blieb also nur noch übrig, neue und elegantere Integrationsmethoden aufzustellen, und besonders interessante Spezialfälle zu behandeln. Es möge uns daher erlaubt werden, auf die bezüglichen Schriften nur ganz kurz hinzuweisen.

Von Fontana[2]) haben wir einen neuen Beweis des Cotesschen Satzes und die Anwendung dieses Satzes auf die Berechnung des Integrals $\int \frac{z^n\,dz}{(z^m \pm a^m)^r}$.

[1]) Freilich mußte dazu die Auflösbarkeit jeder algebraischen Gleichung postuliert werden, während die bezügliche Frage damals noch nicht gelöst worden war, was Euler in seiner Integralrechnung (I, p. 34) ausdrücklich betont. Er fügt aber hinzu: „Hoc autem in Analysi ubique postulari solet, ut quo longius progrediamur, ea quae retro sunt relicta, etiamsi non satis fuerint explorata, tanquam cognita assumamus". [2]) Analyseos sublimioris opuscula, Venedig 1763 (Op. 1. De formularum quarumdam trigonometricarum integratione. Op. 2. De theoremate Rogerii Cotes, ejus usu, utilitate, praestantia. Op. 3. De inveniendo formula radii osculatoris in curvis ad umbilicum relatis ex data formula ejusdem in curvis relatis ad axem, eruendisque inde curvarum evolutis).

Am Ende des ersten Bandes seiner noch oft zu erwähnenden **Mathematical memoirs** (zwei Bände, London 1780 und 1789) veröffentlichte **Landen** (selbstverständlich mit den Bezeichnungen der Fluxionsrechnung) ein sehr ausführliches Verzeichnis von Integralen, welche, nach seiner Angabe, größtenteils neu sind; es kommen hier aber auch die ganz bekannten rationalen Integrale:

$$\int x^m dx,\quad \int (a+bx^n)^p x^{n-1} dx$$

usw. vor.

Francesco Pezzi (s. o. S. 448), Genieoffizier und Professor der Mathematik an der Universität zu Genua, gab in den Memorie di matematica e fisica della Società italiana delle scienze zwei Abhandlungen[1]) heraus, in welchen er sich vorsetzte, die Integrale:

$$\int \frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2-2abz\cos\varphi+b^2z^2)^p},\quad \int \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2)^p},$$

$$\int \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p},\quad \int \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3+hx^4)^p}$$

ohne Hilfe von Rekursionsformeln zu berechnen.

Euler[2]) zeigte, wie man eine rationale Funktion ohne den Gebrauch von imaginären Größen integrieren kann, und wandte seine Theorie auf das Integral $\int \frac{P\,dx}{Q}$ an, wo P ein Polynom bedeutet, und:

$$Q = 1 \pm x^{2k}$$

oder:

$$Q = 1 + 2x^k \cos\eta + x^{2k}$$

ist.

Andererseits lehrte **Euler**[3]), wie nützlich die Einführung der

---

[1]) Ricerca sopra l'integrazione sviluppata in una serie finita della formola $\frac{(A+Bz)\,dz}{(a^2-2abz\cos\varphi+b^2z^2)^p}$, essendo p un numero qualunque intero, Mem. Soc. It. IV, 1788, p. 577—588. — Integrazione in serie finite delle formole

$$\frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2)^p},\quad \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3)^p},\quad \frac{x^{\pm q}\,dx}{(a+bx+cx^2+fx^3+hx^4)^p};$$

essendo p e q de' numeri qualunque interi, Mem. Soc. It. VI, 1792, p. 256 bis 308. [2]) Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginariarum, Acta Acad. Petrop. 1781, P. I (publ. 1784), p. 3—47. — Siehe auch: De resolutione fractionum compositarum in simpliciores (1779), Mém. Acad. St.-Pét. I, 1803—1806 (publ. 1809), p. 3—25. [3]) De integrationibus maxime memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis (1777), Nova Acta Acad. Petrop. VII,

imaginären Größen bei algebraischen Integrationen ist. Es sei:

$$V = \int Z dz,$$

wo Z eine Funktion von z ist; setzt man:

$$z = x + iy, \quad Z = M + iN, \quad V = P + iQ,$$

so ist:

$$P + iQ = \int (M + iN)(dx + idy),$$

also:

$$P = \int (Mdx - Ndy), \quad Q = \int (Ndx + Mdy).$$

Die Integrierbarkeitsbedingungen für diese Ausdrücke sind:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x},$$

und man hat:

$$M = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad N = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$[1].

Euler verifiziert diese Beziehungen an einigen einfachen Integralen von rationalen Funktionen, und macht davon eine Anwendung auf die Berechnung von $\int \frac{z^{m-1}dz}{1 \pm z^n}$ für $z = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Wird ferner zwischen x und y eine Beziehung vorausgesetzt, so verwandeln sich P und Q in Integrale einer einzigen Veränderlichen; läßt sich dann V leichter als P und Q auswerten, so hat man in der Zerlegung von V in seinen reellen und imaginären Bestandteil ein Mittel, den Wert von P und Q zu erhalten. Es sei z. B.:

1789 (publ. 1793), p. 99—133. — Supplementum ad dissertationem praecedentem, circa integrationem formulae $\int \frac{z^{m-1}dz}{1 - z^n}$, casu quo ponitur $z = v(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ebenda, p. 134—148. — Ulterior disquisitio de formulis integralibus imaginariis (1777), Nova Acta Acad. Petrop. X, 1792 (publ. 1797), p. 3—19. – De insigni usu calculi imaginariorum in calculo integrali (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XII, 1794 (publ. 1801), p. 3—21. — De integrationibus difficillimis, quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XIV, 1797—1798 (publ 1805), p. 62—74. — Auf die beiden ersten Abhandlungen bezieht sich die Schrift von Fuß: Enodatio difficultatis ab Ill. Eulero in dissertatione de integrationibus memorabilibus ex calculo imaginariorum oriundis geometris propositae (1790), Nova Acta Acad. Petrop. VII, 1789 (publ. 1793), p. 175—188.

[1]) Es ist fast überflüssig, daran zu erinnern, daß diese Gleichungen viel später die Grundlage der Cauchy-Riemannschen Funktionentheorie geworden sind.

$$V = \int^{\circ} \frac{z^{m-1} dz}{(a + bz^n)^{\lambda}};$$

setzen wir $z = v(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, und betrachten ϑ als konstant (was mit der Voraussetzung $\frac{y}{x} = \text{const.}$ gleichbedeutend ist); es ist dann:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{v},$$

$$a + bz^n = a + bv^n \cos n\vartheta + ibv^n \sin n\vartheta = s(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wo:

$$s^2 = a^2 + 2abv^n \cos n\vartheta + b^2v^{2n}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{bv^n \sin n\vartheta}{a + bv^n \cos n\vartheta},$$

folglich:

$$V = \int^{\circ} \frac{v^{m-1} dv}{s^{\lambda}} [\cos(m\vartheta - \lambda\varphi) + i\sin(m\vartheta - \lambda\varphi)].$$

Es ergibt sich aber aus den obigen Beziehungen:

$$v^n = \frac{a\sin\varphi}{b\sin(n\vartheta - \varphi)}, \quad s = \frac{a\sin n\vartheta}{\sin(n\vartheta - \varphi)},$$

also:

$$P = \frac{a^{\frac{m}{n} - \lambda}}{nb^{\frac{m}{n}} \sin n\vartheta^{\lambda - 1}} \int^{\circ} \sin\varphi^{\frac{m}{n} - 1} \sin(n\vartheta - \varphi)^{\lambda - \frac{m}{n} - 1} \cos(m\vartheta - \lambda\varphi)\, d\varphi,$$

$$Q = \frac{a^{\frac{m}{n} - \lambda}}{nb^{\frac{m}{n}} \sin n\vartheta^{\lambda - 1}} \int^{\circ} \sin\varphi^{\frac{m}{n} - 1} \sin(n\vartheta - \varphi)^{\lambda - \frac{m}{n} - 1} \sin(m\vartheta - \lambda\varphi)\, d\varphi.$$

Ist insbesondere $\lambda = \frac{m}{n}$ [1], so verwandelt die Substitution:

$$t = \frac{z}{(a + bz^n)^{\frac{1}{n}}}$$

das Differential dV in ein rationales Differential; es ergibt sich nämlich:

$$V = -\int^{\circ} \frac{t^{m-1} dt}{bt^n - 1}.$$

Man hat andererseits in diesem Falle:

$$P = \frac{1}{nb^{\frac{m}{n}} \sin n\vartheta^{\frac{m}{n} - 1}} \int^{\circ} \frac{\sin\varphi^{\frac{m}{n} - 1} \cos\left(m\vartheta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\sin(n\vartheta - \varphi)} d\varphi,$$

---

[1] Für ein gebrochenes λ gehört das Integral V eigentlich nicht hierher; wir behandeln es aber des Zusammenhanges wegen an diesem Orte.

$$Q = \frac{1}{n b^{\frac{m}{n}} \sin n\vartheta^{\frac{m}{n}-1}} \int^{\bullet} \frac{\sin\varphi^{\frac{m}{n}-1} \sin\left(m\vartheta - \frac{m}{n}\varphi\right)}{\sin(n\vartheta - \varphi)} d\varphi;$$

setzt man $\varphi = n\omega$ und bezeichnet mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ konstante Größen, so nehmen diese Integrale die folgende Form an:

(1) $$\int \frac{d\omega}{\sin n\omega^{\frac{n-m}{n}}} \cdot \frac{\alpha \sin m\omega + \beta \cos m\omega}{\gamma \sin n\omega + \delta \cos n\omega}.$$

Es ergibt sich also der Satz, von welchem Euler auch einen direkten Beweis liefert: Jedes Integral vom Typus (1) ist durch elementare Funktionen ausdrückbar. Der Satz läßt sich wie folgt verallgemeinern: Sind P, Q rationale Funktionen von x^n, so ist:

$$\frac{P x^{m-1} + Q x^{n-1}}{(a + b x^n)^{\frac{m}{n}}} dx$$

integrierbar; sind P, Q rationale Funktionen von $\sin 2n\omega$, $\cos 2n\omega$, so ist:

$$\int (P \sin m\omega + Q \cos m\omega)\, d \cdot \sin n\omega^{\frac{m}{n}}$$

integrierbar.

So nützlich aber die Theorie der imaginären Größen sein möchte, so konnte sie nicht umhin, bei der bisher erreichten unvollständigen Entwicklung, zu Paradoxen zu führen. So warnt d'Alembert[1]), daß man vorsichtig verfahren muß, so oft man mit imaginären Größen zu tun hat. Es ist z. B.:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int \frac{du}{(1+iu)(1-iu)} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{du}{1+iu} + \frac{du}{1-iu}\right) = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ui}{1-ui}.$$

Setzt man $u = iv$, so folgt übereinstimmend:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = i \int \frac{dv}{1-v^2} = \frac{i}{2} \log \frac{1+v}{1-v} = \frac{i}{2} \log \frac{1-ui}{1+ui} = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ui}{1-ui};$$

setzt man dagegen $u = -iv$, so hat man:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = -i \int \frac{dv}{1-v^2} = -\frac{i}{2} \log \frac{1+v}{1-v},$$

woraus sich nur dann das frühere Resultat wiederum ergibt, wenn statt v nicht $-iu$, sondern iu gesetzt wird.

---

[1]) Opuscules mathématiques, T. VI, Paris 1773 (Remarques sur le mémoire: Suite des recherches sur la figure de la terre)

Zu analogen Betrachtungen gibt das von d'Alembert schon früher (Suite des recherches sur la figure de la terre) berücksichtigte Integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (x > 1)$$

Veranlassung. Nach d'Alembert ist $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ nicht $= \frac{dx}{i\sqrt{x^2-1}}$, sondern $= \frac{i\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$, denn $\sqrt{x^2-1}$ positiv genommen ist gleich $i\sqrt{1-x^2}$ positiv genommen. Man könnte auch setzen:

$$\sqrt{x^2-1} = -i\sqrt{1-x^2};$$

dann wäre:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \log\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{i} = \log\frac{x+\frac{\sqrt{1-x^2}}{i}}{i},$$

also:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -i\log\frac{x+\frac{\sqrt{1-x^2}}{i}}{i} = i\log\frac{-1}{ix+\sqrt{1-x^2}}$$

$$= i\log\frac{x+i\sqrt{1-x^2}}{i},$$

ein Resultat, welches mit dem unter der Voraussetzung:

$$\sqrt{x^2-1} = i\sqrt{1-x^2}$$

erhaltenen übereinstimmt. Dazu bemerkt Giuseppe Contarelli in einem viel längeren Brief, als es der Gegenstand verdiente[1]), daß die letzte Gleichheit unrichtig ist, und daß $\frac{-1}{ix+\sqrt{1-x^2}}$ nicht gleich $\frac{x+i\sqrt{1-x^2}}{i}$, sondern gleich $i(x+i\sqrt{1-x^2})$ ist.[2])

C. Integration von irrationalen Funktionen.

Die Integration der einfachsten irrationalen Funktionen war seit der früheren Periode her schon bekannt. Euler und seine Schüler

---

[1]) Lettera del sig. Abate Giuseppe Contarelli al Sig. Avv. Paolo Cassiani pubblico professore di filosofia e matematica nell' Università di Modena, Nuovo Giorn. lett. It. (Modena) XIV, 1778, p. 237—262.

[2]) Über die Integration rationaler Funktionen siehe auch den Aufsatz von Jacopo Riccati: Dei polinomi (Opere del conte Jacopo Riccati, 4 Bde., Lucca 1761—1765, Bd. III, p. 67—78), der aber schon früher in den Institutioni analitiche von Maria Gaetana Agnesi (1748) gedruckt worden war.

beschäftigten sich damit, neue Differentialausdrücke direkt zu integrieren oder auf schon behandelte Typen zurückzuführen. Aus dem IV. Bande von Eulers Integralrechnung und aus dessen weiteren Schriften entnehmen wir die folgenden:

$$\text{a)}^{1)}\quad \int f(x, s)\,dx,$$

wo f eine rationale Funktion bezeichnet und:

$$s = \sqrt{\frac{a+bx}{f+gx}} \quad\text{oder}\quad s = \sqrt[n]{a + b\sqrt[m]{f+gx}}.$$

$$\text{b)}^{2)}\quad \int f(x^n, s)\frac{dx}{x},$$

wo:

$$s = \sqrt[m]{\frac{a+bx^n}{f+gx^n}} \quad\text{oder}\quad s = \sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}.$$

$$\text{c)}^{3)}\quad \int \frac{x^{(2i+1)n-\lambda-2}(a+bx^n+cx^{2n})^{\frac{\lambda+1}{n}}\,dx}{(a-cx^{2n})^{2i+1}},$$

wo i ganz, λ ganz oder gebrochen ist.

$$\text{d)}^{4)}\quad \int \frac{x^{m-1}\,dx}{(fx^n-g)[f^\lambda x^{\lambda n}-(fx^n-g)^\lambda]^{\frac{m}{\lambda n}}},$$

wo m, λ, n ganze Zahlen bezeichnen, durch die Substitution:

$$\frac{x}{[f^\lambda x^{\lambda n}-(fx^n-g)^\lambda]^{\frac{1}{\lambda n}}} = y.$$

---

[1]) Supplementum calculi integralis pro integratione formularum irrationalium, Acta Acad. Petrop. IV, P. I, 1780, p. 3—31; Inst. calc. int. IV, p. 3—31 (unter dem Titel: De integratione formularum differentialium irrationalium). [2]) A. a. O. [3]) De integratione formulae

$$\int \frac{dx\sqrt{1+x^4}}{1-x^4},$$

aliarumque ejusdem generis, per logarithmos et arcus circulares, M. S. Acad. exhib. 1776; Inst. calc. int. IV, p. 36—48. [4]) Memorabile genus formularum differentialium maxime irrationalium, quas tamen ad rationalitatem perducere licet, M. S. Acad. exhib. 1777; Inst. calc. int. IV, p. 48—59. — Specimen integrationis abstrusissimae hac formula $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{2x^2-1}}$ contentae (1777), Nova Acta Acad. Petrop. IX, 1791 (publ. 1795), p. 98—117.

$$\text{e)}^{1)}\quad V=\int\frac{(1\mp x^2)^2dx}{(1\pm x^2)(1\pm 6x^2+x^4)^{\frac{3}{4}}}.$$

Setzt man für das obere Vorzeichen:

$$1+6x^2+x^4=v^4,\quad p=\frac{1+x}{v},\quad q=\frac{1-x}{v},$$

so folgt:

$$p^4+q^4=2,\quad dx=-\frac{v^2dq}{p^3}=\frac{v^2dp}{q^3},$$

also:

$$dV=\frac{4p^2q^2\frac{dx}{v^2}}{(p+q)(p^2+q^2)}=\frac{4(p-q)p^2q^2dx}{v^2(p^4-q^4)}=\frac{4p^3q^2dx}{v^2(p^4-q^4)}-\frac{4p^2q^3dx}{v^2(p^4-q^4)}$$
$$=\frac{2p^2dp}{1-p^4}-\frac{2q^2dq}{1-q^4},$$

wonach sich die Integration unmittelbar ausführen läßt. Für das untere Vorzeichen kommt man zum ersteren Falle durch die Substitution $x=iy$ wieder.

$$\text{f)}^{2)}\quad V=\int\frac{(3+x^2)dx}{(1+x^2)(1+6x^2+x^4)^{\frac{1}{4}}}.$$

Setzt man:

$$\frac{1+y}{1-y}=x,$$

so folgt:

$$V=2^{\frac{5}{4}}\left[\int\frac{dy}{(1-y^4)\sqrt[4]{1+y^4}}+\int\frac{y^2dy}{(1-y^4)\sqrt[4]{1+y^4}}\right]=2^{\frac{5}{4}}[P+Q].$$

Durch die Substitutionen:

$$\frac{y}{\sqrt[4]{1+y^4}}=t,\quad \sqrt[4]{1+y^4}=u$$

erhält man:

$$P=\int\frac{dt}{1-2t^4},\quad Q=\int\frac{u^2du}{2-u^4}.$$

g)[3] Eine Verallgemeinerung von f) bilden die zwei folgenden Integrale:

---

[1]) Integratio formulae differentialis maxime irrationalis, quam tamen per logarithmos et arcus circulares expedire liceat (1777), Nova Acta Acad. Petrop. IX, 1791 (publ. 1795), p. 118—126.

[2]) Evolutio formulae integralis $\int\frac{dz\,(3+z^2)}{(1+z^2)\sqrt[4]{1+6z^2+z^4}}$ per logarithmos et arcus circulares, Nova Acta Acad. Petrop. IX, 1791 (publ. 1795), p. 127—131. [3]) Formae generales differentialium, quae etsi nulla substitutione rationales reddi possunt, tamen integrationem per logarithmos et arcus circulares admittunt (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793 (publ. 1798), p. 27—77.

$$M = \int \frac{\xi^{m-1}\eta^{m-1}(A\xi^{n-m} + B\eta^{n-m})\,dx}{v^m(C\xi^n + D\eta^n)},$$

$$N = \int \frac{v^m(A\xi^{n-m} + B\eta^{n-m})\,dx}{\xi\eta(C\xi^n + D\eta^n)},$$

wo:

$$\xi = \alpha + \gamma x, \quad \eta = \beta + \delta x, \quad v = \sqrt[n]{a(\alpha + \gamma x)^n + b(\beta + \delta x)^n},$$

und A, B, C, D rationale Funktionen von $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^n$ sind. Setzt man:

$$\frac{\xi}{\eta} = u, \quad \beta\gamma - \alpha\delta = \varepsilon,$$

so folgt:

$$M = \frac{1}{\varepsilon}\left[\int \frac{Au^{n-1}\,du}{(Cu^n + D)(au^n + b)^{\frac{m}{n}}} + \int \frac{Bu^{m-1}\,du}{(Cu^n + D)(au^n + b)^{\frac{m}{n}}}\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(M_1 + M_2),$$

$$N = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{A(au^n + b)^{\frac{m}{n}}\,du}{u(Cu^n + D)} + \int \frac{Bu^{n-m-1}(au^n + b)^{\frac{m}{n}}\,du}{Cu^n + D}\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}(N_1 + N_2),$$

wo A, B, C, D rationale Funktionen von u^n sind. Wendet man dann auf M_1, N_1 die Substitution:

$$(au^n + b)^{\frac{1}{n}} = t,$$

auf M_2, N_2 die Substitution:

$$\frac{u}{(au^n + b)^{\frac{1}{n}}} = t$$

an, so ergibt sich:

$$M_1 = \int \frac{At^{n-m-1}\,dt}{aD - bC + Ct^n}, \quad N_1 = a\int \frac{At^{m+n-1}\,dt}{(t^n - b)(aD - bC + Ct^n)},$$

$$M_2 = \int \frac{Bt^{m-1}\,dt}{D + (bC - aD)t^n}, \quad N_2 = b\int \frac{Bt^{n-m-1}\,dt}{(1 - bt^n)(D + (bC - aD)t^n)},$$

wo A, B, C, D rationale Funktionen von t^n sind.

$$\text{h)}^{1)} \quad V = \int \frac{dx}{(3 \pm x^2)\sqrt[3]{1 \pm 3x^2}}.$$

---

[1]) Integratio succincta formulae integralis maxime memorabilis $\int \frac{dz}{(3 \pm z^2)\sqrt[3]{1 \pm 3z^2}}$ (1777), Nova Acta Acad. Petrop. X, 1792 (publ. 1797),

Setzt man für das obere Vorzeichen:

$$v^3 = 1 + 3x^2, \quad p = \frac{1+x}{v}, \quad q = \frac{1-x}{v},$$

so folgt:

$$p^3 + q^3 = 2, \quad p^3 - q^3 = \frac{2x(3+x^2)}{v^3}, \quad p^2 - q^2 = \frac{4x}{v^2},$$

$$dx = -\frac{v^2 dq}{p^2} = \frac{v^2 dp}{q^2},$$

also:

$$3 + x^2 = \frac{2(p^3 - q^3)v}{p^2 - q^2},$$

und:

$$dV = \frac{(p^2 - q^2)dx}{2(p^3 - q^3)v^2} = -\frac{dp + dq}{2(p^3 - q^3)} = -\frac{dp}{4(p^3 - 1)} + \frac{dq}{4(q^3 - 1)}.$$

Für das untere Vorzeichen setzt man $x = iy$.

Andere spezielle Integrale wurden von Andreas Johann Lexell (s. o. S. 383) und von Étienne Rumowski (1732—1812, Schüler von Euler, Professor der Astronomie zu Petersburg und Verfasser eines in russischer Sprache erschienenen Lehrbuches der Elementargeometrie) berechnet:

$$\text{i)}^{1)} \quad V = \int \frac{1 - x^{m-1}}{(1 - x^m)\sqrt[2m]{2x^m - 1}}\, dx.$$

Schreiben wir:

$$dV = \frac{dx}{(1 - x^m)\sqrt[2m]{2x^m - 1}} - \frac{x^{m-1} dx}{(1 - x^m)\sqrt[2m]{2x^m - 1}},$$

und setzen wir im ersten Integral:

$$\frac{\sqrt[2m]{2x^m - 1}}{x} = y,$$

im zweiten:

$$\sqrt[2m]{2x^m - 1} = z,$$

so erhalten wir:

$$dV = \frac{y^{2m-2} dy}{1 - y^{2m}} - 2\frac{z^{2m-2} dz}{1 - z^{2m}}.$$

$$\text{j)}^{2)} \quad P = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{1 - x^3}}, \quad Q = \frac{\sqrt[3]{1 - x^3}\, dx}{1 + x}.$$

---

p. 20—26. — Siehe auch: Rumowski, Integratio formulae $\int \frac{dz}{(3 - z^2)\sqrt[3]{1 + z^2}}$ aliarumque nonnullarum (1795), ebenda, p. 123—136.

[1]) Lexell, Integratio formulae cujusdam differentialis per logarithmos et arcus circulares, Acta Acad. Petrop. 1781, P. II (publ. 1785), p. 104—117. [2]) Rumowski, Integratio formularum

Durch die Substitutionen:

$$x = \frac{\sqrt{z^3-1}-\sqrt{3}}{\sqrt{z^3-1}+\sqrt{3}}, \quad x = \frac{\sqrt{4z^3-1}-\sqrt{3}}{\sqrt{4z^3-1}+\sqrt{3}}$$

erhält man:

$$dP = -\frac{3}{2^{\frac{4}{3}}}\,\frac{z\,dz}{z^3-1},$$

$$dQ = \frac{36\,z^3dz}{(4z^3-1)\left(\sqrt{3}+\sqrt{4z^3-1}\right)^2} = \frac{9z^3dz\left(\sqrt{3}-\sqrt{4z^3-1}\right)^2}{4(1-z^3)^2(4z^3-1)}$$

$$= \frac{9}{2}\,\frac{z^3(1+2z^3)dz}{(1-z^3)^2(4z^3-1)} - \frac{9\sqrt{3}}{2}\,\frac{z^3dz}{(1-z^3)^2\sqrt{4z^3-1}}.$$

Um dieses letzte Integral zu berechnen, setze man:

$$z = \frac{\sqrt[3]{1+u^3}}{1+u};$$

man hat:

$$-\frac{9\sqrt{3}}{2}\,\frac{z^3dz}{(1-z^3)^2\sqrt{4z^3-1}} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt[3]{1+u^3}\,du}{u} + \frac{\sqrt[3]{1+u^3}\,du}{u^2}\right].$$

Das erste Integral wird durch die Substitution $v = \sqrt[3]{1+u^3}$ rationalisiert $\left(\text{man erhält} \int \frac{v^3dv}{v^3-1}\right)$; das zweite geht durch die Substitution $t = \frac{1}{u}$ in das erste über.

$$\text{k)}^{1)} \quad V = \int \frac{dx}{(3-x^2)\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

Durch die Substitution:

$$x = \sqrt{3}\,\frac{1-u}{1+u}\,^{2)}$$

ergibt sich:

$$dV = -3^{-\frac{1}{2}}2^{-\frac{5}{3}}\left[\frac{du}{u\sqrt[3]{1+u^3}} + \frac{du}{\sqrt[3]{1+u^3}}\right];$$

$$\frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{1-x^3}} \quad \text{et} \quad \frac{dx\sqrt[3]{1-x^3}}{1+x}$$

(1795), Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793 (publ. 1798), p. 213—219.

[1] Rumowski, Integratio formulae $\frac{dz}{(3-z^2)\sqrt[3]{1+z^2}}$ aliarumque nonnullarum, Nova Acta Acad. Petrop. X, 1792 (publ. 1797), p. 126—136.

[2] Rumowski bewerkstelligt diese Substitution in drei Schritten, nämlich:

$$\sqrt[3]{1+x^2} = t\sqrt[3]{4}, \quad t = \sqrt[3]{1-3y+3y^2}, \quad y = \frac{1}{1+u}.$$

von diesen Integralen läßt sich das erste durch die Substitution:

$$v = \sqrt[3]{1 + u^3}$$

berechnen, während das zweite in das erste durch die Substitution $t = \frac{1}{u}$ übergeführt wird.

Noch andere, aber nichts wesentlich Neues darbietende Integrale finden sich in dem oben angeführten Anhange zum ersten Bande der Mathematical Memoirs von Landen.

Der unten noch öfters zu erwähnende G. F. Fagnano gab[1]) einen neuen Beweis des Satzes, nach welchem sich die Integration von $\frac{x^m dx}{(c + ex^n)^p}$, wo m und n beliebig sind, p aber ganz und positiv ist, auf diejenige von $\frac{x^m dx}{c + ex^n}$ zurückführen läßt.

Eine Bemerkung Eulers[2]) verdient, trotz ihrer Einfachheit, hervorgehoben zu werden. Nicht alle Integrale, die durch elementare Funktionen ausdrückbar sind, lassen sich durch eine Substitution rationalisieren; es kommt zuweilen vor, daß ein Integral sich in eine Summe von Integralen zerlegen läßt, deren jedes einer besonderen Substitution bedarf, um rationalisiert zu werden. Dieser Umstand ist in den oben behandelten Integralen wiederholt vorgekommen; ein weiteres Beispiel ist:

$$\int\left[\frac{a}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{b}{\sqrt[3]{1 + x^3}} + \frac{c}{\sqrt[4]{1 + x^4}}\right] dx.$$

Auch die binomischen Integrale:

$$\int x^{m-1}(a + bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}\, dx$$

waren schon von Newton (diese Vorl., III[2], S. 185—186) behandelt worden; er hatte die beiden Fälle erledigt, wo $\frac{m}{n}$ oder $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu}$ ganzzahlig ist. Euler[3]) setzte sich vor, die Integrierbarkeitsfälle direkt aufzufinden; er kam selbstverständlich auf die zwei Newtonschen Fälle, und fügte hinzu: „Facile autem intelligitur alias substitutiones huic scopo idoneas excogitari non posse". Es sollte aber noch ein Jahrhundert dauern, bevor diese Behauptung bewiesen werden konnte.[4])

Auf die binomischen Integrale bezieht sich das Schriftchen:

---

[1]) Theorema calculi integralis, N. Racc. d'opuscoli scientifici e filologici XXII, 1772, op. III. [2]) Supplementum calculi integralis etc. (s. o. S. 716). — Specimen integrationis etc. (ebenda). [3]) Inst. calc. int. I, p. 67.
[4]) Bekanntlich wurde der Beweis zuerst von Tchebycheff erbracht (J. de Liouville XVIII).

Dissertatio de comparatione fluxionum binomialium quam praeside F. Mallet... pro laurea publice examinandam sistit Andreas Hultén (Upsala 1785).

Karsten[1]) versuchte, die Integrationsmethode der binomischen Differentiale auf polynomische zu erstrecken. Ist:

$$dy = x^m dx (a + bx^n + cx^{2n})^p,$$

so kann man schreiben:

$$dy = x^{\frac{m-p}{p+1}} dx \left(ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}} \right)^p$$

Setzt man:

$$ax^{\frac{m+1}{p+1}} + bx^{\frac{m+np+n+1}{p+1}} + cx^{\frac{m+2np+2n+1}{p+1}} = z,$$

so folgt:

$$a\frac{m+1}{p+1} x^{\frac{m-p}{p+1}} dx + b\frac{m+np+n+1}{p+1} x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx$$

$$+ c\frac{m+2np+2n+1}{p+1} x^{\frac{m+2np+2n-p}{p+1}} dx = dz,$$

und hieraus:

$$x^{\frac{m-p}{p+1}} dx = \frac{p+1}{a(m+1)} dz - \frac{b}{a} \frac{m+np+n+1}{m+1} x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} dx$$

$$- \frac{c}{a} \frac{m+2np+2n+1}{m+1} x^{\frac{m+2np+2n-p}{p+1}} dx,$$

folglich:

$$y = \int x^{\frac{m-p}{p+1}} z^p dx = \frac{1}{a(m+1)} z^{p+1} - \frac{b}{a} \frac{m+np+n+1}{m+1} \int x^{\frac{m+np+n-p}{p+1}} z^p dx$$

$$- \frac{c}{a} \frac{m+2np+2n+1}{m+1} \int x^{\frac{m+2np+2n-p}{p+1}} z^p dx = \frac{1}{a(m+1)} z^{p+1}$$

$$- \frac{b}{a} \frac{m+np+n+1}{m+1} \int x^{m+n} (a + bx^n + cx^{2n})^p dx$$

$$- \frac{c}{a} \frac{m+2np+2n+1}{m+1} \int x^{m+2n} (a + bx^n + cx^{2n})^p dx.$$

Auf gleiche Weise fährt man fort; bricht die Reihe nicht ab, so erhält man dadurch einen angenäherten Ausdruck für das Integral.

Die polynomischen Differentiale lassen sich analog behandeln.

Mit der Integration der polynomischen Differentiale beschäftigte

[1]) Mathesis theoretica elementaris etc., § 380.

sich auch Carlo Francesco Gianella[1]) (s. o. S. 681). Er behandelte das Integral $\int x^r X^n dx$, wo:

$$X = fx^m + gx^{m'} + hx^{m''} + \cdots, \quad m > m' > m'' > \cdots \quad \text{für} \quad r > 0;$$
$$X = f + gx^m + hx^{m'} + \cdots, \quad m < m' < \cdots \quad \text{für} \quad r < 0,$$

und suchte erstens hinreichende Bedingungen dafür aufzustellen, daß die Integration in geschlossener Form ausführbar sei, zweitens die Gesetze zu bestimmen, denen die Koeffizienten der Reihe gehorchen, durch welche das Integral im allgemeinen ausdrückbar ist. Daß aber die von ihm angegebenen Bedingungen nicht hinreichend sind, läßt sich leicht ersehen.

Lacroix[2]) bemerkte, daß einige Integrale, wie z. B.:

$$\int x^{m-1} dx (a + bx^n + cx^{2n} + \cdots)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

Rekursionsformeln zulassen, welche den für die binomischen Integrale geltenden analog sind, und daß sich andere auf mehrere aufeinanderfolgende binomische Integrale zurückführen lassen. Es finden sich auch Rekursionsformeln bei Fontana[3]) (s. u. S. 725), Lorgna[4]) und Frisi[5]).

Es mögen schließlich einige Untersuchungen von Condorcet[6]) kurz erwähnt werden, welche eine größere Tragweite haben. Unter den von Condorcet aufgestellten Sätzen heben wir den folgenden als Beispiel hervor:

Ist:

$$A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \cdots = 0,$$

wo A_i eine ganze rationale Funktion von x vom i^{ten} Grade bezeichnet, so läßt sich das Differential ydx auf die Form $Pdx + Qdy$ bringen, wo P, Q rationale Funktionen von x, y sind, und $Pdx + Qdy$ ein exaktes Differential ist; unter denselben Voraussetzungen läßt sich $e^x ydx$ auf die Form eines exakten Differentials $e^x(Pdx + Qdy)$ bringen.

Es ist aber zu beachten, daß Condorcets Beweise sich einzig und allein auf die Abzählung der Konstanten stützen, eine Beweis-

---

[1]) De integratione indefinitinomii, Misc. Taur. IV, 1766—1769, P. II, p. 253—271. — De fluxionibus earumque usu, Mailand 1777, § 68 ff.
[2]) Traité de calcul différentiel, Art. 395 ff. [3]) Analyseos sublimioris opuscula, Venedig 1763, Op. I. [4]) Opuscula mathematica et physica, Verona 1770, Op. V. [5]) Pauli Frisii Opera, Bd. I, Mailand 1782.
[6]) Théorèmes sur les quadratures, Mém. Acad. Paris 1771 (publ. 1774), p. 693—704.

methode, die bekanntlich nichts weniger als sicher ist. Das ist freilich dem Verfasser selbst nicht entgangen. Er bemerkt nämlich, daß die Unmöglichkeit, die Anzahl der Koeffizienten größer zu machen als die der Gleichungen, die Unlösbarkeit der Aufgabe nicht notwendig nach sich zieht, und verspricht, in einer späteren Arbeit eine Methode anzugeben, welche in denjenigen Fällen, in welchen die frühere versagt, zu genauen Ergebnissen führt. Auch Lagrange, in einem an Condorcet gerichteten Schreiben vom 1. Oktober 1774[1]), erhob einige Bedenken gegen die Methode von der Konstantenabzählung, deren Unsicherheit er durch ein Beispiel nachwies.

D. Integration von transzendenten Funktionen.

Die Integration der transzendenten Funktionen war in unserer Periode Gegenstand zahlreicher Untersuchungen.

Gleich am Anfang finden wir bei Karsten[2]) neben den Integralen:

$$\int x^m \log x^n\,dx,\quad \int x e^{gx}\,dx,\quad \int \cos\alpha x \sin\beta x\,dx$$

noch einige andere, wie:

$$\int \sin\log\frac{1}{x}\frac{dx}{x},\quad \int e^{\sin x}\cos x\,dx,\quad \int\frac{e^{\frac{n}{\cos x}}\sin x\,dx}{\cos^2 x}\quad \text{usw.}$$

In drei Briefen aus den Jahren 1760—1764 stellt V. Riccati die folgenden Formeln auf[3]):

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&m\int\cos\varphi^m d\varphi = (m-1)\int\cos\varphi^{m-2}d\varphi + \cos\varphi^{m-1}\sin\varphi,\\
&m\int\sin\varphi^m d\varphi = (m-1)\int\sin\varphi^{m-2}d\varphi - \sin\varphi^{m-1}\cos\varphi,\\
&(m+n)\int\sin\varphi^{n-1}\cos\varphi^{m+1}d\varphi\\
&\qquad\qquad = m\int\sin\varphi^{n-1}\cos\varphi^{m-1}d\varphi + \sin\varphi^n\cos\varphi^m,\\
&(m+n)\int\cos\varphi^{m-1}\sin\varphi^{n+1}d\varphi\\
&\qquad\qquad = n\int\cos\varphi^{m-1}\sin\varphi^{n-1}d\varphi - \cos\varphi^m\sin\varphi^n.
\end{aligned}\right.$$

Riccati bemerkt, daß die ersten zwei Formeln den Wert von

---

[1]) Oeuvres XIV, Paris 1892, p. 29—30. [2]) Mathesis theoretica elementaris etc., § 400 ff. [3]) Epistolae tres, quibus utilitas calculi sinuum, et cosinuum in infinitesimorum analysi demonstratur, Comm. Bon. V, P. II, 1767, p. 198—215.

$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$, $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$ nicht liefern können; er berechnet diese Integrale auf anderem Wege, und beweist, daß seine Formeln mit den Eulerschen[1]):

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \quad \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$$

übereinstimmen.

Die zu (2) analogen, für die Hyperbelfunktionen geltenden Formeln finden sich in den Institutiones analyticae von Riccati und Saladini[2]).

Noch bevor die Riccatischen Briefe an die Öffentlichkeit traten, widmete Fontana das erste seiner oben angeführten Opuscula der Untersuchung der vier folgenden Integrale, die, sagt er, soviel ich weiß, niemand bisher betrachtet hat:

$$\int \frac{\sin\varphi^n}{\cos\varphi^m} d\varphi, \quad \int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi^m} d\varphi, \quad \int \sin\varphi^n \cos\varphi^m d\varphi, \quad \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^n \cos\varphi^m};$$

hier bezeichnen m und n positive, ganze oder gebrochene Zahlen.

Fontana schickt vier Rekursionsformeln voraus, welche:

$$\int \frac{z^n dz}{(1+bz^m)^p}$$

beziehentlich mit:

$$\int \frac{z^n dz}{(1+bz^m)^{p-1}}, \quad \int \frac{z^{n-m} dz}{(1+bz^m)^{p-1}}, \quad \int \frac{z^{n+m} dz}{(1+bz^m)^{p+1}}, \quad \int \frac{z^n dz}{(1+bz^m)^{p+1}}$$

verbinden. Wendet man auf die vorgegebenen Integrale die Substitution $x = \cos\varphi$ an, so lassen sich die dadurch erhaltenen Integrale für ganzzahlige m, n vermittels der erwähnten Rekursionsformeln in allen Fällen berechnen. Sind m, n nicht zugleich ganzzahlig, so ist die Integration nicht immer ausführbar; Fontana erörtert aber einige Fälle, in welchen die Berechnung der Integrale möglich ist.

Carlo Maj[3]) berechnet durch partielle Integration (ein Verfahren, das er, mit Beschränkung auf die von ihm betrachteten Integrale, ausführlich beschreibt) die Integrale:

$$\int \log x^m dx \quad \text{und} \quad \int x^{\pm m} \log x^n dx,$$

und leitet hieraus die Integration von $\int x^x dx$ ab; es ist nämlich:

[1]) Euler, Recherches sur l'effet des moulins à vent, Hist. Acad. Berlin XII, 1856. [2]) T. II, p. 151. [3]) Diversi metodi per l'integrazione di alcune formole logaritmiche, Atti dell' Accad. delle Scienze di Siena detta dei Fisiocritici III, 1767, p. 278—300.

$$\int x^x dx = \int dx + \frac{1}{1!}\int x \log x dx + \frac{1}{2!}\int x^2 \log x^2 dx + \cdots.$$

Eine kurze, aber inhaltsreiche Arbeit widmet Giovanni Francesco Fagnano (1715—1797, Archidiakon von Senigallia, Sohn des berühmten Giulio Fagnano, s. o. S. 34) der Berechnung einiger transzendenten Integrale.[1]) Sein Hauptzweck ist, nachzuweisen, daß die Integrale $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{tang}\varphi}$, $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{tang}2\varphi}$, $\int \frac{d\varphi}{\operatorname{tang}3\varphi}$, ... durch bloße Logarithmen ausdrückbar sind, wie Johann Bernoulli in seiner Arbeit Continuatio materiae de trajectoriis reciprocis von gewissen rationalen, in diese unmittelbar transformierbaren Integralen behauptet hatte. Ist:

$$\operatorname{tang}\varphi = t, \quad \operatorname{cotg}\varphi = u, \quad \sec\varphi = s, \quad \operatorname{cosec}\varphi = r,$$

$$\cos\varphi = x, \quad \sin\varphi = y, \quad \operatorname{sinvers}\varphi = q = 1 - x,$$

Absz. Kompl. φ (d. i. die Projektion des Bogens $\pi - \varphi$ auf den Durchmesser) $= l = 2 - q$, Sehne $\varphi = m = \sqrt{2q}$,

$$\text{Sehne } (2\pi - \varphi) = p = \sqrt{2l},$$

und werden durch die gleichen größeren Buchstaben die entsprechenden Funktionen von $n\varphi$ bezeichnet, so erhält Fagnano, von der Differentialgleichung:

$$d\varphi = \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{n}\frac{dT}{1+T^2} \tag{3}$$

ausgehend, die folgenden Relationen:

$$T = \frac{1}{i}\frac{(1+it)^n - (1-it)^n}{(1+it)^n + (1-it)^n},$$

$$U = i\frac{(u+i)^n + (u-i)^n}{(u+i)^n - (u-i)^n},$$

$$S = \frac{2s^n}{(1+i\sqrt{s^2-1})^n + (1-i\sqrt{s^2-1})^n},$$

$$R = \frac{2ir^n}{(\sqrt{r^2-1}+i)^n - (\sqrt{r^2-1}-i)^n},$$

$$X = \frac{1}{2}\left((x+i\sqrt{1-x^2})^n \pm (x-i\sqrt{1-x^2})^n\right),$$

---

[1]) Integratio quarundam quantitatum differentialium, quae originem habent a lineis, quae ad circulum referuntur, Nova Acta eruditorum 1764—1765 (publ. 1767), p. 861—871, abgedruckt in Nuova Raccolta d'opuscoli scientifici e filologici XXII, 1772, op. I, 16 S.

$$Y = \frac{1}{2i}\left(\left(\sqrt{1-y^2}+iy\right)^n - \left(\sqrt{1-y^2}-iy\right)^n\right),$$

$$Q = \frac{2-\left(1-q+i\sqrt{2q-q^2}\right)^n-\left(1-q-i\sqrt{2q-q^2}\right)^n}{2},$$

$$L = \frac{2+\left(l-1+i\sqrt{2l-l^2}\right)^n+\left(l-1-i\sqrt{2l-l^2}\right)^n}{2},$$

$$M = \sqrt{2-\left(\frac{2-m^2+im\sqrt{4-m^2}}{2}\right)^n-\left(\frac{2-m^2-im\sqrt{4-m^2}}{2}\right)^n},$$

$$P = \sqrt{2+\left(\frac{p^2-2+ip\sqrt{4-p^2}}{2}\right)^n+\left(\frac{p^2-2-ip\sqrt{4-p^2}}{2}\right)^n}.$$

Aus (3) folgt auch:

$$\frac{d\varphi}{\operatorname{tang} n\varphi} = \frac{1}{n}\frac{dT}{T(1+T^2)} = \frac{1}{n}\left(\frac{dT}{T}-\frac{TdT}{1+T^2}\right),$$

und hieraus durch Integration:

$$\int\frac{d\varphi}{T} = \log\frac{T^{\frac{1}{n}}}{(1+T^2)^{\frac{1}{2n}}}.$$

Ferner ergeben sich die folgenden Integralrelationen:

$$\int T d\varphi = \log(1+T^2)^{\frac{1}{2n}},$$

$$\int\frac{d\varphi}{U} = \log\frac{(1+U^2)^{\frac{1}{2n}}}{U^{\frac{1}{n}}},$$

$$\int U d\varphi = \log\frac{1}{(1+U^2)^{\frac{1}{2n}}},$$

$$\int\frac{d\varphi}{S} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt{S^2-1}}{S},$$

$$\int S d\varphi = \frac{1}{n}\log\left(S+\sqrt{S^2-1}\right),$$

$$\int\frac{d\varphi}{R} = -\frac{1}{n}\frac{\sqrt{R^2-1}}{R},$$

$$\int R d\varphi = \frac{1}{n}\log\left(R-\sqrt{R^2-1}\right),$$

$$\int\frac{d\varphi}{X} = \frac{1}{n}\log\frac{1+\sqrt{1-X^2}}{X},$$

$$\int X d\varphi = \frac{1}{n}\sqrt{1-X^2}.$$

$$\int \frac{d\varphi}{Y} = \frac{1}{n} \log \frac{1-\sqrt{1-Y^2}}{Y},$$

$$\int Y d\varphi = -\frac{1}{n} \sqrt{1-Y^2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{Q} = -\frac{1}{n} \sqrt{\frac{2-Q}{Q}},$$

$$\int Q d\varphi = -\frac{1}{n} \sqrt{2Q-Q^2} + \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{L} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{2-L}{L}},$$

$$\int L d\varphi = \frac{1}{n} \sqrt{2L-L^2} + \varphi,$$

$$\int \frac{d\varphi}{M} = \frac{1}{n} \log \frac{2-\sqrt{4-M^2}}{M},$$

$$\int M d\varphi = -\frac{2}{n} \sqrt{4-M^2},$$

$$\int \frac{d\varphi}{P} = \frac{1}{n} \log \frac{2+\sqrt{4-P^2}}{P},$$

$$\int P d\varphi = \frac{2}{n} \sqrt{4-P^2}.$$

Noch allgemeinere Integralformeln wurden von Euler in seiner Integralrechnung[1]) betrachtet, nämlich:

$$\int X \log x^n dx, \quad \int X a^x dx, \quad \int X \arcsin x^n dx,$$

wo X eine algebraische Funktion von x bezeichnet. Ferner integrierte er, wohl unabhängig von seinen Vorgängern, $\sin \varphi^m \cos \varphi^n d\varphi$, und gab Rekursionsformeln für:

$$\int \frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}, \quad \int e^{\alpha\varphi} \sin n\varphi\, d\varphi, \quad \int e^{\alpha\varphi} \cos n\varphi\, d\varphi.$$

Fast gleichzeitig mit der Integralrechnung von Euler erschien eine Arbeit von d'Alembert[2]), worin er einige ziemlich allgemeine, für die Bildung rationalisierbarer Integrale nutzbare Prinzipien aufstellte. — Ist V eine rationale Funktion von Sinussen und Kosinussen von $p\varphi + \alpha$, $q\varphi + \beta, \ldots$, oder von $a^{p\varphi+\alpha}$, $a^{q\varphi+\beta}$, wo die Verhältnisse von $p, q, \ldots$ rational sind, so ist $V d\varphi$ integrierbar. Man

[1]) Art. 189 ff. [2]) Recherches sur le calcul intégral, Hist. Acad. Paris 1767 (publ. 1770), p. 573—587; 1769 (publ. 1772), p. 73—146.

kann aber allgemeinere Integraltypen erhalten, wenn man folgendes beachtet. Setzt man $x = \sin\varphi$, so folgt:

$$d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \cos\varphi = \sqrt{1-x^2}, \quad \sin 2p\varphi = x\sqrt{1-x^2}\cdot X,$$

$$\cos 2p\varphi = X_1, \quad \sin(2p+1)\varphi = x X_2, \quad \cos(2p+1)\varphi = \sqrt{1-x^2}\, X_3,$$

wo X, X_1, X_2, X_3 ganze rationale Funktionen von x^2 sind, so daß:

$$\sin(2p+1)\varphi, \quad \cos 2p\varphi, \quad \sin 2p\varphi d\varphi, \quad \cos(2p+1)\varphi d\varphi$$

keine Wurzelgrößen enthalten.

Mit der Integration von transzendenten Funktionen beschäftigte sich wiederum Fagnano in einer zweiten Arbeit[1]), wo er, neben den schon bekannten Integralen:

$$\int\frac{dx}{\sin x}, \quad \int\frac{dx}{\cos x}, \quad \int x^m dx \sin x, \quad \int x^m dx \cos x, \quad \int\frac{dx}{\sin x^m}, \quad \int\frac{dx}{\cos x^m},$$

noch einige neue berechnete, nämlich:

$$\int x^m \sin\log x dx, \quad \int x^m \cos\log x dx,$$

und zeigte, wie sich $\frac{\sin x dx}{x}$ und $\frac{\cos x dx}{x}$ durch Reihen integrieren lassen.

Daß auch hier wie sonst überall der Name Eulers wiederholt vorkommt, mag nicht befremden. Von ihm haben wir, was transzendente Integrale betrifft, vier Abhandlungen aus den Jahren 1776—1777.

Euler benutzt für die Integration von:

$$dS = \frac{\sin m\varphi d\varphi}{\sin n\varphi}$$

die Theorie der imaginären Größen.[2]) Setzt man:

$$t = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

so ist:

---

[1]) Reductio functionum transcendentalium simplicium, quae a circulo petuntur, et quarum universalior est usus, Nova Acta erud. 1774 (publ. 1777), p. 385—420. Die erste Abteilung dieser Schrift wurde in Nuova Raccolta d'opuscoli scientifici e filologici XXII, 1772, op. II, 19 S., abgedruckt. [2]) De summo usu calculi imaginariorum in analysi (1776), Nova Acta Acad. Petrop. III, 1785 (publ. 1788), p. 25—46. — Vgl. oben S. 711.

$$i\,dS = \frac{dt}{t}\,\frac{t^m - t^{-m}}{t^n - t^{-n}};$$

sind m und n ganze Zahlen, so hat man nunmehr mit einer rationalen Funktion zu tun.

Auch die weit komplizierteren Integrale:

$$P = \int \frac{\cos(\vartheta + \omega)\,dv}{\sqrt{s}}, \quad Q = \int \frac{\sin(\vartheta + \omega)\,dv}{\sqrt{s}},$$

wo:

$$\operatorname{tang} 2\omega = \frac{v^2 \sin 2\vartheta}{1 - v^2 \cos 2\vartheta}, \qquad s = \sqrt{1 - 2v^2 \cos 2\vartheta + v^4},$$

werden mit Hilfe imaginärer Größen berechnet.[1]) Setzt man nämlich:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \arcsin z = x + iy, \quad z = v(\cos\vartheta + i \sin\vartheta),$$

so folgt:

$$v \cos\vartheta = \tfrac{1}{2} \sin x\,(e^y + e^{-y}), \quad v \sin\vartheta = \tfrac{1}{2} \cos x\,(e^y - e^{-y}),$$

woraus sich x und y leicht bestimmen lassen; ferner, unter der Voraussetzung, daß ϑ konstant sei:

$$\int_0 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = P + iQ,$$

also:

$$P = x, \quad Q = y.$$

Für das Integral[2]):

$$V = \int \frac{\Phi\,d\varphi\,(F \sin\lambda\varphi + G \cos\lambda\varphi)}{\sqrt[n]{(a \cos n\varphi + b \sin n\varphi)^\lambda}},$$

wo Φ eine rationale Funktion von $\operatorname{tang} n\varphi$ bezeichnet, setzt Euler:

$$\frac{\cos\varphi + i \sin\varphi}{\sqrt[n]{a \cos n\varphi + b \sin n\varphi}} = x,$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tang} n\varphi = \frac{1 - a x^n}{b x^n - i}, \quad d\varphi = \frac{dx}{2ix\left(1 - \frac{a - ib}{2} x^n\right)}$$

und:

$$p = \int_0 \frac{\Phi\,d\varphi\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)^\lambda}{\sqrt[n]{(a \cos n\varphi + b \sin n\varphi)^\lambda}} = \frac{1}{2i} \int_0 \Phi\left(\frac{1 - a x^n}{b x^n - i}\right) \frac{x^{\lambda - 1}\,dx}{1 - \frac{a - ib}{2} x^n};$$

---

[1]) De integrationibus difficillimis quarum integralia tamen aliunde exhiberi possunt (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XIV, 1797 und 1798 (publ. 1805), p. 62—74. [2]) De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet, M. S. Acad. exhib. 1777: Inst. calc. int. IV, p. 183—194.

auf analoge Weise wird:

$$q = \int \frac{\Phi d\varphi (\cos\varphi - i \sin\varphi)^{\lambda}}{\sqrt[n]{(a\cos n\varphi + b\sin n\varphi)^{\lambda}}}$$

berechnet, und aus p, q erhält man unmittelbar V.

Euler gibt auch den Ausdruck der Integrale[1]):

$$\int \sin(n + 2h \mp 1)\varphi \sin\varphi^{n-1} d\varphi,$$

$$\int \cos(n + 2h + 1)\varphi \sin\varphi^{n-1} d\varphi,$$

$$\int \sin(n + 2h + 1)\varphi \cos\varphi^{n-1} d\varphi,$$

$$\int \cos(n + 2h + 1)\varphi \cos\varphi^{n-1} d\varphi.$$

Im Jahre 1790 gab Mascheroni den ersten Teil seiner Noten zu Eulers Integralrechnung[2]) heraus. Abt Lorenzo Mascheroni, geboren zu Castagneta bei Bergamo am 14. Mai 1750, gestorben zu Paris am 30. Juli 1800, war Dichter und Mathematiker (s. o. S. 380). Außer den in den vorhergehenden Abschnitten erwähnten Schriften verdankt man ihm noch einige Werke über Astronomie und angewandte Mathematik. Unter seinen Gedichten ist eins allbekannt, Invito a Lesbia, worin er in erhabener, dichterischer Form das physikalische und naturgeschichtliche Museum der Universität von Pavia beschreibt. Bei seinem Tode schrieb der berühmte Dichter Vincenzo Monti als Nachruf ein kleines Poem, die Mascheroniana.

Aus den Adnotationes entnehmen wir an diesem Orte nur folgendes. In der Adn. II behandelt Mascheroni die Integrale:

$$\int x^m \sin x dx, \quad \int x^m \cos x dx,$$

ohne, wie es scheint, zu wissen, daß sie schon Gegenstand früherer Untersuchungen gewesen waren; ferner berechnet er:

$$\int \frac{dx}{(a + b \operatorname{tg} x)^n}, \quad \int e^{ax} \sin bx \cdot x^n dx, \quad \int e^{ax} \cos bx \cdot x^n dx.$$

Es werden dort auch vier Sätze von Gregorio Fontana mitgeteilt, welche den Wert der Integrale:

---

[1]) Quatuor theoremata maxime notatu digna in calculo integrali (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VII, 1789 (publ. 1793), p. 22—41.

[2]) Adnotationes ad Calculum integralem Euleri in quibus nonnulla problemata ab Eulero proposita resolvuntur, Pavia, P. I 1790, P. II 1792.

$$\int \frac{dx}{\sin x \pm \sin a}, \quad \int \frac{dx}{\cos x \pm \cos a}$$

ergeben.

Hierher gehört eine Abhandlung von V. Riccati[1]), wo er neben schon bekannten Integralen auch die folgenden berechnet:

$$\int e^{g\varphi} \sin q\varphi^2 d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \sin q\varphi \cos q\varphi d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \cos q\varphi^2 d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi}\varphi^p \sin q\varphi^2 d\varphi, \quad \int e^{g\varphi}\varphi^p \sin q\varphi \cos q\varphi d\varphi, \quad \int e^{g\varphi}\varphi^p \cos q\varphi^2 d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \operatorname{ch} q\varphi d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi^2 d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi \operatorname{ch} q\varphi d\varphi, \quad \int e^{g\varphi} \operatorname{ch} q\varphi^2 d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi}\varphi^p \operatorname{sh} q\varphi d\varphi, \quad \int e^{g\varphi}\varphi^p \operatorname{ch} q\varphi d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi}\varphi^p \operatorname{sh} q\varphi^2 d\varphi, \quad \int e^{g\varphi}\varphi^p \operatorname{sh} q\varphi \operatorname{ch} q\varphi d\varphi, \quad \int e^{g\varphi}\varphi^p \operatorname{ch} q\varphi^2 d\varphi;$$

$$\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi^{m-n} \operatorname{ch} q\varphi^n d\varphi.$$

Merkwürdig sind die Ausnahmefälle, die bei den Hyperbelfunktionen enthaltenden Integralen auftreten. Es ist z. B.:

$$\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi d\varphi = \frac{e^{g\varphi}}{g^2 - q^2}(g \operatorname{sh} q\varphi - q \operatorname{ch} q\varphi),$$

$$\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi^2 d\varphi$$

$$= \frac{e^{g\varphi}}{g^3 - 4gq^2}[(g^2 - 2q^2) \operatorname{sh} q\varphi^2 - 2gq \operatorname{sh} q\varphi \operatorname{ch} q\varphi + 2q^2 \operatorname{ch} q\varphi^2];$$

diese Formeln versagen aber für $g = \pm q$ bzw. $g = \pm 2q$, in welchen Fällen man die Integrale auf anderem Wege berechnen muß. Ein analoges Vorkommnis findet für $\int e^{g\varphi} \operatorname{sh} q\varphi^{m-n} \operatorname{ch} q\varphi^n d\varphi$ statt; die Ausnahmefälle sind:

$$g = \pm mq, \quad g = \pm (m-2)q, \ldots.$$

Murhard[2]) (siehe oben S. 13) integrierte ein transzendentes Differential, das sich in $\frac{x^{\frac{n}{m}} dx}{1 \pm x}$ überführen läßt.

---

[1]) De quarundam formularum exponentialium integratione, Comm. Bonon. VII, 1791, p. 241—288. [2]) Exhibetur integratio formulae valde complicatae, Göttingen 1796 (Festschrift zum Akademischen Jubiläum von Kästner).

Daniel Melanderhjelm[1]) (1726—1810; siehe oben S. 28) versuchte den Ausdruck:

$$dV = e^{nx}x^m(a + bx + \cdots)R^pS^q dx,$$

wo:

$$R = c + fx + gx^2 + \cdots, \quad S = h + kx + lx^2 + \cdots$$

ist, dadurch zu integrieren, daß er:

$$V = e^{nx}x^{m+1}(A + Bx + \cdots)R^{p+1}S^{q+1}$$

und insbesondere:

$$a\int e^{nx}x^m R^p S^q dx = Ae^{nx}x^{m+1}R^{p+1}S^{q+1},$$

$$b\int e^{nx}x^{m+1}R^p S^q dx = Be^{nx}x^{m+2}R^{p+1}S^{q+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

setzte, was aber, wie er anscheinend nicht bemerkte, im allgemeinen nicht möglich ist.[2])

E. Reihenintegration, angenäherte Integration.

Die Reihenintegration wurde in unserer Periode um so häufiger gebraucht, als man sie, ohne auf deren Zulässigkeit zu achten, als ein ganz allgemeines Integrationsmittel betrachtete. Aber eben darum, daß sie ohne jedes Bedenken angewandt wurde, gab sie zu keiner theoretischen Erörterung Anlaß; man beschränkte sich darauf, das allgemeine Glied der Entwicklung in jedem besonderen Falle zu ermitteln. Wir können uns also über diesen Gegenstand ganz kurz fassen.

Euler widmet der Reihenintegration ein besonderes Kapitel seiner Integralrechnung, wo er rationale und irrationale Integrale durch diese Methode berechnet; weitere Integrale werden auf gleiche

---

1) Integratio formulae differentialis

$$N^{nx}x^m dx\,(a + bx + cx^2 + kx^3 + lx^4 + \text{etc.})\,(e + fx + gx^2 + \text{etc.})^p$$
$$(h + rx + tx^2 + \text{etc.})^q,$$

in qua N est numerus cuius logarithmus hyperbolicus est unitas, quantitates vero $n, m, a, b, c, k, l, e, f, g, h, r, t, p, q$ quaelibet datae (1798), Nova Acta Acad. Petrop. XII, 1794 (publ. 1801), p. 114—124.

2) Sind nämlich R, S Polynome von den Ordnungen r, s, so ist $x^mR^pS^q$ von der Ordnung $m + rp + sq$, und folglich $\frac{1}{e^{nx}}\int e^{nx}x^m R^p S^q dx$ von derselben Ordnung, während $x^{m+1}R^{p+1}S^{q+1}$ von der Ordnung:

$$m + 1 + r(p + 1) + s(q + 1)$$

ist.

Weise an anderen Stellen ausgewertet. Ein anderes Kapitel beschäftigt sich mit der Entwicklung der Integrale nach Sinussen und Kosinussen von Vielfachen der Veränderlichen. Eine im IV. Band der Integralrechnung erschienene Abhandlung[1]) betrifft die Reihenentwicklung des Integrals $\int x^{m-1}dx(\Delta + x^n)^\lambda$, wo Δ eine Konstante bezeichnet.

Mascheroni beschäftigt sich in dem oben angeführten Werke mit der Bestimmung der Konstante in der Gleichung:

$$\int_0^z \frac{dz}{\log z} = \text{const.} + \log\log z + \frac{1}{1}\frac{\log z}{1!} + \frac{1}{2}\frac{\log z^2}{2!} + \cdots;$$

dazu bedient er sich aber ohne jedes Bedenken divergenter Reihen, was übrigens zu jener Zeit geläufig war. Ferner berechnet er durch Reihenentwicklung die Integrale:

$$\int \frac{dx \sin x}{x^n}, \quad \int \frac{dx \cos x}{x^n}, \quad \int \frac{x^\alpha \pm x^\beta}{\log x}\,dx, \quad \int x^{f-1}dx \log x^{\frac{m}{n}},$$

$$\int \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx \log x}{1+x^2}, \quad \int \frac{dx}{\log \operatorname{tang} x}.$$

Auch mit angenäherter Integration beschäftigt sich Eulers Integralrechnung. Ist:

$$y = \int X dx,$$

wo X eine Funktion von x bezeichnet, und ist:

$$y = b, b', b'', \ldots; \quad X = A, A', A'', \ldots$$

für:

$$x = a, a', a'', \ldots,$$

so kann man X als konstant und gleich $A, A', A'', \ldots$ in den Inter-

---

[1]) De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1}dx(\Delta + x^n)^\lambda$ in seriem semper convergentem. Ubi simul plura insignia artificia circa serierum summationem explicantur, M. S. Acad. exhib. 1779; Inst. calc. int. IV, p. 60—77. — Auf diese Arbeit bezieht sich die Schrift von Fuß: De resolutione formulae integralis $\int x^{m-1}dx(\Delta + x^n)^\lambda$ in seriem semper convergentem; ubi simul serierum quarundam summatio directa traditur (1797), Nova Acta Acad. Petrop. XV, 1799—1802 (publ. 1806), p. 55—70, sowie die Schrift von Pfaff: Observationes analyticae ad L. Euleri Institutiones calculi integralis, Vol. IV, Suppl. II et IV (1797), Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793 (publ. 1798), Hist., p. 37—57, wo auch die folgende allgemeine Entwicklung aufgestellt wird:

$$\int y x^m dx = \frac{1}{m+1} x^{m+1} y - \frac{1}{(m+1)(m+2)} x^{m+2} y' - \cdots.$$

vallen aa', $a'a''$, $a''a'''$, ... ansehen; man hat dann annäherungsweise:

$$b' = b + A(a' - a),$$
$$b'' = b + A(a' - a) + A'(a'' - a'),$$
$$b''' = b + A(a' - a) + A'(a'' - a') + A''(a''' - a''),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Will man eine größere Annäherung erreichen, so kann man $X = \int P dx$ setzen, wo P als konstant in jedem Teilintervall angesehen wird; es ergibt sich so:

$$y = b + X_a(x - a) + \tfrac{1}{2} P_a(x - a)^2,$$

wo X_a, P_a die Werte von X, P für $x = a$ bezeichnen.

Alexis Fontaine (diese Vorl., III², S. 587)[1]) gibt ohne Beweis die folgende Annäherungsformel:

$$\int f(x)\,dx = \frac{x}{2^{n-1}}\left[f\left(\frac{x}{2^n}\right) + f\left(\frac{3x}{2^n}\right) + \cdots + f\left(\frac{(2^n - 1)x}{2^n}\right)\right].$$

Laplace wurde von seinen tiefgehenden Untersuchungen über Wahrscheinlichkeitslehre zum Probleme geführt, das Integral:

$$\int_{\vartheta}^{\vartheta'} u^s u'^{s'} \ldots \varphi\, dx,$$

wo u, u', ..., φ Funktionen von x bezeichnen und s, s', ... sehr große Zahlen sind, in eine konvergente Reihe zu entwickeln. Die Erörterung dieses Problems und die verwandten Untersuchungen füllen eine Abhandlung von mehr als 130 Seiten aus[2]); wir müssen uns damit begnügen, die Grundlage der Laplaceschen Behandlung wiederzugeben.

Setzen wir:

$$y = y(x) = u^s u'^{s'} \ldots \varphi, \quad y(\vartheta) = Y,$$
$$-\frac{y\,dx}{dy} = v(x), \quad v(\vartheta) = U, \quad y = Ye^{-t};$$

dann ist:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v\,dv}{dx}, \ \ldots, \ \frac{d^n x}{dt^n} = \frac{v\,d(v\,d(v \ldots dv))}{dx^n}, \ \ldots,$$

---

[1]) Mémoires donnés à l'Académie royale des sciences, non imprimés dans leur temps, Paris 1764. [2]) Mémoire sur les approximations des formules, qui sont fonctions de très grands nombres, Mém. Acad. Paris 1782 (publ. 1785), p. 1—88, 1783 (publ. 1786), p. 423—467; Oeuvres X, Paris 1894, p. 207—291, 293—338.

wobei dx rechts als konstant angesehen wird, ferner:

$$x = \vartheta + \frac{t}{1!}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} + \frac{t^3}{3!}\left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{t=0} + \cdots$$

$$= \vartheta + \frac{t}{1!}U + \frac{t^2}{2!}\frac{UdU}{d\vartheta} + \frac{t^3}{3!}\frac{Ud(UdU)}{d\vartheta^2} + \cdots,$$

woraus folgt:

$$dx = Udt\left[1 + \frac{t}{1!}\frac{dU}{d\vartheta} + \frac{t^2}{2!}\frac{d(UdU)}{d\vartheta^2} + \cdots\right],$$

und:

$$\int_\vartheta^\xi y\,dx = UY\left[\int_0^\infty e^{-t}dt + \frac{1}{1!}\frac{dU}{d\vartheta}\int_0^\infty te^{-t}dt + \frac{1}{2!}\frac{d(UdU)}{d\vartheta^2}\int_0^\infty t^2e^{-t}dt + \cdots\right],$$

wo ξ den Nullwert von y bedeutet. Es ist aber:

$$\int_0^\infty e^{-t}dt = 1, \quad \int_0^\infty t^n e^{-t}dt = n!,$$

folglich:

$$\int_\vartheta^\xi y\,dx = UY\left[1 + \frac{dU}{d\vartheta} + \frac{d(UdU)}{d\vartheta^2} + \cdots\right].$$

Setzt man analog:

$$y(\vartheta') = Y', \quad v(\vartheta') = U',$$

so hat man:

$$\int_{\vartheta'}^\xi y\,dx = U'Y'\left[1 + \frac{dU'}{d\vartheta'} + \frac{d(U'dU')}{d\vartheta'^2} + \cdots\right],$$

folglich:

$$\int_\vartheta^{\vartheta'} y\,dx$$

$$= UY\left[1 + \frac{dU}{d\vartheta} + \frac{d(UdU)}{d\vartheta^2} + \cdots\right] - U'Y'\left[1 + \frac{dU'}{d\vartheta'} + \frac{d(U'dU')}{d\vartheta'^2} + \cdots\right].$$

Da:

$$v = \frac{1}{\frac{s}{u}\frac{du}{dx} + \frac{s'}{u'}\frac{du'}{dx} + \cdots + \frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dx}},$$

so ist, wenn $s, s', \ldots$ sehr groß sind, v sehr klein; sind $s, s', \ldots$ von gleicher Ordnung wie $\frac{1}{\alpha}$, wo α sehr klein ist, so ist v von der Ordnung von α, und $\frac{dv}{dx}, \frac{d^2v}{dx^2}, \ldots$ sind von den Ordnungen von $\alpha^2, \alpha^3, \ldots$, was nach Laplace die Konvergenz der gefundenen Reihen sicherstellt.

F. Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen.

Diese schwierigen Fragen, welche den Scharfsinn der gegenwärtigen Mathematiker geprüft haben, wurden von Euler ganz einfach behandelt.[1] Ist P, sagt er[2]), eine Funktion von z, u, und setzt man:

$$\int P dz = S,$$

so ist:

(4) $$\int \frac{\partial P}{\partial u} dz = \frac{\partial S}{\partial u};$$

man hat nämlich:

$$P = \frac{\partial S}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial z},$$

woraus (4) folgt. Es ist ferner:

(5) $$\int S du = \int dz \int P du;$$

setzt man nämlich:

$$\int S du = V,$$

so folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = S = \int P dz, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial u} = \frac{\partial S}{\partial z} = P,$$

also:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \int P du,$$

woraus sich (5) ergibt.[3])

Später stellte Euler die folgenden Sätze auf[4]):

---

[1]) Die Differentiation unter dem Integralzeichen wurde schon von Leibniz gebraucht (diese Vorl., III², S. 281). [2]) Nova methodus quantitates integrales determinandi, Novi Comm. Acad. Petrop. XIX, 1774 (publ. 1775), p. 66—102; Inst. calc. int. IV, p. 260—294. [3]) Fontaine (a. a. O.) beweist diesen Satz wie folgt. Es ist:

$$\int \mu' dx' - \int \mu dx = d \int \mu dx,$$

andererseits hat man:

$$\int \mu' dx' - \int \mu dx = \int (\mu' dx' - \mu dx) = \int d(\mu dx),$$

also:

$$d \int \mu dx = \int d(\mu dx).$$

[4]) Uberior explicatio methodi singularis nuper expositae, integralia alias maxime abscondita investigandi (1776), Nova Acta Acad. Petrop. IV, 1786 (publ. 1789), p. 17—54. — De insignibus proprietatibus formularum integralium praeter binas variables etiam earum differentialia cujuscunque ordinis involventium (1777), Nova Acta Acad. Petrop. IX, 1791 (publ. 1795), p. 81—97.

1. Es ist für jede Funktion V:

$$\int^{(\mu)} \frac{\partial^\nu V}{\partial p^\nu} dx^\mu = \frac{\partial^\nu}{\partial p^\nu} \int^{(\mu)} V dx^\mu, \quad \int^{(\mu)} dx^\mu \int^{(\nu)} V dp^\nu = \int^{(\nu)} dp^\nu \int^{(\mu)} V dx^\mu.$$

2. Setzt man $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, ..., ist ferner Z eine Funktion von $x, y, p, q, \ldots$, und:

$$\begin{aligned} V dx = dZ &= \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy + \frac{\partial Z}{\partial p} dp + \frac{\partial Z}{\partial q} dq + \cdots \\ &= \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + p \frac{\partial Z}{\partial y} + q \frac{\partial Z}{\partial p} + r \frac{\partial Z}{\partial q} + \cdots\right) dx, \end{aligned}$$

so folgt:

$$\int \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} V}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial p^\gamma \partial q^\delta \partial r^\varepsilon \partial s^\zeta} dx = \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial p^\gamma \partial q^\delta \partial r^\varepsilon \partial s^\zeta}$$

$$+ \gamma \int \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^\alpha \partial y^{\beta+1} \partial p^{\gamma-1} \partial q^\delta \partial r^\varepsilon \partial s^\zeta} dx + \delta \int \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial p^{\gamma+1} \partial q^{\delta-1} \partial r^\varepsilon \partial s^\zeta} dx$$

$$+ \varepsilon \int \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial p^\gamma \partial q^{\delta+1} \partial r^{\varepsilon-1} \partial s^\zeta} dx + \zeta \int \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta} Z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial p^\gamma \partial q^\delta \partial r^{\varepsilon+1} \partial s^{\zeta-1}} dx.$$

G. Vielfache Integrale.

Euler ist wohl der erste, der sich mit vielfachen Integralen beschäftigte. In einer im Jahre 1770 erschienenen Abhandlung[1]) stellt er vor allem die Bedeutung der Bezeichnung $\iint Z dx dy$ fest, wo Z eine Funktion von x, y ist, und bemerkt, daß:

$$\iint Z dx\, dy = V + X + Y$$

ist, wo V eine bestimmte Funktion von x, y bezeichnet, während X, Y willkürliche Funktionen von x bzw. y darstellen. Die Berechnung von V kann auf zweifache Weise geschehen; es ist nämlich:

$$\iint Z dx\, dy = \int dx \int Z dy = \int dy \int Z dx.$$

Handelt es sich aber um die Berechnung einer krummen Fläche oder eines Volumens (oder, wie man heute sagen würde, um die Integration über einen bestimmten Bereich), so muß bei der Auswertung des Integrales unter der Form:

---

[1]) De formulis integralibus duplicatis, Novi Comm. Acad. Petrop. XIV, 1769 (publ. 1770), p. 72—103; Inst. calc. int. IV, p. 416—445. Freilich hatte Euler auch früher Doppelintegrale betrachtet (diese Vorl., III², S. 657, 855).

$$\int dx \int Z dy$$

die Integration nach y zwischen solchen Grenzen erstreckt werden, die, den Fall eines rechtwinkligen Integrationsbereiches ausgenommen, von x abhängig sind, und sich durch Auflösung der Gleichung der Begrenzung nach y ergeben. Dagegen sind die Grenzen der zweiten Integration konstant: sie sind die äußersten Werte von x, und ergeben sich aus der soeben erwähnten Gleichung, wenn man $dx = 0$ setzt; mit anderen Worten, man muß, wenn $f(x, y) = 0$ die Gleichung der Begrenzung ist, y zwischen $f = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ eliminieren und dann nach x auflösen.

Nachdem Euler auf diese Weise die Grundlage der Theorie der vielfachen Integrale gewonnen hat, kommt er auf das Problem von der Transformation. Dazu bedient er sich, dem Wesen nach, derselben Methode, die in den heutigen Lehrbüchern üblich ist. Er bemerkt, daß, wenn man:

$$x = f + tm + u\sqrt{1 - m^2}, \quad y = g + t\sqrt{1 - m^2} - um$$

setzt, das Element der Basis (so nennt Euler den Integrationsbereich), das früher $dxdy$ war, jetzt durch $dtdu$ dargestellt wird. Es ist andererseits nicht $dxdy = dtdu$; aber es gibt keinen Grund dafür, daß die statt $dxdy$ einzusetzende Größe den gleichen Wert haben müsse. Um nun die Transformation auszuführen, setze man zuerst u anstatt y ein, so daß y als eine Funktion von x, u betrachtet werden darf; es folgt hieraus:

$$dy = Pdx + Qdu. \tag{6}$$

Da aber x während der Integration nach u als konstant anzusehen ist, so reduziert sich dy auf Qdu, und es ist:

$$\int\int Z dx dy = \int dx \int QZdu = \int du \int QZdx.$$

Ersetzt man nun x durch seinen Ausdruck in t, u, und ist:

$$dx = Rdt + Sdu, \tag{7}$$

so ergibt sich, da u bei der Integration nach x konstant bleibt:

$$\int\int Z dx dy = \int du \int QZRdt = \int\int QZRdtdu.$$

Ist aber:

$$dy = Tdt + Udu, \tag{8}$$

so folgt wegen (7) aus dem Vergleich von (6) und (8):

$$PR = T, \quad PS + Q = U,$$

und hieraus:

$$QR = RU - ST,$$

also:

$$\iint Z dx dy = \iint Z(RU - ST) dt du.$$

Hätte man die Operationen in umgekehrter Ordnuug ausgeführt, so würde sich dasselbe Resultat, jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen ergeben; das ist aber nebensächlich, da es sich hier nur um die Bestimmung von absoluten Größen handelt.

Das Problem von der Transformation der vielfachen Integrale bot sich nicht viel später Lagrange[1]) dar; seine Erörterungen sind den Eulerschen sehr ähnlich, man kann aber nicht entscheiden, ob er die Arbeit von Euler kannte oder nicht. Ist:

$$dx = Adp + Bdq + Cdr,$$
$$dy = Ddp + Edq + Fdr,$$
$$dz = Gdp + Hdq + Idr,$$

so muß man beachten, daß man bei der Berechnung der im Produkte $dxdydz$ vorkommenden Größe dz die Größen x, y als konstant ansehen muß. Aus:

$$Adp + Bdq + Cdr = 0,$$
$$Ddp + Edq + Fdr = 0$$

folgt aber:

$$dp = \frac{BF - CE}{AE - BD} dr, \quad dq = \frac{CD - AF}{AE - BD} dr,$$

also:

$$dz = \frac{G(BF - CE) + H(CD - AF) + I(AE - BD)}{AE - BD} dr.$$

Um dann dy zu berechnen, muß man $dx = dz = 0$ setzen; es folgt:

$$dr = 0, \quad Adp + Bdq = 0,$$

also:

$$dp = -\frac{Bdq}{A}, \quad dy = \frac{AE - BD}{A} dq.$$

Um endlich dx zu berechnen, muß man $dy = dz = 0$ setzen; es folgt:

$$dq = dr = 0, \quad dx = Adp.$$

Aus den erhaltenen Ausdrücken ergibt sich:

$$dxdydz = [G(BF - CE) + H(CD - AF) + I(AE - BD)] dpdqdr.$$

---

[1]) Sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques, Nouv. Mém. Berlin 1773; Oeuvres III, Paris 1869, p. 619—649.

Der absolute Wert der eingeklammerten Größe ändert sich nicht, wenn man dx, dy, dz beliebig umsetzt; es ist also gleichgültig, in welcher Folge man sich die Integrationen ausgeführt denkt.

Legendre[1]) nahm das Problem wieder auf; er erkannte aber selbst, daß sein Transformationsprinzip mit dem Lagrangeschen übereinstimmt.

Kleinere Beiträge zur Theorie der vielfachen Integrale sind:

a) Die Eulersche Formel[2]):

$$\left[\int^{(\mu)} X\,dx^{\mu}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(\mu-1)!}\int_0^1 (1-x)^{\mu-1} X\,dx,$$

welche ohne Zweifel aus der (von Euler freilich nicht angegebenen) Rekursionsformel:

$$\int (1-x)^{\nu} X\,dx = (1-x)^{\nu}\int X\,dx + \nu\int (1-x)^{\nu-1}dx\int X\,dx$$

abgeleitet ist;

b) die Frisischen Formeln[3]):

$$\int dx\int y\,dx = x\int y\,dx - \int xy\,dx,$$

$$\int dx\int dx\int y\,dx = \frac{x^2}{2}\int y\,dx - x\int xy\,dx + \frac{1}{2}\int x^2 y\,dx,$$

usw.

Wollen wir die Ergebnisse des vorliegenden Kapitels in wenige Worte zusammenfassen, so können wir sagen, daß unsere Periode einen nicht unbedeutenden Beitrag zur Integrationstheorie geliefert hat, da wir ihr eine große Entwicklung der Integration der irrationalen und transzendenten Größen und die Klarlegung des Begriffes vom vielfachen Integrale verdanken. Ein weit wichtigerer Zweig der Integralrechnung wurde in dieser Periode geboren, aber diesem soll ein besonderes Kapitel gewidmet werden.

Bestimmte Integrale.

Die bestimmten Integrale bilden nur einen speziellen Fall der unbestimmten. Daß sie nichtsdestoweniger eine besondere Behandlung verdienen, hängt davon ab, daß manche Integrale, die nicht

[1]) Mémoire sur les intégrales doubles, Hist. Acad. Paris 1788 (publ. 1791), p. 454–486. [2]) Uberior explicatio etc. (s. o. S. 737).
[3]) Opera, I. Bd.

durch elementare Funktionen ausdrückbar sind, sich dennoch, zwischen gewissen Grenzen genommen, durch zweckmäßige Kunstgriffe berechnen lassen. Euler hat sich mit der bestimmten Integration mit Vorliebe beschäftigt, und sein Name wird so gut als vollständig das gegenwärtige Kapitel ausfüllen.

Zunächst eine kleine Bemerkung. Die heutige Bezeichnung:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

wird in unserer Periode noch nicht gebraucht (s. o. S. 232); man sagt: „$\int_a f(x)\,dx$ von a bis b erstreckt", oder: „$\int f(x)\,dx$, wo das Integral für $x=a$ Null ist, und nach der Integration $x=b$ gesetzt werden muß".

Eine andere Bemerkung, die allerdings fast überflüssig erscheint, ist diese: Euler behandelt ohne jedes Bedenken als gewöhnliche Integrale diejenigen, die wir heutzutage als uneigentliche Integrale bezeichnen.

Bei der Unmöglichkeit, alle von Euler berechneten Typen von bestimmten Integralen anzuführen, werden wir die interessantesten unter ihnen erwähnen.

1.[1]) Das Integral:

$$H_n = \int_0 x^{f-1}dx(1-x^g)^n$$

läßt, wie man leicht beweist, die folgende Rekursionsformel zu:

$$H_n = \frac{1}{f+ng}\left[ngH_{n-1} + x^f(1-x^g)^n\right].$$

Setzt man dann:

$$I_n = \int_0^1 x^{f-1}dx(1-x^g)^n,$$

so folgt hieraus:

$$I_n = \frac{ng}{f+ng}I_{n-1};$$

es ist aber $I_0 = \frac{1}{f}$, folglich:

$$I_n = \frac{g^n}{f}\,\frac{1\cdot 2\cdots n}{(f+g)(f+2g)\cdots(f+ng)}.$$

Ist g unendlichklein, so kann man setzen:

---

[1]) Evolutio formulae integralis $\int x^{f-1}dx(\log x)^{\frac{m}{n}}$, integratione a valore $x=0$ ad $x=1$ extensa, Novi Comm. Acad. Petrop. XVI, 1771 (publ. 1772), p. 91—139; Inst. calc. int. IV, p. 78—121.

$$x^g - 1 + g \log x,$$

also:

$$I_n = (-1)^n g^n \int_0^1 x^{f-1} \log x^n dx;$$

es ergibt sich daher:

$$\int_0^1 x^{f-1} \log x^n dx = (-1)^n \frac{n!}{f^{n+1}}.$$

2.[1]) Man erhält durch Reihenintegration:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} \pm x^{n-m-1}}{1 \pm x^n} dx = \frac{1}{m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{4n+m} - \frac{1}{4n-m} + \cdots$$
$$\mp \left[\frac{1}{n+m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{3n+m} - \frac{1}{3n-m} + \cdots\right],$$

oder, wegen bekannter Formeln aus der Reihentheorie:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} \pm x^{n-m-1}}{1 \pm x^n} dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{n \sin \dfrac{m\pi}{n}} \\[2ex] \dfrac{\pi}{n \operatorname{tang} \dfrac{m\pi}{n}} \end{cases}.$$

Setzt man:

$$m = \lambda - \omega, \quad n = 2\lambda, \quad S = \frac{\pi}{2\lambda \cos \frac{\pi\omega}{2\lambda}}, \quad T = \frac{\pi}{2\lambda} \operatorname{tang} \frac{\pi\omega}{2\lambda},$$

so ergibt sich[2]):

---

[1]) De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur, Miscell. Berol. VII, 1743, p. 129. — De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} dz,$$

casu quo post integrationem ponitur $z = 1$, Novi Comm. Acad. Petrop. XIX, 1774 (publ. 1775), p. 3—29. — De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (\log z)^{\mu},$$

casu quo post integrationem ponitur $z = 1$, ebenda, p. 30—65; Inst. calc. int. IV, p. 122—154. — Siehe auch Lorgna, Mem. Soc. It. I.

[2]) Eine direkte Ableitung dieser Formel findet sich in: Euler, Nova methodus integrandi formulas differentiales rationales sine subsidio quantitatum imaginariarum, Acta Acad. Petrop. 1781, P. I (publ. 1784), p. 3—47.

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-\omega-1} \pm x^{\lambda+\omega-1}}{1 \pm x^{2\lambda}}\, dx = \begin{cases} S \\ T \end{cases}.$$

Schreiben wir:

$$P(x) = \int_0^x \frac{x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1+x^{2\lambda}}\, dx,$$

so daß $P(1) = S$, so folgt:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1+x^{2\lambda}},$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \omega} = \frac{-x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1+x^{2\lambda}} \log x,$$

also:

$$\int \frac{-x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1+x^{2\lambda}} \log x\, dx = \int \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \omega}\, dx = \frac{\partial P}{\partial \omega},$$

und insbesondere:

$$(1) \qquad \int_0^1 \frac{-x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1+x^{2\lambda}} \log x\, dx = \frac{\partial S}{\partial \omega} = \left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^2 \frac{\sin\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\cos^2\frac{\pi\omega}{2\lambda}}.$$

Man erhält analog:

$$(2) \qquad \int_0^1 \frac{x^{\lambda-\omega-1} + x^{\lambda+\omega-1}}{1-x^{2\lambda}} \log x\, dx = -\frac{\partial T}{\partial \omega} = -\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^2 \frac{1}{\cos^2\frac{\pi\omega}{2\lambda}}.$$

Für $\omega = 0$ hat man aus (2):

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1-x^{2\lambda}} \log x\, dx = -\frac{\pi^2}{8\lambda^2},$$

und insbesondere:

$$\int_0^1 \frac{\log x\, dx}{1-x^2} = -\frac{\pi^2}{8}.$$

Wendet man auf (1), (2) dieselbe Methode an, und so weiter, so kann man das Integral:

$$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-\omega-1} \pm x^{\lambda+\omega-1}}{1 \pm x^{2\lambda}} \log x^{\mu}\, dx$$

für jeden ganzen positiven Wert von μ berechnen.

Eine Verallgemeinerung eines soeben berechneten Integrales bildet das folgende:

$$S = -\int_0^1 \frac{x^{m-1}\log x\,dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}.[1])$$

Es ist:

$$S = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{m}{n}}}\left[(1-x^n)+\frac{1}{2}(1-x^n)^2+\frac{1}{3}(1-x^n)^3+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{n}\int_0^1 x^{m-1}dx\left[(1-x^n)^{1-\frac{m}{n}}+\frac{1}{2}(1-x^n)^{2-\frac{m}{n}}+\frac{1}{3}(1-x^n)^{3-\frac{m}{n}}+\cdots\right].$$

Setzt man aber:

$$\int x^{m-1}dx(1-x^n)^\lambda = A\int x^{m-1}dx(1-x^n)^{\lambda-1}+Bx^m(1-x^n)^\lambda,$$

so ergibt sich durch Differentiation:

$$A=\frac{\lambda n}{m+\lambda n},\quad B=\frac{1}{m+\lambda n},$$

also:

$$\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^\lambda = \frac{\lambda n}{m+\lambda n}\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{\lambda-1}.$$

Da nun:

$$\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{-\frac{m}{n}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}$$

ist, so folgt, wenn man diesen letzten Wert der Kürze wegen mit Δ bezeichnet:

$$\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-\frac{m}{n}} = \frac{kn-m}{kn}\int_0^1 x^{m-1}dx(1-x^n)^{k-1-\frac{m}{n}}$$

$$= \frac{n-m}{n}\,\frac{2n-m}{2n}\cdots\frac{kn-m}{kn}\Delta,$$

also:

$$S=\Delta\left[\frac{n-m}{n\cdot n}+\frac{(n-m)(2n-m)}{n\cdot 2n\cdot 2n}+\frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n\cdot 2n\cdot 3n\cdot 3n}+\cdots\right].$$

---

[1]) De integralibus quibusdam inventu difficillimis (1780), Mém. Acad. St.-Pét. VI, 1813—1814 (publ. 1818), p. 30—53.

Setzt man:

$$T(t) = \frac{n-m}{n \cdot n} t^n + \frac{(n-m)(2n-m)}{n \cdot 2n \cdot 2n} t^{2n} + \cdots, \quad T(1) = T,$$

so folgt:

$$S = \Delta T,$$

ferner:

$$t \frac{dT(t)}{dt} = \frac{n-m}{n} t^n + \frac{(n-m)(2n-m)}{n \cdot 2n} t^{2n} + \frac{(n-m)(2n-m)(3n-m)}{n \cdot 2n \cdot 3n} t^{3n} + \cdots$$

$$= (1-t^n)^{-\frac{n-m}{n}} - 1,$$

also:

$$T = \int_0^1 \frac{dt}{t}\left[(1-t^n)^{-\frac{n-m}{n}} - 1\right].$$

Für $1 - t^n = u^n$ ist:

$$T = \int_0^1 \frac{u^{n-1} - u^{m-1}}{1-u^n}\, du.$$

3.[1]) Es ist:

$$\int x^u du = \frac{x^u}{\log x},$$

$$\int_0^1 dx \int x^u du = \int_0^1 \frac{x^u dx}{\log x},$$

$$\int x^u dx = \frac{x^{u+1}}{u+1},$$

$$\int_0^1 x^u dx = \frac{1}{u+1},$$

$$\int du \int_0^1 x^u dx = \log(u+1) + C,$$

folglich:

(3) $$\int_0^1 \frac{x^u dx}{\log x} = \log(u+1) + C.$$

Die willkürliche Konstante ist unendlich; setzt man aber nacheinander $u = m$, $u = n$, so erhält man:

---

[1]) Nova methodus quantitates integrales determinandi, Novi Comm. Acad. Petrop. XIX, 1774 (publ. 1775), p. 66—102; Inst. calc. int. IV, p. 260—294. — Speculationes analyticae, Novi Comm. Acad. Petrop. XX, 1775 (publ. 1776), p. 59—79.

(4) $$\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{\log x}\, dx = \log \frac{m+1}{n+1}.$$

Ist allgemeiner:

$$P(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + \cdots,$$

wo:

$$A + B + \cdots = 0,$$

oder:

$$P(1) = 0,$$

so folgt:

$$\int_0^1 \frac{P(x)\,dx}{\log x} = A \log(\alpha + 1) + B \log(\beta + 1) + \cdots.$$

Ein besonderer Fall dieser letzten Formel ist:

$$\int_0^1 \frac{(x-1)^n\,dx}{\log x} = \log(n+1) - \binom{n}{1}\log n + \binom{n}{2}\log(n-1) - \cdots.$$

Aus (4) folgt für $m = ir$, $n = -ir$:

$$\int_0^1 \frac{\sin(r \log x)}{\log x}\, dx = \frac{1}{2i} \log \frac{1+ir}{1-ir} = \operatorname{arctg} r.$$

Will man analog $\int_0^1 \frac{\cos(r\log x)}{\log x}\,dx$ erhalten, so kann man die Reihenintegration anwenden; man erhält so[1]):

$$\int_0^1 \frac{\cos(r\log x)}{\log x}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\log x} + \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} + \cdots = \int_0^1 \frac{dx}{\log x} + \log\sqrt{1+r^2},$$

wobei man beachten muß, daß das rechts vorkommende Integral unendlich ist. Es ergibt sich aber hieraus:

$$\int_0^1 \frac{\cos(n\log x) - \cos(m\log x)}{\log x}\, dx = \frac{1}{2} \log \frac{1+n^2}{1+m^2},$$

---

[1]) Es ergibt sich:

$$\int \frac{\cos(r\log x)}{\log x}\, dx = \int \left[\frac{1}{\log x} - \frac{r^2}{2!}\log x + \frac{r^4}{4!}\log x^3 - \cdots\right] dx;$$

es ist aber:

$$\int_0^1 \log x^n\, dx = (-1)^n\, n!,$$

woraus die im Texte angegebene Formel unmittelbar folgt.

oder auch:

$$\int_0^1 \frac{\sin(p\log x)\cdot\sin(q\log x)}{\log x}\,dx = \frac{1}{4}\log\frac{1+(p-q)^2}{1+(p+q)^2}.$$

Setzt man in (4) $m = s + ir$, $n = s - ir$, so folgt:

$$\int_0^1 \frac{x^s \sin(r\log x)}{\log x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{r}{s+1}.$$

Die Gleichung (3) läßt sich auch so schreiben:

$$\int_0^1 \frac{x^u\,dx}{x\log x} = \log u + C.$$

Hieraus folgt durch abermalige Integration nach u:

$$\int_0^1 \frac{x^u\,dx}{x\log x^2} = \int \log u\,du + Cu + C_1 = u\log u + (C-1)u + C_1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^u\,dx}{x\log x^3} = \frac{1}{2}u^2\log u + \frac{2C-3}{4}u^2 + C_1 u + C_2,$$

und allgemein:

$$(5)\qquad \int_0^1 \frac{x^u\,dx}{x\log x^{n+1}} = \frac{1}{n!}u^n\log u + A_0 u^n + A_1 u^{n-1} + \cdots A_{n-1}u + A_n.$$

Da aber die willkürlichen Konstanten unendlichgroß sind, so muß man dieselben fortschaffen; das geschieht durch zweckmäßige Kombination der für n verschiedene Werte $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von u geschriebenen Formel (5). Ist nämlich:

$$U_1 = (u_1 - u_2)(u_1 - u_3)\cdots(u_1 - u_n),$$
$$U_2 = (u_2 - u_1)(u_2 - u_3)\cdots(u_2 - u_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_n = (u_n - u_1)(u_n - u_2)\cdots(u_n - u_{n-1}),$$

so ergibt sich:

$$\int_0 \frac{dx}{x\log x^{n-1}}\left[\frac{x^{u_1}}{U_1} + \frac{x^{u_2}}{U_2} + \cdots + \frac{x^{u_n}}{U_n}\right]$$
$$= \frac{1}{n-2!}\left[\frac{u_1{}^{n-2}\log u_1}{U_1} + \frac{u_2{}^{n-2}\log u_2}{U_2} + \cdots + \frac{u_n{}^{n-2}\log u_n}{U_n}\right].$$

4.[1]) Von der Formel:

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\log 2,$$

die einen besonderen Fall einer schon besprochenen Formel bildet (siehe oben 2.), gibt Euler drei Beweise, von denen nur einer hier angeführt werden möge.

Setzt man:

$$\sqrt{1-x^2} = y,$$

so ist:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

$$\log x = \log\sqrt{1-y^2} = -\left[\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}+\cdots\right],$$

folglich:

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\left[\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}+\cdots\right];$$

es ist aber:

$$\int_0^1 \frac{y^{2h}\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2h-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2h}\,\frac{\pi}{2},$$

also:

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6^2}+\cdots\right].$$

Andererseits hat man:

$$-\log\left(1+\sqrt{1-z^2}\right) = \int\frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}} - \int\frac{dz}{z},$$

und:

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}} = \int\frac{dz}{z}\left[1+\frac{1}{2}z^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^4+\cdots\right],$$

oder:

$$\int\frac{dz}{z\sqrt{1-z^2}} - \int\frac{dz}{z} = \frac{1}{2^2}z^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^2}z^4+\cdots+C,$$

folglich:

$$-\log\left(1+\sqrt{1-z^2}\right) = \frac{1}{2^2}z^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4^2}z^4+\cdots+C,$$

und, wenn man $z=0$ setzt:

---

[1]) De integratione formulae $\int\frac{dx\log x}{\sqrt{1-x^2}}$ ab $x=0$ ad $x=1$ extensa, Acta Acad. Petrop. I, P. II, 1777, p. 3—28; Inst. calc. int. IV, p. 154—182. Ein anderer Beweis findet sich in der oben (S. 745) angeführten Schrift: De integralibus quibusdam etc.

$$C = -\log 2,$$

also:

$$\log \frac{2}{1+\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2^2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} z^4 + \cdots.$$

Setzt man $z = 1$, so ergibt sich:

$$\log 2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4^2} + \cdots,$$

und folglich:

$$\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

5. Eine Anwendung früherer Formeln ist die Berechnung des Integrals[1]):

$$I = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x^b)(1-x^c)}{\log x\,(1-x^n)}\, dx.$$

Euler bemerkt, daß die zu integrierende Funktion für $x = 1$ verschwindet, da der Zähler durch $(1-x)^2$, der Nenner aber durch $(1-x)$ teilbar ist; es folgt hieraus (vgl. oben unter 3.), daß bei der Berechnung von:

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{\log x} [(1 + x^n + x^{2n} + \cdots) \\ - (x^b + x^{b+n} + x^{b+2n} + \cdots) - (x^c + x^{c+n} + x^{c+2n} + \cdots) \\ + (x^{b+c} + x^{b+c+n} + x^{b+c+2n} + \cdots)] \end{aligned}$$

die Integrationskonstante fortfällt. Benutzt man dann die unten (S. 760) anzuführende Formel:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\int_0^1 x^{p-1} dx (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}}{\int_0^1 x^{q-1} dx (1-x^n)^{\frac{m-n}{n}}} = \frac{(m+p)q}{p(m+q)} \frac{(m+p+n)(q+n)}{(p+n)(m+q+n)} \cdots,$$

so kann man schreiben, wegen (3):

$$I = \log \frac{P}{Q},$$

wo entweder:

---

[1]) De valore formulae integralis $\int \frac{x^{a-1}dx(1-x^b)(1-x^c)}{\log x\,(1-x^n)}$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae, Acta Acad. Petrop. 1777, P. II (publ. 1780), p. 29—47.

$$m = b, \quad p = a + c, \quad q = a,$$

oder:

$$m = c, \quad p = a + b, \quad q = a$$

ist.

6.[1]) Man soll eine Rekursionsformel für das Integral:

$$\Phi_n = \int_0^{\xi} \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - 2bx + cx^2}} = \int_0^{\xi} \frac{x^n dx}{R}$$

aufstellen, wobei ξ eine Wurzel der Gleichung $R = 0$ bezeichnet.

Setzen wir allgemein:

$$F_n = \int_0^x \frac{x^n dx}{R},$$

so ist vor allem zu bemerken, daß F_0 sich direkt berechnen läßt; man findet nämlich:

für $c > 0$,

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{c}} \log \frac{b + a\sqrt{c}}{b - cx + \sqrt{c(a^2 - 2bx + cx^2)}};$$

für $c < 0$,

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{-c}} \left[\arcsin \frac{b - cx}{\sqrt{b^2 - a^2c}} - \arcsin \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2c}} \right].$$

Führt man die neue Veränderliche:

$$t_0 = R - a$$

ein, so ist:

$$dt_0 = \frac{(-b + cx)\, dx}{R},$$

also[2]):

(6) $$t_0 = -bF_0 + cF_1,$$

oder:

$$F_1 = \frac{b}{c} F_0 + \frac{t_0}{c},$$

und folglich:

$$\Phi_1 = \frac{b}{c} \Phi_0 - \frac{a}{c}.$$

---

[1]) Speculationes super formula integrali $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - 2bx + cx^2}}$ ubi simul egregiae observationes circa fractiones continuas occurrunt, Acta Acad. Petrop. 1782, P. II (publ. 1786), p. 62—84. Ein Teil dieser Schrift wurde in Inst. calc. int. IV, p. 31—36 abgedruckt unter dem Titel: De integratione formulae irrationalis $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - 2bx + cx^2}}$. [2]) Die Integrationskonstante in den Gleichungen (6), (7), (8) ist gleich Null, weil beide Seiten für $x = 0$ verschwinden.

Führt man dagegen die Veränderliche:

$$t_1 = xR$$

ein, so ergibt sich:

$$dt_1 = \left(R + \frac{x(-b+cx)}{R}\right) dx = \frac{a^2 - 3bx + 2cx^2}{R} dx,$$

folglich:

(7) $$t_1 = a^2 F_0 - 3bF_1 + 2cF_2,$$

und insbesondere:

$$0 = a^2 \Phi_0 - 3b\Phi_1 + 2c\Phi_2,$$

woraus folgt:

$$\Phi_2 = \frac{3b}{2c}\Phi_1 - \frac{a^2}{2c}\Phi_0 = \frac{3b^2 - a^2 c}{2c^2}\Phi_0 - \frac{3ab}{2c^2}.$$

Führt man auf diese Weise fort, so findet man für jeden Wert von n:

$$\Phi_n = p_n \Phi_0 + q_n.$$

Das Gesetz der Koeffizienten p_n, q_n läßt sich folgendermaßen ermitteln. Setzt man:

$$t_n = x^n R,$$

so ergibt sich:

$$dt_n = \left[nx^{n-1}R + x^n \frac{-b+cx}{R}\right] dx$$

$$= \frac{1}{R}[na^2 x^{n-1} - (2n+1)bx^n + (n+1)cx^{n+1}]dx,$$

also:

(8) $$x^n R = t_n = na^2 F_{n-1} - (2n+1)bF_n + (n+1)cF_{n+1},$$

und für $x = \xi$:

$$0 = na^2 \Phi_{n-1} - (2n+1)b\Phi_n + (n+1)c\Phi_{n+1},$$

oder:

$$\Phi_{n+1} = \frac{1}{(n+1)c}[(2n+1)b\Phi_n - na^2\Phi_{n-1}]$$

$$= \frac{1}{(n+1)c}[\{(2n+1)bp_n - na^2 p_{n-1}\}\Phi_0 + \{(2n+1)bq_n - na^2 q_{n-1}\}],$$

woraus folgt:

$$p_{n+1} = (2n+1)bp_n - na^2 p_{n-1}, \quad q_{n+1} = (2n+1)bq_n - na^2 q_{n-1}.$$

7. Das Integral[1]):

---

[1]) Methodus facilis inveniendi integrale hujus formulae

$$\int \frac{dx}{x} \frac{x^{n+p} - 2x^n \cos\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos\theta + 1},$$

casu quo post integrationem ponitur vel $x = 1$ vel $x = \infty$ (1776), Nova Acta Acad. Petrop. III, 1785 (publ. 1788), p. 3—24.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x}\,\frac{x^{n+p} - 2x^n \cos\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos\vartheta + 1},$$

wo $p < n$, wird durch Zerlegung der zu integrierenden Funktion in einfache Brüche berechnet, nachdem man bemerkt hat, daß die Nullwerte des Nenners durch:

$$\omega = \frac{\vartheta}{n},\quad \frac{\vartheta + 2\pi}{n},\quad \frac{\vartheta + 4\pi}{n},\ \ldots,\ \frac{\vartheta + 2(n-1)\pi}{n}$$

gegeben sind, wenn:

$$x = \cos\omega + i\sin\omega$$

ist. Man findet ferner:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x}\,\frac{x^{n+p} - 2x^n \cos\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos\vartheta + 1} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x}\,\frac{x^{n+p} - 2x^n \cos\zeta + x^{n-p}}{x^{2n} - 2x^n \cos\vartheta + 1}.$$

Unter den interessanten Bemerkungen, zu denen dieses Integral Anlaß bietet, möge eine hervorgehoben werden. Die zu integrierende Funktion verändert sich nicht, wenn man ϑ durch $\vartheta + 2k\pi$ ersetzt, während der Wert des Integrales ein anderer wird. Welcher ist, fragt sich Euler, der wahre Wert des Integrales? Alle sind es, antwortet er, denn solche Integrale sind unendlichvieldeutige Funktionen, wie sich aus dem Beispiel von $\int \frac{dx}{1 + x^2}$ ersehen läßt.

8.[1]) In einem Schreiben an Lagrange vom 26. Januar 1775 teilte ihm Euler die Formel:

$$\int_0^1 \frac{(x-1)\,dx}{\log x} = \log 2$$

mit. Lagrange bewies diese Formel und legte Euler die weiteren vor:

$$\int_a^b \frac{x^n - x^m}{\log x}\,\frac{dx}{x} = \int_m^n (b^y - a^y)\,\frac{dy}{y},$$

$$\int_0^\infty \frac{(x^n - x^m)\,dx}{(1 + x^r)\log x} = \log \frac{\operatorname{tang}\frac{(n+1)\pi}{2r}}{\operatorname{tang}\frac{(m+1)\pi}{2r}}.[2])$$

---

[1]) Lagrange, Oeuvres XIV, Paris 1892, p. 241, 242. — Euler, Observationes in aliquot theoremata illustris de la Grange, Opuscula anal. II, Petersburg 1785, p. 16—41. — Siehe auch: Euler, De iterata integratione formularum integralium dum aliquis exponens pro variabili assumitur (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VII, 1789 (publ. 1793), p. 64—82.

[2]) Über dieses und einige damit verwandte Integrale siehe auch: Euler, Uberior

Die erste Gleichung bewies Euler zunächst durch Reihenentwicklung, dann auf folgende Weise. Aus:

$$\int_a^b x^{y-1}dx = \frac{b^y - a^y}{y}, \quad \int_0^n x^y dy = \frac{x^n - 1}{\log x},$$

$$\int_0^n dy \int_a^b x^{y-1} dx = \int_a^b \frac{dx}{x} \int_0^n x^y dy$$

folgt:

$$\int_0^n (b^y - a^y) \frac{dy}{y} = \int_a^b \frac{x^n - 1}{x \log x}.$$

Es ist analog:

$$\int_0^m (b^y - a^y) \frac{dy}{y} = \int_a^b \frac{x^m - 1}{x \log x},$$

woraus die verlangte Formel unmittelbar folgt.

Was die zweite Lagrangesche Gleichung betrifft, geht Euler von der Relation:

$$\int_0^\infty \frac{x^{k+n}}{1+x^{2k}} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2k \cos \frac{n\pi}{2k}}$$

aus. Integriert man nach n, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{x^{k+n} - x^k}{1+x^{2k}} \frac{dx}{x \log x} = \frac{\pi}{2k} \int_0^n \frac{dn}{\cos \frac{n\pi}{2k}} = \log \operatorname{tang} \frac{\pi(k+n)}{4k};$$

setzt man hier statt $k+n$ zuerst $n+1$, dann $m+1$, statt $2k$ beidemal r, und subtrahiert, so ergibt sich die gesuchte Formel.

9.[1]) Wir begnügen uns damit, die Untersuchungen Eulers über die Integrale:

---

explicatio methodi singularis nuper expositae, integralia alias maxime abscondita investigandi (1776), Nova Acta Acad. Petrop. IV, 1786 (publ. 1789), p. 17—54.

[1]) Investigatio formulae integralis $\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n}$, casu quo post integrationem statuitur $x = \infty$, Opusc. an. II, p. 42—54; Inst. calc. int. IV, p. 346—357. — Investigatio valoris integralis $\int \frac{x^{m-1}dx}{1 - 2x^k \cos\vartheta + x^{2k}}$ a termino $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensi, Opusc. an. II, p. 55—75; Inst. calc. int. IV, p. 358—378.

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n}, \quad \int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-2x^k\cos\vartheta+x^{2k}}\ ^{1)}$$

nur kurz zu erwähnen. Mit seiner gewöhnlichen Gewandtheit faßt Euler einerseits alle logarithmischen, andererseits alle zyklometrischen Bestandteile jedes Integrals zusammen, zeigt, daß die ersteren eine verschwindende Summe liefern, und berechnet die Summe der letzteren; dadurch findet er für $m < k$ und für $m < 2k$ beziehungsweise:

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1+x^k} = \frac{\pi}{k\sin\frac{m\pi}{k}} \quad \text{(s. o. unter 8)},\\ &\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{1-2x^k\cos\vartheta+x^{2k}} = \frac{\pi\sin\frac{m(\pi-\vartheta)+\vartheta k}{k}}{k\sin\vartheta\sin\frac{m\pi}{k}}.\end{aligned}\right.$$

Setzt man ferner:

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n} = \frac{Ax^m}{(1+x^k)^{n-1}} + B\int \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^{n-1}},$$

so ergibt sich durch Differentiation:

$$A = \frac{1}{(n-1)k}, \quad B = 1 - \frac{m}{(n-1)k},$$

folglich für $m < k$:

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n} = \left(1-\frac{m}{(n-1)k}\right)\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^{n-1}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man wegen der ersten Formel (9):

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x^k)^n} = \left(1-\frac{m}{k}\right)\left(1-\frac{m}{2k}\right)\cdots\left(1-\frac{m}{(n-1)k}\right)\frac{\pi}{k\sin\frac{m\pi}{k}}.$$

10.[2]) In einer Arbeit mit dem Titel: Methodus inveniendi etc. behandelt Euler gewisse Probleme, von denen wir eins als Beispiel wiedergeben.

---

[1]) Über das erstere Integral siehe auch: Mascheroni, Adnotationes etc.
[2]) Methodus inveniendi formulas integrales quae certis casibus datam inter se teneant rationem, Opusc. an. II, p. 178—216; Inst. calc. int. IV, p. 378—415.

Man verlangt, eine solche Funktion v von x zu finden, daß für jeden Wert von n die folgende Relation besteht:

$$\int_0^1 x^n\,dv = \frac{\alpha n + a}{\beta n + b}\int_0^1 x^{n-1}\,dv.$$

Wir setzen, der Einfachheit wegen, $\alpha = \beta = 1$ voraus. Wenn die geschriebene Relation gelten soll, so muß sein:

$$\int x^n\,dv = \frac{n+a}{n+b}\int x^{n-1}\,dv + V, \tag{10}$$

wo V eine Funktion von x bezeichnet, die für $x = 0$ und für $x = 1$ verschwindet. Es ergibt sich hieraus durch Differentiation:

$$(n+b)x^n\,dv = (n+a)x^{n-1}\,dv + (n+b)\,dV,$$

woraus erhellt, daß dV den Faktor x^{n-1} und folglich V den Faktor x^n enthalten muß. Setzt man daher:

$$(n+b)V = x^n Q,$$

so ist:

$$(n+b)x\,dv = (n+a)\,dv + nQ\,dx + x\,dQ,$$

eine Relation, die erfüllt wird, wenn man setzt:

$$(x-1)\,dv = Q\,dx, \quad (bx-a)\,dv = x\,dQ.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{(bx-a)\,dx}{x(x-1)} = \left(\frac{a}{x} + \frac{b-a}{x-1}\right)dx,$$

also:

$$Q = Cx^a(x-1)^{b-a},$$

und:

$$V = Cx^{n+a}(x-1)^{b-a},$$

eine Funktion, die, wenn $b > a$, für $x = 0$ und für $x = 1$ wirklich verschwindet; ferner:

$$dv = \frac{Q\,dx}{x-1} = Cx^a(x-1)^{b-a-1}\,dx.$$

Die Rekursionsformel (10) wird also:

$$\int x^{n+a}(x-1)^{b-a-1}\,dx$$

$$= \frac{n+a}{n+b}\int x^{n+a-1}(x-1)^{b-a-1}\,dx + \frac{1}{n+b}x^{n+a}(x-1)^{b-a},$$

woraus folgt:

$$\int_0^1 x^{n+a}(x-1)^{b-a-1}dx = \frac{n+a}{n+b}\int_0^1 x^{n+a-1}(x-1)^{b-a-1}dx.$$

Das Problem läßt sich in zweifacher Richtung verallgemeinern, indem man sich entweder die Relation:

$$\int_0^1 x^n\,dv = \frac{(\alpha n+a)(\alpha' n+a')}{(\beta n+b)(\beta' n+b')}\int_0^1 x^{n-1}\,dv$$

oder die Relation:

$$(11)\quad (\alpha n+a)\int_0^1 x^n\,dv = (\beta n+b)\int_0^1 x^{n+1}dv + (\gamma n+c)\int_0^1 x^{n+2}dv$$

vorlegt. Beide Fragen werden von **Euler** in der angeführten Arbeit berücksichtigt; die zweite läßt eine Anwendung auf die Theorie der Kettenbrüche zu. Ist nämlich der Kettenbruch:

$$\varphi = \beta + b + \cfrac{(\gamma+c)(2\alpha+a)}{2\beta+b+\cfrac{(2\gamma+c)(3\alpha+a)}{3\beta+b+\cdots}}$$

gegeben, und läßt sich ein Integral:

$$I_n = \int_0^1 x^n\,dv$$

ermitteln, welches die Gleichung (11) erfüllt, so ist:

$$\varphi = \frac{(\alpha+a)I_1}{I_2}.$$

11.[1]) Zur Berechnung von:

$$\int_0^1 dx\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\log x}\right)$$

gibt **Euler** fünf Methoden, auf welche wir einzugehen nicht für nötig halten.

---

[1]) Evolutio formulae integralis $\int dx\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\log x}\right)$ a termino $x=0$ usque ad $x=1$ extensae (1776), Nova Acta Acad. Petrop. IV. 1786 (publ. 1789), p. 3—16.

12.[1]) Durch Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen berechnet Euler die Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{\Delta}\frac{\log x\,dx}{x}, \quad \int_0^\infty \frac{x^p}{\Delta}\frac{dx}{x\log x},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta}\frac{\log x\,dx}{x}, \quad \int_0^1 \frac{x^p - x^{-p}}{\Delta}\frac{dx}{x\log x},$$

wo:

$$\Delta = \begin{cases} x^n + 2\cos\vartheta + x^{-n}, \\ x^{-n}(1 + x^n), \\ x^n + \left(f + \frac{1}{f}\right) + x^{-n}, \end{cases}$$

ferner:

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{x^n + x^{-n}}\frac{dx}{x}, \quad \int_0^1 \frac{x^p + x^{-p}}{x^n + x^{-n}}\frac{dx}{x}, \qquad \text{usw.}$$

13. Eine Verallgemeinerung der sogenannten **Betafunktion** (diese Vorl., III², S. 653) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ bildet das Integral:

$$(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-q}{n}}},$$

welches sich auf das frühere für $n = 1$ reduziert. Diesem Integrale widmet Euler drei Abhandlungen.[2])

---

[1]) Innumera theoremata circa formulas integrales quarum demonstratio vires analyseos superare videtur (1776), Nova Acta Acad. Petrop. V, 1787 (publ. 1789), p. 3—26. [2]) Observationes circa integralia formularum $\int x^{p-1}dx(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$ posito post integrationem $x = 1$, Misc. Taur. III, 1762—1765 (publ 1766), P. II, p. 156—177. — Comparatio valorum formulae integralis $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ a termino $x = 0$ usque ad $x = 1$ extensae, Nova Acta Acad. Petrop. V, 1787 (publ. 1789), p. 86—117; Inst. calc. int. IV, p. 295—326. — Additamentum ad dissertationem praecedentem, de valoribus formulae integralis $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensae, Nova Acta Acad. Petrop. V, 1787 (publ. 1789), p. 118 bis 129; Inst. calc. int. IV, p. 326—337.

Es ist vor allem zu bemerken, daß man p und q kleiner als n machen kann vermittels der Formeln[1]):

$$(12)\qquad (p+n,\,q)=\frac{p}{p+q}(p,\,q),\quad (p,\,q+n)=\frac{q}{p+q}(p,\,q);$$

ferner ist:

$$(13)\qquad (p,\,q)=(q,\,p),\quad (p,\,n)=\frac{1}{p},\quad (n,\,q)=\frac{1}{q}.$$

Durch wiederholte Anwendung der ersten Formel (12) ergibt sich:

$$(p,\,q)=\frac{p+q}{p}(n+p,\,q)=\frac{p+q}{p}\,\frac{n+p+q}{n+p}(2n+p,\,q)=\cdots$$
$$=\frac{p+q}{p}\,\frac{n+p+q}{n+p}\cdots\frac{jn+p+q}{jn+p}((j+1)n+p,\,q),$$

wo $j=\infty$. Desgleichen ist:

$$(r,\,q)=\frac{r+q}{r}\,\frac{n+r+q}{n+r}\cdots\frac{jn+r+q}{jn+r}((j+1)n+r,\,q),$$

---

[1]) Die Formeln (12), (13) lassen sich folgendermaßen ableiten. Es ist:

$$(p+n,\,q)+(p,\,q+n)=\int_0^1\left[x^{p+n-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}+x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}}\right]dx$$
$$=\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}[x^n+(1-x^n)]\,dx=(p,\,q),$$
$$-q(p+n,\,q)+p(p,\,q+n)$$
$$=\int_0^1\left[-qx^{p+n-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}+px^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q}{n}}\right]dx=\left[x^p(1-x^n)^{\frac{q}{n}}\right]_0^1=0,$$

woraus sich die Formeln (12) unmittelbar ergeben.

Setzt man ferner in $(p,\,q)$:

$$x=(1-y^n)^{\frac{1}{n}}$$

so folgt nach einfachen Umformungen:

$$(p,\,q)=-\int_1^0 y^{q-1}(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}}dy=\int_0^1 y^{q-1}(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}}dy=(q,\,p).$$

Endlich ist:

$$(p,\,n)=\int_0^1 x^{p-1}\,dx=\left[\frac{x^p}{p}\right]_0^1=\frac{1}{p},$$
$$(n,\,q)=(q,\,n)=\frac{1}{q}.$$

also:

$$\frac{(p,q)}{(r,q)}=\frac{r(p+q)(n+r)(n+p+q)}{p(r+q)(n+p)(n+r+q)}\cdots{}^{1)},$$

woraus die Relation:

$$\frac{(a,b)}{(a+c,b)}=\frac{(a,c)}{(a+b,c)},$$

unmittelbar folgt, die zu einer Fülle von weiteren, hier nicht anzuführenden Beziehungen Anlaß gibt.

Das Integral (p, q) läßt sich durch eine konvergente Reihe ausdrücken; es ist nämlich:

$$(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}\left(1+\frac{n-q}{n}x^n+\frac{n-q}{n}\frac{2n-q}{2n}x^{2n}+\cdots\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^p}{p}+\frac{n-q}{n}\frac{x^{n+p}}{n+p}+\frac{n-q}{n}\frac{2n-q}{2n}\frac{x^{2n+p}}{2n+p}+\cdots\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{p}+\frac{n-q}{n}\frac{1}{n+p}+\frac{n-q}{n}\frac{2n-q}{2n}\frac{1}{2n+p}+\cdots.$$

Es ist aber von Interesse, eine rascher konvergierende Reihe zu erhalten. Dazu muß man beachten, daß:

$$(p,q)=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}dx+\int_{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}}^1 x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}dx-\int_{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}}^0 y^{q-1}(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}}dy\,{}^{2)}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} x^{p-1}(1-x^n)^{\frac{q-n}{n}}dx+\int_0^{\frac{1}{\sqrt[n]{2}}} y^{q-1}(1-y^n)^{\frac{p-n}{n}}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{2^p}}\left[\frac{1}{p}+\frac{n-q}{2n}\frac{1}{n+p}+\frac{n-q}{2n}\frac{2n-q}{4n}\frac{1}{2n+p}+\cdots\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt[n]{2^q}}\left[\frac{1}{q}+\frac{n-p}{2n}\frac{1}{n+q}+\frac{n-p}{2n}\frac{2n-p}{4n}\frac{1}{2n+q}+\cdots\right],$$

---

1) Der Wert von $\frac{(p,q)}{(r,q)}$ war von Euler schon im 1. Bande seiner Integralrechnung angegeben worden. 2) Siehe die vorletzte Anmerkung.

worin die Glieder der beiden Reihen rascher abnehmen als diejenigen der Reihe:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots.$$

14.[1]) Man erhält durch partielle Integration:

$$\int \left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx = x\left(\log \frac{1}{x}\right)^n + n\int \left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx;$$

es ergibt sich aber durch wiederholte Anwendung der l'Hospitalschen Regel:

$$\left[x\left(\log \frac{1}{x}\right)^n\right]_{x=0} = 0,$$

also:

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx = n\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{n-1} dx,$$

woraus folgt:

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^n dx = n!$$

15.[2]) Ist:

$$\Phi = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \cdots = b_0 + b_1 \cos\varphi + b_2 \cos\varphi^2 + \cdots,$$

so findet Euler durch Berechnung des Integrales:

$$\int_0^1 \cos p\varphi \cos\varphi^q d\varphi$$

die Beziehung:

$$2^k a_h = b_h + \frac{h+2}{4} b_{h+2} + \frac{(h+4)(h+8)}{4\cdot 8} b_{h+4} + \cdots,$$

wo $k = h$ oder $k = h-1$, je nachdem $h = 0$ oder $h > 0$ ist.

16.[3]) Man findet leicht:

---

[1]) De vero valore formulae integralis $\int dx\left(\log \frac{1}{x}\right)^n$ a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = 1$ extensae (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VIII, 1790 (publ. 1794), p. 15—31. [2]) Disquisitio ulterior de seriebus secundum multipla cujusdam anguli progredientibus (1777), Nova Acta Acad. Petrop. XI, 1793 (publ. 1798), p. 114—132. [3]) Theorema maxime memorabile circa formulam integralem $\int \frac{d\varphi \cos\lambda\varphi}{(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{n+1}}$, M. S. Acad. exhib. 1778; Inst. calc. int. IV, p. 194—217. — Disquisitio conjecturalis super formula integrali $\int \frac{d\varphi \cos i\varphi}{(\alpha + \beta\cos\varphi)^n}$. M. S. Acad.

$$\int \frac{d\varphi}{\alpha + \beta \cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \arccos \frac{\alpha \cos\varphi + \beta}{\alpha + \beta\cos\varphi},$$

also:

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\alpha + \beta\cos\varphi} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}},$$

und hieraus:

$$I_0 = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{\pi}{1 - a^2},$$

wo:

$$\Delta = 1 + a^2 - 2a\cos\varphi.$$

Es ist ferner identisch:

$$d\varphi = (1 + a^2)\frac{d\varphi}{\Delta} - 2a\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta},$$

woraus durch Integration folgt:

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \frac{1 + a^2}{2a} I_0 - \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi a}{1 - a^2}.$$

Man kann demnach vermuten, es sei allgemein:

$$I_\lambda = \int_0^\pi \frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{\Delta} = \frac{\pi a^\lambda}{1 - a^2}.$$

Diese Formel läßt sich auf folgende Weise bestätigen. Nehmen wir an, es sei:

$$I_{\lambda-1} = \frac{\pi a^{\lambda-1}}{1 - a^2}, \quad I_\lambda = \frac{\pi a^\lambda}{1 - a^2}.$$

Man hat identisch:

$$\cos\lambda\varphi\, d\varphi = (1 + a^2)\frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{\Delta} - 2a\frac{\cos\lambda\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta}$$

$$= (1 + a^2)\frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{\Delta} - a\frac{\cos(\lambda+1)\varphi\, d\varphi}{\Delta} - a\frac{\cos(\lambda-1)\varphi\, d\varphi}{\Delta},$$

und hieraus durch bestimmte Integration von 0 bis π:

$$0 = (1 + a^2)I_\lambda - aI_{\lambda+1} - aI_{\lambda-1},$$

oder:

---

exhib. 1778; Inst. calc. int. IV, p. 217—242. — Demonstratio theorematis insignis per conjecturam eruti, circa integrationem formulae

$$\int \frac{d\varphi \cos i\varphi}{(1 + a^2 - 2a\cos\varphi)^{n+1}},$$

M. S. Acad. exhib. 1778; Inst. calc. int. IV, p. 242—259.

$$I_{\lambda+1} = \frac{1+a^2}{a} I_\lambda - I_{\lambda-1} = \frac{\pi a^{\lambda+1}}{1-a^2}.$$

Diese Formel ist aber nur ein besonderer Fall einer anderen, die **Euler** durch Induktion beweist:

$$\int_0^\pi \frac{\cos\lambda\varphi\, d\varphi}{\Delta^{n+1}} = \frac{\pi a^\lambda}{(1-a^2)^{2n+1}}\left[\binom{n-\lambda}{0}\binom{n+\lambda}{\lambda} + \binom{n-\lambda}{1}\binom{n+\lambda}{\lambda+1}a^2 + \cdots\right].$$

17.[1]) Ein geometrisches Problem führte **Euler** zu den Integralen:

$$(14) \qquad \int_0^\infty \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\varphi}}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\varphi}}.$$

Die Berechnung derselben gründet er auf die später als **Euler**sches **Integral zweiter Gattung** bezeichnete Funktion:

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \Gamma(n).$$

Man findet leicht die Rekursionsformel:

$$(15) \qquad \Gamma(n+1) = n\Gamma(n);$$

es ergibt sich ferner durch die Substitution $x = ky$:

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-ky} dy = \frac{\Gamma(n)}{k^n}.$$

Die Größe k darf nicht negativ, wohl aber imaginär sein. Ist dann $k = p \pm iq$, und setzt man:

$$p = r\cos\alpha, \quad q = r\sin\alpha,$$

oder:

$$r = \sqrt{p^2+q^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{q}{p},$$

so folgt:

$$\int_0^\infty y^{n-1} e^{-py}(\cos qy \mp i\sin qy)\,dy = \frac{\Gamma(n)}{(p \pm iq)^n} = \frac{\Gamma(n)}{r^n}(\cos n\alpha \mp i\sin n\alpha),$$

also:

---

[1]) De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum, M. S. Acad. exhib. 1781; Inst. calc. int. IV, p. 337 bis 345.

$$(16)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty y^{n-1}e^{-py}\cos qy\,dy = \frac{\Gamma(n)}{r^n}\cos n\alpha, \\ \displaystyle\int_0^\infty y^{n-1}e^{-py}\sin qy\,dy = \frac{\Gamma(n)}{r^n}\sin n\alpha. \end{cases}$$

Um die Integrale (14) zu erhalten, muß man hier setzen:

$$n = \frac{1}{2},\quad p = 0,\quad q = 1,$$

also:

$$r = 1,\quad \alpha = \frac{\pi}{2};$$

beachtet man, daß:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

ist[1]), so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\pi}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad \int_0^\infty \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\varphi}} = \sqrt{\pi}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Man hat allgemeiner:

$$\int_0^\infty e^{-px}\frac{\cos qx\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{r}\sqrt{\frac{r+p}{2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-px}\frac{\sin qx\,dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{r}\sqrt{\frac{r-p}{2}}.$$

Nimmt man in (16) $n = \omega$ an, wo ω eine unendlichkleine Größe bezeichnet, und bemerkt man, daß:

---

[1]) Euler hat die Formel:

$$\int_0^1 \sqrt{-\log x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

angegeben (diese Vorl., III², S. 656). Setzt man $x = e^{-t}$, so folgt hieraus

$$\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{t}\,dt = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

und daher, wegen Formel (15) im Texte:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{\omega}\Gamma(1+\omega) = \frac{1}{\omega}\Gamma(1) = \frac{1}{\omega},$$

$$\cos\omega\alpha = 1, \quad \sin\omega\alpha = \omega\alpha = \omega \operatorname{arctg}\frac{q}{p},$$

so erhält man:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}\cos qx\,dx}{x} = \infty, \quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}\sin qx\,dx}{x} = \operatorname{arctg}\frac{q}{p};$$

für $p = 0$, $q = 1$ ergibt sich aus der letzten Formel:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

18.[1]) Ist:

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{h=0}^{2n} a_{nh}x^h,$$

so sucht **Euler** die Koeffizienten a_{nh} durch bestimmte Integrale auszudrücken. Er findet:

$$a_{nn} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi)^n d\varphi,$$

$$a_{n,\,n\pm1} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi)^n \cos\varphi\,d\varphi,$$

$$a_{n,\,n\pm2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi)^n \cos 2\varphi\,d\varphi,$$

. . . .

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{x^r\cos r\varphi\,d\varphi}{1 - x - 2x\cos\varphi} = \sum_n a_{n,\,n+r}x^{n+r} = \frac{v^r}{\sqrt{1-2x-3x^2}},$$

wo:

$$v = \frac{1 - x - \sqrt{1-2x-3x^2}}{2}.$$

Setzt man:

$$\frac{v}{x} = b, \quad x = \frac{b}{b^2+b+1},$$

so läßt sich die erhaltene Formel folgendermaßen schreiben:

---

[1]) Disquisitiones analyticae super evolutione potestatis trinomialis $(1+x+x^2)^n$ (1778), Nova Acta Acad. Petrop. XIV, 1797—1798 (publ. 1805), p. 75—110.

$$\int_0^\pi \frac{\cos r\varphi\, d\varphi}{1 - 2b\cos\varphi + b^2} = \frac{\pi b^r}{1 - b^2}.$$

Einen, wenn auch unvergleichlich kleineren, doch nicht unbedeutenden Beitrag zur Theorie der bestimmten Integrale lieferten auch andere Schriftsteller.

Landen[1]) stellte einige bekannte Integrale durch unendliche Produkte dar, und gab neue Methoden zur Berechnung von zwischen bestimmten Grenzen genommenen Integralen vom Typus:

$$\int \frac{x^t dx}{p + qx^n + rx^{2n} + \cdots}.$$

Laplace[2]) begegnete im Laufe seiner Untersuchungen über Wahrscheinlichkeitslehre dem Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^m e^{-t^{2r}} dt.$$

Dieses Integral verschwindet für ein ungerades m; man kann daher $m = 2n$ setzen, in welchem Falle man hat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n} e^{-t^{2r}} dt = 2\int_0^{\infty} t^{2n} e^{-t^{2r}} dt.$$

Es ergibt sich ferner ohne Schwierigkeit für $r = 1$:

$$\int_0^{\infty} t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Um dieses letzte Integral zu berechnen, geht Laplace von dem Doppelintegrale:

$$I = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-s(1+u^2)} ds\, du$$

aus. Integriert man zuerst nach s, so ergibt sich:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{2};$$

---

[1]) Specimen of a new method of comparing curvilineal areas; by which many such areas may be compared as have not yet appeared to be comparable by any other method, Phil. Trans. LVIII, 1768, p. 174–180. — Some new theorems for computing the areas of certain curve lines, ebenda LX, 1770, p. 441–443. [2]) Mémoire sur les probabilités, Mém. Acad. Paris 1778 (publ. 1781); Oeuvres IX, Paris 1893, p. 381–485

setzt man dagegen $u\sqrt{s} = t$ und dann $s = s'^2$, so folgt:

$$I = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-s-t^2} \frac{ds\,dt}{\sqrt{s}} = \int_0^\infty e^{-s} \frac{ds}{\sqrt{s}} \cdot \int_0^\infty e^{-t^2} dt = 2 \int_0^\infty e^{-s'^2} ds' \cdot \int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

$$= 2\left[\int_0^\infty e^{-t^2} dt\right]^2,$$

also:

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Für $r = 2$ hat man:

$$\int_0^\infty t^{4n} e^{-t^4} dt = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{4^n} \int_0^\infty e^{-t^4} dt,$$

$$\int_0^\infty t^{4n+2} e^{-t^4} dt = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}{4^n} \int_0^\infty t^2 e^{-t^4} dt,$$

so daß alles auf die Bestimmung von:

$$\int_0^\infty e^{-t^4} dt = C, \quad \int_0^\infty t^2 e^{-t^4} dt = C'$$

ankommt. Es ist:

$$J = \int_0^\infty\!\!\int_0^\infty e^{-s(1+u^4)} ds\,du = \int_0^\infty \frac{du}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}};$$

man erhält andererseits durch die Substitutionen $u\sqrt[4]{s} = t$, $s = s'^4$:

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{-s} ds}{\sqrt[4]{s}} \cdot \int_0^\infty e^{-t^4} dt = 4 \int_0^\infty s'^2 e^{-s'^4} ds' \cdot \int_0^\infty e^{-t^4} dt = 4CC',$$

so daß:

$$CC' = \frac{\pi}{8\sqrt{2}},$$

und die Berechnung des einen dieser Integrale auf die des anderen zurückgeführt wird. Es ist aber unmöglich, jedes der beiden Integrale durch elementare Transzendenten auszudrücken.

Nicolaus Fuß (geboren zu Berlin 1755, seit 1773 Hilfsarbeiter des damals schon erblindeten **Euler** zu Petersburg, später Mitglied und Sekretär der dortigen Akademie und Generalschuldirektor, ge-

storben daselbst 1826) gab zwei Methoden[1] zur Berechnung des Produktes:

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{b}{n}}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{\beta}{n}}}.$$

Friedrich Mallet (s. o. S. 129)[2] berechnete auf einem neuen Wege das schon von d'Alembert[3] betrachtete Integral:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \frac{(1-t^2)^n}{(k^2+t^2-k^2t^2)^{n+1}}.$$

Giovanni Francesco Giuseppe Malfatti, geboren 1731 zu Ala in Tirol, gestorben 1807 als Professor an der Universität zu Ferrara, widmete eine lange Abhandlung[4] dem Integral:

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}dx}{1 \pm x},$$

welches er in das rationale Integral:

$$m\int_0^1 \frac{y^{m+n-1}dy}{1 \pm y^m} = m\left[\int_0^1 y^{n-1}dy - \int_0^1 \frac{y^{n-1}dy}{1 \pm y^m}\right]$$

durch die Substitution $x = y^m$ überführte. Die Integration geschieht dann durch Zerlegung in einfache Brüche.

Mascheroni[5] gab einen neuen Beweis von der Formel:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m+1}dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n \sin\frac{m\pi}{n}}.$$

---

[1]) Gemina methodus investigandi valorem producti

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^b}} \cdot \int \frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^\beta}}$$

dum ambo integralia a termino $x = 0$ usque ad terminum $x = 1$ extenduntur, Acta Acad. Petrop. 1778, P. II (publ. 1781), p. 111—134.

[2]) Dissertatio integrationem formulae a D'Alembertio propositae sistens, quam praeside F. Mallet... publico examini subjicit Carolus Diethericus Hierta, Upsala 1781. [3]) Rech. sur le syst. du monde III, p. 166.

[4]) Essai analytique sur l'intégration de deux formules différentielles, et sur la somme générale des séries harmoniques à termes rationnels, Mém. Acad. Turin 1788—1789 (publ. 1790), p. 53—112.

[5]) Adnotationes etc.

Fontana[1]) berechnete einige von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ erstreckte Integrale. Nachdem er gezeigt hat, daß:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\,dx,$$

geht er von der bekannten Relation:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots = \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2}$$

aus, die gliedweise integriert wird; dadurch ergibt sich:

$$\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x + \cdots = -\log \sin \frac{x}{2} - C,$$

und die Konstante C wird durch Einsetzung von $x = \pi$ bestimmt, was ergibt:

$$C = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \log 2.$$

Es ist also, wenn man $2x$ statt x setzt:

$$\cos 2x + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{3} \cos 6x + \cdots = -\log \sin x - \log 2.$$

Integriert man nochmals, so erhält man:

$$\frac{1}{2 \cdot 1^2} \sin 2x + \frac{1}{2 \cdot 2^2} \sin 4x + \frac{1}{2 \cdot 3^2} \sin 6x + \cdots$$
$$= -\int \log \sin x\,dx - x \log 2 + C;$$

erstreckt man von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx = -\frac{\pi}{2} \log 2,$$

also auch:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\,dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

Hieraus ergibt sich:

---

[1]) Ricerche sopra diversi punti concernenti l'analisi infinitesimale e la sua applicazione alla fisica, Pavia 1793.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sec x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{cosec} x\,dx = \frac{\pi}{2} \log 2,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tang} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{cotg} x\,dx = 0.$$

Es wäre wohl angemessen, dieser kurzen Zusammenstellung der in unsere Periode fallenden Untersuchungen über bestimmte Integrale eine Kritik derselben folgen zu lassen; wir verzichten aber darauf, da die Bedenken, zu denen diese Untersuchungen Anlaß geben, meistens von so elementarer Natur sind, daß sie für einen sachkundigen Leser keiner besonderen Erörterungen bedürfen.

Analytische Anwendungen der Infinitesimalrechnung.

1. Maxima und Minima.

Die Aufsuchung der größten und kleinsten Werte der Funktionen bildet eins der Hauptprobleme, denen die Infinitesimalrechnung ihre Entstehung verdankt. Für uns bietet diese Frage ein besonderes Interesse darum dar, weil sie den Gegenstand der ersten Schrift Lagranges bildet, derjenigen nämlich, welche den Beginn unserer Periode bezeichnet. Bevor wir aber diese Arbeit, die sich auf Extremwerte der Funktionen mehrerer Veränderlichen bezieht, besprechen, wollen wir die wenigen erwähnen, die sich mit Extremwerten der Funktionen einer einzigen Variabeln beschäftigen.

Diesem Gegenstand ist fast ausschließlich die erste Hälfte eines schon oben (S. 675) besprochenen Büchelchens von West[1]) gewidmet. Der Verfasser bemerkt, daß man die Extremwerte gewöhnlich durch Nullsetzung der ersten Fluxion erhält; da aber, fährt er fort, der Grund dieses Verfahrens nicht so leicht zu verstehen ist, so mag wohl die hier vorgeschlagene Methode eine günstige Beurteilung finden. Darauf läßt er eine Reihe von 20 Problemen folgen, deren 14 erste nach dem common way und nach dem new way gelöst werden, während auf die sechs letzten nur die neue Methode angewandt wird. Wir führen als Beispiel das zweite Problem an. Eine Strecke AB soll

[1]) West, Mathematics.

in C derart geteilt werden, daß $AC \cdot \overline{CB}^2$ größtmöglich sei. Setzt man:

$$AB = a, \quad AC = x, \quad CB = y = a - x,$$

so hat man nach der gewöhnlichen Methode die Fluxion von $x(a-x)^2$ gleich Null zu setzen, woraus sich ergibt:

$$0 = (a-x)^2 \dot{x} - 2(a-x)x\dot{x} = (a-x)(a-3x)\dot{x},$$

oder $x = \frac{a}{3}$. Dasselbe Resultat erhält man durch folgende Schlußweise. Lassen wir den beweglichen Punkt C von A nach B gehen. Das Produkt xy^2 nimmt zu, solange das Verhältnis des Zuwachses von x zu x das Verhältnis der Verminderung von y^2 zu y^2 übertrifft; das Maximum kommt also dann vor, wenn diese beiden Verhältnisse einander gleich sind, wenn nämlich:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{2y\dot{y}}{y^2}$$

ist. Es ist aber $\dot{x} = \dot{y}$, da der Zuwachs von x der Verminderung von y gleich ist, folglich $y = 2x$, und hieraus wie oben $x = \frac{a}{3}$.

Daß diese Methode im Grunde keine Neuheit darbietet, erkennt West selbst in einem Scholium zum 14ten Problem, wo er sagt, die von ihm als neu gegebene Methode sei freilich schon früher von anderen angewandt worden, niemand aber habe den Grund derselben so klar auseinandergesetzt als er selbst. Daß aber die neue Methode einen Rückschritt bildet, ist kaum nötig zu erwähnen; während nämlich die Infinitesimalrechnung darauf gerichtet ist, mechanische, allgemein gültige Regeln für die Auflösung der verschiedenen Probleme zu liefern, nötigt uns West, eine besondere Gedankenfolge für jeden besonderen Fall zu erfinden. Einen ähnlichen Irrtum würde derjenige begehen, der sich bei geometrischen Problemen des Gebrauches der analytischen Geometrie enthalten und die Geometrie der Alten beständig anwenden wollte.

In seiner Dissertation: De minimo in reflexione a curvis[1]) bestätigt Kästner die Behauptung von Robert Smith (diese Vorl., III[2], S. 377), daß die Reflexion auf einem Kreise auf vier Wegen geschehen kann. Es seien nämlich G, H (Fig. 80) zwei gegen einen Durchmesser AB des Kreises symmetrisch liegende innere Punkte, und man ziehe durch die Punkte G, H und den Mittelpunkt C einen zweiten Kreis, welcher den ersten Kreis in E, F schneiden möge;

[1]) Dissertationes mathematicae et physicae, Altenburg 1771, Diss. III, p. 22—27.

dann werden die Strahlen GA, GB, GE, GF, wie sich leicht nachweisen läßt, beziehungsweise in AH, BH, EH, FH reflektiert. Für die Punkte A, B ist der Weg ein Maximum, für die Punkte E, F ein Minimum.

Fontana widmet die elfte seiner Disquisitiones[1]) der Theorie der Maxima und Minima, fügt aber dem schon bekannten nichts Neues hinzu.

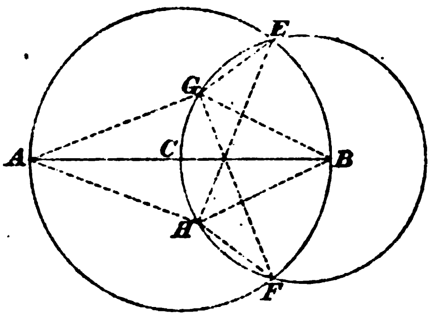


Fig. 80.

Dasselbe läßt sich von einer Abhandlung von Frisi[2]) aussagen.

Es ist wohl hier der Ort, zwei kleine Schriften von Andreas Hultén[3]) (geboren zu Suaflund in Schweden 1767, Professor der Mathematik und Astronomie und dann der Theologie an der Universität zu Upsala, gestorben daselbst 1831) zu erwähnen, deren Inhalt aus dem Titel selbst erhellt.

Die Theorie der Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen war zuerst von Euler, aber nur unvollständig behandelt worden (diese Vorl., III², S. 769—770). Es war Lagrange vorbehalten, die Auflösung des wichtigen Problems wesentlich zu fördern.[4])

Es sei Z eine algebraische Funktion von t, u, . . ., und:

$$dZ = p\,dt + q\,du + \cdots.$$

Unerläßlich für jeden Extremwert ist bekanntlich:

$$dZ = 0.$$

---

[1]) Disquisitiones physico-mathematicae, nunc primum editae, Pavia 1780. [2]) De quantitatibus maximis, minimis, isoperimetricis, Atti Accad. Siena VI, 1781, p. 121—159. Die frühere Arbeit von Frisi: De problematis quibusdam maximorum et minimorum exercitatio geometrica, Atti Accad. Siena IV, 1771 p. 15—20, ist rein geometrischen Inhalts; auf diese bezieht sich ein Brief von V. Riccati in N. Racc. d'opuscoli scient. e filol XXX, 1776, op. III, p. 1—7. [3]) Dissertatio de aequationibus radices aliquot aequales habentibus, Greifswald, P. I 1793, P. II 1796, P. III 1797. — Methodus Huddenii de maximis et minimis cum calculo fluxionum comparata, Greifswald 1797. [4]) Recherches sur la méthode de maximis et minimis, Misc. Taur. I, 1759; Oeuvres I, Paris 1867, p. 3—20.

oder:

$$pdt + qdu + \cdots = 0.$$

Da aber diese Beziehung, wegen der Unabhängigkeit der Veränderlichen $t, u, \ldots$, für jedes Wertsystem von $dt, du, \ldots$ bestehen muß, so folgt:

$$p = q = \cdots = 0,$$

ein Gleichungssystem, das die gesuchten Wertsysteme $t, u, \ldots$ liefern wird.

Man muß aber auf das zweite Differential d^2Z acht geben. Ist:

$$dp = Adt + Bdu + \cdots, \quad dq = Bdt + Cdu + \cdots, \cdots,$$

so folgt:

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + \cdots.$$

Hat man mit einer einzigen Veränderlichen zu tun, so hat d^2Z das gleiche Vorzeichen wie A, und man hat ein Minimum oder ein Maximum, je nachdem $A \gtrless 0$ ist.

Bei zwei Veränderlichen kann man schreiben:

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 = A\left(dt + \frac{B}{A}du\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2.$$

Hier muß, wegen der Unabhängigkeit von dt und du, jedes Glied rechts für ein Minimum oder für ein Maximum positiv bzw. negativ sein; es folgt dann für ein Minimum:

$$A > 0, \quad C - \frac{B^2}{A} > 0,$$

oder:

(1) $$A > 0, \quad C > 0, \quad AC > B^2;$$

für ein Maximum:

$$A < 0, \quad C - \frac{B^2}{A} < 0,$$

oder:

(2) $$A < 0, \quad C < 0, \quad AC > B^2.$$

Hat man drei Veränderlichen t, u, v, und ist:

$$dp = Adt + Bdu + Ddv,$$
$$dq = Bdt + Cdu + Edv,$$
$$dr = Ddt + Edu + Fdv,$$

so folgt:

$$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdv + 2Edudv + Fdv^2$$
$$= A\left(dt + \frac{B}{A}du + \frac{D}{A}dv\right)^2 + a\left(du + \frac{b}{a}dv\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)dv^2,$$

wo:

$$a = C - \frac{B^2}{A}, \quad b = E - \frac{BD}{A}, \quad c = F - \frac{D^2}{A}.$$

Es ist also für ein Minimum:

$$A > 0, \quad a > 0, \quad ac - b^2 > 0,$$

oder:

$$(3) \quad A > 0, \quad CA > B^2, \quad (CA - B^2)(FA - D^2) > (EA - BD)^2,$$

woraus folgt:

$$(4) \qquad A > 0, \quad C > 0, \quad F > 0, \quad CA > B^2, \quad FA > D^2.$$

Diese letzten Bedingungen sind aber mit den (3) nicht gleichbedeutend, wie es gleich daraus erhellt, daß E in (3), nicht aber in (4) vorkommt; Lagrange unterläßt nämlich, die weitere Bedingung:

$$FC > E^2$$

hinzuzufügen, welche der Symmetrie wegen ersichtlich hinzutreten muß und sich auch wirklich aus (3) ableiten läßt.[1])

Nachdem Lagrange einige Worte der Ausdehnung seiner Untersuchungen auf Funktionen einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen gewidmet hat, fügt er einige Bemerkungen hinzu, die insofern zweckmäßig sind, als seine Theorie, wie er denkt, ganz neu ist („comme je crois cette théorie entièrement nouvelle . . .“).

Ist Z eine Funktion der zwei Veränderlichen t, u, so kann man Z als die Ordinate einer Fläche ansehen. Die der Annahme $u =$ const. entsprechende Gleichung $dZ = p\,dt$ stellt alle Schnitte der Fläche dar, die in den der tZ-Ebene parallelen Ebenen liegen; für $p = 0$ erhält

---

[1]) Setzen wir:

$$CA - B^2 = \alpha^2, \quad FA - D^2 = \beta^2, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

so wird die letzte Ungleichung (3):

$$\alpha^2\beta^2 > (EA - BD)^2,$$

woraus folgt, wenn $|p|$ den absoluten Betrag von p bezeichnet:

$$|EA| < \alpha\beta + |BD|,$$

$$E^2A^2 < \alpha^2\beta^2 + B^2D^2 + 2\alpha\beta\,|BD|$$
$$= A^2CF - ACD^2 - AFB^2 + 2B^2D^2 + 2\alpha\beta\,|BD|,$$

oder:

$$A^2(CF - E^2) > D^2(AC - B^2) + B^2(AF - D^2) - 2\alpha\beta\,|BD|$$
$$= (\alpha\,|D| - \beta\,|B|)^2,$$

woraus sich ergibt:

$$CF - E^2 > 0.$$

man die größte oder die kleinste Ordinate eines dieser Schnitte, je nachdem $A \lessgtr 0$. Die Gleichung $p = 0$ stellt also den Ort der Maximal- und Minimalordinaten dar; diese bilden einen ebenen oder nicht ebenen Schnitt der Fläche, der von den Gleichungen $dZ = q\,du$, $p = 0$ bestimmt wird. Die Maximal- und Minimalordinaten der Fläche stimmen mit denjenigen dieses Schnittes überein; diese aber werden durch die Gleichung $q = 0$ gegeben. Aus $p = 0$ folgt:

$$dp = A\,dt + B\,du = 0,$$

und daher:

$$dq = \frac{AC - B^2}{A}\,du,$$

so daß man ein Maximum oder ein Minimum hat, je nachdem:

$$C \lessgtr \frac{B^2}{A}$$

ist. Die Bedingungen für ein Maximum oder Minimum sind also:

$$A \lessgtr 0, \quad C \lessgtr \frac{B^2}{A}$$

oder:

(5) $$A \lessgtr 0, \quad AC > B^2.$$

Wollte man mit u anstatt mit t anfangen, so würde man erhalten:

$$C \lessgtr 0, \quad AC > B^2,$$

welche, zusammen mit (5), die Bedingungen (1), (2) wiedergeben.

Der Fall von mehr als zwei Veränderlichen ließe sich analog behandeln.[1])

Die Arbeit Lagranges hatte, wie es scheint, keinen großen Anklang; wenigstens finden wir, in den 20 darauffolgenden Jahren, keine auf denselben Gegenstand bezügliche Schrift. Erst 1779 veröffentlichte G. F. Fagnano eine Abhandlung[2]), in welcher er einige Maximal- und Minimalaufgaben sowohl durch die Differentialrechnung als durch die reine Geometrie behandelte. Es sind folgende:

a) Einen Punkt D innerhalb eines Dreiecks ABC derart zu bestimmen, daß $DA + DB + DC$ ein Minimum wird.

---

[1]) Einige Anwendungen der Theorie der Extremwerte finden sich in der Abhandlung von Lagrange: Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires, Nouv. Mém. Berlin 1773; Oeuvres III, 1869, p. 661—692. [2]) Problemata quaedam ad methodum maximorum et minimorum spectantia, Nova Acta Erudit. 1775 (publ. 1779), p. 281—303.

b) Einen Punkt D innerhalb eines Dreiecks ABC derart zu bestimmen, daß $\overline{DA}^2 + \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2$ ein Minimum wird.

c) Einen Punkt E innerhalb eines Vierecks $ABCD$ derart zu bestimmen, daß $EA + EB + EC + ED$ ein Minimum wird.

d) In ein spitzwinkliges Dreieck das Dreieck von kleinstem Umfang einzuschreiben.

e) Bezeichnen C, F, f den Mittelpunkt und die Brennpunkte einer Ellipse, so soll ein Punkt X des Umfanges derselben derart bestimmt werden, daß die Differenz der Winkel CXF, CXf ein Maximum wird.

Diese Probleme gehören sämtlich, mit Ausschluß des letzten, der Theorie der Maxima und Minima der Funktionen von mehreren Veränderlichen an. Daß Fagnano die darauf bezüglichen Untersuchungen von Euler und Lagrange kannte, ist sehr wahrscheinlich; jedoch folgt er bei der Auflösung seiner Probleme nicht dem von der Differentialrechnung vorgezeichneten methodischen Weg, sondern er bedient sich in jedem Falle besonderer Kunstgriffe. Aus der Differentialrechnung entnimmt er nur den Grundbegriff der Theorie der Maxima und Minima, in derselben Form, in welcher er schon bei Kepler vorkommt (diese Vorl., II², S. 828), daß nämlich in der Nähe eines Extremwertes die Veränderung der Funktion als gleich Null, die Funktion selbst also als konstant anzusehen ist. Hat er dann mit einer Funktion von zwei unabhängigen Veränderlichen zu tun, so nimmt er zuerst die eine von diesen als konstant an, und sucht denjenigen Wert der anderen zu bestimmen, für welchen die Variation der Funktion verschwindet, was ihm eine Maximums- oder Minimumsbedingung gibt; er setzt dann die zweite Veränderliche als konstant voraus, und verfährt auf ebendieselbe Weise, wodurch er die zweite Bedingung erhält.

Um dem Leser einen genaueren Begriff von Fagnanos Verfahren zu geben, wollen wir die Auflösung des ersten seiner Probleme anführen.

Man beschreibe um C mit dem Radius CD einen Kreisbogen VDF (Fig. 81), und E sei ein unendlich nahe an D liegender Punkt dieses Bogens; es muß sein, wegen des Minimumscharakters des Punktes D („per minimi naturam"):

$$DA + DB + DC = EA + EB + EC,$$

oder, da $DC = EC$:

$$DA + DB = EA + EB,$$

oder auch, wenn man um A, B die Kreisbögen Ed, De zieht:

$$Dd = Ee.$$

Es folgt hieraus, daß die beiden unendlichkleinen rechtwinkligen Dreiecke DdE, EeD einander gleich sind, so daß $e\widehat{ED} = d\widehat{DE}$. Ist DO die Tangente zum Bogen VF im Punkte D, so ist, da $B\widehat{D}e = B\widehat{e}D = \frac{\pi}{2}$:

$$B\widehat{D}O = \frac{\pi}{2} - e\widehat{D}E, \quad e\widehat{E}D = \frac{\pi}{2} - e\widehat{D}E,$$

folglich:

$$B\widehat{D}O = e\widehat{E}D = d\widehat{D}E;$$

addiert man die rechten Winkel $O\widehat{D}C$ bzw. $E\widehat{D}C$ hinzu, so folgt:

$$B\widehat{D}C = A\widehat{D}C.$$

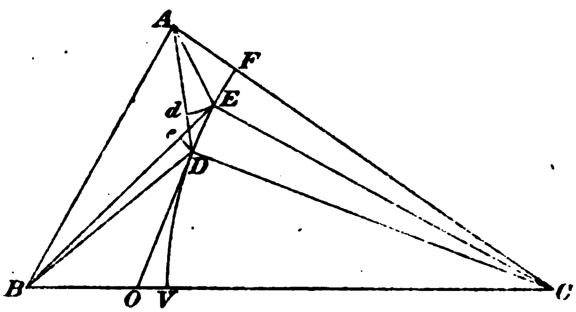


Fig. 81.

Auf gleiche Weise erhält man:

$$B\widehat{D}C = A\widehat{D}B.$$

Die Minimumsbedingung ist also:

$$A\widehat{D}B = B\widehat{D}C = C\widehat{D}A = \frac{2\pi}{3}.$$

Derselbe Gedankengang, den wir soeben zu schildern versuchten, erscheint wieder, wenn auch unter etwas veränderter Form, in einem schon oben (S. 687) erwähnten italienischen Lehrbuche, in den Principii fondamentali del calcolo differenziale e integrale von Lotteri. Es wird in diesem Werke vorgeschrieben, daß man im Falle von mehreren Veränderlichen einige derselben als konstant ansehen möge. Soll z. B. eine Zahl a in drei Teile von größtem Produkte zerlegt werden, und sind zwei derselben x, y, so daß das zu untersuchende Produkt durch:

$$f(x, y) = axy - x^2y - xy^2$$

ausgedrückt wird, so betrachtet man zunächst x als einzig veränderlich; das gibt durch Differentiation:

$$ay - 2xy - y^2 = 0,$$

also:

$$x = \frac{a-y}{2}, \quad f(x, y) = \frac{y}{4}(a-y)^2.$$

Differentiiert man jetzt nach y, so erhält man:

$$\frac{1}{4}(a-y)(a-3y) = 0,$$

woraus sich $y = \frac{a}{3}$, und folglich $x = \frac{a}{3}$ ergibt.

Um den Unterschied zwischen diesem und dem Euler-Lagrangeschen Verfahren in wenigen Worten nach der heutigen Ausdrucksweise zusammenzufassen, können wir sagen: Nach Euler und Lagrange ergeben sich die gesuchten Wertepaare x, y aus der Auflösung des Gleichungssystems:

(6) $$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Nach Lotteri muß man dagegen erst die Gleichung:

(7) $$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$$

nach x auflösen; ergibt sich hieraus:

$$x = \vartheta(y),$$

und setzt man:

$$f(\vartheta(y), y) = g(y),$$

so gibt die Auflösung der Gleichung:

(8) $$\frac{dg(y)}{dy} = 0$$

die gesuchten Werte von y, die dann, in $x = \vartheta(y)$ eingesetzt, die entsprechenden Werte von x liefern.

Es ist leicht zu sehen, daß beide Wege zu demselben Resultate führen. Man hat nämlich nach der Definition von $\vartheta(y)$:

(9) $$\frac{\partial f(\vartheta(y), y)}{\partial \vartheta(y)} = 0,$$

ferner:

$$\frac{dg(y)}{dy} = \frac{\partial f(\vartheta(y), y)}{\partial \vartheta(y)} \vartheta'(y) + \frac{\partial f(\vartheta(y), y)}{\partial y},$$

so daß sich (8), wegen (9), auf:

$$(10) \qquad \frac{\partial f(\vartheta(y), y)}{\partial y} = 0$$

reduziert, und das Gleichungssystem (7), (8) durch das System (9), (10) ersetzbar ist, welches mit (6) übereinstimmt.

Es ist merkwürdig, daß Lagrange selbst in seiner Théorie des fonctions analytiques ganz ähnlich wie Lotteri verfährt; nur ist seine Behandlung insofern vollständiger, als er auch die zweiten Ableitungen berücksichtigt.

2. Unbestimmte Formen.

Zur Bestimmung des wahren Wertes des Verhältnisses $\frac{0}{0}$ geben Riccati und Saladini in ihren Institutiones analyticae eine von Riccati[1]) ersonnene Methode, die aber von der gewöhnlichen nicht wesentlich abweicht. Liegt das Verhältnis $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ vor, und ist:

$$f(a) = \varphi(a) = 0,$$

so muß man $f(x)$ und $\varphi(x)$ durch $x - a$ so oft teilen, als wenigstens einer der beiden Quotienten einen bestimmten Wert erhält. Kommen in $f(x)$ oder in $\varphi(x)$ Wurzelgrößen vor, so muß man x durch $a + dx$ ersetzen und dann die Wurzeln „more neutoniano" ausziehen (man macht z. B. $\sqrt[n]{1 + \lambda dx + \cdots} = 1 + \frac{\lambda}{n} dx + \cdots$); der Quotient der Koeffizienten der ersten Potenz von dx liefert den wahren Wert des Verhältnisses.

Es gehört wohl hierher eine Bemerkung von Kästner.[2]) Es ist:

$$\sec\varphi \pm \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\left(45^0 \pm \frac{\varphi}{2}\right),$$

also:

$$2 \operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) - \operatorname{tang}\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Hieraus folgt für $\varphi = 90^0$:

$$(11) \qquad \sec 90^0 + \operatorname{tang} 90^0 = \operatorname{tang} 90^0,$$

und:

---

[1]) Animadversiones in fractionem, cuius numerator et denominator per certam determinationem nihilo aequales fiunt, Comm. Bon. II, P. III, 1747, p. 173—193. [2]) Summe und Unterschied von Tangente und Secante, Arch. d. r. und angew. Math. II, 1797—1798, S. 174—180.

$$\lim_{\varphi=90^\circ} \frac{\operatorname{tang}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)}{\operatorname{tang}\varphi} = 2$$

oder:

(12)
$$\lim_{\varphi=90^\circ} \frac{\sec\varphi+\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi} = 2.$$

Die Gleichungen (11), (12) stehen zueinander in Widerspruch. Man muß aber erwägen, sagt Kästner, daß der rechte Winkel weder Sekante noch Tangente besitzt, so daß (11) nur aussagt, daß zwei nicht existierende Dinge zusammengenommen ein nicht existierendes Ding ausmachen. Nur für diejenigen, fährt er fort, besteht der Widerspruch, die das Unendliche als etwas Wirkliches betrachten.

3. Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Reihenlehre.

Diese Anwendungen erscheinen in unserer Periode um so häufiger, als man sich damals berechtigt glaubte, mit unendlichgroßen und unendlichkleinen Größen und mit unendlichen Reihen ganz rücksichtslos umzugehen. Eben darum aber bedürfen die bezüglichen Formeln einer genauen Prüfung, und einige von ihnen haben nur eine — wie man heute sagen würde — asymptotische Bedeutung. Solcherart ist gleich die erste, die wir anzuführen haben.

In die schon oben (S. 747) besprochene Formel:

$$\int_0^1 \frac{(x^m - x^n)\,dx}{x\log x} = \log\frac{m}{n}$$

setzt Euler[1]) $j\left(x^{\frac{1}{j}}-1\right)$ statt $\log x$ ein, wo j eine unendliche Zahl bezeichnet; es ergibt sich:

$$\int_0^1 \frac{x^m - x^n}{jx\left(x^{\frac{1}{j}}-1\right)}\,dx = \log\frac{m}{n},$$

und durch die Substitution $x = z^j$:

$$\int_0^1 \frac{z^{mj} - z^{nj}}{z(z-1)}\,dz = \log\frac{m}{n}.$$

---

[1]) Speculationes analyticae, Novi Comm. Acad. Petrop. XX, 1775 (publ. 1776), p. 59—79.

Nehmen wir $m > n$ an, und entwickeln $\frac{z^{mj}}{z(z-1)}$, $\frac{z^{nj}}{z(z-1)}$ in Reihen, so folgt nach Integration:

$$\frac{1}{mj-1}+\frac{1}{mj-2}+\cdots-\frac{1}{nj-1}-\frac{1}{nj-2}-\cdots=\log\frac{m}{n},$$

oder:

$$\frac{1}{mj-1}+\frac{1}{mj-2}+\cdots+\frac{1}{nj}=\log\frac{m}{n}.$$

Es mag hier bemerkt werden, daß die Entwicklung nach fallenden Potenzen von z im Intervalle $0 \leq z \leq 1$ nicht konvergiert. Man kann aber, wenigstens für ganzzahlige m und n, dieser Schwierigkeit aus dem Wege gehen wie folgt. Es ist:

$$\frac{z^{mj}-z^{nj}}{z(z-1)}=z^{nj-1}\frac{z^{(m-n)j}-1}{z-1}=z^{nj-1}\left(z^{(m-n)j-1}+z^{(m-n)j-2}+\cdots+1\right)$$
$$=z^{mj-2}+z^{mj-3}+\cdots+z^{nj-1},$$

woraus sich durch Integration wiederum ergibt:

$$\int_0^1\frac{z^{mj}-z^{nj}}{z(z-1)}\,dz=\frac{1}{mj-1}+\frac{1}{mj-2}+\cdots+\frac{1}{nj}.$$

Ein interessantes Problem der Differenzenrechnung ist folgendes[1]): Aus der als bekannt vorausgesetzten Summe:

$$f_n(x)=1^n+2^n+\cdots+x^n$$

die Summen:

$$f_{n+1}(x)=1^{n+1}+2^{n+1}+\cdots+x^{n+1},$$
$$f_{n-1}(x)=1^{n-1}+2^{n-1}+\cdots+x^{n-1}$$

abzuleiten. Dieses Problem löst Euler auf Grund einer von ihm früher aufgestellten Formel, welche den Ausdruck von $f_n(x)$ unter der Form einer ganzen rationalen Funktion von x von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung angibt. Man kann allgemeiner aus der Summe $\sum_{r=1}^{x}\varphi(r)$ die Summen $\sum_{r=1}^{x}\int\varphi(r)dr$ und $\sum_{r=1}^{x}\varphi'(r)$ ableiten.

Man hat oft versucht, die Summe einer Reihe durch ein bestimmtes Integral auszudrücken, wenn dieses auch manchmal nur eine scheinbare Vereinfachung ist, insofern als die Berechnung eines

---

[1]) Euler, De singulari ratione differentiandi et integrandi quae in summis serierum occurrit (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VI, 1788 (publ. 1790), p. 3—15.

bestimmten Integrals nicht selten nur durch Reihenentwicklung geschehen kann. Euler[1]) hat dieses Problem für die Summe:

$$1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots$$

gelöst, wo:

$$\alpha_h = \left(-\frac{a:b}{h}\right) = (-1)^h \frac{a}{b} \frac{a+b}{2b} \frac{a+2b}{3b} \cdots \frac{a+(h-1)b}{hb}$$

ist. Man kann durch Differentiation bestätigen, daß:

$$x^a y^c = a \int x^{a-1} y^{c-b} dx - (a+c) \int x^{a+b-1} y^{c-b} dx,$$

wo:

$$y = (1 - x^b)^{\frac{1}{b}}.$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^1 x^{a+b-1} y^{c-b} dx = \frac{a}{a+c} \int_0^1 x^{a-1} y^{c-b} dx,$$

und analog:

$$\int_0^1 x^{a+2b-1} y^{c-b} dx = \frac{a+b}{a+b+c} \int_0^1 x^{a+b-1} y^{c-b} dx,$$

also:

$$\int_0^1 x^{a+2b-1} y^{c-b} dx = \frac{a}{a+c} \frac{a+b}{a+b+c} \int_0^1 x^{a-1} y^{c-b} dx,$$

usw. Setzt man insbesondere $c = b - a$, und beachtet, daß:

$$\int_0^1 x^{a-1} y^{-a} dx = \frac{\pi}{b \sin \frac{a\pi}{b}},$$

ein Wert, den wir mit Δ bezeichnen wollen, so erhält man:

$$\int_0^1 x^{a+b-1} y^{-a} dx = \frac{a}{b} \Delta = \alpha_1 \Delta,$$

$$\int_0^1 x^{a+2b-1} y^{-a} dx = \frac{a}{b} \frac{a+b}{2b} \Delta = \alpha_2 \Delta,$$

usw. Es ist aber:

[1]) Plenior expositio serierum illarum memorabilium, quae ex unciis potestatum binomii formantur (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VIII, 1790 (publ. 1794), p. 32—68.

$$\int_0^1 x^{a-1} y^{-2a} dx = \int_0^1 x^{a-1} y^{-a} dx (1 + \alpha_1 x^b + \alpha_2 x^{2b} + \cdots)$$

$$= \int_0^1 x^{a-1} y^{-a} dx + \alpha_1 \int_0^1 x^{a+b-1} y^{-a} dx + \alpha_2 \int_0^1 x^{a+2b-1} y^{-a} dx + \cdots,$$

folglich:

$$\int_0^1 x^{a-1} y^{-2a} dx = \Delta(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots),$$

und hieraus:

$$1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots = \frac{1}{\Delta} \int_0^1 x^{a-1} y^{-2a} dx.$$

Die Summen:

$$\begin{aligned} &1 + \alpha_1 \alpha_1' + \alpha_2 \alpha_2' + \cdots, \\ &\alpha_1 + \alpha_2 \alpha_1' + \alpha_3 \alpha_2' + \cdots, \\ &\alpha_2 + \alpha_3 \alpha_1' + \alpha_4 \alpha_2' + \cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

wo $\alpha_h' = \binom{-a':b}{h}$, lassen sich auf analoge Weise berechnen.

Ein Interpolationsproblem führte Euler[1]) dazu, die Größe:

$$A = \frac{f^2(f+2a)^2(f+4a)^2\cdots}{(f+a)^2(f+3a)^2(f+5a)^2\cdots}$$

durch bestimmte Integrale auszudrücken. Aus:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}} = \frac{m+k}{m}\,\frac{m+k+n}{m+n}\cdots \int_0^1 \frac{x^{\infty}dx}{(1-x^n)^{\frac{n-k}{n}}}.$$

leitete er für $\begin{cases} k = a \\ m = f \\ n = 2a \end{cases}$ und für $\begin{cases} k = a \\ m = f + a \\ n = 2a \end{cases}$ ab:

$$\int_0^1 \frac{x^{f-1}dx}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \frac{(f+a)(f+3a)\cdots}{f(f+2a)\cdots} \int_0^1 \frac{x^{\infty}dx}{\sqrt{1-x^{2a}}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^{f+a-1}dx}{\sqrt{1-x^{2a}}} = \frac{(f+2a)(f+4a)\cdots}{(f+a)(f+3a)\cdots} \int_0^1 \frac{x^{\infty}dx}{\sqrt{1-x^{2a}}},$$

also:

---

[1]) De fractionibus continuis Wallisii (1780), Mém. Acad. St.-Pét. V, 1812 (publ. 1815), p. 24—44.

$$A = f \frac{\int_0^1 \frac{x^{f+a-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}}{\int_0^1 \frac{x^{f-1}\,dx}{\sqrt{1-x^{2a}}}}.$$

Ebenfalls mit der Differenzen- und Interpolationslehre hängt die Eulersche[1]) Formel zusammen:

$$f(x) + f(x+1) + f(x+2) + \cdots$$
$$= \int_x^\infty f(x)\,dx + \tfrac{1}{2} f(x) - \tfrac{1}{2} A f'(x) + \tfrac{1}{8} B f'''(x) - \tfrac{1}{32} C f^{V}(x) + \cdots,$$

wo die Zahlen:

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{90}, \quad C = \frac{1}{945}, \ \cdots$$

die nämlichen sind, welche in den Formeln:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = A\pi^2,$$
$$1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots = B\pi^4,$$
$$1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \cdots = C\pi^6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

vorkommen. Eine analoge Formel gilt für die Summe:

$$f(x) - f(x+1) + f(x+2) - \cdots.$$

Endlich drückt Euler[2]) den Binomialkoeffizienten $\binom{p}{q}$ durch ein bestimmtes Integral aus:

$$\binom{p}{q} = \frac{1}{q \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-q}\,dx};$$

insbesondere ist:

$$\binom{0}{q} = \frac{1}{q \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{-q}\,dx} = \frac{\sin q\pi}{q\pi}.$$

---

[1]) Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas differentiales investigandi (1780), Mém. Acad. St.-Pét. V, 1812 (publ. 1815), p. 45—56. [2]) De unciis potestatum binomii earumque interpolatione (1781), Mém. Acad. St.-Pét. IX, 1819—1820 (publ. 1824), p. 57—76.

Mit der Auswertung der Reihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p+qn},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p+qn},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+qn)(r+sn)},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(p+qn)(r+sn)(t+un)},\ \cdots,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a+bn}{(p+qn)(r+sn)\cdots},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+bn)(c+dn)}{(p+qn)(r+sn)\cdots},\ \cdots$$

durch bestimmte Integrale beschäftigt sich **Lorgna**[1]). **Antonio Maria Lorgna**, geboren zu Cerea bei Verona am 18. Oktober 1735, gestorben zu Verona am 28. Juni 1796, war Oberst des Geniekorps und Professor an der Militärschule zu Verona und beschäftigte sich besonders mit hydraulischen Fragen; er war der Stifter und der erste Vorsteher der **Società Italiana delle Scienze** und veröffentlichte zahlreiche mathematische und hydraulische Werke und Abhandlungen.

Eine spätere Schrift von **Lorgna**[2]) bezweckt die Summierung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^n \pm 1}$, wo $a > 1$. Setzen wir der Einfachheit wegen $a = e$ voraus. Es ist:

$$\sin\frac{n}{i} = \frac{e^n - e^{-n}}{2i},$$

also:

$$\frac{1}{2\sin\frac{n}{i}} = \frac{ie^n}{e^{2n}-1}.$$

Setzt man nun in die bekannte Formel:

$$\int_0^1 \frac{x^p + x^{q-p}}{1+x^q}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{q\sin\frac{p\pi}{q}}$$

die Werte $p = \frac{n}{i\pi}$, $q = 1$ ein, so folgt:

$$\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}} + x^{1-\frac{n}{i\pi}}}{1+x}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{\sin\frac{n}{i}} = \frac{2i\pi e^n}{e^{2n}-1},$$

---

[1]) Specimen de seriebus convergentibus. Verona 1775. [2]) Delle progressioni reciproche delle potenze affette. Mem. Soc. It. sc. II, P. II, 1784, p. 210—236.

oder:

$$\frac{e^n \pm 1}{2 i \pi e^n} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}} + x^{1-\frac{n}{i\pi}}}{1+x} \frac{dx}{x} = \frac{1}{e^n \mp 1},$$

oder auch:

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}} + x^{1-\frac{n}{i\pi}}}{1+x} \frac{dx}{x} \pm e^{-n} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}} + x^{1-\frac{n}{i\pi}}}{1+x} \frac{dx}{x}\right] = \frac{1}{e^n \mp 1}.$$

Diese Relation läßt sich folgendermaßen schreiben:

$$\frac{1}{e^n \mp 1} = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}}\left(1 - x^{\frac{1}{i\pi}}\right)}{(1+x)\left(1 - x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{n}{i\pi}}\left(1 - x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)}{(1+x)\left(1 - x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}\right.$$

$$\left.\pm e^{-n} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}}\left(1 - e^{-1} x^{\frac{1}{i\pi}}\right)}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} \pm e^{-n} \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{n}{i\pi}}\left(1 - e^{-1} x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} - \int_0^1 \frac{x^{\frac{n+1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}\right.$$

$$+ \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{n}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} - \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{n+1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}$$

$$\pm e^{-n} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} \mp e^{-n-1} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n+1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}$$

$$\left.\pm e^{-n} \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x} \mp e^{-n-1} \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{n+1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1 - e^{-1} x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)} \frac{dx}{x}\right].$$

Summiert man nach n von 1 bis ∞, so erhält man nach leichten Reduktionen:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n \mp 1} = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1-x^{\frac{1}{i\pi}}\right)}\frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{x^{1-\frac{1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1-x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)}\frac{dx}{x}\right.$$

$$\left.\pm e^{-1}\int_0^1 \frac{x^{\frac{1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1-e^{-1}x^{\frac{1}{i\pi}}\right)}\frac{dx}{x} \pm e^{-1}\int_0^1 \frac{x^{1-\frac{1}{i\pi}}}{(1+x)\left(1-e^{-1}x^{-\frac{1}{i\pi}}\right)}\frac{dx}{x}\right],$$

eine Formel, welche die Summe der beiden Reihen links durch bestimmte Integrale ausdrückt.

Auch Malfatti in einer schon oben angeführten Abhandlung[1]) beschäftigt sich mit der Summierung von Reihen durch bestimmte Integrale. Es ist:

$$\int \frac{x^{\frac{n}{m}}\,dx}{1+x} = \int\left[x^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{n+m}{m}} + x^{\frac{n+2m}{m}} - \cdots\right]dx$$

$$= m\left[\frac{x^{\frac{m+n}{m}}}{m+n} - \frac{x^{\frac{2m+n}{m}}}{2m+n} + \frac{x^{\frac{3m+n}{m}}}{3m+n} - \cdots\right] + C,$$

also:

$$\frac{1}{m}\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}\,dx}{1+x} = \frac{1}{m+n} - \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} - \cdots.$$

Man erhält analog:

$$\frac{1}{m}\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}\,dx}{1-x} = \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \frac{1}{3m+n} + \cdots$$

Es ist zu beachten, daß dieses letzte Integral unendlich ist; führt man nämlich die Substitution $x = y^m$ aus, zerlegt in einfache Brüche und integriert, so kommt das Glied:

$$\Big[\log(1-y)\Big]_0^1 \quad \text{oder} \quad \Big[\log\left(1-x^{\frac{1}{m}}\right)\Big]_0^1$$

[1]) Essai analytique sur l'intégration de deux formules différentielles, et sur la somme générale des séries harmoniques à termes rationnels, Mém. Acad. Turin 1788—1789 (publ. 1790), p. 58—112. Siehe auch: Gratognini, Saggio analitico sopra una svista comune nel problema per la valutazione delle annuità, e sull' uso del Calcolo differenziale ed integrale nel sommare le serie armoniche relativamente a tale problema, Pavia 1782.

vor. Nichtsdestoweniger hat die Formel nach Malfatti eine Bedeutung; es ergibt sich nämlich für jedes n und p:

$$\frac{1}{m}\left[\int_0^1 \frac{x^{\frac{n}{m}}}{1-x}\,dx - \int_0^1 \frac{x^{\frac{p}{m}}}{1-x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{m+n} + \frac{1}{2m+n} + \cdots - \frac{1}{m+p} - \frac{1}{2m+p} - \cdots,$$

und die links vorkommende Differenz ist endlich, weil die beiden Glieder $\left[\log\left(1 - x^{\frac{1}{m}}\right)\right]_0^1$ sich gegenseitig aufheben.

Andere Schriften setzen sich als Zweck vor, die Summe einer Reihe oder den Wert eines unendlichen Produktes in geschlossener Form mit Hilfe der Integralrechnung zu ermitteln. Um auch hier mit Euler zu beginnen, führen wir zunächst eine Schrift[1]) an, wo er die schon bekannte unendliche Produktenentwicklung von $\cos\frac{\pi}{2n}$:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9n^2}\right)\left(1 - \frac{1}{25n^2}\right)\cdots$$

vermittels Integrationen berechnet.

Ebenfalls Euler verdankt man die merkwürdige Formel:

$$(13)\quad \left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots\right) + \left(\frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{6} - \log x \log y,$$

wo $x + y = 1$.[2]) Es sei:

$$p = \int \frac{dx}{x}\log y, \quad q = \int \frac{dy}{y}\log x,$$

woraus folgt:

$$p + q = \log x \log y + C.$$

Man hat für $x + y = 1$:

$$p = \int \frac{dx}{x}\log(1-x) = -\int \frac{dx}{x}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)$$

$$= -\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots\right),$$

---

[1]) Exercitatio analytica (1776), Nova Acta Acad. Petrop. VIII, 1790 (publ. 1794), p. 69—72. [2]) De summatione serierum in hac forma contentarum:

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \text{etc.}$$

(1779), Mém. Acad. St.-Pét. III, 1809—1810 (publ. 1811), p. 26—42.

und analog:

$$q = -\left(\frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \cdots\right),$$

also:

$$\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots\right) + \left(\frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \cdots\right) = C - \log x \log y.$$

Für $x = 1$ ist:

$$y = 0, \quad \log x \log y = 0;$$

es folgt:

$$C = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6},$$

woraus (13) sich ergibt.

Man kann auf analoge Weise die folgenden Beziehungen finden:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \cdots\right) + \left(\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \cdots\right) = \frac{\pi^2}{6} + \log x \log \frac{y}{\sqrt{x}},$$

wo $x - y = 1$;

$$\left(\frac{x}{c} + \frac{x^2}{4c^2} + \frac{x^3}{9c^3} + \cdots\right) + \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \cdots\right) + \left(\frac{y}{c} + \frac{y^2}{4c^2} + \frac{y^3}{9c^3} + \cdots\right)$$

$$+ \left(\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \cdots\right) = \log c \log \frac{xy}{c} - \log x \log y + \frac{\pi^2}{6}$$

$$+ \left(\frac{c}{1} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{9} - \cdots\right),$$

wo $xy + x + y = c$.

Auch die Relation:

$$\frac{2}{1} \sin\omega \sin\omega - \frac{2^3}{3} \sin 3\omega \sin\omega^3 + \frac{2^5}{5} \sin 5\omega \sin\omega^5 - \cdots$$

$$= \frac{2^2}{2} \cos 2\omega \sin\omega^2 - \frac{2^4}{4} \cos 4\omega \sin\omega^4 + \frac{2^6}{6} \cos 6\omega \sin\omega^6 - \cdots$$

wird von Euler[1]) auf Grund der Integralrechnung bewiesen. Es mögen die beiden Seiten durch S bzw. T bezeichnet werden. Setzen wir $2 \sin\omega = b$ und betrachten wir augenblicklich b, ω als voneinander unabhängig, so ist:

$$S = \frac{b \sin\omega}{1} - \frac{b^3 \sin 3\omega}{3} + \cdots, \quad T = \frac{b^2 \cos 2\omega}{2} - \frac{b^4 \cos 4\omega}{4} + \cdots,$$

$$\frac{dS}{d\omega} = b \cos\omega - b^3 \cos 3\omega + \cdots, \quad \frac{dT}{d\omega} = -b^2 \sin 2\omega + b^4 \sin 4\omega - \cdots,$$

woraus sich leicht ergibt:

---

[1]) De seriebus memorabilibus quibus sinus et cosinus angulorum multiplorum exprimere licet (1780), Mém. Acad. St.-Pét. V, 1812 (publ. 1815), p. 57—72.

$$\frac{dS}{d\omega}(1+2b^2\cos 2\omega+b^4)=b(1+b^2)\cos\omega,$$

$$\frac{dT}{d\omega}(1+2b^2\cos 2\omega+b^4)=-b^2\sin 2\omega,$$

und durch Integration:

$$S=\frac{1}{4}\log\frac{1+b^2+2b\sin\omega}{1+b^2-2b\sin\omega},$$

$$T=\frac{1}{4}\log[(1+b^2+2b\sin\omega)(1+b^2-2b\sin\omega)],$$

also:

$$T-S=\frac{1}{2}\log(1+b^2-2b\sin\omega),$$

und durch Einsetzung des Wertes von b:

$$T=S.$$

Verschiedene Methoden zur Auswertung von unendlichen Reihen durch Integration wurden von Landen[1]) und Fontana[2]) entwickelt.

Transzendenten. Elliptische Integrale.

1. Verschiedene Transzendenten.

Bevor wir auf die elliptischen Integrale kommen, deren Behandlung beinahe das ganze Kapitel einnehmen wird, wollen wir uns mit einigen anderen Transzendenten von weit geringerer Wichtigkeit beschäftigen.

Nur wenige Worte werden wir einer Schrift Eulers über unstetige Funktionen[3]) widmen. Euler bezeichnet diejenigen Funktionen als „unstetig", die sich nicht durch einen einzigen analytischen Ausdruck darstellen lassen; so ist z. B. eine Polygonallinie das Bild einer unstetigen Funktion. Nun fragt sich Euler, ob man solche Funktionen in der Analysis zulassen darf. Dazu bemerkt er, daß die Integration der partiellen Differentialgleichungen willkürliche Funktionen einführt, und daß man sich folglich, wenn man alle Lösungen er-

---

[1]) A new method of obtaining the sums of certain series, Math. Mem. I, p. 67—118. [2]) Memoria sopra la somma di alcune serie (das mir zur Verfügung stehende, der Universitäts-Bibliothek zu Pavia angehörende Exemplar trägt weder Druckort noch Datum). [3]) De usu functionum discontinuarum in analysi, Novi Comm. Acad. Petrop. XI, 1765 (publ. 1767), p. 3—27.

halten will, erlauben muß, als solche nicht nur stetige, sondern auch unstetige Funktionen anzunehmen.

Vandermonde betrachtet in einer schon oben (S. 120) angeführten Schrift[1]) den später als „Fakultät“ oder „Faktorielle“ bezeichneten Ausdruck:

$$[p]^n = p(p-1)\cdots(p-n+1).$$

Er findet:

$$[\infty]^n = \infty^n, \quad [p]^n = [p]^m[p-m]^{n-m},$$

$$[p]^0 = 1, \quad [p]^{-m} = \frac{1}{[p+m]^m},$$

ferner:

(1)
$$[p+m+n]^n[p]^{-n}$$
$$= 1 + [m]^1[0]^{-1}[n]^1[p]^{-1} + [m]^2[0]^{-2}[n]^2[p]^{-2} + \cdots,$$

und hieraus, da die rechte Seite in bezug auf m und n symmetrisch ist:

$$[p+m+n]^n[p]^{-n} = [p+m+n]^m[p]^{-m}.$$

Die Formel (1) kann als Definition des Ausdruckes:

$$[p+m+n]^n[p]^{-n}$$

für nicht ganzzahlige m und n dienen. Eine andere wichtige Formel ist:

(2)
$$[q]^n[p]^{-n} = \frac{[p]^{-\infty}[q]^{-\infty}}{[p+n]^{-\infty}[q-n]^{-\infty}}$$
$$= \frac{(p+n+1)(p+n+2)\cdots(q-n+1)(q-n+2)\cdots}{(p+1)(p+2)\cdots(q+1)(q+2)\cdots}.$$

Die Binomialreihe läßt sich durch die hier eingeführte Bezeichnung schreiben:

$$(1+x)^r = 1 + [r]^1[0]^{-1}x + [r]^2[0]^{-2}x^2 + \cdots.$$

Man erhält demnach durch Reihenintegration:

$$I = \nu N \int_0^1 x^{\nu N-1}(1-x^\nu)^P dx = 1 - \frac{N}{N+1}[P]^1[0]^{-1}$$
$$+ \frac{N}{N+2}[P]^2[0]^{-2} + \cdots$$
$$= 1 + [P]^1[0]^{-1}[-N]^1[N]^{-1} + [P]^2[0]^{-2}[-N]^2[N]^{-2} + \cdots.$$

---

[1]) Mémoire sur les irrationnelles de différens ordres avec une application au cercle, Hist. Acad. Paris 1772, P. I, p. 489—498.

Dieselbe Entwicklung ergibt sich aber auch aus der rechten Seite von (1), wenn man $m = P$, $n = -N$, $p = N$ oder $m = -N$, $n = P$, $p = N$ darin setzt; es ist also:

$$I = [P]^{-N}[N]^{N} = [P]^{P}[N]^{-P},$$

oder wegen (2):

$$I = \frac{[P]^{-\infty}[N]^{-\infty}}{[P+N]^{-\infty}[0]^{-\infty}} = \frac{(P+N+1)(P+N+2)\cdots 1\cdot 2\cdots}{(P+1)(P+2)\cdots(N+1)(N+2)\cdots}.$$

Ist insbesondere $\nu = 2$, $N = \frac{1}{2}$, $P = -\frac{1}{2}$, so folgt:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2},$$

also:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1\cdot 1}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5} + \cdots = \left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{2}}\left[-\frac{1}{2}\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdots}.$$

Eine andere merkwürdige Transzendente ist der „Hyperlogarithmus“, wie Mascheroni[1]) das Integral $\int\frac{dx}{\log x}$ nennt. Diese Funktion entwickelt er für jeden Wert von x in eine konvergente Reihe, und zeigt, wie man mit Hilfe derselben andere Integrale berechnen kann; es ist z. B.:

$$\int \log\log x\, dx = x \log\log x - \int\frac{dx}{\log x}.$$

Er versucht auch, x durch $\int\frac{dx}{\log x} = u$ auszudrücken; dazu setzt er:

$$x = K + Au + Bu^2 + \cdots,$$

und bestimmt die Koeffizienten mit Hilfe der Relation:

$$x\frac{d^2x}{du^2} = \frac{dx}{du}.$$

Mascheroni betrachtet auch das Integral $\int\frac{dx}{\log\log x}$, das als „hypersecundus Logarithmus“ bezeichnet wird.

Adrien Marie Legendre[2]) verdankt man die Einführung in die Analysis der heutzutage „Kugelfunktionen“ genannten Polynome:

---

[1]) Adnotationes ad Calculum integralem Euleri etc. [2]) Recherches sur l'attraction des sphéroïdes homogènes, Mém. prés. par divers savants X, 1785, p. 411—434. — Recherches sur la figure des planètes, Hist. Acad. Paris 1784 (publ. 1787), p. 370—389. — Suite des recherches sur la figure des planètes, Hist. Acad. Paris 1789 (publ. 1793), p. 372 bis 454.

$$X_0 = 1,$$
$$X_1 = x,$$
$$X_2 = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right),$$
$$\cdots\cdots$$
$$X_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right),$$

die aus der Reihenentwicklung:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots$$

entstehen. Über diese Polynome beweist er die folgenden Sätze[1]):

a) $$X_n(1) = 1;$$

b) $$|X_n(x)| < 1 \quad \text{für} \quad |x| < 1;$$

c) die Wurzeln der Gleichung $X_n(x) = 0$ sind sämtlich reell, kleiner als 1 und voneinander verschieden;

d) $$\int_0^1 x^n X_r dx = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{(n+r+1)(n+r-1)\cdots(n-r+3)},$$

insbesondere:

$$\int_0^1 x^{2n} X_{2r} dx = 0 \quad \text{für} \quad n < r;$$

e) $$\int_{-1}^1 X_m X_n dx = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n;$$

f) $$\int_{-1}^1 X_n^2 dx = \frac{2}{2n+1};$$

g) $$\int_{-1}^1 \frac{X_{2n}dx}{(1+kx^2)^{\frac{2n+3}{2}}} = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(-k)^n}{(1+k)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

Die erste Schrift von Legendre wurde der Pariser Akademie im Jahre 1784 vorgelesen, und bot Laplace[2]) Gelegenheit dar, die

---

[1]) Einige von diesen Sätzen wurden von Legendre zuerst für gerade, später aber für beliebige Indizes aufgestellt. [2]) Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes, Hist. Acad. Paris 1782

Theorie der Kugelfunktionen zu fördern und zu erweitern. Er führte die von zwei Paaren von Veränderlichen ϑ, ω, ϑ', ω' abhängigen Kugelfunktionen Y_n ein, stellte die Differentialgleichung auf, welcher dieselben genügen, nämlich:

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial Y_n}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\omega^2}+n(n+1)Y_n=0,$$

wo $\mu=\cos\vartheta$; ferner entwickelte er Y_n nach den Kosinussen der Vielfachen von $\omega-\omega'$, und gab die Integralrelation:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_m Y_n d\mu d\omega = 0 \quad \text{für} \quad m \neq n.$$

Die Untersuchungen von Laplace wurden von Legendre in der zuletzt angeführten Abhandlung wieder aufgenommen und vervollständigt.

2. Elliptische Integrale.[1])

Die Theorie der elliptischen Integrale, deren Geburt wir in der vorhergehenden Periode beigewohnt haben, nahm in der gegenwärtigen einen unerwarteten Aufschwung infolge einer von Euler in einer im Jahre 1754 herausgegebenen anonymen Schrift[2]) aufgeworfenen Frage. Es war eben diese Frage, die G. B. Fagnano dazu aufmunterte, die Untersuchungen seines Vaters wieder aufzunehmen, und dessen Prioritätsrechte zu behaupten, während für Euler selbst seine eigene Frage der Ausgangspunkt einer Reihe von wichtigen Arbeiten war.

Um uns inmitten der großen Menge von uns vorliegenden Schriften zu orientieren, werden wir versuchen, dieselben um zwei Grundfragen zu gruppieren, nämlich:

A. Beziehungen zwischen Bögen eines und desselben Kegelschnittes (Eulersche Differentialgleichung, Additionssätze);

(publ. 1785); Oeuvres X, Paris 1894, p. 341—419. Daß die Priorität der Erfindung der Kugelfunktionen Legendre zukommt, ist ganz unzweifelhaft; siehe Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, II. Aufl., Berlin 1878, Einleitung zum ersten Bande.

[1]) Über die Geschichte der elliptischen Integrale führen wir zwei wertvolle Werke an: Enneper, Elliptische Functionen. Theorie und Geschichte, II. Aufl., Halle 1890; Bellacchi, Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche, Firenze 1894. [2]) Daß diese Schrift von Euler herrührt, ergibt sich aus Nova Acta Erud. 1770, p. 483 und aus Novi Comm. Acad. Petrop. VII. 1758—1759 (publ. 1761), p. 128.

B. Beziehungen zwischen Bögen verschiedener Kegelschnitte (Transformation, Normalformen).

Einige wenige Schriften, die zu keiner dieser Fragen in Beziehung stehen, werden wir behandeln unter dem Titel:

C. Vermischte Fragen.

A. Beziehungen zwischen Bögen eines und desselben Kegelschnittes.

Im Jahre 1754 erschien in den Nova Acta Eruditorum (p. 40) als Aufforderung, einen Satz zu beweisen und ein Problem aufzulösen, die soeben erwähnte anonyme Schrift Eulers.

Der Satz war: Ist (Fig. 82) O der Mittelpunkt, $A'A$ die größere Achse einer Ellipse und sind $P'P$, $Q'Q$ zwei konjugierte Durchmesser derselben, V', V die Projektionen von Q' Q auf $P'P$, verlängert man $P'P$ bis R, so daß $OR = OA$, und schneidet die zu $A'A$ senkrechte Gerade RT die Ellipse in S, so ist:

Bogen $Q'PS$ — Bogen QAS $= 2 \cdot OV = V'V$.

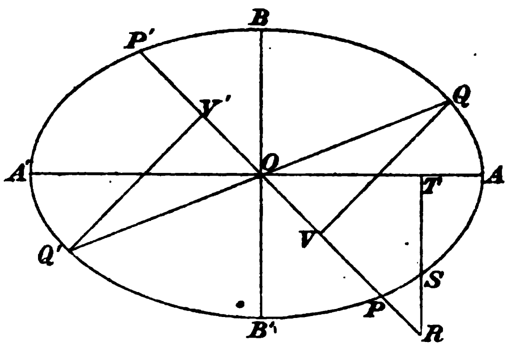


Fig. 82.

Das Problem war: Auf einem Ellipsenquadranten einen Bogen algebraisch zu bestimmen, dessen Länge die Hälfte der Länge des Quadranten sein möge.

Unzweifelhaft hatte der Versuch, die Untersuchungen von Giulio Fagnano zu verallgemeinern, Euler zu solchen Betrachtungen geführt. Die Ergebnisse seiner Forschungen in diesem Bereiche entwickelte Euler in einer Reihe von Abhandlungen, über welche wir zunächst zu berichten haben.

In seinen berühmten Untersuchungen über die Rektifikation der Kegelschnitte war G. Fagnano besonderen Differentialgleichungen von der Form:

$$F(x)dx \pm F(y)dy = 0$$

wiederholt begegnet (diese Vorl., III², S. 487), welche sich integrieren lassen, während jedes Glied für sich selbst nicht integrierbar ist. Nun setzt sich Euler[1]) das allgemeine Problem vor, Differential-

[1]) Specimen novae methodi curvarum quadraturas et rectifica-

gleichungen von solcher Beschaffenheit direkt aufzufinden. Dazu geht er von einer zweckmäßig gewählten Beziehung zwischen x und y aus, welche das Integral der zu bildenden Differentialgleichung darstellen soll.

a) Es sei erstens:

$$\alpha + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0. \tag{3}$$

Setzt man:

$$\sqrt{(\delta^2 - \gamma^2)x^2 - \alpha\gamma} = X, \quad \sqrt{(\delta^2 - \gamma^2)y^2 - \alpha\gamma} = Y,^{1)}$$

so erhält man aus (3):

$$x = \frac{Y - \delta y}{\gamma}, \quad y = \frac{X - \delta x}{\gamma},$$

oder:

$$X = \gamma y + \delta x, \quad Y = \gamma x + \delta y; \tag{4}$$

es ergibt sich andererseits durch Differentiation von (3):

$$(\gamma x + \delta y)dx + (\gamma y + \delta x)dy = 0,$$

also wegen (4):

$$\frac{dx}{X} + \frac{dy}{Y} = 0. \tag{5}$$

Um diese Gleichung auf eine bessere Form zu bringen, setzen wir:

$$-\alpha\gamma = Ap, \quad \delta^2 - \gamma^2 = Cp, \quad \gamma = A, \quad p = Ak^2;$$

es folgt:

$$\alpha = -p, \quad \delta = \sqrt{A(A + Ck^2)}, \quad X = \sqrt{Ak^2(A + Cx^2)},$$
$$Y = \sqrt{Ak^2(A + Cy^2)},$$

und wir erhalten aus (3), (5), wenn wir $\sqrt{A}$, $\sqrt{A + Cy^2}$ mit negativem Vorzeichen annehmen:

$$-Ak^2 + A(x^2 + y^2) - 2xy\sqrt{A(A + Ck^2)} = 0, \tag{6}$$

---

tiones aliasque quantitates transcendentes inter se comparandi, Novi Comm. Acad. Petrop. VII, 1758—1759 (publ. 1761), p. 83—127. — Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi. De comparatione arcuum ellipsis, ebenda, p. 3—48. — Demonstratio theorematis et solutio problematis in Actis Eruditorum Lipsiensibus propositorum, ebenda, p. 128—162. — Institutiones calculi integralis, Bd. I, Art. 580 ff., Bd. III, p. 597, Supplementum: Evolutio casuum prorsus singularium circa integrationem aequationum differentialium.

[1]) Das Vorzeichen der hier und in der Folge auftretenden Wurzelgrößen muß in jedem besonderen Falle gehörig bestimmt werden.

$$(7) \qquad \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2}} = \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2}}.$$

Da k in (6), nicht aber in (7) vorkommt, so stellt es die willkürliche Integrationskonstante dar, und (6) ist das vollständige Integral von (7).

Man kann solche Funktionen $f(x)$ finden, daß unter der Voraussetzung, daß zwischen x und y die Relation (7) besteht, die Gleichung:

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{A + Cx^2}} - \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{A + Cy^2}} = dV$$

gilt, wo V eine algebraische Funktion von x, y bezeichnet. Es muß dann:

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{A + Cx^2}} - \int \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{A + Cy^2}} = V + \text{const.}$$

nur eine veränderte Form der Integralgleichung (6) von (7) sein. Ist z. B. $f(x) = x^2$, so ergibt sich:

$$V = \frac{kxy}{\sqrt{A}} + \text{const.}$$

b) Es sei:

$$\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0;$$

man erhält hieraus:

$$(8) \qquad \frac{dx}{X} - \frac{dy}{Y} = 0,$$

wo:

$$X = \sqrt{(\beta^2 - \alpha\gamma) + 2\beta(\delta - \gamma)x + (\delta^2 - \gamma^2)x^2},$$

$$Y = \sqrt{(\beta^2 - \alpha\gamma) + 2\beta(\delta - \gamma)y + (\delta^2 - \gamma^2)y^2}.$$

c) Ist:

$$\alpha + mx^2 + ny^2 + 2\delta xy = 0,$$

so erhält man wieder Gl. (8), wo:

$$X = \sqrt{(\delta^2 - mn)x^2 - \alpha n}, \quad Y = \sqrt{(\delta^2 - mn)y^2 - \alpha m};$$

ferner:

$$(9) \qquad \frac{f(x)\,dx}{X} - \frac{\varphi(y)\,dy}{Y} = dV,$$

wo:

$$V = -xy \quad \text{für} \quad f(x) = mx^2, \quad \varphi(y) = ny^2;$$

$$V = xy(\alpha + \delta xy) \quad \text{für} \quad f(x) = m^2x^4, \quad \varphi(y) = n^2y^4.$$

Hieraus folgt allgemein:

$$\int \frac{a + bmx^2 + cm^2x^4}{X}\,dx - \int \frac{a + bny^2 + cn^2y^4}{Y}\,dy$$

$$= xy[-b + c\alpha + c\delta xy] + \text{const.}$$

Für $m = n$ hat man:

$$\int \frac{a + bmx^2 + cm^2x^4}{X}\,dx - \int \frac{a + bmy^2 + cm^2y^4}{Y}\,dy$$

$$= xy(-b + c\alpha + c\delta xy) + \text{const.},$$

unter den Voraussetzungen:

$$X = \sqrt{(\delta^2 - m^2)x^2 - \alpha m}, \quad Y = \sqrt{(\delta^2 - m^2)y^2 - \alpha m},$$

$$\alpha + m(x^2 + y^2) + 2\delta xy = 0.$$

d) Ist:

$$\alpha + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy + \zeta x^2y^2 = 0,$$

so folgt wieder (8), wo:

$$X = \sqrt{\delta^2x^2 - (\alpha + \gamma x^2)(\gamma + \zeta x^2)}, \quad Y = \sqrt{\delta^2y^2 - (\alpha + \gamma y^2)(\gamma + \zeta y^2)}.$$

Es gilt ferner Gl. (9) für:

$$f(x) = x^2, \quad \varphi(y) = y^2, \quad V = -\frac{xy}{\gamma}$$

und für:

$$f(x) = x^4, \quad \varphi(y) = y^4, \quad V = \frac{xy}{3\gamma^2}[2\alpha - \gamma(x^2 + y^2) + \delta xy].$$

Hieraus ergibt sich:

$$\int \frac{a + bx^2 + cx^4}{X}\,dx - \int \frac{a + by^2 + cy^4}{Y}\,dy$$

$$= -\frac{bxy}{\gamma} + \frac{cxy}{3\gamma^2}[2\alpha - \gamma(x^2 + y^2) + \delta xy] + \text{const.}$$

Von den vier behandelten Fällen gehört nur der letzte unserer Frage eigentlich an; die in den drei übrigen Fällen auftretenden Integrale lassen sich durch elementare Funktionen ausdrücken.

Die ermittelten Resultate lassen wichtige geometrische Anwendungen zu.

Die Rektifikation des Kreises wird durch die Formel:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \arcsin z$$

geliefert. Bezeichnen wir dieses Integral mit Πz, und wollen wir dasselbe mit dem unter c) vorkommenden:

$$(10) \qquad \int \frac{a + bmz^2 + cm^2 z^4}{\sqrt{(\delta^2 - m^2)z^2 - \alpha m}}\, dz$$

identifizieren, so müssen wir setzen:

$$b = c = 0, \quad a = km, \quad \alpha = -k^2 m, \quad \delta = -m\sqrt{1 - k^2},$$

wo k eine willkürliche Konstante bezeichnet; dann ist die Relation:

$$(11) \qquad \Pi x - \Pi y = \text{const.}$$

mit der anderen:

$$(12) \qquad k^2 - x^2 - y^2 + 2xy\sqrt{1 - k^2} = 0$$

gleichbedeutend. Zur Bestimmung der willkürlichen Konstante in (11) erwäge man, daß aus $y = 0$ wegen (12) $x = k$ folgt; es nimmt daher (11) die präzisere Form an:

$$\Pi x - \Pi y = \Pi k,$$

während sich aus (12) ergibt:

$$x = y\sqrt{1 - k^2} + k\sqrt{1 - y^2},$$

$$y = x\sqrt{1 - k^2} - k\sqrt{1 - x^2},$$

$$k = x\sqrt{1 - y^2} - y\sqrt{1 - x^2}.$$

Setzt man:

$$x = \sin\xi, \quad y = \sin\eta, \quad k = \sin\gamma,$$

so lassen sich die obigen Formeln folgendermaßen schreiben:

$$\xi - \eta = \gamma,$$

$$\sin\xi = \sin\eta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\eta,$$

$$\sin\eta = \sin\xi\cos\gamma - \sin\gamma\cos\xi,$$

$$\sin\gamma = \sin\xi\cos\eta - \sin\eta\cos\xi,$$

oder kürzer:

$$\sin(\mu \pm \nu) = \sin\mu\cos\nu \pm \sin\nu\cos\mu,$$

eine Formel, welche den Additions- und Subtraktionssatz der Sinusfunktion darstellt.

Betrachten wir nunmehr die Parabel:

$$u = \frac{1}{2} z^2,$$

wo z, u kartesische Koordinaten bezeichnen; dann ist:

$$s = \int_0^z \sqrt{1+z^2}\,dz = \int_0^z \frac{1+z^2}{\sqrt{1+z^2}}\,dz.$$

Um dieses Integral, welches ebenfalls mit Πz bezeichnet werden möge, mit (10) zu identifizieren, setzen wir:

$$a = 1, \quad b = -k, \quad c = 0, \quad \alpha = k, \quad \delta = \frac{\sqrt{1+k^2}}{k}, \quad m = -\frac{1}{k};$$

es ist dann, nachdem die willkürliche Konstante wie oben bestimmt worden ist:

$$\Pi x - \Pi y = \Pi k + kxy,$$

unter der Voraussetzung:

$$k^2 - x^2 - y^2 + 2\sqrt{1+k^2}\,xy = 0,$$

oder:

$$x = y\sqrt{1+k^2} + k\sqrt{1+y^2},$$

$$y = x\sqrt{1+k^2} - k\sqrt{1+x^2},$$

$$k = x\sqrt{1+y^2} - y\sqrt{1+x^2}.$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{o}$ den Scheitel der Parabel, ferner allgemein mit $\mathfrak{z}$ den Kurvenpunkt, dessen Abszisse z ist; es folgt dann:

$$\Pi z = \mathfrak{o}\mathfrak{z},$$

also:

(13) $$\mathfrak{y}\mathfrak{x} = \mathfrak{o}\mathfrak{k} + kxy,$$

wenn:

$$x\sqrt{1+y^2} - y\sqrt{1+x^2} = k.$$

Sind $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ zwei andere Punkte, deren Abszissen zu k in derselben Beziehung stehen als x, y, so folgt:

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \mathfrak{o}\mathfrak{k} + kpq,$$

also:

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p} - \mathfrak{y}\mathfrak{x} = k(pq - xy).$$

Diese Formeln liefern die Auflösung einiger geometrischer Probleme.

1. Sind zwei Kurvenpunkte $\mathfrak{r}, \mathfrak{k}$ gegeben, so soll man einen dritten Punkt $\mathfrak{s}$ derart bestimmen, daß sich $\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{o}\mathfrak{k}$ durch die Abszissen r, k algebraisch ausdrücken läßt. — Setzen wir in (13) r, s statt y, x, so ist:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{o}\mathfrak{k} = krs,$$

$$s = k\sqrt{1+r^2} + r\sqrt{1+k^2}.$$

Diese selben Formeln dienen dazu, $\mathfrak{k}$ aufzufinden, wenn $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ gegeben sind; die letzte Gleichung kann in dieser Hinsicht die Form:

$$k = s\sqrt{1+r^2} - r\sqrt{1+s^2}$$

erhalten. Diese Beziehung läßt sich auch schreiben:

$$s + \sqrt{1+s^2} = (k + \sqrt{1+k^2})(r + \sqrt{1+r^2}).$$

2. Sind drei Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ gegeben, so soll man einen vierten Punkt $\mathfrak{s}$ derart finden, daß sich $\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{h}\mathfrak{k}$ durch r, h, k algebraisch ausdrücken läßt. — Man bestimme zunächst einen solchen Punkt $\mathfrak{l}$, daß:

$$\mathfrak{h}\mathfrak{k} - \mathfrak{o}\mathfrak{l} = hkl = hk[k\sqrt{1+h^2} - h\sqrt{1+k^2}]$$

ist; dann wird der gesuchte Punkt $\mathfrak{s}$ durch die Beziehung:

$$s = r\sqrt{1+l^2} + l\sqrt{1+r^2}$$

bestimmt, und es ist:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{o}\mathfrak{l} = lrs,$$

folglich:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s} - \mathfrak{h}\mathfrak{k} = l(rs - hk).$$

3. Sind drei Punkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ gegeben, und ist n eine ganze positive Zahl, so soll man einen Punkt $\mathfrak{s}_n$ derart bestimmen, daß:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s}_n - n\mathfrak{h}\mathfrak{k}$$

algebraisch angebbar ist. — Ist z. B. $n = 2$, so bestimme man $\mathfrak{s}_2$ derart, daß es zu $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ in derselben Beziehung stehe, in welcher $\mathfrak{s}$ im vorhergehenden Probleme zu $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ steht; dann ist:

$$\mathfrak{s}\mathfrak{s}_2 - \mathfrak{h}\mathfrak{k} = l(ss_2 - hk),$$

wo:

$$s_2 = s\sqrt{1+l^2} + l\sqrt{1+s^2},$$

und folglich:

$$\mathfrak{r}\mathfrak{s}_2 - 2\mathfrak{h}\mathfrak{k} = l(rs + ss_2 - 2hk).$$

Die Bogenlänge der Ellipse:

$$\frac{z^2}{A^2} + \frac{u^2}{B^2} = 1$$

ist:

$$s = \int_0^z \sqrt{\frac{A^2 - nz^2}{A^2 - z^2}}\, dz = \int_0^z \frac{A^2 - nz^2}{Z}\, dz = \Pi z,$$

wo:

$$n = \frac{A^2 - B^2}{A^2}, \quad Z = \sqrt{(A^2 - z^2)(A^2 - nz^2)}.$$

Um Πs mit dem unter d) vorkommenden Integral:

$$\int \frac{a + bz^2 + cz^4}{\sqrt{\delta^2 z^2 - (\alpha + \gamma z^2)(\gamma + \zeta z^2)}} dz$$

in Übereinstimmung zu bringen, setzen wir:

$$a = A^2, \quad b = -n, \quad c = 0, \quad -\alpha\gamma = A^4,$$
$$\delta^2 - \alpha\zeta - \gamma^2 = -A^2(1 + n), \quad -\gamma\zeta = n,$$

ferner, wenn $x = k$ für $y = 0$ sein muß:

$$\alpha + \gamma k^2 = 0;$$

es folgt dann, wenn $\sqrt{(A^2 - k^2)(A^2 - nk^2)} = K$ ist:

$$\alpha = kA^2, \quad \gamma = -\frac{A^2}{k}, \quad \delta = \frac{K}{k}, \quad \zeta = \frac{nk}{A^2},$$

also:

$$\Pi x - \Pi y = \Pi k - \frac{nkxy}{A^2},$$

und:

$$A^4(k^2 - x^2 - y^2) + nk^2x^2y^2 + 2A^2Kxy = 0,$$

woraus folgt:

$$x = \frac{A^2(Ky + kY)}{A^4 - nk^2y^2}, \quad y = \frac{A^2(Kx - kX)}{A^4 - nk^2x^2}, \quad k = \frac{A^2(Yx - yX)}{A^4 - nx^2y^2}.$$

Sind also die Kurvenpunkte $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{k}$ gegeben, und ist $\mathfrak{a}$ einer der Punkte, für welche $s = 0$, so läßt sich ein Punkt $\mathfrak{s}$ derart finden, daß $\mathfrak{rs} - \mathfrak{ak}$ algebraisch angebbar ist; man hat nämlich:

(14) $$\mathfrak{rs} - \mathfrak{ak} = \Pi s - \Pi r - \Pi k = -\frac{nkrs}{A^2},$$

(15) $$s = \frac{A^2(Kr + Rk)}{A^4 - nk^2r^2}.$$

Ist insbesondere $r = A$, und bezeichnet man mit $\mathfrak{b}$ den entsprechenden Kurvenpunkt (Fig. 83), so folgt $R = 0$, und:

(16) $$s = \frac{AK}{A^2 - nk^2} = A\sqrt{\frac{A^2 - k^2}{A^2 - nk^2}},$$

ferner:

$$\mathfrak{ak} - \mathfrak{bs} = nk\sqrt{\frac{A^2 - k^2}{A^2 - nk^2}},$$

eine Gleichung, die mit einer von G. Fagnano gegebenen (diese Vorl., III², S. 490) übereinstimmt.

Man findet leicht, daß die rechte Seite der letzten Gleichung die Länge der zwischen dem Berührungspunkte $\mathfrak{k}$ und der Projektion $\mathfrak{p}$

des Mittelpunktes liegenden Strecke der Tangente in $\mathfrak{k}$. angibt. Ist ferner $\mathfrak{t}$ der Schnittpunkt der Achse $\mathfrak{oa}$ mit dieser Tangente, und nimmt man auf derselben $\mathfrak{tv} = A$, so ist der gesuchte Punkt $\mathfrak{s}$ der Schnittpunkt der Ellipse mit der durch $\mathfrak{v}$ gehenden Parallele zu $\mathfrak{oa}$. Derselbe Wert für s ergibt sich offenbar, wenn man den zu $\mathfrak{ok}$ konjugierten Durchmesser $\mathfrak{oh}$ bis $\mathfrak{l}$ derart verlängert, daß $\mathfrak{ol} = A$ ist, und $\mathfrak{l}$ auf $\mathfrak{ob}$ projiziert; die zu den beiden Schnittpunkten $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{s}'$ der projizierenden Geraden mit der Ellipse gemeinschaftliche Abszisse hat die durch (16) gegebene Größe. Man kann also schreiben:

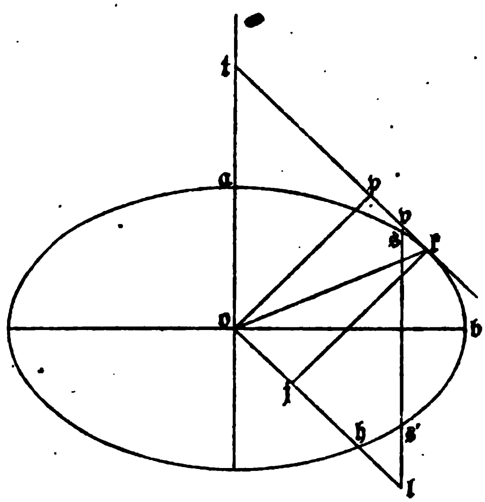


Fig. 83.

$$\mathfrak{ak} - \mathfrak{bs}' = \mathfrak{ak} - \mathfrak{bs} = \mathfrak{pk},$$

oder:

$$\mathfrak{ab} - \mathfrak{ks}' = \mathfrak{pk};$$

ferner, wenn $\mathfrak{j}$ die Projektion von $\mathfrak{k}$ auf $\mathfrak{oh}$ ist:

$$\mathfrak{ab} - \mathfrak{ks}' = \mathfrak{oj}.$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar der Beweis des 1754 vorgeschlagenen Satzes. Man hat nämlich (siehe oben Fig. 82):

$$BA - QAS = OV,$$

und analog:

$$B'A - Q'PS = -OV',$$

woraus folgt:

$$Q'PS - QAS = V'V.$$

Setzt man in (14), (15) $r = k$, und bezeichnet man mit g den daraus entstehenden Wert von s, so folgt:

(17)
$$\mathfrak{kg} - \mathfrak{ak} = -\frac{nk^2 g}{A^2},$$

$$g = \frac{2A^2kK}{A^4 - nk^4}.$$

Aus (14), (17) ergibt sich:

$$2(\mathfrak{ak} - \mathfrak{rs}) - (\mathfrak{ak} - \mathfrak{kg}) = \frac{nk}{A^2}(2rs - kg),$$

oder:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{g} - 2\mathfrak{r}\mathfrak{s} = \frac{nk}{A^2}(2rs - kg).$$

Soll $\mathfrak{r}\mathfrak{s} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}\mathfrak{g}$ sein, so muß zwischen r, s, k, g die Beziehung:

$$2rs = kg$$

stattfinden, welche zusammen mit (15) und dem soeben angegebenen Ausdrucke von $\mathfrak{g}$ die Werte von r, s, k als Funktionen von g ergibt. Es ist daher möglich, einen Bogen algebraisch zu bestimmen, dessen Länge die Hälfte der Länge eines gegebenen Bogens ist, ein Problem, welches das 1754 vorgeschlagene als besonderen Fall einschließt.

Auf die Integration der nach ihm benannten Gleichung ist Euler noch wiederholt gekommen.[1])

In einer 1768 erschienenen Schrift[2]) zeigt Euler, wie man die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}}$$

direkt integrieren kann. Man muß zunächst die ungeraden Potenzen von x, y abschaffen, wonach die Gleichung die Form:

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2 + Dx^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2 + Dy^4}}$$

annimmt. Setzt man hier zuerst:

$$x = \sqrt{pq}, \quad y = \sqrt{\frac{p}{q}},$$

dann:

$$q = u + \sqrt{u^2 - 1},$$

endlich:

$$u = \frac{1}{4ADp}\left[-C(A + Dp^2) + (A + Dp^2)s\sqrt{4AD - C^2}\right],$$

so erhält man die durch elementare Funktionen integrierbare Gleichung:

---

[1]) Ein besonderer Fall dieser Gleichung wird integriert in der Schrift: Problème: Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique. Résolu par M. Euler, Mém. Acad. Berlin 1760 (publ. 1767), p. 228—249. [2]) Integratio aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}},$$

Novi Comm. Acad. Petrop. XII, 1766—1767 (publ. 1768), p. 3—16.

$$\frac{ds}{\sqrt{1+s^2}} = 2\sqrt{AD}\,\frac{dp}{A-Dp^2}.$$

Die oben angegebene Methode zur Bildung von algebraisch integrierbaren Differentialgleichungen von der Form (5) oder (8) wurde später von Euler verallgemeinert[1]). Er geht von der Integralgleichung:

(18) $\alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(x^2+y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta x^2y^2 = 0$

aus, und findet eine Differentialgleichung von der gewünschten Form. Da ferner diese 4 Konstanten, (18) aber 5 enthält, so ist (18) das vollständige Integral. — Interessant sind die Betrachtungen Eulers über die Möglichkeit weiterer Verallgemeinerungen. Wäre es möglich, die Gleichung (8), wo X^2 ein beliebiges Polynom der sechsten Ordnung bezeichnen möge, algebraisch zu integrieren, so wäre insbesondere:

(19) $$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q},$$

wo P ein beliebiges Polynom der dritten Ordnung ist, algebraisch integrierbar, was nicht immer stattfindet. Ist X^2 vom fünften Grade, so geht die Gleichung durch die Substitution:

$$x = u^2 + \alpha, \quad y = v^2 + \alpha,$$

wo α eine passend gewählte Konstante ist[2]), in:

$$\frac{du}{U} = \frac{dv}{V}$$

über, wo U^2 ein Polynom vom vierten Grade in u^2 darstellt; wäre aber diese Gleichung stets algebraisch integrierbar, so würde dasselbe von (19) folgen, wenn P ein Polynom vom zweiten Grade in x^2 wäre, was nicht immer wahr ist. Also ist (8) nicht im allgemeinen algebraisch integrierbar, wenn die Ordnung von X^2 vier übertrifft.

Die algebraische Integration ist auch im allgemeinen unmöglich, wenn X eine Wurzelgröße darstellt, deren Index > 2 ist.

---

[1]) Evolutio generalior formularum comparationi curvarum inservientium, Novi Comm. Acad. Petrop. XII, 1766—1767 (publ. 1768), p. 42—86.

[2]) Euler sagt einfach, daß man x^2, y^2 statt x, y setzen muß. — Ist:

$$X^2 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5,$$

so muß die Konstante α die Bedingung:

$$A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + F\alpha^5 = 0$$

erfüllen.

In seiner Integralrechnung[1]) kommt Euler auf den wichtigen Gegenstand wieder zurück. Er bemerkt, daß die von ihm behandelten Gleichungen dazu geeignet sind, die Vorzüge der Methode des integrierenden Faktors gegenüber derjenigen von der Trennung der Veränderlichen aufs beste zu zeigen; es ist nämlich leicht ersichtlich, daß das Eulersche Integrationsverfahren wesentlich in der Auffindung eines Multiplikators besteht. Es ist aber im allgemeinen nichts weniger als leicht, zu einer gegebenen Gleichung (5) einen passenden Multiplikator M zu finden. Man kann sich umgekehrt fragen, welche Gleichungen durch einen Multiplikator von gegebener Form integriert werden können. — Es sei z. B.:

$$M = \frac{XY}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2},$$

wo X, Y zwei gleichartige Funktionen von x bzw. y bezeichnen mögen; dann muß:

$$\frac{Ydx + Xdy}{(\alpha + \beta x + \gamma y)^2}$$

ein vollständiges Differential sein. Integriert man nach x, so findet man:

$$\frac{-Y}{\beta(\alpha + \beta x + \gamma y)} + \Gamma(y); \tag{20}$$

integriert man dagegen nach y, so ergibt sich:

$$\frac{-X}{\gamma(\alpha + \beta x + \gamma y)} + \varDelta(x). \tag{21}$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke erhält man:

$$\beta X - \gamma Y = \beta\gamma(\alpha + \beta x + \gamma y)[\varDelta(x) - \Gamma(y)].$$

Da, wegen der Form der linken Seite, alle x und y zugleich enthaltenden Glieder rechts verschwinden müssen, so ist notwendig:

$$\varDelta(x) = m\beta x + \text{const.}, \quad \Gamma(y) = m\gamma y + \text{const.},$$

wo m eine konstante Größe bezeichnet, folglich:

$$X = \gamma[m\beta^2x^2 + \beta(m\alpha + n)x + p],$$
$$Y = \beta[m\gamma^2y^2 + \gamma(m\alpha - n)y + q],$$

wo n, p, q konstante Größen sind, zwischen welchen die Beziehung:

$$p - q = \alpha n$$

besteht. Durch Einsetzung dieser Ausdrücke in (20) oder in (21)

[1]) An den S. 796 angeführten Orten.

ergibt sich als Integral der betrachteten Gleichung, nach leichten Umformungen:

$$m\beta\gamma xy - \frac{n}{2}(\beta x - \gamma y) - f = g(\alpha + \beta x + \gamma y),$$

wo $f = p - \frac{\alpha n}{2} = q + \frac{\alpha n}{2}$, und g eine willkürliche Konstante ist.

Geht man von komplizierteren Formen von M aus, so erhält man die schon oben behandelten elliptischen Differentialgleichungen.

Die Arbeiten Eulers über die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{X} \pm \frac{dy}{Y} = 0$$

erregten die Aufmerksamkeit Lagranges.[1]) Ihm schien sonderbar genug, daß eine Differentialgleichung mit separierten Veränderlichen, deren Glieder einzeln nicht algebraisch integrierbar sind, sich nichtsdestoweniger algebraisch integrieren ließe; und er wollte die Sache näher betrachten. Ebenso wie Euler ging er vom einfachsten Falle aus:

(22) $$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist:

$$\arcsin x = \arcsin y + \text{const.} = \arcsin y + \arcsin a;$$

es läßt sich aber auch auf algebraische Form bringen, denn es folgt, wegen bekannter trigonometrischer Sätze:

(23) $$a = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}.$$

Es wäre jedoch wünschenswert, zu diesem Integrale auf algebraischem Wege direkt zu gelangen. Das läßt sich folgendermaßen erreichen. Man schreibe die Differentialgleichung so:

$$\sqrt{1-y^2}\,dx = \sqrt{1-x^2}\,dy,$$

und wende auf beide Seiten die partielle Integration an; man erhält die Gleichung:

$$x\sqrt{1-y^2} + \int\frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = y\sqrt{1-x^2} + \int\frac{xy\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \text{const.},$$

welche sich wegen (22) auf (23) reduziert.

---

[1]) Sur l'intégration de quelques équations différentielles dont les indéterminées sont séparées, mais dont chaque membre en particulier n'est point intégrable, Misc. Taur. IV, 1766—1769, p. 98—125; Oeuvres II, Paris 1868, p. 5—33.

Ist die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4}}$$

gegeben, so verifiziert man leicht durch Differentiation, daß ihr Integral die Form:

$$A+B(x+y)+C(x^2+y^2)+Dxy+E(x^2y+xy^2)+Fx^2y^2=0$$

hat; die Koeffizienten lassen sich durch α, β, γ, δ, ε ausdrücken mit Ausschluß eines einzigen, der als Integrationskonstante gilt, so daß die letzte Gleichung das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung bildet. Diese Integration ist aber, wie **Lagrange** sich ausspricht, nur zufällig; er versucht daher, eine direkte Integrationsmethode für derartige Gleichungen zu finden. Seine Methode ist auf folgendes Prinzip gegründet.

Liegt eine nicht integrierbare Differentialgleichung erster Ordnung vor, so differentiiere man sie, und sehe zu, ob es möglich ist, aus der gegebenen und der durch Differentiation aus dieser erhaltenen Gleichung eine neue Differentialgleichung erster Ordnung durch Kombination und Integration abzuleiten; dann liefert die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ aus den beiden Differentialgleichungen erster Ordnung das gesuchte Integral. Ist das nicht möglich, so kann man zweimal differentiieren usw.

Sehen wir zu, unter welchen Bedingungen die Methode auf die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

anwendbar ist, wo X, Y zwei gleichartige Funktionen von x bzw. y bezeichnen. Schreiben wir:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\frac{dt}{T}, \tag{24}$$

wo t eine Hilfsveränderliche, T eine Funktion von t ist. Es folgt:

$$T^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=X,\quad T^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=Y,$$

und hieraus durch Differentiation:

$$\frac{2\,Td\,Tdx+2\,T^2d^2x}{dt^2}=\frac{dX}{dx},\quad \frac{2\,Td\,Tdy+2\,T^2d^2y}{dt^2}=\frac{dY}{dy}. \tag{25}$$

Setzen wir nunmehr:

$$x+y=p,\quad x-y=q,\quad dT=Mdp+Ndq;$$

es folgt dann, wegen (24), (25):

$$M = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad N = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad dp\,dq = \frac{(X - Y)\,dt^2}{T^2},$$

$$\frac{2\,T dp(M dp + N dq) + 2\,T^2 d^2 p}{dt^2} = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy},$$

und hieraus:

$$\frac{2\,T(M dp^2 + T d^2 p)}{dt^2} = \frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} - \frac{2\,N(X - Y)}{T}.$$

Betrachtet man p als konstant, so ist:

$$\frac{dX}{dx} = 2\frac{\partial X}{\partial q}, \quad \frac{dY}{dy} = -2\frac{\partial Y}{\partial q},$$

also:

$$\frac{2\,T\left(\frac{\partial T}{\partial p}dp^2 + T d^2 p\right)}{dt^2} = 2\left(\frac{\partial X}{\partial q} - \frac{\partial Y}{\partial q}\right) - \frac{2(X - Y)}{T}\frac{\partial T}{\partial q},$$

oder:

$$\frac{\partial \cdot \left[T\frac{dp}{dt}\right]^2}{\partial p} = 2\,T\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{X - Y}{T}\right).$$

Um $\frac{dp}{dt}$ hieraus abzuleiten, muß man diese Gleichung derart umformen, daß sie nur p und q enthalten möge; das aber scheint mir, sagt Lagrange, nur dann möglich, wenn:

a) $T = PQ$ ist, wo P eine Funktion von p, Q eine Funktion von q bezeichnet, so daß die letzte Gleichung die Form:

(26) $$\frac{\partial\left[P\frac{dp}{dt}\right]^2}{\partial p} = \frac{2}{Q}\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{X - Y}{Q}\right)$$

erhält;

b) die rechte Seite von (26) eine Funktion $2\varphi(p)$ von p ist. Es folgt dann:

(27) $$\frac{X - Y}{Q} = \varphi(p)\int Q dq + \psi(p),$$

$$\left(P\frac{dp}{dt}\right)^2 = 2\int\varphi(p)\,dp + C;$$

da aber:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{T} = \frac{\sqrt{X} + \sqrt{Y}}{PQ}$$

ist, so erhält man schließlich das gesuchte Integral:

(28) $$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = Q\sqrt{2\int\varphi(p)\,dp + C}.$$

Wie müssen X und Y beschaffen sein, damit (27) bestehen kann?

Setzen wir:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \zeta x^5 + \cdots,$$
$$Y = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4 + \zeta y^5 + \cdots;$$

es folgt hieraus:

$$X - Y = q\Big[\Big(\beta + \gamma p + \delta \frac{3p^2 + q^2}{4} + \varepsilon \frac{p^3 + pq^2}{2} + \zeta \frac{5p^4 + 10p^2q^2 + q^4}{16} + \cdots\Big]$$
$$= q\Big[\Big(\beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}p^2 + \frac{\varepsilon}{2}p^3 + \frac{5\zeta}{16}p^4 + \cdots\Big) + q^2\Big(\frac{\delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}p + \frac{5\zeta}{8}p^2 + \cdots\Big) + q^4\Big(\frac{\zeta}{16} + \cdots\Big) + \cdots\Big].$$

Es muß also wegen (27) zunächst $Q = q$ sein, ferner:

$$\beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}p^2 + \frac{\varepsilon}{2}p^3 + \frac{5\zeta}{16}p^4 + \cdots = \psi(p),$$
$$\frac{\delta}{4} + \frac{\varepsilon}{2}p + \frac{5\zeta}{8}p^2 + \cdots\cdots\cdots = \frac{1}{2}\varphi(p),$$
$$\frac{1}{16}\zeta + \cdots\cdots\cdots = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots,$$

folglich:

$$\zeta = \cdots = 0, \quad \psi(p) = \beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}p^2 + \frac{\varepsilon}{2}p^3, \quad \varphi(p) = \frac{\delta}{2} + \varepsilon p,$$

und (28) reduziert sich auf:

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = q\sqrt{C + \delta p + \varepsilon p^2},$$

oder:

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = (x - y)\sqrt{C + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2},$$

wo:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4, \quad Y = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4.$$

Man kann auch versuchen, für X und Y nicht notwendig gleichartige Funktionen anzunehmen. Setzt man:

$$X = \Phi(2x) = \Phi(p + q), \quad Y = \Psi(2y) = \Psi(p - q),$$

so folgt aus (27):

$$\Phi(p + q) - \Psi(p - q) = Q\Big[\varphi(p)\int Q\,dq + \psi(p)\Big].$$

Differentiiert man zweimal nach p oder nach q, so kommt:

$$\Phi''(p+q) - \Psi''(p-q) = Q\left[\varphi''(p)\int Q dq + \psi''(p)\right],$$

$$\Phi''(p+q) - \Psi''(p-q) = \varphi(p)\frac{d^2}{dq^2}\left(Q\int Q dq\right) + \psi(p)\frac{d^2Q}{dq^2},$$

also:

$$Q\left[\varphi''(p)\int Q dq + \psi''(p)\right] = \varphi(p)\frac{d^2}{dq^2}\left(Q\int Q dq\right) + \psi(p)\frac{d^2Q}{dq^2}.$$

Da diese Gleichung identisch bestehen soll, so kann man zunächst setzen:

$$Q\psi''(p) = \frac{d^2Q}{dq^2}\psi(p),$$

also:

$$\frac{d^2Q}{dq^2} = -m^2 Q,$$

wo m eine Konstante bezeichnet, und folglich:

$$Q = A\sin(mq+\alpha),$$

ferner:

$$\psi''(p) = -m^2\psi(p),$$

woraus sich ergibt:

$$\psi(p) = B\sin(mp+\beta).$$

Aus:

$$Q\int Q dq\cdot\varphi''(p) = \varphi(p)\frac{d^2}{dq^2}\left(Q\int Q dq\right)$$

folgt dann:

$$\varphi''(p) = -4m^2\varphi(p),$$

und hieraus durch Integration:

$$\varphi(p) = C\sin 2(mp+\gamma).$$

Durch Einsetzung der erhaltenen Ausdrücke ergibt sich, wenn man:

$$\frac{A^2C}{4m} = c, \quad -\frac{AB}{2} = b$$

macht:

$$\begin{aligned}\Phi(2x) - \Psi(2y) &= \Phi(p+q) - \Psi(p-q)\\ &= -2c\sin 2(mp+\gamma)\sin 2(mq+\alpha)\\ &\quad -2b\sin(mp+\beta)\sin(mq+\alpha)\\ &= c[\cos 2(2mx+\gamma+\alpha) - \cos 2(2my+\gamma-\alpha)]\\ &\quad + b[\cos(2mx+\beta+\alpha) - \cos(2my+\beta-\alpha)],\end{aligned}$$

und folglich, wenn a eine weitere Konstante bezeichnet:

$$X = \Phi(2x) = a + b\cos(2mx+\beta+\alpha) + c\cos 2(2mx+\gamma+\alpha),$$

$$Y = \Psi(2y) = a + b\cos(2my+\beta-\alpha) + c\cos 2(2my+\gamma-\alpha),$$

welche nach **Lagrange** die allgemeinsten durch seine Methode zu erhaltenden Ausdrücke zu sein scheinen. Das Integral ist nach (28):

$$\sqrt{\Phi(2x)} + \sqrt{\Psi(2y)} = A \sin(mq + \alpha)\sqrt{H - \frac{C}{m}\cos(2mp + \gamma)},$$

wo H die willkürliche Konstante ist. Setzt man:

$$\cos 2mx + i \sin 2mx = u, \quad \cos 2my + i \sin 2my = v,$$
$$\cos(\beta + \alpha) = A, \quad \cos(\beta - \alpha) = E,$$
$$\cos 2(\gamma + \alpha) = B, \quad \cos 2(\gamma - \alpha) = F,$$

so folgt:

$$X = \frac{U}{2u^2}, \quad Y = \frac{V}{2v^2},$$

wo:

$$U = c(B - \sqrt{B^2 - 1}) + b(A - \sqrt{A^2 - 1})u + 2au^2$$
$$+ b(A + \sqrt{A^2 - 1})u^3 + c(B + \sqrt{B^2 - 1})u^4,$$
$$V = c(F - \sqrt{F^2 - 1}) + b(E - \sqrt{E^2 - 1})v$$
$$+ 2av^2 + b(E + \sqrt{E^2 - 1})v^3 + c(F + \sqrt{F^2 - 1})v^4,$$

und die Differentialgleichung nimmt die Form:

$$\frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{dv}{\sqrt{V}}$$

an, welche etwas allgemeiner ist als die frühere, insofern als in derselben nicht 5, sondern 6 Konstanten vorkommen[1]).

Zwei weitere Integrationsmethoden wurden von **Lagrange** in seiner **Théorie des fonctions analytiques** entwickelt.

Man setze wie oben:

$$x = \frac{p+q}{2}, \quad y = \frac{p-q}{2},$$

ferner:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}} = dt,$$

wo:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4, \quad Y = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4;$$

dann ist:

---

[1]) Die Konstanten sind zwar 7, nämlich A, B, E, F, a, b, c; aber es findet zwischen ihnen eine Relation statt. Es ist nämlich:

$$\cos\alpha = AE + \sqrt{1 - A^2}\sqrt{1 - E^2}, \quad \cos 2\alpha = BF + \sqrt{1 - B^2}\sqrt{1 - F^2},$$

folglich:

$$1 + BF + \sqrt{1 - B^2}\sqrt{1 - F^2} = 2[AE + \sqrt{1 - A^2}\sqrt{1 - E^2}]^2.$$

$$\frac{dp}{dt} = p' = x' + y', \quad \frac{d^2p}{dt^2} = p'' = x'' + y'',$$

$$\frac{dq}{dt} = q' = x' - y', \quad \frac{d^2q}{dt^2} = q'' = x'' - y'',$$

$$2x'x'' = X' = (\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3)x',$$

$$2y'y'' = Y' = (\beta + 2\gamma y + 3\delta y^2 + 4\varepsilon y^3)y',$$

und hieraus:

$$p'' = \beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{2}(p^3 + 3pq^2),$$

$$q'' = \gamma q + \frac{3\delta}{2}pq + \frac{\varepsilon}{2}(3p^2q + q^3),$$

$$p'q' = x'^2 - y'^2 = X - Y$$
$$= \beta q + \gamma pq + \frac{\delta}{4}(3p^2q + q^3) + \frac{\varepsilon}{2}(p^3q + pq^3),$$

folglich:

$$qp'' - p'q' = \left(\frac{\delta}{2} + \varepsilon p\right)q^3,$$

oder:

$$\frac{2p'(qp'' - p'q')}{q^3} = (\delta + 2\varepsilon p)p',$$

woraus sich durch Integration ergibt, wenn a eine Konstante bezeichnet:

$$\frac{p'^2}{q^2} = a + \delta p + \varepsilon p^2,$$

oder:

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = (x - y)\sqrt{a + \delta(x + y) + \varepsilon(x + y)^2}.$$

Man kann auch die gegebene Differentialgleichung auf die Form:

$$\frac{du}{\sqrt{A + B\cos u}} = \frac{dz}{\sqrt{A + B\cos z}} = dt$$

bringen. Dann ist:

$$2u'u'' = -B\sin u \cdot u', \quad 2z'z'' = -B\sin z \cdot z',$$

oder:

$$u'' = -\frac{B}{2}\sin u, \quad z'' = -\frac{B}{2}\sin z.$$

Setzt man:

$$p = \frac{z + u}{2}, \quad q = \frac{z - u}{2},$$

so folgt:

$$p' = \frac{z' + u'}{2}, \quad q' = \frac{z' - u'}{2},$$

$$p'' = \frac{z'' + u''}{2} = -\frac{B}{4}(\sin z + \sin u) = -\frac{B}{2}\sin p\cos q,$$

$$q'' = \frac{z'' - u''}{2} = -\frac{B}{4}(\sin z - \sin u) = -\frac{B}{2}\cos p\sin q,$$

und hieraus:

$$p'q' = \frac{z'^2 - u'^2}{4} = \frac{B}{4}(\cos z - \cos u) = -\frac{B}{2}\sin p \sin q,$$

also:

$$\frac{p''}{p'q'} = \operatorname{cotg} q, \qquad \frac{q''}{p'q'} = \operatorname{cotg} p.$$

Man erhält hieraus durch Integration:

$$p' = a \sin q, \qquad q' = b \sin p,$$

folglich:

$$b \sin p \cdot p' = a \sin q \cdot q',$$

und durch abermalige Integration:

$$b \cos p = a \cos q + c, \tag{29}$$

wo a, b, c drei Konstanten bezeichnen.

Ist $z = m$ für $u = 0$, so hat man entsprechend:

$$p = q = \frac{m}{2}, \qquad z' = \sqrt{A + B \cos m} = P, \qquad u' = \sqrt{A + B} = Q,$$

$$p' = \frac{1}{2}(P + Q), \qquad q' = \frac{1}{2}(P - Q),$$

folglich:

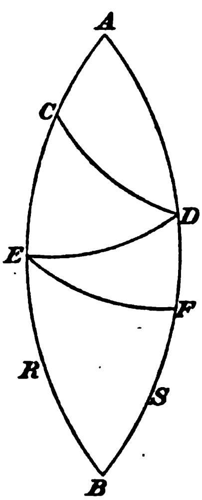


Fig. 84.

$$a = \frac{1}{2 \sin \frac{m}{2}}(P + Q), \qquad b = \frac{1}{2 \sin \frac{m}{2}}(P - Q),$$

$$c = -Q \operatorname{cotg} \frac{m}{2},$$

und hieraus, wenn man $\frac{P}{Q} = \cos M$ setzt, wegen (29):

$$\cos\frac{m}{2} = \cos\frac{z}{2}\cos\frac{u}{2} + \sin\frac{z}{2}\sin\frac{u}{2}\cos M. \tag{30}$$

Diese Gleichung läßt eine elegante geometrische Interpretation zu. Hat man auf einer Kugel zwei größte Kreise (Fig. 84) ARB, ASB, deren gegenseitige Neigung M sein möge, und nimmt man auf diesen zwei Bögen:

$$AC = \frac{u}{2}, \; AD = \frac{z}{2},$$

so ist $CD = \frac{m}{2}$. Ist auch $DE = \frac{m}{2}$, und setzt man $AE = \frac{y}{2}$, so ist:

$$\cos\frac{m}{2} = \cos\frac{z}{2}\cos\frac{y}{2} + \sin\frac{z}{2}\sin\frac{y}{2}\cos M.$$

Ist $EF = \frac{m}{2}$ und setzt man $AF = \frac{x}{2}$, so hat man analog:

$$\cos\frac{m}{2} = \cos\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}\cos M,$$

usw. Die Gleichung (30) ist mit:

$$f(z) = f(u) + f(m)$$

gleichbedeutend, wo:

$$f(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + B\cos z}}$$

ist. Man hat dann:

$$f(y) = f(z) + f(m) = f(u) + 2f(m),$$
$$f(x) = f(y) + f(m) = f(u) + 3f(m),$$

usw.

Erst später erfuhr **Euler** zu seiner Verwunderung[1]), daß **Lagrange** seine Differentialgleichung integriert hatte, ohne von der Methode des integrierenden Faktors Gebrauch zu machen. Mit seiner unermüdlichen Tätigkeit wollte er gleich das sich auf Differentiation stützende **Lagrange**sche Verfahren beherrschen und erkannte, daß dasselbe in manchen Fällen gute Dienste leisten kann. Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

vorhanden, wo:

$$X = \alpha + 2\beta x + \gamma x^2, \quad Y = \alpha + 2\beta y + \gamma y^2,$$

so schreibe man:

$$\frac{dx}{dt} = X, \quad \frac{dy}{dt} = Y,$$

woraus folgt:

$$\frac{d\frac{dx}{dt}}{dx} + \frac{d\frac{dy}{dt}}{dy} = 4\beta + 2\gamma(x + y).$$

Setzt man $x - y = q$, so ist:

$$\frac{1}{q}\frac{dq}{dt} = \frac{X - Y}{x - y} = 2\beta + \gamma(x + y),$$

also:

---

[1]) Dilucidationes super methodo elegantissima, qua illustris de la Grange usus est, in integranda aequatione differentiali

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

Acta Acad. Petrop. II P. 1, 1778, p. 20—57; Inst. calc. int. IV, p. 465—503.

$$\frac{d\frac{dx}{dt}}{dx} + \frac{d\frac{dy}{dt}}{dy} = 2\frac{\frac{dq}{dt}}{q},$$

und durch Integration:

$$\log\frac{dx}{dt} + \log\frac{dy}{dt} = 2\log q + \text{const.},$$

oder:

$$C = \frac{dx\,dy}{q^2dt^2} = \frac{XY}{(x-y)^2},$$

oder auch, durch Veränderung der willkürlichen Konstante:

$$C = \frac{XY}{(x-y)^2} + (\beta^2 - \alpha\gamma) = \frac{(\alpha + \beta(x+y) + \gamma xy)^2}{(x-y)^2},$$

was sich einfacher schreiben läßt:

$$C = \frac{\alpha + \beta(x+y) + \gamma xy}{x-y}.$$

Die Gleichung:

$$\frac{dx}{X} = -\frac{dy}{Y},$$

wo X, Y die obige Bedeutung haben, kann auf ähnliche Weise behandelt werden.

Nach diesen ganz einfachen Beispielen kommt Euler auf die Differentialgleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0, \tag{31}$$

die er in den folgenden Fällen integriert:

$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$
$$X = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4,$$
$$X = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6.$$

Wir beschränken uns hier auf den zweiten Fall, auf welchen die zwei übrigen zurückführbar sind. Euler setzt, nach Lagrange:

$$x + y = p, \quad x - y = q,$$

ferner, wenn das untere Vorzeichen angenommen wird:

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}} = dt,$$

was darauf hinauskommt, daß er das Lagrangesche T gleich Eins annimmt. Es ist dann:

$$\frac{dp\,dq}{dt^2} = X - Y = q\left(\beta + \gamma p + \frac{\delta}{4}(3p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{2}(p^3 + pq^2)\right),$$

ferner:

$$2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dX}{dx}\frac{dx}{dt}, \quad 2\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dY}{dy}\frac{dy}{dt},$$

woraus folgt:

$$\frac{d^2p}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy}\right) = \beta + \gamma p + \frac{3\delta}{4}(p^2 + q^2) + \frac{\varepsilon}{2}(p^3 + 3pq^2),$$

also:

$$\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp\,dq}{q\,dt^2} = \left(\frac{\delta}{2} + \varepsilon p\right)q^2.$$

Multipliziert man mit $\frac{2\,dp}{q^2dt}$, und integriert, so erhält man wie oben:

$$\frac{1}{q^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = C + \delta p + \varepsilon p^2,$$

oder:

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = (x-y)\sqrt{C + \delta(x+y) + \varepsilon(x+y)^2}.$$

Bestimmt man die willkürliche Konstante derart, daß $x = k$ für $y = 0$ ist, so erhält man nach einigen leichten Umformungen:

$$(32) \qquad \frac{2\alpha + \beta(x+y) + 2\gamma xy + \delta xy(x+y) + 2\varepsilon x^2y^2 + 2\sqrt{XY}}{(x-y)^2}$$
$$= \frac{2\alpha + \beta k + 2\sqrt{\alpha K}}{k^2},$$

wo:

$$K = \alpha + \beta k + \gamma k^2 + \delta k^3 + \varepsilon k^4.$$

Nimmt man in (31) das obere Vorzeichen an, so hat man nur $\sqrt{Y}$ mit dem Minuszeichen zu behaften.

In dem besonderen Falle, wo:

$$X = (a + bx + cx^2)^2 = R^2, \quad Y = (a + by + cy^2)^2 = S^2$$

ist, kommt das merkwürdige Ergebnis vor, daß das Integral von (31), wenn das obere Vorzeichen angenommen wird, in eine Identität übergeht. Man kann dennoch das Integral durch die folgende Methode erhalten.

Setzen wir:

$$X = R^2 + \lambda, \quad Y = S^2 + \lambda,$$

wo λ beliebig klein ist; es folgt dann:

$$\sqrt{X} = R + \frac{\lambda}{2R}, \quad \sqrt{Y} = S + \frac{\lambda}{2S},$$

und das Integral, wo $\delta = 2bc$, $\varepsilon = c^2$ ist, nimmt die Form an:

$$\frac{(R-S)\left(1 - \frac{\lambda}{2RS}\right)}{x-y} = \sqrt{C + 2bc(x+y) + c^2(x+y)^2},$$

oder:

$$(b+cp)\left(1-\frac{\lambda}{2RS}\right)=\sqrt{C+2bcp+c^2p^2}.$$

Quadriert man beiderseits, so ergibt sich:

$$(b+cp)^2-(b+cp)^2\frac{\lambda}{RS}=C+2bcp+c^2p^2,$$

oder:

$$\frac{(b+cp)^2}{RS}=\frac{b^2-C}{\lambda}=D,$$

wo D eine neue willkürliche Konstante bezeichnet. Hieraus folgt nach einigen leichten Reduktionen:

$$\frac{1}{D}=\frac{RS}{(b+cp)^2}=\frac{a}{c}-\frac{b}{c}\,\frac{a-cu}{b+cp}+\left(\frac{a-cu}{b+cp}\right)^2,$$

wo $u=xy$, also:

$$\frac{a-cu}{b+cp}=\text{const.},$$

oder auch:

$$\frac{a(x+y)+bxy}{cxy-a}=\text{const.}$$

In einer weiteren Abhandlung[1]) vereinfacht Euler sein Verfahren, und zieht auch seine älteren geometrischen Interpretationen wieder in Betracht.

Die Eulersche Methode kann auch dazu dienen[2]), um partikuläre algebraische Integrale gewisser Differentialgleichungen zu erhalten, welche sich sonst wohl nicht leicht ermitteln ließen. Es ergibt sich z. B. aus Gleichung (32), wenn man:

$$\frac{2\alpha+\beta k+2\sqrt{\alpha K}}{2k^2}=H$$

setzt:

$$\sqrt{X}=\frac{1}{\sqrt{Y}}\left[H(x-y)^2-\alpha-\frac{\beta}{2}(x+y)-\gamma xy+\frac{\delta}{2}xy(x+y)-\varepsilon x^2y^2\right],$$

und folglich wegen (31) (wo das untere Vorzeichen angenommen wird):

---

[1]) Methodus succinctior comparationes quantitatum transcendentium in forma $\int\frac{Pdz}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2+2Dz^3+Ez^4}}$ contentarum inveniendi, M.S. Acad. exhib. 1777; Inst. calc. int. IV, p. 504—524. [2]) Euler, Exempla quarundam memorabilium aequationum differentialium, quas adeo algebraice integrare licet, etiamsi nulla via pateat variabiles a se invicem separandi (1778), Nova Acta Acad. Petrop. XIII, 1795—1796 (publ. 1802), p. 3—13.

$$(\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \delta y^3 + \varepsilon y^4)\, dx$$
$$+ \left(-H(x-y)^2 + \alpha + \frac{\beta}{2}(x+y) + \gamma xy - \frac{\delta}{2}xy(x+y) + \varepsilon x^2y^2\right)dy = 0,$$

eine Differentialgleichung, welche (32) als partikuläres Integral besitzt.

Zwei andere Abhandlungen Eulers[1]) fügen dessen früheren Leistungen nichts wesentlich Neues hinzu.

Die Aufforderung vom Jahre 1754 konnte nicht umhin, G. B. Fagnano zu interessieren, um so mehr als sein Vater damals noch lebte. Und in der Tat beschäftigte er sich mit der Eulerschen Frage und verwandten Gegenständen in drei Schriften, welche die Data 1763, 1768, 1770 tragen[2]). Seinen Beweis des Eulerschen Theorems gründet er auf folgenden von seinem Vater aufgestellten Satz[3]): Sind:

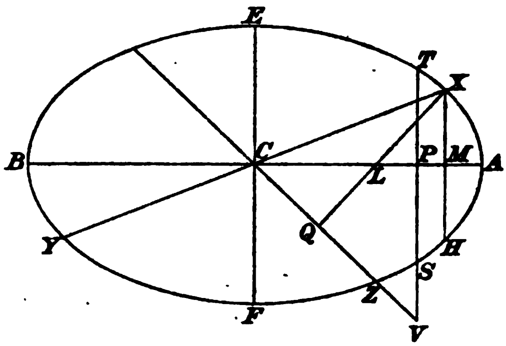


Fig. 85.

$$AB = 2a, \quad EF = 2b$$

(Fig. 85) die größere und die kleinere Achse einer Ellipse mit dem Mittelpunkt C, $CM = x$, $CP = s$ die Abszissen von zwei Kurvenpunkten X, T, und besteht zwischen x und s die Beziehung:

---

[1]) Plenior explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali $\int \frac{Z\,dz}{\sqrt{1+mz^2+nz^4}}$ contentarum, denotante Z functionem quamcunque rationalem ipsius z^2, Acta Acad. Petrop. 1781, P. II (publ. 1785), p. 3—22; Inst. calc. int. IV, p. 446—464. — Uberior evolutio comparationis quam inter arcus sectionum conicarum instituere licet, Acta Acad. Petrop. 1781, P. II (publ. 1785), p. 23—44. [2]) Demonstratio theorematis Actis Lipsiensibus propositi ad annum 1754, Nova Acta Erud. 1762 (publ. 1763), p. 458—466. — Nova arcuum parabolae apollonianae, atque hyperbolae aequilaterae mensura, Nova Acta Erud. 1766—1767 (publ. 1768), p. 27—35 (abgedruckt in Nuova Racc. d'opuscoli scientifici e filologici XVII, 1768, op. V, 17 S.). — Commentatio ad theorema paternum cui titulus: Theorema, da cui si deduce una nuova misura degli archi ellittici, iperbolici e cicloidali, sive de arcuum sectionum conicarum, aliarumque curvarum inter se comparatione, investigatio, Nova Acta Erud. 1770, p. 433—506. [3]) G. lett. it. 1716; diese Vorl., III[2], S. 489—490.

$$s = a\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}}},$$

wo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, so ist:

$$\text{Bogen } EX - \text{Bogen } AT = \frac{c^2x}{a^2}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - \frac{c^2x^2}{a^2}}}.$$

Es ist leicht, das Eulersche Theorem auf Grund dieses Hilfssatzes nachzuweisen. Nimmt man nämlich auf der Verlängerung von TP einen solchen Punkt V, daß $CV = a$, und schneidet CV die Ellipse in Z, so sind CX, CZ konjugierte Durchmesser[1]). Ist nun XQ die Normale in X, Q die Projektion von X auf CZ, L der Schnittpunkt von XQ mit CA, so ist:

$$LM = \frac{b^2x}{a^2}, \quad CL = CM - LM = x - \frac{b^2x}{a^2} = \frac{c^2x}{a^2},$$

$$CQ = \frac{CL \cdot CP}{CV} = \frac{c^2x}{a^2}\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2}},$$

folglich:

$$\text{Bogen } EX - \text{Bogen } AT = CQ.$$

Ist H der zu X in bezug auf AB symmetrische Punkt, Y der zu X entgegengesetzte Kurvenpunkt, S der Schnittpunkt von PV mit der Ellipse, so ist:

$$EX = FH = YF, \quad XT = HS, \quad AT = AS,$$

folglich:

$$YFH - TAS = 2CQ,$$

oder schließlich:

$$YFS - XAS = 2CQ,$$

was zu beweisen war.

Die größte Differenz der Bögen YFS, XAS entspricht der Abszisse:

$$x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}};$$

es ist dann $s = x$, so daß T mit X zusammenfällt, und:

---

[1]) Aus:

$$CP = a^2\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^4 - c^2x^2}}, \quad CV = a$$

ergibt sich:

$$\operatorname{tang} ACV = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

woraus bekanntlich folgt, daß CX und CZ konjugierte Durchmesser sind.

$$YFS - XAS = 2(a-b).$$

In der zweiten Abhandlung beweist Fagnano einige die Bögen der Parabel und der gleichseitigen Hyperbel betreffende Sätze.

Die dritte Abhandlung ist der Auflösung des Eulerschen Problemes hauptsächlich gewidmet. Dazu stellt aber Fagnano mehrere allgemeinere Sätze auf, bei deren Auffindung, wie er erzählt, die Ratschläge seines mehr als achtzigjährigen Vaters ihm zustatten kamen.

a) Besteht zwischen x und z die Beziehung:

$$fhx^{2n}z^{2n} + fl(x^{2n}+z^{2n}) + gl = 0, \tag{33}$$

oder:

$$fhx^{2n}z^{2n} + gh(x^{2n}+z^{2n}) + gl = 0, \tag{34}$$

so ist:

$$\int x^{n-1}dx\sqrt{\frac{hx^{2n}+l}{fx^{2n}+g}} + \int z^{n-1}dz\sqrt{\frac{hz^{2n}+l}{fz^{2n}+g}}$$

$$= \int X + \int Z = \begin{cases} -\dfrac{hx^n z^n}{n\sqrt{-fl}} + C, \\ \dfrac{\sqrt{h}x^n z^n}{n\sqrt{-g}} + C. \end{cases}$$

Es folgt nämlich aus (33):

$$z^n = \sqrt{\frac{-l(fx^{2n}+g)}{f(hx^{2n}+l)}}, \quad x^n = \sqrt{\frac{-l(fz^{2n}+g)}{f(hz^{2n}+l)}},$$

also:

$$X + Z = \sqrt{\frac{-l}{f}}\left[\frac{x^{n-1}dx}{z^n} + \frac{z^{n-1}dz}{x^n}\right];$$

man erhält aber aus (33) durch Differentiation:

$$hz^{2n}x^{2n-1}dx + hx^{2n}z^{2n-1}dz + lx^{2n-1}dx + lz^{2n-1}dz = 0,$$

oder:

$$\frac{x^{n-1}dx}{z^n} + \frac{z^{n-1}dz}{x^n} = -\frac{h}{l}(z^n x^{n-1}dx + x^n z^{n-1}dz) = -\frac{h}{nl}d(x^n z^n),$$

folglich:

$$\int X + \int Z = -\frac{hx^n z^n}{n\sqrt{-fl}} + C.$$

Die Gl. (34) läßt sich analog behandeln.

b) Es ist unter denselben Voraussetzungen:

$$\int T + \int V = \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{fhx^{4n} + (fl + gh)x^{2n} + gl}}$$

$$+ \int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{fhz^{4n} + (fl + gh)z^{2n} + gl}} = C.$$

c) Ebenfalls unter den obigen Voraussetzungen hat man:

$$\int Q + \int R = \int \frac{x^{3n-1}\,dx}{\sqrt{fhx^{4n} + (fl + gh)x^{2n} + gl}}$$

$$+ \int \frac{z^{3n-1}\,dz}{\sqrt{fhz^{4n} + (fl + gh)z^{2n} + gl}} = \begin{cases} -\dfrac{x^n z^n}{n\sqrt{-fl}} + C, \\ \dfrac{x^n z^n}{n\sqrt{-gh}} + C. \end{cases}$$

d) Ist:

(35)
$$p^2(fhx^{2n}z^{2n} + gl) - gl(x^{2n} + z^{2n})$$
$$\mp 2x^n z^n \sqrt{gl}\,\sqrt{(fp^2 + g)(hp^2 + l)} = 0,$$

wo p eine Konstante bezeichnet, so folgt:

(36)
$$\int T \pm \int V = C,$$

und (35) ist die allgemeinste Beziehung, für welche (36) besteht.

e)
$$\int Q \pm \int R = -\frac{px^n z^n}{n\sqrt{gl}} + C.$$

f)
$$\int K \pm \int I = \int \frac{glx^{3n-1}\,dx}{fh\sqrt{glx^{4n} + (fl + gh)x^{2n} + fh}}$$

$$\pm \int \frac{glz^{3n-1}\,dz}{fh\sqrt{glz^{4n} + (fl + gh)z^{2n} + fh}} = \frac{p\sqrt{gl}\,x^n z^n}{nfh} = C.$$

g)
$$\int F + \int G = \int \frac{x^{n-1}\,dx}{\sqrt{glx^{4n} + (fl + gh)x^{2n} + fh}}$$

$$\pm \int \frac{z^{n-1}\,dz}{\sqrt{glz^{4n} + (fl + gh)z^{2n} + fh}} = C.$$

h)
$$\int X \pm \int Z = -\frac{hpx^n z^n}{n\sqrt{gl}} + C.$$

i)
$$\int M \pm \int N = \int x^{n-1}dx \sqrt{\frac{lx^{2n}+h}{gx^{2n}+f}}$$
$$\pm \int z^{n-1}dz \sqrt{\frac{lz^{2n}+h}{gz^{2n}+f}} = \frac{p\sqrt{gl}\,x^n z^n}{n} + C.$$

j) Ist:
$$gl(x^{2n}+z^{2n}) \pm 2x^n z^n \sqrt{gl}\,\sqrt{ghp^2+gl} - glp^2 = 0,$$
so folgt:
$$\int L \pm \int O = \int x^{n-1}dx \sqrt{\frac{hx^{2n}+l}{g}} \pm \int z^{n-1}dz \sqrt{\frac{hz^{2n}+l}{g}}$$
$$= -\frac{hp x^n z^n}{n\sqrt{gl}} + C.$$

k) Ist q eine ungerade Zahl, und besteht die Beziehung (33), so ist:
$$\int W_q \pm \int Z_q = \int \frac{x^{qn-1+4n}dx}{\sqrt{fhx^{4n}+(fl+gh)x^{2n}+gl}}$$
$$\pm \int \frac{z^{qn-1+4n}dz}{\sqrt{fhz^{4n}+(fl+gh)z^{2n}+gl}}$$
eine algebraische Größe. Man hat nämlich:
$$d\left(x^{qn}\sqrt{fhx^{4n}+(fl+gh)x^{2n}+gl} \pm z^{qn}\sqrt{fhz^{4n}+(fl+gh)z^{2n}+gl}\right)$$
$$= nx^{qn-1}dx\,\frac{(q+2)fhx^{4n}+(q+1)(fl+gh)x^{2n}+qgl}{\sqrt{fhx^{4n}+(fl+gh)x^{2n}+gl}}$$
$$\pm nz^{qn-1}dz\,\frac{(q+2)fhz^{4n}+(q+1)(fl+gh)z^{2n}+qgl}{\sqrt{fhz^{4n}+(fl+gh)z^{2n}+gl}}$$
$$= n[(q+2)fh(W_q \pm Z_q) + (q+1)(fl+gh)(W_{q-2} \pm Z_{q-2})$$
$$+ qgl(W_{q-4} \pm Z_{q-4})],$$
und $W_q \pm Z_q$ ist für $q = -3$ und für $q = -1$ wegen der Sätze b), c) algebraisch integrierbar.

Die obigen Sätze lassen zahlreiche geometrische Anwendungen zu, die zwar nicht sämtlich neu sind, und von welchen nur einige angeführt werden mögen.

a) Ist a die Halbachse einer Lemniskate, x der vom Doppelpunkt ausgehende Vektorradius, so ist der Elementarbogen der Kurve:
$$ds = \frac{a^2dx}{\sqrt{a^4-x^4}}.$$

Man erhält aber dieses Differential aus T, wenn man setzt:

$$n = 1, \quad f = -1, \quad g = l = a^2, \quad h = 1;$$

es folgt also aus (33):

$$x^2 z^2 + a^2(x^2 + z^2) - a^4 = 0,$$

oder:

$$z = a\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}.$$

Ist daher $CB = x$, $CE = z$, so folgt (Fig. 86):

Bogen CE + Bogen CB = const.

Zur Bestimmung der Konstante beachte man, daß $z = a$ für $x = 0$

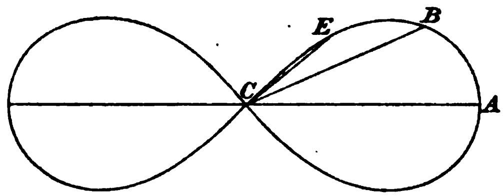


Fig. 86.

ist. Die Konstante ist also der Bogen CA, und man hat:

Bogen CE = Bogen BA.

Die Punkte E, B fallen zusammen, wenn:

$$x = z = a\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$$

oder $x = a\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ ist, eine Formel, welche das Mittel liefert, den Lemniskatenquadranten zu halbieren.

b) Ist a die Halbachse, x der vom Mittelpunkt ausgehende Vektorradius einer gleichseitigen Hyperbel, so ist:

$$ds = \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^4 - a^4}}.$$

Um dieses Differential mit Q in Übereinstimmung zu bringen, muß man setzen:

$$n = 1, \quad f = h = 1, \quad g = -a^2, \quad l = a^2;$$

es folgt dann aus (34):

$$x^2 z^2 - a^2(x^2 + z^2) - a^4 = 0,$$

oder:

$$z = a\sqrt{\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}}. \tag{37}$$

Ist also $CB = x$, $CE = z$ (Fig. 87), so folgt:

$$AB + AE = \frac{xz}{a} + C.$$

Ist B' ein anderer Kurvenpunkt, E' der wegen (37) demselben entsprechende Punkt, und bezeichnet man mit t, u die nach B', E' gehenden Vektorradien, so ist:

$$AB' + AE' = \frac{tu}{a} + C.$$

Hieraus folgt:

$$AB + AE - AB' - AE' = \frac{xz - tu}{a},$$

oder:

$$E'E - BB' = \frac{xz - tu}{a}.$$

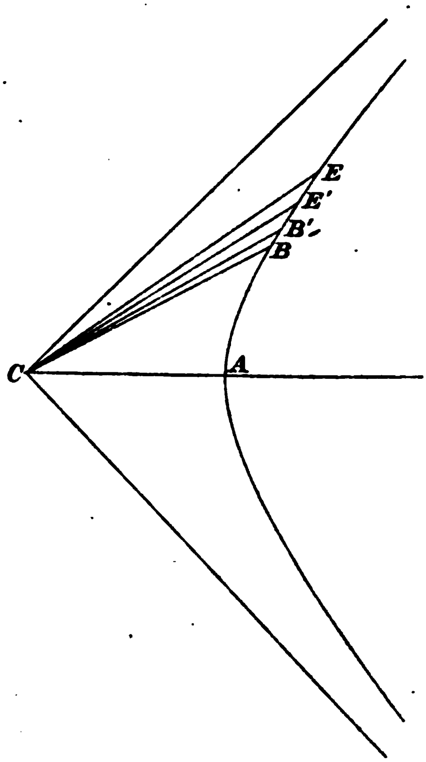


Fig. 87.

c) Setzt man:

$$n = 1, \quad f = -a^2, \quad g = l = a^4, \quad h = -c^2,$$

so ergibt sich:

$$X = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 - c^2x^2}{a^2 - x^2}}\,dx,$$

welches den Elementarbogen der Ellipse darstellt, deren Halbachsen a, $\sqrt{a^2 - c^2}$ sind, ferner, wegen (35):

$$c^2p^2x^2z^2 + a^6(p^2 - x^2 - z^2) \mp 2a^3xz\pi = 0, \tag{38}$$

oder, wenn man das obere Vorzeichen annimmt:

$$z = \frac{(-\pi x + p\xi)a^3}{a^6 - c^2p^2x^2},$$

wo:

$$\pi = \sqrt{(a^2 - p^2)(a^4 - c^2p^2)}, \quad \xi = \sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - c^2x^2)};$$

ist dann (Fig. 88) $CM = x$, $CN = z$, $CQ = p$, so folgt:

$$DR + DS = \frac{c^2pxz}{a^4} + \text{const.}$$

Bestimmt man die Konstante auf die gewöhnliche Weise, so erhält man:

$$DR + DS = \frac{c^2pxz}{a^4} + DT,$$

oder:

$$DR - ST = \frac{c^2pxz}{a^4},$$

ein Ergebnis, welchem wir schon oben (Formel (14)) begegnet sind.

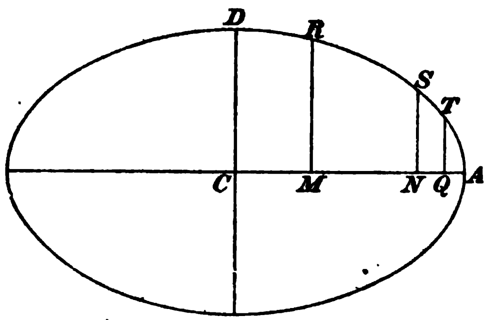


Fig. 88.

Nimmt man dagegen das untere Vorzeichen, so erhält man:

(39) $$z = \frac{a^2(\pi x + p\xi)}{a^6 - c^4p^2x^2}, \quad p = \frac{a^2(z\xi - x\zeta)}{a^6 - c^4x^2z^2},$$

wo:

$$\zeta = \sqrt{(a^2 - z^2)(a^4 - c^2z^2)};$$

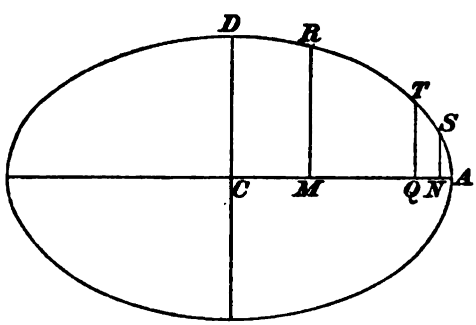


Fig. 89.

der Punkt T fällt zwischen S und D, und man hat (Fig. 89):

$$DR - DS = \frac{c^2 p x s}{a^4} - DT,$$

woraus wiederum die obige Beziehung folgt.

Fällt insbesondere R mit T zusammen, so ist $x = p$, $\xi = \varkappa$, folglich wegen der zweiten Gleichung (39):

$$a^2 s \xi = (a^6 - c^2 x^2 s^2 + a^2 \zeta) x;$$

es ergibt sich andererseits aus (38):

$$c^2 x^4 s^2 - a^6 s^2 + 2 a^2 x s \xi = 0,$$

folglich:

$$c^2 x^4 s^2 - a^6 s^2 + 2 x^2 (a^6 - c^2 x^2 s^2 + a^2 \zeta) = 0,$$

oder:

$$c^2 s^2 x^4 - 2 a^2 (a^2 + \zeta) x^2 + a^6 s^2 = 0,$$

woraus man erhält:

$$x = \frac{a}{c s} \sqrt{[a - \sqrt{a^2 - s^2}]\,[a^2 - \sqrt{a^4 - c^2 s^2}]\,a}\,. \tag{40}$$

Ist also (Fig. 90) $CM = x = p$, $CN = s$, so hat man:

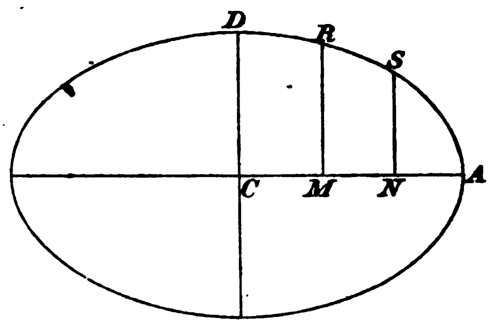


Fig. 90.

$$DR - RS = \frac{c^2 x^2 s}{a^4} = \frac{1}{a s} [a - \sqrt{a^2 - s^2}]\,[a^2 - \sqrt{a^4 - c^2 s^2}]\,.$$

Für $s = a$ findet man, wie oben, $x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a + b}}$, und:

$$DR - RA = a - b.$$

Nimmt man nun p, s statt x, p, und ist (Fig. 91) $s_1 = CN_1$ der entsprechende Wert von s, so hat man:

$$s_1 = \frac{a^2 (\varkappa s + p \zeta)}{a^6 - c^2 p^2 s^2} = \frac{a^2 (s \xi + x \zeta)}{a^6 - c^2 x^2 s^2},$$

ferner:

$$DR - SS_1 = \frac{c^2 p z z_1}{a^4} = \frac{c^2 x z z_1}{a^4},$$

und wenn man mit der oben gefundenen Gleichung summiert:

$$2DR - RS_1 = \frac{c^2 x z(x + z_1)}{a^4},$$

wo $\varkappa$ den Wert (40) hat.

Nimmt man nun z_1 statt z, und ist $p_1 = CM_1$ der den Werten

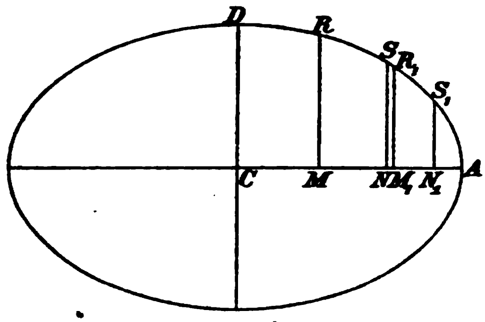


Fig. 91.

x, z_1 entsprechende Wert von p, so hat man:

$$z_1 = \frac{a^2(x\varkappa_1 + p_1\xi)}{a^6 - c^2 x^2 p_1^2}, \tag{41}$$

wo $\varkappa_1$ eine zu $\varkappa$ analoge Bedeutung hat, ferner:

$$DR - R_1 S_1 = \frac{c^2 p_1 x z_1}{a^4};$$

multipliziert man mit 2 und subtrahiert $(DR - RS)$, so folgt:

$$DS - 2R_1 S_1 = \frac{c^2 x}{a^4}(2p_1 z_1 - xz).$$

Damit $DS = 2R_1 S_1$ ist, muß die Beziehung:

$$2p_1 z_1 = xz \tag{42}$$

bestehen. Setzt man nun in (38) z_1, p_1 statt z, p, so erhält man:

$$c^2 p_1^2 x^2 z_1^2 + a^6(p_1^2 - x^2 - z_1^2) + 2a^3 x z_1 \varkappa_1 = 0. \tag{43}$$

Aus (41), (42), (43) ergibt sich:

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ z_1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2a^3}\Bigg[\sqrt{a^3 x z \xi + a^6 x^2 + \frac{c^2 x^4 z^2}{4} + a^6 x z}$$

$$\pm \sqrt{a^3 x z \xi + a^6 x^2 + \frac{c^2 x^4 z^2}{4} - a^6 x z}\Bigg],$$

wo:

$$z = \frac{2a^2 x \xi}{a^6 - c^2 x^4}.$$

Fällt insbesondere S mit A zusammen, so wird:

$$z = a, \quad x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \quad \xi = a^2 b \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}},$$

also:

$$\left.\begin{matrix} p_1 \\ z_1 \end{matrix}\right\} = \frac{a}{4\sqrt{a+b}}\left[\sqrt{5a+3b+4\sqrt{a(a+b)}}\right.$$

$$\left. \pm\sqrt{5a+3b-4\sqrt{a(a+b)}}\right],$$

eine Formel, welche die Auflösung des Eulerschen Problems liefert.

Mit der Eulerschen Frage beschäftigten sich auch Charles Bossut (geb. zu Tartaras bei Lyon am 11. August 1730, gest. zu Paris am 14. Januar 1814) und Étienne Bézout.

Der Beweis von Bossut[1]) ist folgender.

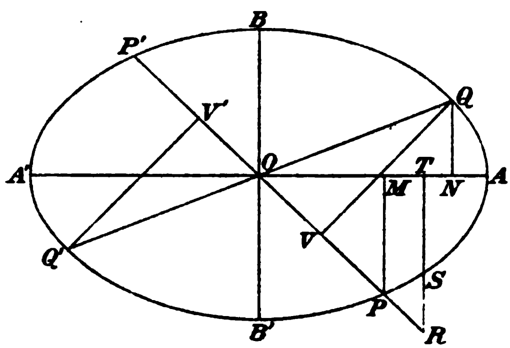


Fig. 92.

Es sei (Fig. 92):

$$OP = n, \quad A'N = x, \quad AT = u, \quad NQ = y;$$

man hat dann:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2x}{a},$$

und folglich:

$$d \cdot A'BQ = \frac{dx\sqrt{a^2b^2 + 2ac^2x - c^2x^2}}{a\sqrt{2ax - x^2}},$$

$$d \cdot AS = \frac{du\sqrt{a^2b^2 + 2ac^2u - c^2u^2}}{a\sqrt{2au - u^2}}.$$

[1]) Démonstration d'un théorème de géométrie énoncé dans les Actes de Leipsick, année 1754, Mém. prés. par div. sav. III, 1760, p. 314 bis 320.

Drücken wir alles durch n aus. Es ist bekanntlich:

$$OQ = \sqrt{a^2 + b^2 - n^2},$$

ferner:

$$OQ = \sqrt{ON^2 + NQ^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \frac{1}{a}\sqrt{a^4 - 2ac^2x + c^2x^2};$$

durch Gleichsetzung der beiden Werte von OQ ergibt sich:

$$x = a + \frac{a}{c}\sqrt{a^2 - n^2},$$

und hieraus:

$$d \cdot AQ' = d \cdot A'Q = -\frac{n^2dn}{R}, \quad d \cdot A'Q' = d \cdot AQ = -d \cdot A'Q = \frac{n^2dn}{R},$$

wo:

$$R = \sqrt{(a^2 - n^2)(n^2 - b^2)}.$$

Aus:

$$\frac{OM^2}{a^2} + \frac{MP^2}{b^2} = 1, \quad OM^2 + MP^2 = n^2$$

erhält man andererseits:

$$OM = \frac{a}{c}\sqrt{n^2 - b^2},$$

folglich:

$$OT = \frac{a}{n}OM = \frac{a^2}{cn}\sqrt{n^2 - b^2}, \quad u = a - \frac{a^2}{cn}\sqrt{n^2 - b^2},$$

und hieraus:

$$d \cdot AS = -\frac{a^2b^2dn}{n^2R}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} d(Q'PS - QAS) &= d \cdot Q'PA - d \cdot QA - 2d \cdot AS \\ &= 2\frac{dn}{R}\left(-n^2 + \frac{a^2b^2}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ist dieser Ausdruck das Differential einer algebraischen Funktion von n, so hat diese notwendig die Form pn^qR, wo p eine Konstante, q eine ganze Zahl ist. Durch Differentiation ergibt sich $p = 2$, $q = -1$, also:

$$d(Q'PS - QAS) = 2d\frac{R}{n},$$

und wenn man integriert:

$$Q'PS - QAS = 2\frac{R}{n},$$

wobei die Integrationskonstante, wie man leicht bestätigt, gleich Null zu setzen ist.

Es ist ferner, wegen einer bekannten Eigenschaft der konjugierten Durchmesser:

$$n \cdot Q'V' = ab,$$

also:

$$OV' = \sqrt{a^2 + b^2 - n^2 - \frac{a^2 b^2}{n^2}} = \frac{R}{n},$$

und schließlich:

$$Q'PS - QAS = 2 \cdot OV'.$$

Der Eulersche Satz ließe sich, wie Bossut bemerkt, auf folgende Weise a priori entdecken. Setzen wir uns vor, zwei Ellipsenbögen anzugeben, deren Differenz algebraisch rektifizierbar sein möge. Es sei $A'BQ$ einer dieser Bögen, wo $A'Q = x$; dann ergibt sich wie oben:

$$d \cdot A'BQ = -\frac{n^2 dn}{R},$$

wenn man setzt:

$$\sqrt{a^2 b^2 + 2ac^2 x - c^2 x^2} = an,$$

woraus folgt:

$$x = a + \frac{a}{c}\sqrt{a^2 - n^2}.$$

Da aber identisch:

$$-\frac{n^2 dn}{R} + \frac{a^2 b^2 dn}{n^2 R} = d \cdot \frac{R}{n},$$

so ist das Problem gelöst, wenn $\frac{a^2 b^2 dn}{n^2 R}$ das Differential eines Ellipsenbogens bildet. Daß dieses wirklich stattfindet, bestätigt man durch die Substitution $n = \frac{ab}{n_1}$, welche ergibt:

$$\frac{a^2 b^2 dn}{n^2 R} = -\frac{n_1{}^2 dn_1}{R_1},$$

wo:

$$R_1 = \sqrt{(a^2 - n_1{}^2)(n_1{}^2 - b^2)}$$

ist.

Bézout[1]) stellt die folgenden drei Sätze auf:

a) Das Differential:

$$d\sigma = d\left[g x^{rm}\left(\frac{a + bx^m}{e + fx^m}\right)^r\right]$$

läßt sich in zwei Differentiale von der Form:

---

[1]) Mémoire sur les quantités différentielles, qui n'étant point intégrables par elles-mêmes, le deviennent néanmoins quand on leur joint des quantités de même forme qu'elles, Mém. prés. par div. savans III, 1760, p. 326—343.

$$kx^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^{r-1}$$

zerlegen. — Die Zerlegung findet auf folgende Weise statt:

$$d\left[gx^{rm}\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^r\right]=\frac{mreg}{f}\,\frac{(af-be)x^{rm-1}dx}{(e+fx^m)^2}\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^{r-1}$$

$$+\frac{mrbg}{f}x^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^{r-1};$$

das zweite Glied rechts hat die verlangte Form, das erste wird auf dieselbe durch die Substitution:

$$\frac{a+bx^m}{e+fx^m}=-\frac{b}{e}z^m$$

gebracht, welche es in:

$$\frac{mrbg}{f}z^{rm-1}dz\left(\frac{a+bz^m}{e+fz^m}\right)^{r-1}$$

überführt, so daß:

$$d\sigma=\frac{mrbg}{f}x^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^{r-1}+\frac{mrbg}{f}z^{r-1}dz\left(\frac{a+bz^m}{e+fz^m}\right)^{r-1}$$

b) Das Differential $d\sigma$ läßt sich in zwei Differentiale von der Form:

$$kx^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^r$$

zerlegen. — Es ist nämlich:

$$d\sigma=mrgx^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^r+\frac{mrg(be-af)}{(e+fx^m)^2}x^{rm+m-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^{r-1};$$

das erste Glied hat die gewünschte Form, das zweite geht durch die obige Substitution in:

$$mrgz^{rm-1}dz\left(\frac{a+bz^m}{e+fz^m}\right)^r$$

über, so daß:

$$d\sigma=mrgx^{rm-1}dx\left(\frac{a+bx^m}{e+fx^m}\right)^r+mrgz^{rm-1}dz\left(\frac{a+bz^m}{e+fz^m}\right)^r.$$

c) Das Differential:

$$d\tau=d[x^{-rm}(a+bx^m)^r(e+fx^m)^r]$$

läßt sich in zwei Differentiale von der Form:

$$kx^{-rm-1}dx(a+bx^m)^{r-1}(e+fx^m)^{r-1}$$

zerlegen. — Es ist:

$$d\tau = -rmaex^{-rm-1}dx(a+bx^m)^{r-1}(e+fx^m)^{r-1}$$
$$+ rmbfx^{2m-rm-1}dx(a+bx^m)^{r-1}(e+fx^m)^{r-1};$$

das erste Glied hat die gewünschte Form, das zweite wird durch die Substitution:

$$z^m = \frac{ae}{bfx^m}$$

auf dieselbe gebracht, wonach man hat:

$$d\tau = -rmaex^{-rm-1}dx(a+bx^m)^{r-1}(e+fx^m)^{r-1}$$
$$- rmaez^{-rm-1}dz(a+bz^m)^{r-1}(e+fz^m)^{r-1}.$$

Diese Sätze lassen sich auf die Aufsuchung von Kurvenbögen anwenden, deren Summe algebraisch rektifizierbar ist.

Das Differential des Ellipsenbogens ist:

$$ds = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \varepsilon^2 x^2}{\alpha^2 - x^2}}\,dx,$$

wo α, β die Halbachsen bezeichnen, und:

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = \varepsilon^2$$

ist. Will man Satz a) verwerten, so muß man setzen:

$$m = 2, \quad r = \frac{1}{2}, \quad a = \alpha^2, \quad b = -1, \quad e = \alpha^2, \quad f = -\varepsilon^2, \quad g = 1;$$

ist also:

$$z = \alpha\sqrt{\frac{\alpha^2 - x^2}{\alpha^2 - \varepsilon^2 x^2}},$$

so folgt:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2 - \varepsilon^2 x^2}{\alpha^2 - x^2}}\,dx + \sqrt{\frac{\alpha^2 - \varepsilon^2 z^2}{\alpha^2 - z^2}}\,dz = \frac{\varepsilon^2}{\alpha}\,d(xz),$$

eine Beziehung, welche den Beweis des Eulerschen Satzes liefert.

Für die Hyperbel ist:

$$ds = \sqrt{\frac{\varepsilon^2 x^2 - \alpha^2}{x^2 - \alpha^2}}\,dx,$$

wo α, β die Halbachsen bezeichnen und:

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2}$$

ist. Vergleicht man mit b), so muß man setzen:

$$m=2,\quad r=\frac{1}{2},\quad a=-\alpha^2,\quad b=\varepsilon^2,\quad e=-\alpha^2,\quad f=1,\quad g=1;$$

ist also:

$$z=\frac{\alpha}{\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2-\alpha^2}{x^2-\alpha^2}},$$

so folgt:

$$\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2-\alpha^2}{x^2-\alpha^2}}\,dx+\sqrt{\frac{\varepsilon^2z^2-\alpha^2}{z^2-\alpha^2}}\,dz=\frac{\varepsilon}{\alpha}\,d(xz).$$

Satz c) kann auf die Kurven:

$$y=Mx^{\frac{4t+1}{4t+3}},\quad y=Mx^{\frac{4t-1}{4t+1}}$$

angewandt werden, wo $t \neq 0$.

Die bisher besprochenen Untersuchungen sind nicht nur in historischer, sondern auch in sachlicher Hinsicht von außerordentlicher Wichtigkeit. Ihr wesentlicher Inhalt läßt sich wie folgt zusammenfassen.

Bezeichnet Πx irgend eins von den betrachteten Integralen, also ein Integral, welches die Quadratwurzel eines Polynoms der vierten Ordnung als einzige Irrationalität enthält, und besteht zwischen x, y, a eine gewisse algebraische Beziehung:

$$a=\psi(x,y),$$

so ist:

$$\Pi x \pm \Pi y = \Pi a + \varphi(x,y,a),$$

wo $\varphi(x,y,a)$ eine algebraische Funktion[1]) von x, y, a bezeichnet; in den einfachsten Fällen ist diese Funktion identisch Null, so daß:

$$\Pi x \pm \Pi y = \Pi a$$

ist. Mit anderen Worten: Die Summe oder die Differenz zweier gleichartigen Integrale Πx mit verschiedenen oberen Grenzen ist, von einer algebraischen Funktion dieser Grenzen eventuell abgesehen, ein Integral von eben derselben Form, dessen obere Grenze von denjenigen der vorgegebenen Integrale algebraisch abhängt.

Diese Eigenschaft der elliptischen Integrale hat man sich gewöhnt als Additionstheorem zu bezeichnen; und Euler bemerkte auch, wie schon (S. 805) gesagt, daß dieselbe den hyperelliptischen Integralen

---

[1]) Erst gegen das Ende unserer Periode stellte sich, wie wir unten sehen werden, der Fall von den Integralen dritter Gattung ein, wo φ eine algebraisch-logarithmische Funktion ist.

nicht zukommt, was später den Ausgangspunkt des Umkehrproblems der Abelschen Integrale bildete.

Die Analogie mit den Kreisfunktionen entfiel weder Euler noch Lagrange; beide gingen, um eine Integrationsmethode für die elliptische Gleichung aufzufinden, von der einfacheren Gleichung:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

aus, deren Integral sich unter den beiden gleichbedeutenden Formen:

$$x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2} = a,$$

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin a$$

schreiben läßt. Setzt man:

$$x = \sin t, \quad y = \sin u,$$

so erhält man hieraus, nach einer viel üblicheren Schreibweise:

$$\sin t\sqrt{1-\sin u^2} \pm \sin u\sqrt{1-\sin t^2} = \sin(t \pm u),$$

eine Formel, welche aussagt, daß zwischen $\sin t$, $\sin u$ und $\sin(t \pm u)$ eine algebraische Beziehung stattfindet. Es sollte ganz natürlich erscheinen, eine analoge Umformung in die elliptische Differentialgleichung einzuführen; man hatte nur:

$$\Pi x = u, \quad \Pi y = v, \quad \Pi a = c$$

zu setzen, und x, y, a als Funktionen von u, v bzw. c:

$$x = \lambda u, \quad y = \lambda v, \quad a = \lambda c$$

anzusehen, um schreiben zu können:

$$\lambda(u+v) = \psi(\lambda u, \lambda v).$$

Man sieht hieraus, wie nahe die beiden großen Mathematiker dem Begriffe der Umkehrung der elliptischen Integrale kamen. Und es mußten dennoch manche Jahrzehnte verfließen, ehe dieser Begriff ans Licht kommen möchte!

B. Beziehungen zwischen Bögen verschiedener Kegelschnitte.

Zu jedem beliebigen Bogen eines Kegelschnittes läßt sich, wie schon gesehen, ein anderer Bogen desselben Kegelschnittes derart angeben, daß die Differenz beider Bögen algebraisch ausdrückbar ist.

Es erhebt sich aber die Frage, ob es möglich ist, jeden beliebigen Kegelschnittbogen durch Bögen eines Kegelschnittes von **bestimmter** Art auszudrücken. Analytisch lautet die Frage, ob und wie man gewisse Integrale auf eine bestimmte Form bringen kann. Diese Frage enthält den Kern zweier Begriffe, die in der Theorie der elliptischen Funktionen eine Hauptrolle spielen, der **Transformation** und der **Reduktion auf Normalformen**.

Eigentliche Transformationen und Reduktionen sind die folgenden Probleme, die **Euler** gleich zu Anfang unserer Periode untersuchte[1]):

1. Das Differential:

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}=\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

durch Kegelschnittbögen zu integrieren;

2. die Bedingungen aufzusuchen, unter welchen:

$$\int\frac{(p+qy+ry^2)dy}{\sqrt{Y}} \tag{44}$$

auf die Form:

$$\int\frac{(p+qx+rx^2)dx}{\sqrt{\alpha+\gamma x^2+\varepsilon x^4}}$$

zurückführbar ist;

3. das Differential:

$$\frac{(p+rx^2)dx}{\sqrt{\alpha+\gamma x^2+\varepsilon x^4}}$$

durch Kegelschnittbögen zu integrieren, wenn das unter dem Wurzelzeichen stehende Polynom nicht in zwei reelle rein quadratische Faktoren $f+gx^2$, $h+kx^2$ auflösbar ist;

4. die Bedingungen anzugeben, unter welchen (44) sich auf die Form:

$$\int\frac{(p+qx+rx^2)dx}{\sqrt{2\beta x+\gamma x^2+2\delta x^3}}$$

bringen läßt.

Eine mehr systematische Behandlung erfährt das allgemeine Reduktionsproblem in einer späteren Schrift **Eulers**.[2]) Hier taucht ein neuer und fruchtbarer Gedanke auf; ein Gedanke, der auch geeignet war, zur Umkehrung der elliptischen Integrale zu führen.

---

[1]) **Consideratio formularum, quarum integratio per arcus sectionum conicarum absolvi potest.** Novi Comm. Acad. Petrop. VIII, 1760 und 1761 (publ. 1763), p. 129—149. [2]) **De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipsis et hyperbolae,** Novi Comm. Acad. Petrop. X, 1764 (publ. 1766), p. 3—50.

Euler will die Kegelschnittbögen als neue Transzendenten mit demselben Rechte in der Analysis einbürgern, mit welchem schon lange her die Logarithmen und die Kreisbögen in derselben auftreten. Und so wie man in der Trigonometrie den Radius $= 1$ annimmt, so nimmt er den Halbparameter $= 1$ an, so daß die Gleichung des auf einen Scheitel als Koordinatenursprung bezogenen Kegelschnittes lautet:

$$y^2 = 2x - \frac{x^2}{a},$$

wo $2a$ die Länge der durch den betrachteten Scheitel gehenden Achse bezeichnet. Hier ist:

$a > 0$ für die Ellipse;

$a = 1$ für den Kreis;

$a = \infty$ für die Parabel;

$a < 0$ für die Hyperbel.

Die Bogenlänge $\Pi_a x$[1]) ist:

$$\Pi_a x = \int \sqrt{\frac{a^2 - 2a(1-a)x + (1-a)x^2}{a(2ax - x^2)}}\, dx;$$

Euler bringt dieses Integral auf die Form:

$$\int \sqrt{\frac{f + gz^2}{h + kz^2}}\, dz,$$

und unterscheidet zwölf für dieses letzte Integral mögliche Fälle, je nach dem Vorzeichen und der relativen Größe der Koeffizienten, wie aus folgender Tabelle erhellt, welche auch angibt, auf welche Weise das Integral in jedem besonderen Falle durch Kegelschnittbögen darstellbar ist:

	f	g	h	k		
1	+	+	+	+	$fk > gh$	alg. F., Ellipse und Hyperbel
2	+	+	+	+	$fk < gh$	Hyperbel
3	+	+	+	−		Ellipse
4	+	+	−	+		alg. F., Ellipse und Hyperbel
5	+	−	+	+		alg. F., Ellipse und Hyperbel
6	+	−	+	−	$fk > gh$	Ellipse
7	+	−	+	−	$fk < gh$	alg. F. und Hyperbel

[1]) Euler schreibt $\Pi x[a]$.

	f	g	h	k		
8	+	−	−	+	$fk > gh$	alg. F., Ellipse und Hyperbel
9	−	+	+	+		alg. F. und Ellipse
10	−	+	+	−	$fk < gh$	alg. F. und Hyperbel
11	−	+	−	+	$fk > gh$	alg. F. und Ellipse
12	−	+	−	+	$fk < gh$	Hyperbel.[1])

Das Problem der Zurückführung von Integralen auf Kegelschnittbögen hatte schon früher (diese Vorl., III², S. 871) Maclaurin und d'Alembert beschäftigt. Der letztere kommt auf den Gegenstand noch öfters wieder zurück. In seinen Opuscules mathématiques[2]) beweist er, mit Hilfe früher erhaltener Resultate, daß:

$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{Ay^4 + Cy^2 + Dy + E}}$$

und andere ähnliche Integrale auf Kegelschnittbögen reduzierbar sind. Die Berichtigung und Vervollständigung einiger Punkte dieser Arbeit bildet den Zweck einer kurz darauf erschienenen Schrift.[3]) Auch in seinen schon oben (S. 728) besprochenen Recherches sur le calcul intégral gibt er einige auf Kegelschnittbögen zurückführbare Integrale, wie:

$$\text{a)}\quad \int U dv [A + B\sin(a + v) + C\cos(c + v) + D\sin(g + v) + F\cos(l + v) + \cdots]^{\frac{n}{2}},$$

wo n eine ganze Zahl, U eine ganze rationale Funktion von Sinussen und Kosinussen von um konstante Größen vermehrten Vielfachen von v bezeichnet;

$$\text{b)}\quad \int U dv (A + B\sin v)^{\frac{m}{2}} (C + D\sin v + E\sin v^2)^{\frac{n}{2}},$$

wo m, n ganze Zahlen sind und U eine ganze rationale Funktion von $\sin 2pv$ oder von $\cos qv$ bezeichnet;

---

[1]) Eine analoge Untersuchung bildet den Inhalt von zwei Kapiteln (T. II, L. I, C. 12, 13) der mehrmals angeführten Institutiones analyticae von Riccati und Saladini, wo die Frage auf Grund einer früheren Arbeit von Riccati (Opusculorum ad res physicas et mathematicas pertinentium, 2 Bde., Bononiae 1757—1762, T. II, Op. 2, p. 36—176) behandelt wird. Einige auf Kegelschnittbögen reduzierbare Integrale wurden auch von Lorgna (Opuscula mathematica et physica, Veronae 1770) angegeben.

[2]) T. IV, Paris 1768, p. 225—253: Recherches de calcul intégral, p. 254 bis 282: Supplément au mémoire précédent. [3]) Recherches mathématiques sur divers sujets, Misc. Taur. IV, 1766—1769, P. II, p. 127—161.

c) $$\int U dv (a + b \sin v^2)^{\frac{m}{2}} (g + h \sin v^2)^{\frac{n}{2}};$$

wo m und n ganzzahlig sind und U eine ganze rationale Funktion von $\cos qv$ oder von $\sin qv$ bezeichnet;

d) $$\int U dv (a + b \sin v^2)^{\frac{m}{2}} (c + d \sin v^2)^{\frac{n}{2}} (e + f \sin v^2)^{\frac{r}{2}},$$

wo m, n, r ganzzahlig sind und U eine ganze rationale Funktion von $\sin qv$ ist;

e) $$\int U dv (a + b \sin v + g \sin v^2)^n,$$

wo $3n$ oder $4n$ eine ganze positive Zahl ist und U eine ganze rationale Funktion von $\sin 2pv$ oder von $\cos qv$ bezeichnet;

f) $$\int \frac{z^{\vartheta} dz}{(f + gz^2)^{\frac{\omega}{2}} (p + qz^2)^{\frac{\lambda}{2}} (l + rz^2)^{\frac{\sigma}{2}}},$$

wo ω, λ, σ ganz und positiv sind, ϑ ganzzahlig ist, und:

$$-\frac{\vartheta}{2} - \frac{3}{2} + \frac{\lambda + \omega + \sigma}{2}$$

ganz und nicht negativ ist;

g) $$\int \frac{x^m dx}{(1 - x^2)^{\frac{s}{2}} (a + bx)^{\frac{q}{2}} (e + fx)^{\frac{p}{2}}},$$

wo s, q, p positive ungerade Zahlen sind, m ganzzahlig ist, und:

$$-m - 2 + s + \frac{q + p}{2}$$

ganz und nicht negativ ist.

d'Alembert ergreift die Gelegenheit, um seine Priorität hinsichtlich der Integration von $\sqrt{\frac{f + gz^2}{p + qz^2}}$ durch Kegelschnittbögen Riccati[1]) gegenüber zu behaupten.

In einer späteren Schrift[2]) zeigt d'Alembert, wie sich die oben angeführte Eulersche Klassifikation auf Grund seiner eigenen älteren Methoden aufstellen läßt. Er bemerkt, daß seine Resultate einige Verschiedenheiten gegenüber den Eulerschen aufzeigen, insofern als gewisse nach Euler auf Bögen und algebraische Funktionen reduzier-

[1]) Riccati (Inst. an., T. II, P. II, C. 12) sagte, niemand vor ihm hätte dieses geleistet. [2]) Opuscules mathématiques, T. VII, Paris 1780, p. 61 bis 101: Sur des différentielles réductibles aux arcs de sections coniques, p. 390: Remarque pour la page 96.

bare Integrale von ihm selbst durch lauter Bögen ausgedrückt werden; daß dieses aber keinen Widerspruch bildet, da die Fagnano-Eulerschen Sätze in bestimmten Fällen das Mittel liefern, die Summe eines Bogens und einer algebraischen Funktion durch einen Bogen zu ersetzen.

Wiederum auf elliptische Integrale bezieht sich ein Schreiben von d'Alembert an Lagrange vom Jahre 1781.[1] Hier berichtigt er eine Stelle seiner Schrift vom Jahre 1746 dadurch, daß er bemerkt, daß das dort als auf zwei Hyperbelbögen und einen Ellipsenbogen reduzierbar angegebene Integral:

$$\int \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{z^2+fz+b}},$$

wo:

$$z^2+fz+b=(z+a)(z+c), \qquad a>0, \quad c>0,$$

durch einen einzigen Ellipsenbogen und eine algebraische Funktion darstellbar ist, da die beiden Hyperbelbögen sich gegenseitig aufheben. Ist dagegen:

$$z^2+fz+b=(z-a)(z-c),$$

oder sind die Faktoren des Trinoms imaginär, so findet diese Aufhebung nicht mehr statt.

Lexell[2]) gibt für die Eulersche Klassifikation eigene Beweise, und leitet einige neue Sätze aus der Vergleichung der Ergebnisse verschiedener Reduktionen eines und desselben Integrales ab. Ist z. B. das Integral:

$$I=\int\sqrt{\frac{1+mz^2}{1+nz^2}}\,dz$$

vorhanden, und setzt man:

$$z=\frac{e}{\sqrt{m}}\,\frac{\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}$$

oder:

$$z=\frac{1}{e\sqrt{n}}\,\frac{1+e\cos\psi}{\sin\psi},$$

wo:

$$e=\sqrt{\frac{m}{m-n}}.$$

---

[1]) Extrait d'une lettre de M. D'Alembert à M. de la Grange du 14 décembre 1781, Nouv. Mém. Berlin 1780 (publ. 1782), p. 376—378.

[2]) De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipseos et hyperbolae, Acta Acad. Petrop. 1778, P. I (publ. 1780), p. 58 bis 101. — Ad dissertationem de reductione formularum integralium ad rectificationem ellipseos et hyperbolae additamentum, Acta Acad. Petrop. 1778, P. II (publ. 1781), p. 55—84.

ist, so erhält man:

$$I = \frac{e}{\sqrt{m}} \int \frac{R\,d\varphi}{(1 + e\cos\varphi)^2} = -\frac{\sqrt{m-n}}{m} \int \frac{(e+\cos\psi)^2}{S\sin\psi^2}\,d\psi,$$

wo:

$$R^2 = 1 + 2e\cos\varphi + e^2, \quad S^2 = 1 + 2e\cos\psi + e^2.$$

Es gelten aber die Beziehungen:

$$(45)\quad \int \frac{R\,d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = \frac{R\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)(e+\cos\varphi)} - \int \frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{(e+\cos\varphi)^2 R}$$

$$= \frac{(e+\cos\varphi)R}{(e^2-1)(1+e\cos\varphi)\sin\varphi} + \frac{1}{e^2-1}\int \frac{(e+\cos\varphi)^2\,d\varphi}{R\sin\varphi^2}$$

$$= \frac{e^2}{e^2-1}\,\frac{\sin\varphi(e+\cos\varphi)}{(1+e\cos\varphi)R} - \frac{1}{e^2-1}\int \frac{(1+e\cos\varphi)^2\,d\varphi}{R^3}$$

$$= \frac{R\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)(e+\cos\varphi)} + \frac{1}{e^2}\int \frac{(1+e\cos\varphi)^2\,d\varphi}{(e+\cos\varphi)^2 R}$$
$$- \frac{1}{e^2}\int \frac{R\,d\varphi}{(e+\cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{R\sin\varphi}{(1+e\cos\varphi)(e+\cos\varphi)} + \int \frac{d\varphi}{R} - \int \frac{R\,d\varphi}{(e+\cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{R^3}{e^2\sin\varphi(1+e\cos\varphi)(e+\cos\varphi)} + \frac{1}{e^2}\int \frac{R\,d\varphi}{\sin\varphi^2}$$
$$- \frac{1}{e^2}\int \frac{R\,d\varphi}{(e+\cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{\sin\varphi(e+\cos\varphi)}{(1+e\cos\varphi)R} + \frac{R\sin\varphi}{e^2(1+e\cos\varphi)(e+\cos\varphi)}$$
$$+ \int \frac{\sin\varphi^2\,d\varphi}{R^3} - \frac{1}{e^2}\int \frac{R\,d\varphi}{(e+\cos\varphi)^2}.$$

Vermittels der zweiten dieser Gleichungen hat man dann:

$$\int \frac{(e+\cos\psi)^2\,d\psi}{\sin\psi^2 S} = (e^2-1)\int \frac{S\,d\psi}{(1+e\cos\psi)^2} - \frac{(e+\cos\psi)S}{(1+e\cos\psi)\sin\psi},$$

folglich:

$$\int \frac{R\,d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} = -\frac{\sqrt{m(m-n)}}{en}\left[(e^2-1)\int \frac{S\,d\psi}{(1+e\cos\psi)^2} - \frac{(e+\cos\psi)S}{(1+e\cos\psi)\sin\psi}\right],$$

oder:

$$\int \frac{R\,d\varphi}{(1+e\cos\varphi)^2} + \int \frac{S\,d\psi}{(1+e\cos\psi)^2} = \frac{(e+\cos\psi)S}{(e^2-1)(1+e\cos\psi)\sin\psi}$$
$$= \frac{e(e+\cos\psi)(e+\cos\varphi)}{(e^2-1)(1+e\cos\psi)(1+e\cos\varphi)},$$

eine Formel, welche eine selbstverständliche geometrische Interpretation gestattet, da die beiden Integrale links, von einem konstanten Faktor abgesehen, die Bögen eines auf den Brennpunkt bezogenen Kegelschnittes darstellen.

In anderen Fällen muß man sich der übrigen Formeln (45) bedienen.

Weitere auf I zurückführbare Integrale sind:

$\int \sqrt{\frac{1+mx^2}{1+nx^2}}\frac{dx}{x^2}$, durch die Substitution $z = \frac{1}{x}$;

$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+mx^2)(1+nx^2)}}$, " " " $z = \sqrt{1+nx^2}$;

$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+mx^2)(1+nx^2)}}$, " " " $z = \frac{\sqrt{1+nx^2}}{x}$;

$\int \frac{\sqrt{1+mx^2}}{(1+nx^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$, " " " $z = \frac{1}{\sqrt{1+nx^2}}$;

$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+mx^2}\,(1+nx^2)^{\frac{3}{2}}}$, " " " $z = \frac{1}{\sqrt{1+nx^2}}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+mx^2}\,(1+nx^2)^{\frac{3}{2}}}$, " " " $z = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

Dagegen läßt sich:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+mx^2)(1+nx^2)}}$$

auf die Summe von zwei Integralen von der betrachteten Form zurückführen.

Die logische Folge hat uns von der chronologischen etwas abgewandt. Wir müssen jetzt um ein Jahrzehnt zurückgehen, um einiger jenseits der See erschienenen, auf dem Festlande lange unbekannt gebliebenen denkwürdigen Schriften Erwähnung zu tun. Ihr Verfasser ist der schon genannte John Landen, Mitglied der Royal Society of London.[1]) Selbstverständlich bedient er sich durchgängig

[1]) A disquisition concerning certain fluents, which are assignable by the arcs of the conic sections; where are investigated some new and useful theorems for computing the fluents, Phil. Trans.

der Fluxionenmethode; wir werden aber seine Untersuchungen in die übliche Schreibweise überführen.

Landen will zunächst den Grenzwert λ der negativ genommenen

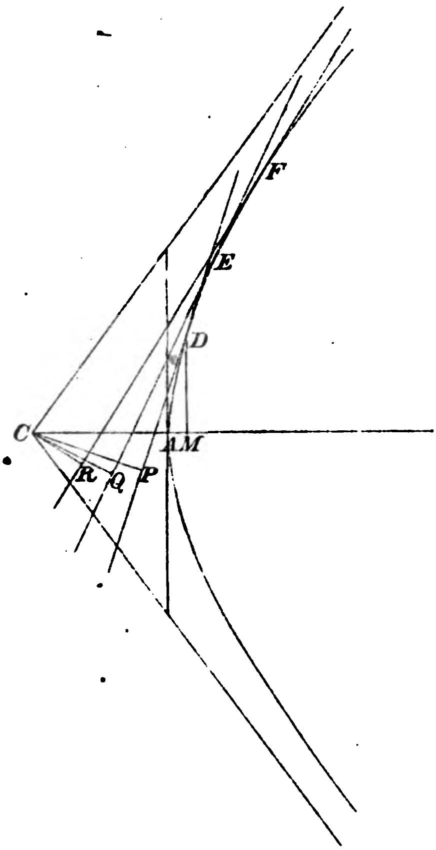


Fig. 93.

Differenz zwischen dem Hyperbelbogen und der entsprechenden Tangente bestimmen. Ist (Fig. 93):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Hyperbel, bezeichnen C, A, D, P den Mittelpunkt,

LXI, 1771, p. 298—309. — An investigation of a general theorem for finding the length of any arc of any conic hyperbola, by means of two elliptic arcs, with some other new and useful theorems deduced therefrom. Phil. Trans LXV, 1775, p. 283—289. — Math. Memoirs I, London 1780, p. 23—36: Of the ellipsis and hyperbola. — Math. Memoirs I, Appendix.

einen Scheitel, einen beliebigen Kurvenpunkt und den Fußpunkt der aus C auf die Tangente in D gefällten Normale, und setzt man:

$$z = \frac{CP^2}{a},$$

so ergibt sich:

$$(46) \qquad DP - AD = -\int_a^z \frac{a}{2} \frac{dz \sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)(b^2+az)}}.$$

Nennt man andererseits C_1, A_1, D_1, P_1 die analogen Elemente einer Ellipse, deren Halbachsen $c = \sqrt{a^2+b^2}$, b sind (Fig. 94), wo-

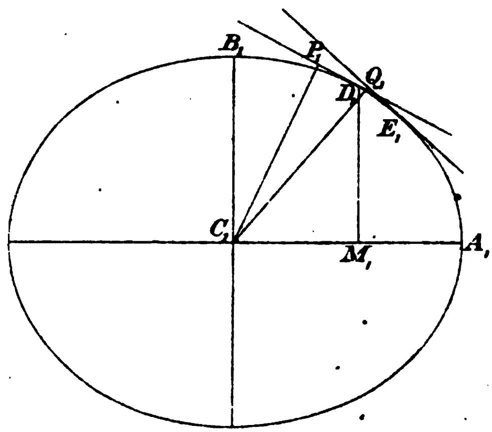


Fig. 94.

bei D_1 derjenige Ellipsenpunkt sein möge, dessen Ordinate:

$$D_1M_1 = b\sqrt{\frac{z}{a}}$$

ist, so ergibt sich:

$$D_1P_1 = a\sqrt{\frac{z(a-z)}{b^2+az}}.$$

Ist nun F der Punkt der Hyperbel, dem der Wert:

$$u = \frac{b^2(a-z)}{b^2+az}$$

von z zukommt, R der zu P analoge Fußpunkt, so folgt:

$$FR - AF = -\int_a^u \frac{a}{2} \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(a-u)(b^2+au)}} = \int_0^z \frac{ab^2}{2} \frac{\sqrt{a-z}\,dz}{\sqrt{z}\,(b^2+az)^{\frac{3}{2}}},$$

also:

$$DP - AD + FR - AF = \int_a^z \frac{a\,dz}{2}\left[-\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)(b^2+az)}} + \frac{b^2\sqrt{a-z}}{\sqrt{z}\,(b^2+az)^{\frac{3}{2}}}\right]$$
$$+ \text{const.}$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Größe ist aber $d \cdot D_1 P_1$; also ist:

$$DP - AD + FR - AF = D_1 P_1 + \text{const.}$$

Setzt man $z = 0$, so folgt:

$$DP - AD = \lambda, \quad u = a, \quad FR - AF = 0, \quad D_1 P_1 = 0;$$

es ist also allgemein:

$$DP - AD + FR - AF = D_1 P_1 + \lambda.$$

Ist insbesondere $u = z$, so fallen D und F mit einem und demselben Punkte E zusammen, P, R gehen in Q über, und man hat:

$$z = \frac{b^2(a-z)}{b^2+az}$$

oder:

$$z = \frac{b(c-b)}{a},$$

ferner, wenn E_1, Q_1 die zu E, Q entsprechenden, auf die Ellipse bezüglichen Punkte sind:

$$E_1 Q_1 = c - b,$$

und schließlich:

$$\lambda = 2(EQ - AE) - (c - b).$$

Aus (46) folgt:

$$\lambda = \int_0^a \frac{a}{2} \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)(b^2+az)}},$$

also:

$$DP - AD - \lambda = -\int_0^u \frac{a}{2} \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)(b^2+az)}}$$

und:

$$-\int_0^z \frac{a}{2} \frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(a-z)(b^2+az)}} + \int_u^a \frac{a}{2} \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(a-u)(b^2+au)}} = D_1 P_1,$$

womit die Differenz zweier Hyperbelbögen durch eine Strecke dargestellt wird.

Diese Resultate stimmen wesentlich mit den G. **Fagnano**schen überein. Am Ende seiner Abhandlung vom Jahre 1771 kündigt aber

Landen an, er habe einen allgemeinen Satz entdeckt, den er nächstens mitteilen werde. Die Mitteilung geschah jedoch erst 1775.

Setzt man:

$$z = a - \frac{t^2}{a},$$

so erhält man aus (46):

$$(47)\qquad DP - AD = \int_0^t \sqrt{\frac{a^2 - t^2}{c^2 - t^2}}\, dt,$$

ferner:

$$(48)\qquad B_1 D_1 = -\int_a^z \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 + az}{z(a - z)}}\, dz = \int_0^t \sqrt{\frac{c^2 - t^2}{a^2 - t^2}}\, dt.$$

Betrachten wir nunmehr eine zweite Ellipse (Fig. 95) mit den Halbachsen:

$$\gamma = \frac{c + a}{2}, \quad \beta = \frac{c - a}{2},$$

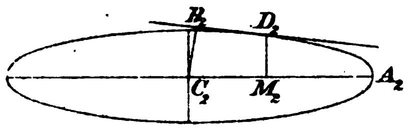


Fig. 95.

und bezeichnen mit A_2, B_2, ... die zu A_1, B_1, ... analogen, auf dieselbe bezüglichen Punkte. Der Punkt D_2 werde auf dieser Ellipse derartig gewählt, daß:

$$D_2 P_2 = t$$

sei; setzt man:

$$C_2 M_2 = \xi,$$

so ist:

$$B_2 D_2 = \frac{1}{\gamma} \int_0^\xi \sqrt{\frac{\gamma^4 - \alpha^2 \xi^2}{\gamma^2 - \xi^2}}\, d\xi,$$

$$D_2 P_2 = t = \frac{\alpha^2 \xi}{\gamma} \sqrt{\frac{\gamma^2 - \xi^2}{\gamma^4 - \alpha^2 \xi^2}},$$

wo $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$.

Wir wollen t als neue Integrationsveränderliche in das Integral $B_2 D_2$ einführen.[1]) Es ist:

---

[1]) Spätere Untersuchungen haben der Substitution:

$$t = \frac{\alpha^2 \xi \sqrt{\gamma^2 - \xi^2}}{\gamma \sqrt{\gamma^4 - \alpha^2 \xi^2}},$$

die man üblich als „Landensche Transformation" bezeichnet, eine große Wichtigkeit erteilt. Setzt man:

$$\xi = \gamma \sin \varphi, \quad t = \sin \varphi_1, \quad \gamma = \frac{1}{1 - k'}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{1 + k'}{1 - k'}},$$

$$\sqrt{\frac{\gamma^4-\alpha^2\xi^2}{\gamma^2-\xi^2}}=\frac{\alpha^2\xi}{\gamma t},\quad \alpha^4\xi^4-\alpha^2\gamma^2(\alpha^2+t^2)\xi^2+\gamma^6 t^2=0,$$

also:

$$\xi^2=\frac{\gamma^2}{2\alpha^2}[\alpha^2+t^2-\sqrt{\alpha^4-2(\beta^2+\gamma^2)t^2+t^4}]$$
$$=\frac{\gamma^2}{2\alpha^2}[\alpha^2+t^2-\sqrt{[(\gamma+\beta)^2-t^2][(\gamma-\beta)^2-t^2]}]$$
$$=\frac{\gamma^2}{2\alpha^2}[\alpha^2+t^2-\sqrt{(c^2-t^2)(a^2-t^2)}]$$

Differentiiert man, so ergibt sich:

$$\xi d\xi=\frac{\gamma^2 t\,dt}{4\alpha^2}\left[2+\sqrt{\frac{c^2-t^2}{a^2-t^2}}+\sqrt{\frac{a^2-t^2}{c^2-t^2}}\right],$$

folglich:

$$B_2D_2=\frac{1}{4}\int_0^t dt\left[2+\sqrt{\frac{c^2-t^2}{a^2-t^2}}+\sqrt{\frac{a^2-t^2}{c^2-t^2}}\right],$$

oder, wegen (47), (48):

$$4B_2D_2=2D_2P_2+B_1D_1+DP-AD,$$

oder auch:

$$AD=B_1D_1-4B_2D_2+2D_2P_2+DP.$$

Ist also ein Hyperbelbogen vorgegeben, so kann man zwei zwei verschiedenen Ellipsen angehörige Bögen auffinden, deren Differenz sich von diesem Bogen nur um eine gerade Strecke unterscheidet. Oder kürzer: Ein Hyperbelbogen ist durch zwei Ellipsenbögen rektifizierbar.

Der Wert der Landenschen Entdeckung wurde zuerst von Legendre in zwei Abhandlungen aus dem Jahre 1786 ans Licht gesetzt. Bevor wir aber auf die Besprechung dieser wichtigen Abhandlungen kommen, müssen wir einige inzwischen erschienene Schriften erwähnen.

Dem Probleme, algebraische Kurven anzugeben, welche durch Kegelschnitte rektifizierbar sind, widmet Euler eine Reihe von Abhandlungen[1]), welche uns insofern interessieren, als sie die Bil-

so nimmt die Transformation die Form:

$$\sin\varphi_1=\frac{(1+k')\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta\varphi}$$

an (Enneper, a. a. O., p. 352), wo:

$$\Delta\varphi=\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2},\quad k^2=1-k'^2.$$

[1]) De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet (1776), Nova Acta Acad. Petrop. V. 1787

dung von auf elliptische Integrale zurückführbaren Integralen betreffen. Von dem vorgestellten Problem gibt Euler, unter der Voraussetzung, daß der betrachtete Kegelschnitt eine Ellipse mit den Halbachsen 1, n ist, drei Lösungen.

1. Es muß sein:

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\frac{1-(1-n^2)v^2}{1-v^2}}\,dv,$$

wo x, y die Koordinaten eines Punktes der gesuchten Kurve bezeichnen, während v die Abszisse des entsprechenden Punktes der Ellipse ist. Man setze nun:

$$dx=\frac{p+q}{\sqrt{2(1+v)}}\,dv,\quad dy=\frac{p-q}{\sqrt{2(1-v)}}\,dv;$$

dann ist:

$$\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\frac{p^2+q^2-2pqv}{1-v^2}}\,dv.$$

Nimmt man also für p, q zwei solche ganze rationale Funktionen von v, daß:

$$p^2+q^2-2pqv=1-(1-n^2)v^2$$

ist, so sind die Differentialausdrücke dx, dy algebraisch integrierbar[1]),

(publ. 1789), p. 59—70. — De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet (1776), ebenda, p. 71 bis 85. — De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo indefinita arcui elliptico aequatur (1781), Mém. Acad. St. Pét. XI, 1830, p. 95 bis 99. — De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo arcui parabolico aequatur (1781), ebenda, p. 100—101. — De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat (1781), ebenda, p. 114—124. — Mit diesen Schriften hängt die von Fuß zusammen: De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet (1798), Nova Acta Acad. Petrop. XIV, 1797—1798 (publ. 1805), p. 111—138.

[1]) Ist nämlich:

$$p=\sum_h a_h v^h,\quad q=\sum_h b_h v^h,$$

und setzt man:

$$\sqrt{1+v}=t,$$

so folgt:

$$p+q=\sum(a_h+b_h)(t^2-1)^h,\quad \frac{dv}{\sqrt{1+v}}=2dt,$$

also:

$$dx=\sqrt{2}\sum_h(a_h+b_h)(t^2-1)^h dt,$$

woraus sich durch Integration ein Polynom in t, also eine algebraische Funktion von v ergibt. Dasselbe findet für y statt.

und ihre Integrale liefern die Parametergleichungen der gesuchten Linie.

Einige einfachere Fälle sind folgende:

α) $$p = 1, \quad q = \alpha v.$$

Es ergibt sich $\alpha = 1 + n$, also:

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{2(1+v)}\,[1 - 2n + (1+n)v],$$

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{2(1-v)}\,[-1 + 2n + (1+n)v].$$

β) $$p = 1 + \beta v^2, \quad q = \alpha v.$$

Es muß sein:

$$\beta^2 - 2\alpha\beta = 0, \quad \alpha^2 + 2\beta - 2\alpha = -1 + n^2,$$

also:

$$\alpha = n - 1, \quad \beta = 2(n-1),$$

und:

$$x = \frac{1}{5}\sqrt{2(1+v)}\,[2n + 3 - (n-1)v + 2(n-1)v^2],$$

$$y = \frac{1}{5}\sqrt{2(1-v)}\,[-2n - 3 + (n-1)v - 2(n-1)v^2].$$

γ) $$p = 1 + \beta v^2, \quad q = \alpha v + \gamma v^3.$$

Es folgt hieraus:

$$\alpha = n + 3, \quad \beta = -2(n+1), \quad \gamma = -4(n+1).$$

δ) $$p = 1 + \beta v^2 + \delta v^4, \quad q = \alpha v + \gamma v^3.$$

Es muß sein:

$$\alpha^2 + 2\beta - 2\alpha = n^2 - 1, \quad \beta^2 + 2\delta + 2\alpha\gamma - 2\alpha\beta - 2\gamma = 0,$$
$$2\beta\delta + \gamma^2 - 2\alpha\delta - 2\beta\gamma = 0, \quad \delta^2 - 2\gamma\delta = 0;$$

eine Lösung dieser Gleichungen ist:

$$\alpha = n - 3, \quad \beta = 4(n-2), \quad \gamma = -4(n-1), \quad \delta = -8(n-1).$$

2. Setzt man:

$$v = \sin\varphi,$$

also:

$$ds = \sqrt{\cos\varphi^2 + n^2\sin\varphi^2}\,d\varphi,$$

so kann man annehmen:

$$dx = (\cos\varphi\cos\omega - n\sin\varphi\sin\omega)\,d\varphi,$$
$$dy = (\cos\varphi\sin\omega + n\sin\varphi\cos\omega)\,d\varphi,$$

wo ω eine auf passende Weise zu wählende Funktion von φ bezeichnet. Nimmt man $\omega = \lambda\varphi$, wo λ eine ganze von ± 1 verschiedene Zahl ist, so erhält man:

$$x = \frac{1}{2}\left[\frac{n+1}{\lambda+1}\sin(\lambda+1)\varphi - \frac{n-1}{\lambda-1}\sin(\lambda-1)\varphi\right],$$

$$y = \frac{1}{2}\left[-\frac{n+1}{\lambda+1}\cos(\lambda+1)\varphi + \frac{n-1}{\lambda-1}\cos(\lambda-1)\varphi\right];$$

diese Gleichungen stellen eine algebraische Kurve dar.

3. Nehmen wir zunächst an, es sei $n > 1$. Wir können setzen:

$$dx = (\cos\lambda\varphi - m\sin\varphi\sin\lambda\varphi)d\varphi,\quad dy = (\sin\lambda\varphi + m\sin\varphi\cos\lambda\varphi)d\varphi,$$

wo λ die obige Bedeutung beibehält, und $m^2 = n^2 - 1$ ist; hieraus folgt:

$$x = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda\varphi - \frac{m}{2(\lambda-1)}\sin(\lambda-1)\varphi + \frac{m}{2(\lambda+1)}\sin(\lambda+1)\varphi,$$

$$y = -\frac{1}{\lambda}\cos\lambda\varphi + \frac{m}{2(\lambda-1)}\cos(\lambda-1)\varphi - \frac{m}{2(\lambda+1)}\cos(\lambda+1)\varphi.$$

Ist dagegen $n < 1$, so setzen wir:

$$dx = (n\sin\lambda\varphi + m\cos\varphi\cos\lambda\varphi)d\varphi,$$
$$dy = (n\cos\lambda\varphi - m\cos\varphi\sin\lambda\varphi)d\varphi,$$

wo $m^2 = 1 - n^2$; es folgt dann:

$$x = -\frac{n}{\lambda}\cos\lambda\varphi + \frac{m}{\lambda-1}\sin(\lambda-1)\varphi + \frac{m}{\lambda+1}\sin(\lambda+1)\varphi,$$

$$y = \frac{n}{\lambda}\sin\lambda\varphi + \frac{m}{\lambda-1}\cos(\lambda-1)\varphi + \frac{m}{\lambda+1}\cos(\lambda+1)\varphi.$$

Eine längere Abhandlung widmet der schon oben genannte Malfatti[1]) den elliptischen Integralen. Nachdem er die Ellipse und die Hyperbel durch Reihenintegration rektifiziert hat, bemerkt er, daß zwar das Bogenelement dieser Linien die Form:

$$\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}}\,dx$$

hat, daß aber nicht umgekehrt jedes Differential von dieser Form einen einzigen Kegelschnittbogen darstellt. Um die Differentiale von dieser Beschaffenheit zu untersuchen, schickt er einige Hilfssätze vor-

[1]) Delle formole differenziali la cui integrazione dipende dalla rettificazione delle sezioni coniche,' Mem. Soc. It. II, P. II, 1784, p. 749 bis 786.

aus, von denen die zwei ersten, wie **Malfatti** selbst anerkennt, **V. Riccati** angehören.

a) $$\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}}dx = \frac{(np-mq)x^2dx}{p\sqrt{(m+nx^2)(p+qx^2)}} + \frac{m\sqrt{p+qx^2}dx}{p\sqrt{m+nx^2}}$$
$$= \frac{(np-mq)\sqrt{-m+z^2}dz}{np\sqrt{np-mq+qz^2}} + \frac{m\sqrt{p+qx^2}}{p\sqrt{m+nx^2}}dx,$$
wo:
$$x^2 = \frac{-m+z^2}{n}.$$

b) Setzt man:
$$\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}} = u,$$
so erhält man durch partielle Integration:
$$\int\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}}dx = ux - \int x\,du = x\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}} - \int\sqrt{\frac{m-pu^2}{-n+qu^2}}du.$$

c) Setzt man:
$$\sqrt{\frac{p+qx^2}{m+nx^2}} = v,$$
so folgt:
$$\int\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}}dx = \frac{nx}{q}\sqrt{\frac{p+qx^2}{m+nx^2}} + \frac{m}{q}\int\sqrt{\frac{q-nv^2}{-p+mv^2}}dv.$$

Mit Hilfe dieser Sätze behandelt **Malfatti** die verschiedenen Fälle des Integrales $\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}}dx$, woraus eine Klassifikation entsteht, die der **Euler**schen ganz ähnlich ist. Es ist aber zu beachten, daß die **Euler**schen Schriften **Malfatti** wohl unbekannt waren; wenigstens tritt sein Name nicht unter den von **Malfatti** angeführten (**Fagnano**, **Maclaurin**, **d'Alembert**, **Lexell**, **V. Riccati**) auf.

Einen etwas verschiedenen Standpunkt nimmt **Lagrange**[1]) ein. Er geht von einer zu integrierenden rationalen Funktion von x und R aus, wo:
$$R = \sqrt{a+bx+cx^2+ex^3+fx^4},$$
und reduziert dieselbe zunächst auf die Form:
$$du = \frac{N dx}{R},$$

[1]) Sur une nouvelle méthode de calcul intégral pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré, Mém. Acad. Turin II, 1784—1785, p. 218 bis 290; Oeuvres II, Paris 1868, p. 253—312.

wo N eine rationale Funktion von x ist. Kommt in R keine ungerade Potenz von x vor, und bringt man N auf die Form $T + Vx$, wo T, V rationale Funktionen von x^2 sind, so läßt sich $\frac{Vx\,dx}{R}$ durch elementare Funktionen integrieren, und es bleibt nur noch $\frac{T\,dx}{R}$. Im allgemeinen Falle setzen wir:

$$R^2 = f(m + nx + x^2)(m' + n'x + x^2);$$

es ergibt sich:

$$n = \frac{e + \sqrt{h}}{2f}, \quad n' = \frac{e - \sqrt{h}}{2f},$$

$$m = \frac{b - cn + en^2 - fn^3}{e - 2fn}, \quad m' = \frac{b - cn' + en'^2 - fn'^3}{e - 2fn'},$$

wo h die Gleichung:

$$h^3 - (3e^2 - 8cf)h^2 + (3e^4 - 16ce^2f + 16c^2f^2 + 16bef^2 - 64af^3)h$$
$$- (8bf^2 - 4cef + e^3)^2 = 0$$

erfüllen muß, welche offenbar stets eine reelle nicht negative Wurzel besitzt. Setzt man demnach:

$$f\frac{m' + n'x + x^2}{m + nx + x^2} = y^2, \tag{49}$$

so ergibt sich:

$$R = (m + nx + x^2)y,$$

und das Differential nimmt die Form:

$$du = \frac{N\,dx}{(m + nx + x^2)y}$$

an. Es ist aber wegen (49):

$$2y\,dy = \frac{dx}{m + nx + x^2}[f(2x + n') - y^2(2x + n)],$$

oder:

$$\frac{dx}{(m + nx + x^2)y} = \frac{2\,dy}{2x(f - y^2) + (n'f - ny^2)};$$

es folgt andererseits wiederum aus (49):

$$2x(f - y^2) + (n'f - ny^2) = \sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4},$$

wo:

$$\alpha = f^2(n'^2 - 4m'), \quad \beta = -2f(nn' - 2m - 2m'), \quad \gamma = n^2 - 4m,$$

also:

$$du = \frac{2N dy}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}}.$$

Da:

$$x = \frac{ny^2 - n'f + \sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}}{2(f - y^2)}$$

ist, so erhält man:

$$N = \varphi(y^2) + \sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4} \cdot \psi(y^2),$$

wo $\varphi(y^2)$, $\psi(y^2)$ rationale Funktionen von y^2 bezeichnen, so daß du, von einem rationalen Differential abgesehen, in:

$$dv = \frac{Q dy}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}}$$

übergeht, wo Q eine rationale Funktion von y^2 ist.

Um dieses Differential behandeln zu können, muß man annehmen, daß $\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4$ in zwei reelle Binome zerlegbar ist, daß nämlich $\beta^2 > 4\alpha\gamma$. Ist dies nicht der Fall, so setze man:

$$z = \frac{y}{\sqrt{\alpha + \beta y^2 + \gamma y^4}};$$

man erhält dann, nach Vernachlässigung eines rationalen Differentiales, einen Ausdruck von der Form:

$$\frac{L dz}{\sqrt{1 - 2\beta z^2 + (\beta^2 - 4\alpha\gamma) z^4}}$$

oder:

$$\frac{L dz}{\sqrt{1 + \beta' z^2 + \gamma' z^4}},$$

wo:

$$\beta'^2 - 4\gamma' = 16\alpha\gamma > 0$$

ist, da in dem betrachteten Falle $4\alpha\gamma$ positiv sein muß. Wir können also in allen Fällen setzen:

$$\frac{T dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} = \frac{T dx}{\sqrt{(m + nx^2)(p + qx^2)}},$$

wobei T eine rationale Funktion von x^2 bezeichnet und m, n, p, q reell sind.

Ist $n = 0$ oder $q = 0$ oder $\frac{q}{p} = \frac{n}{m}$, so ist das Integral auf elementare Weise berechenbar; bestehen diese Bedingungen nur annäherungsweise, so kann man einen angenäherten Wert des Integrales durch Reihenentwicklung erhalten. Es ist aber immer möglich, das vorgegebene Differential in ein anderes überzuführen, welches die ver-

langten Bedingungen mit größerer Annäherung erfüllt. Nehmen wir an, es sei $\left(\frac{n}{m}\right)^2 \geq \left(\frac{q}{p}\right)^2$, und setzen wir:

$$y = \frac{x}{m}\sqrt{\frac{m+nx^2}{p+qx^2}};$$

wir erhalten hieraus:

$$x^2 = \frac{1}{2n}[qm^2y^2 - m \pm m\sqrt{1+2(2np-mq)y^2+m^2q^2y^4}],$$

und folglich, wenn L, M rationale Funktionen von y^2 bezeichnen:

$$\frac{Pdx}{\sqrt{(m+nx^2)(p+qx^2)}} = Ldy + \frac{Mdy}{\sqrt{1+2(2np-mq)y^2+m^2q^2y^4}}.$$

Das biquadratische Polynom ist, unter der Voraussetzung:

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 \geq \left(\frac{q}{p}\right)^2.$$

in zwei reelle Faktoren:

$$1 + [2np - mq \pm 2\sqrt{np(np-mq)}]\,y^2$$

zerlegbar; ferner sind die beiden in eckigen Klammern stehenden Ausdrücke gleichbezeichnet, so daß man setzen kann:

$$2np - mq \pm 2\sqrt{np(np-mq)} = \pm r^2,$$
$$2np - mq \mp 2\sqrt{np(np-mq)} = \pm s^2,$$

wobei die oberen Vorzeichen für $np > 0$, die unteren für $np < 0$ gelten, r und s positiv sind und $r > s$ ist. Das zu behandelnde Differential ist also auf:

$$\frac{Mdy}{\sqrt{(1 \pm r^2y^2)(1 \pm s^2y^2)}}$$

reduziert. Wendet man auf dasselbe das obige Verfahren an, so erhält man ein neues Differential:

$$\frac{M_1dy_1}{\sqrt{(1 \pm r_1{}^2y_1{}^2)(1 \pm s_1{}^2y_1{}^2)}},$$

wo:

$$r_1 = r + \sqrt{r^2 - s^2} > r, \quad s_1 = r - \sqrt{r^2 - s^2} < s$$

ist. Auf gleiche Weise kann man fortfahren, bis s so klein geworden ist, daß die Annäherungsformeln anwendbar sind.

Wie oben bemerkt, versuchte Euler die Ellipsenbögen in die Rechnungen als ein Analogon zu den Kreisbögen einzuführen. Legendre[1]) sprach auch den Wunsch aus, daß man Tafeln für Ellipsen-

[1]) Mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse, Hist. Acad.

bögen verfertigen möge; und zu diesem Zwecke versuchte er, Reihenentwicklungen zu liefern, welche dazu geeignet wären, die Berechnung solcher Bögen zu erleichtern.

Sind (Fig. 96):

$$CA = 1, \quad CB = b = \sqrt{1-c^2}$$

die Halbachsen der Ellipse, und ist:

$$DCZ = \varphi, \quad ACZ = \frac{\pi}{2} - \varphi = \psi,$$

$$CP = x = \sin\varphi, \quad PM = y = b\cos\varphi,$$

so folgt:

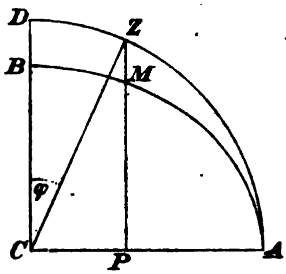


Fig. 96.

$$BM = E(c, \varphi) = \int_0^\varphi d\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2},$$

$$AM = F(c, \psi) = \int_0^\psi d\psi \sqrt{1 - c^2 \cos\psi^2}.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich leicht die Werte von $E(c, \varphi)$, $F(c, \psi)$ unter der Form von konvergenten Reihen, wenn c nicht zu nahe an 1 ist; im entgegengesetzten Falle kann man den Fagnanoschen Satz gebrauchen.

Aus den obigen Formeln folgt:

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} E(c, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 + \frac{c^2}{1-c^2} \cos\varphi^2}\, d\varphi,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} F(c, \psi) = \int_0^\psi \sqrt{1 + \frac{c^2}{1-c^2} \sin\psi^2}\, d\psi.$$

Auf diese Formen sind:

$$\int_0^\varphi \sqrt{f + g\sin\varphi^2}\, d\varphi, \quad \int_0^\psi \sqrt{f + g\cos\psi^2}\, d\psi$$

zurückführbar; dasselbe läßt sich aber nicht von:

$$\int_0^\varphi \sqrt{g\cos\varphi^2 - f}\, d\varphi, \quad \int_0^\varphi \sqrt{f - g\sin\varphi^2}\, d\varphi$$

Paris 1786 (publ. 1788), p. 616—648. — Second mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse, et sur la comparaison de ces arcs, ebenda, p. 644—683.

für $g > f$ behaupten. Übt man auf diese letzten Integrale die Substitution:

$$\sin\varphi = \sin\alpha \sin\omega$$

aus, wo:

$$\alpha = \arccos\sqrt{\frac{f}{g}},$$

und setzt man $\sin\alpha = c$, so folgt:

$$\int_0^\varphi \sqrt{g\cos\varphi^2 - f}\,d\varphi = \int_0^\varphi \sqrt{g(\cos\varphi^2 - \cos\alpha^2)}\,d\varphi$$

$$= \int_0^\varphi \sqrt{g(\sin\alpha^2 - \sin\varphi^2)}\,d\varphi = c^2\sqrt{g}\int_0^\omega \frac{\cos\omega^2 d\omega^2}{\sqrt{1 - c^2\sin\omega^2}}$$

$$= c^2\sqrt{g}\left[\int_0^\omega \sqrt{1 - c^2\sin\omega^2}\,d\omega - (1 - c^2)\int_0^\omega \frac{\sin\omega^2 d\omega}{\sqrt{1 - c^2\sin\omega^2}}\right]$$

$$= \sqrt{g}\left[c^2 E(c, \omega) + c(1 - c^2)\frac{\partial E(c, \omega)}{\partial c}\right].$$

Die Integrale:

$$\int \sin\varphi^{2i}\cos\varphi^{2k}\Delta\varphi^{2m+1}d\varphi,$$

wo:

$$\Delta\varphi^2 = 1 - c^2\sin\varphi^2,$$

sind ebenfalls durch Ellipsenbögen ausdrückbar; sie lassen sich nämlich auf $\int\Delta\varphi^{2m+1}d\varphi$ zurückführen, welches für jedes positive oder negative ganzzahlige m durch E und $\frac{\partial E}{\partial c}$ ausdrückbar ist.

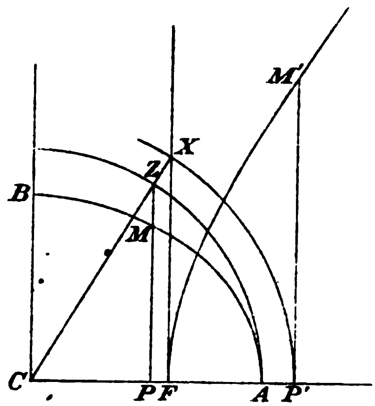


Fig. 97.

Die Rektifikation der Hyperbel kann man von derjenigen der Ellipse abhängig machen. — Sind (Fig. 97):

$$CA = 1,\quad CB = b$$

die Halbachsen einer Ellipse, und:

$$CF = c = \sqrt{1 - b^2},\quad CB = b$$

diejenigen einer Hyperbel, wobei die beiden Kurven denselben Mittelpunkt und dieselbe Fokalachse haben; ist ferner CP' die Abszisse eines Hyperbelpunktes M', X der Schnittpunkt des um C mit dem Radius CP' gezogenen Kreises mit der Scheiteltangente der Hyberbel, Z der Schnittpunkt von

CX mit dem um C mit dem Radius CA gezogenen Kreise, M der Schnittpunkt der zu CA senkrechten Geraden ZP mit der Ellipse, und setzt man $ACZ = \varphi$, so ergibt sich leicht:

$$FM' = E - \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2} \sqrt{1 - c^2 \cos\varphi^2},$$

$$AM - F = \int_0^\varphi \sqrt{1 - c^2 \cos\varphi^2}\, d\varphi,$$

und hieraus:

$$E = \operatorname{tg}\varphi \sqrt{1 - c^2 \cos\varphi^2} - c^2 F - b^2 c \frac{\partial F}{\partial c}.$$

Das Integral:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{A + Bz^2 + Cz^4}}$$

läßt sich in allen Fällen auf E, F und deren Ableitungen nach c zurückführen; dasselbe folgt von:

$$\int \frac{P\,dz}{\sqrt{A + Bz^2 + Cz^4}}, \quad \int \frac{dz}{\sqrt{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4}}.$$

Erst nachdem die erste Legendresche Abhandlung, deren Inhalt wir soeben wiedergegeben haben, der Pariser Akademie vorgelesen worden war, erfuhr ihr Verfasser, daß Landen den den Hyperbelbogen betreffenden Satz aufgestellt hatte. Er setzte sich dann vor, zu beweisen, daß sich der Landensche Satz aus seinen eigenen Resultaten herleiten läßt, und daß man auch eine unendliche Folge von Ellipsen auffinden kann, deren Rektifikation von derjenigen von zwei derselben abhängig ist.

Es sei neben der schon oben betrachteten Ellipse noch eine zweite vorhanden, deren Elemente c', b', F' usw. sein mögen, und setze man:

$$\frac{c'^2 \sin\varphi' \cos\varphi'}{\sqrt{1 - c'^2 \sin\varphi'^2}} = (1 - b') \sin\varphi,$$

wo φ mit dem früheren $\frac{\pi}{2} - \varphi$ übereinstimmt; das ist nichts anderes als die Landensche Transformation. Es folgt:

$$\sin\varphi'^2 = \frac{1}{2}[1 + c \sin\varphi^2 \pm \cos\varphi \Delta\varphi],$$

wo $c = \frac{1 - b'}{1 + b'}$; ferner:

$$dF' = \sqrt{1 - c'^2 \sin\varphi'^2}\, d\varphi' = \frac{c'^2 \sin\varphi' \cos\varphi' d\varphi'}{(1 - b') \sin\varphi} = \frac{2 \sin\varphi \cos\varphi' d\varphi'}{(1 + c) \sin\varphi}.$$

Nimmt man aber in der vorletzten Gleichung das untere Vorzeichen und differentiiert, so ergibt sich:

$$4 \sin \varphi' \cos \varphi' d\varphi' = 2c \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi + \sin \varphi \Delta \varphi \, d\varphi + \frac{c^2 \sin \varphi \cos \varphi^2 d\varphi}{\Delta \varphi};$$

es ist also:

$$2(1+c)dF' = 2c \cos \varphi \, d\varphi + \Delta \varphi \, d\varphi + \frac{c^2 \cos \varphi^2 d\varphi}{\Delta \varphi}$$

$$= 2c \cos \varphi \, d\varphi + 2\Delta \varphi \, d\varphi - \frac{b^2 d\varphi}{\Delta \varphi},$$

und man erhält hieraus durch Integration:

$$(50) \qquad 2(1+c)F' = 2c \sin \varphi + 2F - b^2 \int \frac{d\varphi}{\Delta \varphi}$$

$$= 2c \sin \varphi + 2F - b^2 \left(F - c\frac{\partial F}{\partial c}\right)$$

$$= 2c \sin \varphi + (1+c^2)F + b^2 c \frac{\partial F}{\partial c}.$$

Der Bogen der Ellipse mit der Exzentrizität c' wird also durch den Bogen der Ellipse mit der Exzentrizität c und dessen Ableitung nach c ausgedrückt, wobei:

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}.$$

Es folgt aus (50) durch eine leichte Rechnung:

$$2(1+c')F'' = (2+b')F' - \frac{1}{2} b'(1+b')F - \frac{1}{2} b'(1-b') \sin \varphi$$
$$+ 2c' \sin \varphi',$$

wo F'' den Bogen einer dritten Ellipse mit der Exzentrizität:

$$c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}$$

bezeichnet. Fährt man auf gleiche Weise fort, so kann man eine unbeschränkte Folge von Ellipsen erhalten, deren Rektifikation von derjenigen von zwei derselben abhängig ist. Da $c' > \sqrt{c} > c$, während $\varphi' < \varphi$, so bilden die Exzentrizitäten eine zunehmende, die Amplituden dagegen eine abnehmende Folge.

Bevor wir die späteren Untersuchungen Legendres besprechen, müssen wir einige Worte einer hierher gehörigen Schrift des schon erwähnten Pietro Ferroni[1]) widmen. Um das Integral:

$$(51) \qquad \int \sqrt{\frac{f+gx^2}{h-kx^2}} dx$$

auf einen Ellipsenbogen zurückzuführen, befolgt er einen sehr langen

[1]) De calculo integralium exercitatio mathematica, Florenz 1792.

Weg. Er bedient sich dazu des folgenden Pascalschen Satzes[1]): Ist (Fig. 98) NA der Radius der Basis, XN die Höhe und XA die Erzeugende eines schiefen Zylinders, beschreibt man einen Kreis um N mit dem Radius NA und einen zweiten Kreis auf NA als Durchmesser, und sind G, S zwei Punkte der beiden Kreise, deren Verbin-

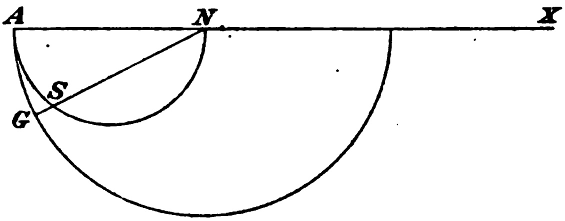


Fig. 98.

dungslinie durch N geht, so ist die Oberfläche des von den durch A und G gehenden Erzeugenden begrenzten Zylinderteiles gleich dem Vierfachen der Summe aller von X nach den Punkten des Bogens AS gehenden Strecken (d. i. des Integrales des Produktes einer solchen Strecke mit dem Elemente des Bogens AS). Diese Summe, oder dieses Integral, läßt sich auf die Form (51) bringen; da andererseits die betrachtete Zylinderfläche von dem Produkt der Erzeugenden mit einem Bogen des Orthogonalschnittes gegeben wird, und dieser Schnitt eine Ellipse ist, so ergibt sich von selbst das verlangte Resultat.

Ferroni zeigt auch, daß man ein Integral von der Form:

$$\int\sqrt{\frac{f-gx^2}{h-kx^2}}\,dx$$

erhält, wenn man eine Ellipse oder eine Hyperbel auf die Fokalachse bezieht; daß man dagegen:

$$\int\sqrt{\frac{f+gx^2}{h+kx^2}}\,dx$$

erhält, wenn man die Hyperbel auf die zweite Achse bezieht.

Er behandelt ferner das allgemeine Integral:

$$\int\frac{\sqrt{z}\,dz}{\sqrt{\pm z^2 \pm fz \pm b^2}},$$

wo z positiv ist und die Wurzeln des Trinoms als reell vorausgesetzt werden, und stellt die folgende Tafel der möglichen Fälle auf:

[1]) Pascal, Oeuvres V, La Haye 1779, p. 407. Der Pascalsche Satz ist etwas allgemeiner.

1	$-$	$-$	$-$	unmöglich
2	$-$	$+$	$-$	Ellipse
3	$+$	$+$	$-$	Hyperbel
4	$+$	$-$	$-$	Hyperbel
5	$-$	$+$	$+$	Hyperbel und Gerade
6	$-$	$-$	$+$	Hyperbel und Gerade
7	$+$	$-$	$+$	Hyperbel, Ellipse und Gerade
8	$+$	$+$	$+$	Ellipse und Gerade.

Die Schrift von Legendre[1]), mit welcher wir uns nunmehr zu beschäftigen haben, verdient wohl als die Grundlage der systematischen Behandlung der elliptischen Integrale bezeichnet zu werden; und vielleicht hätte die Theorie dieser Funktionen am Ende des 18. Jahrhunderts einen rascheren Fortschritt aufgezeigt, wenn nicht die Legendreschen Untersuchungen aus äußeren Umständen so gut wie unbekannt geblieben wären, bis sie zwanzig Jahre später durch die Exercices de calcul intégral verbreitet wurden.

Manche analytische Fragen, sagt Legendre, die sich nicht durch Ellipsenbögen auflösen lassen, führen zu Integralen von der Form $\int \frac{P dx}{R}$, wo P eine rationale Funktion von x, R die Quadratwurzel eines Polynoms vierten Grades bezeichnet. Man kann aber nachweisen, daß solche Integrale auf drei Typen reduzierbar sind, deren zwei ersten sich durch Ellipsenbögen ausdrücken lassen, während der dritte von verwickelterer Art ist; daß aber die zwei ersten Typen voneinander zu unterscheiden sind, hängt davon ab, daß der erste auf den zweiten zurückführbar ist, während das Umgekehrte nicht stattfindet.

[1]) Mémoire sur les transcendantes elliptiques, où l'on donne des méthodes faciles pour comparer et évaluer ces transcendantes qui comprennent les arcs d'ellipse, et qui se rencontrent fréquemment dans les applications du calcul intégral, Paris, an II (1793). — Diese Abhandlung, welche der Pariser Akademie im April 1792 vorgelesen wurde, erschien im darauffolgenden Jahre als selbständige Schrift wegen der inzwischen geschehenen Abschaffung der Akademie. Sie ist selbst in Frankreich sehr selten, und wir verdanken es der Freundlichkeit von Prof. A. Boulanger zu Lille, der die Gefälligkeit hatte, einen ausführlichen Auszug nach einem in der Bibliothek de la Sorbonne existierenden Exemplar für uns zu liefern, daß es uns möglich ist, über diese wichtige Schrift zu berichten. Das Wesentlichste des Inhaltes des Mémoire wurde von Legendre in seine Exercices de calcul intégral (T. I, Paris 1811) einverleibt.

Die Reduktion des allgemeinen Integrales auf die erwähnten drei Typen geschieht folgendermaßen.

Man kann vor allem R^2 in ein anderes nur gerade Potenzen der Veränderlichen enthaltendes Polynom von gleicher Ordnung durch eine lineare Substitution umwandeln; wir können also setzen:

$$R^2 = \alpha + \beta x^2 + \gamma x^4.$$

Man kann ferner voraussetzen, P sei eine rationale Funktion von x^2; zerlegt man nämlich P in die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion:

$$P = P_g + P_u,$$

so ist $\int \frac{P_u dx}{R}$ bekanntlich ein elementares Integral. Es existiert dann stets eine Substitution, die das Integral in $\int \frac{Q d\varphi}{\Delta\varphi}$ überführt, wo $\Delta\varphi = \sqrt{1 - c^2 \sin\varphi^2}$, Q eine rationale Funktion von $\sin\varphi^2$ bezeichnet, und die Zahl c zwischen 0 und 1 liegt.

Ist nun Q zunächst eine ganze Funktion von $\sin\varphi^2$:

$$Q = \sum_{h=0}^{k} a_h \sin\varphi^{2h},$$

und setzt man:

$$\int \frac{\sin\varphi^{2h} d\varphi}{\Delta\varphi} = Z_h,$$

so folgt:

$$\int \frac{Q d\varphi}{\Delta\varphi} = \sum_{h=0}^{k} a_h Z_h;$$

es ist aber identisch:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi^{2h-3} = (2h-3) Z_{h-2} - (1 + c^2)(2h-2) Z_{h-1} \\ + c^2(2h-1) Z_h,\end{aligned}$$

wonach sämtliche Z_h durch Z_0 und Z_1 ausdrückbar sind. — Ist zweitens Q gebrochen, so kommen auch Teilintegrale von der Form:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin\varphi^2)^k \Delta\varphi} = \Pi_k$$

vor; setzt man aber augenblicklich $\sin\varphi = x$, so folgt:

$$\Pi_k = \int \frac{dx}{(1 + nx^2)^k \sqrt{1 - (1 + c^2) x^2 + c^2 x^4}},$$

ein Integral, für welches die folgende Rekursionsformel gilt:

$$\frac{x\sqrt{1-(1+c^2)x^2+c^2x^4}}{(1+nx^2)^{k-1}} = (2k-2)\left(1+\frac{1+c^2}{n}+\frac{c^2}{n^2}\right)\Pi_k$$

$$-(2k-3)\left(1+2\frac{1+c^2}{n}+3\frac{c^2}{n^2}\right)\Pi_{k-1}+(2k-4)\left(\frac{1+c^2}{n}+\frac{3c^2}{n^2}\right)\Pi_{k-2}$$

$$-(2k-5)\frac{c^2}{n^2}\Pi_{k-3},$$

wonach sämtliche Π_k durch Π_1, Π_0 und Π_{-1}, oder, was dasselbe ist, durch Π_1, Z_0, Z_1 ausdrückbar sind. — Die erhaltenen Grundtypen subsumieren sich unter die Form:

$$H=\int\frac{(A+B\sin\varphi^2)\,d\varphi}{(1+n\sin\varphi^2)\Delta\varphi}.$$

Legendre unterscheidet aber drei Gattungen von elliptischen Transzendenten, nämlich:

1. $$F=\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

2. $$G=\int(A+B\sin\varphi^2)\frac{d\varphi}{\Delta\varphi};$$

besondere Fälle dieser Gattung sind der Ellipsenbogen:

$$E=\int\Delta\varphi\,d\varphi$$

und der Hyperbelbogen:

$$T=\Delta\varphi\cdot\operatorname{tang}\varphi-c^2\int\frac{\cos\varphi^2 d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Zwischen F und E besteht die Beziehung:

$$F=E-c\frac{\partial E}{\partial c}.$$

3. $$H=\int\frac{A+B\sin\varphi^2}{1+n\sin\varphi^2}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Für die Integrale erster Gattung hat man:

(52) $$F(\varphi)\pm F(\psi)=F(\mu),$$

wenn:

$$\cos\varphi\cos\psi\mp\sin\varphi\sin\psi\Delta\mu=\cos\mu$$

ist; hieraus ergeben sich die Additionsformeln:

$$\sin\mu=\frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta\psi\pm\sin\psi\cos\varphi\Delta\varphi}{1-c^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\cos\mu=\frac{\cos\varphi\cos\psi\mp\sin\varphi\sin\psi\Delta\varphi\Delta\psi}{1-c^2\sin\varphi^2\sin\psi^2},$$

$$\Delta\mu = \frac{\Delta\varphi\,\Delta\psi \mp c^2 \sin\varphi \sin\psi \cos\varphi \cos\psi}{1 - c^2 \sin\varphi^2 \sin\psi^2},$$

und als besonderer Fall die Multiplikationsformeln, aus welchen sich die Teilungsformeln ableiten lassen. Das n-Teilungsproblem hängt von einer algebraischen Gleichung der n^2-ten Ordnung ab, die sich auf eine der $\frac{n^2-1}{2}$-ten Ordnung reduziert, wenn n ungerade und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist.

Besteht zwischen φ, ψ und μ die Beziehung:

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\mu),$$

so folgt:

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\mu) = c^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\mu, \tag{53}$$

$$\Pi(\varphi) + \Pi(\psi) - \Pi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{arc\,tg} \frac{n\sqrt{\alpha} \sin\varphi \sin\psi \sin\mu}{1 + n - n \cos\varphi \cos\psi \cos\mu}, \tag{54}$$

wo:

$$\Pi(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin\varphi^2)\Delta\varphi}, \quad \alpha = (1+n)\left(1 + \frac{c^2}{n}\right)$$

ist.[1])

In seiner zweiten Abhandlung von 1786 wurde Legendre dazu geführt, zwei Ellipsenbögen untereinander zu vergleichen, deren Exzentrizitäten c, c' und deren Argumente φ, φ' in den Beziehungen:

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad \frac{c'^2 \sin\varphi' \cos\varphi'}{\sqrt{1 - c'^2 \sin\varphi'^2}} = \left(c - \sqrt{1 - c'^2}\right) \sin\varphi$$

zueinander stehen. Diese letzte Gleichung läßt sich einfacher schreiben:

$$\sin(2\varphi' - \varphi) = c \sin\varphi.$$

Hier dehnt Legendre diese Vergleichung auf Integrale aller drei Gattungen aus. Es ergibt sich zunächst:

$$F(c', \varphi') = \frac{1+c}{2} F(c, \varphi);$$

wendet man diese Transformation wiederholt an, so folgt:

$$c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}, \quad c''' = \frac{2\sqrt{c''}}{1+c''}, \cdots;$$

$$F(c'', \varphi'') = \frac{1+c'}{2} F(c', \varphi'), \quad F(c''', \varphi''') = \frac{1+c''}{2} F(c'', \varphi''), \cdots.$$

---

[1]) Die Formeln (52), (53), (54) gehören eigentlich der Abteilung A dieses Kapitels an; wir haben dieselben aber hier des Zusammenhangs wegen angeführt.

Wie schon bemerkt, bilden $c, c', c'', \ldots$ eine zu-, $\varphi, \varphi', \varphi'', \ldots$ eine abnehmende Folge. Man kann aber auch die Folge nach der umgekehrten Seite hin fortsetzen. Ist nämlich:

$$c = \frac{2\sqrt{c_1}}{1+c_1}, \quad c_1 = \frac{2\sqrt{c_2}}{1+c_2}, \ldots,$$

$$\sin(2\varphi - \varphi_1) = c_1 \sin\varphi_1, \quad \sin(2\varphi_1 - \varphi_2) = c_2 \sin\varphi_2, \cdots$$

(woraus sich ergibt:

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi) = \sqrt{1-c^2}\operatorname{tang}\varphi, \quad \operatorname{tang}(\varphi_2 - \varphi_1) = \sqrt{1-c_1^2}\operatorname{tang}\varphi_1, \cdots),$$

so hat man:

$$F(c, \varphi) = \frac{1+c_1}{2} F(c_1, \varphi_1), \quad F(c_1, \varphi_1) = \frac{1+c_2}{2} F(c_2, \varphi_2), \cdots;$$

$c, c_1, c_2, \ldots$ ist eine ab-, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ eine zunehmende Folge. Ist dann c_n so klein, daß es vernachlässigt werden darf, so ist annäherungsweise:

$$F(c_n, \varphi_n) = \varphi_n;$$

bezeichnet also Φ den Grenzwert, welchem sich die Folge $\varphi, \frac{\varphi_1}{2}, \frac{\varphi_2}{2^2}, \cdots$ unbeschränkt nähert, so ist:

$$F(c, \varphi) = \Phi(1+c_1)(1+c_2)\cdots = \Phi\frac{2\sqrt{c_1}}{c}\frac{2\sqrt{c_2}}{c_1}\cdots = K\Phi.$$

Ist insbesondere $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so folgt:

$$\frac{\varphi_1}{2} = \frac{\varphi_2}{2^2} = \cdots = \frac{\pi}{2},$$

also:

$$F\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = F^1(c) = K\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man ferner:

$$G_1 = \int (A_1 + B_1 \sin\varphi_1^2)\frac{d\varphi_1}{\Delta_1\varphi_1}, \quad \Delta_1\varphi_1 = \sqrt{1 - c_1^2 \sin\varphi_1^2},$$

so hat man:

$$G = \frac{1+c_1}{2}\left(G_1 - \frac{B}{2}\sin\varphi_1\right), \quad A_1 = A + \frac{1}{2}B, \quad B_1 = \frac{1}{2}Bc_1.$$

Es ergibt sich analog:

$$G_1 = \frac{1+c_2}{2}\left(G_2 - \frac{B_1}{2}\sin\varphi_2\right), \quad A_2 = A_1 + \frac{1}{2}B_1, \quad B_2 = \frac{1}{2}B_1c_2;$$

$$G_2 = \frac{1+c_3}{2}\left(G_3 - \frac{B_2}{2}\sin\varphi_3\right), \quad A_3 = A_2 + \frac{1}{2}B_2, \quad B_3 = \frac{1}{2}B_2c_3;$$

. . . .

Es ist zu bemerken, daß die Folge $B, B_1, B_2, \ldots$ rascher als die Folge $c, c_1, c_2, \ldots$ abnimmt. Können B_n, c_n vernachlässigt werden, so ist:

$$G_n = A_n \varphi_n = 2^n A_n \Phi,$$

wo:

$$A_n = A + \frac{B}{2}\left(1 + \frac{c_1}{2} + \frac{c_1 c_2}{4} + \cdots + \frac{c_1 c_2 \cdots c_{n-1}}{2^{n-1}}\right);$$

bezeichnet also L den Grenzwert von A_n, so folgt:

$$G = KL - \frac{B}{c}\left(\frac{\sqrt{c_1}}{2}\sin\varphi_1 + \frac{\sqrt{c_1 c_2}}{2^2}\sin\varphi_2 + \frac{\sqrt{c_1 c_2 c_3}}{2^3}\sin\varphi_3 + \cdots\right).$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ hat man $G = KL\frac{\pi}{2}$.

Setzt man $A = 1$, $B = -c^2$, so stellt G den Ellipsenbogen E dar; es ist also:

$$E(c, \varphi) = KL\Phi + \frac{c\sqrt{c_1}}{2}\sin\varphi_1 + \frac{c\sqrt{c_1 c_2}}{2^2}\sin\varphi_2 + \cdots,$$

$$E\left(c, \frac{\pi}{2}\right) = E^1(c) = KL\frac{\pi}{2}.$$

Die Integrale dritter Gattung H lassen sich analog behandeln; man kann aber auch auf dieselben eine oder die andere der beiden Substitutionen:

$$\sin\varphi' = \frac{(1+c)\sin\varphi}{1 + c\sin\varphi^2}, \quad \sin\varphi^2 = \frac{1 - \cos\psi}{1 + \Delta\psi}$$

anwenden.

Die Integrale:

$$\int\frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta x^6}}, \quad \int P\,dx(\alpha + \beta x^2 + \gamma x^4)^{\pm\frac{1}{4}},$$

$$\int P\,dx(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)^{\pm\frac{1}{3}},$$

$$\int\frac{P\,dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \gamma x^4 + \beta x^5 + \alpha x^6}},$$

$$\int\frac{P\,dx}{\sqrt{\beta + \gamma x^2 + \delta x^4 + \gamma x^6 + \beta x^8}},$$

wo P eine rationale Funktion von x bezeichnet, lassen sich auf elliptische Transzendenten zurückführen; dasselbe gilt von dem Eulerschen Integral erster Art:

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1 - x^n)^{\frac{n-q}{n}}},$$

wenn $n = 3, 4, 6, 8, 12$.

C. Vermischte Fragen.

Unter diesem Titel wollen wir einige wenige Schriften kurz besprechen, die sich keinem der beiden oben als Leitfaden angenommenen Hauptprobleme anschließen.

Vor allem erwähnen wir zwei Abhandlungen Lagranges mechanischen Inhalts[1]), wo besondere elliptische Integrale berechnet werden, welche in elementare Integrale dadurch übergehen, daß entweder das Polynom vierter Ordnung einen zweifachen Faktor besitzt, oder eine unter dem Integrationszeichen auftretende Konstante sehr klein ist.

Hierher gehört auch eine Schrift Eulers[2]), welche den Zweck hat, eine stark konvergierende Reihe für den Umfang der Ellipse aufzustellen (s. o. S. 466) Ist:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

die Gleichung der Ellipse, so setzt Euler:

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1+z}{2},\quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{1-z}{2},$$

ferner:

$$a^2+b^2=c^2,\quad \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=n.$$

Es ist dann, wenn s die Ellipsenquadrante bezeichnet:

$$s=\frac{c}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-nz}{1-z^2}}\,dz=\frac{c}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\left(1-\frac{1}{2}nz-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}n^2z^2-\cdots\right)$$

$$=\frac{c}{2\sqrt{2}}\left[\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}-\frac{1}{2}n\int_{-1}^{+1}\frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}n^2\int_{-1}^{+1}\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}}-\cdots\right].$$

---

[1]) Recherches sur le mouvement d'un corps qui est attiré vers deux centres fixes, Misc. Taur. IV, 1766—1769; Oeuvres II, Paris 1868, p. 67—121. — Sur la force des ressorts pliés, Mém. Acad. Berlin XXV, 1771; Oeuvres III, Paris 1869, p. 77—110.

[2]) Nova series infinita maxime convergens perimetrum ellipsis exprimens, Novi Comm. Acad. Petrop. XVIII, 1773 (publ. 1774), p. 71—84. — Weitere Reihenentwicklungen für elliptische Integrale finden sich u. a. in: Lambert, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung III, Berlin 1772, p. 35—55; Ivory, A new series for the rectification of the ellipsis; together with observations on the evolution of the formula $(a^2+b^2-2ab\cos\varphi)^n$ (1796), Trans. R. Soc. Edinburgh IV, 1798, p. 177—190; Trembley, Observations sur l'attraction et l'équilibre des sphéroides, Hist. Acad. Berlin 1799—1800 (publ. 1803), p. 68 bis 109.

Es ist aber:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\pi,\quad \int_{-1}^{+1}\frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}=0,\quad \int_{-1}^{+1}\frac{z^{\lambda+2}dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{\lambda+1}{\lambda+2}\int_{-1}^{+1}\frac{z^{\lambda}dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

also:

$$s=\frac{c\pi}{2\sqrt{2}}\left[1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}n^2-\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}n^4\right.$$
$$\left.-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12}n^6-\cdots\right],$$

eine Reihe, welche sehr stark konvergiert.

Wichtiger ist die Abhandlung Eulers über die elastische Kurve[1]) (s. o. S. 505 f.):

$$y=\int_0^x\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

eine Linie, welche schon früher von Jakob Bernoulli und von Maclaurin[2]) betrachtet worden war. Ist (Fig. 99):

$$CP=x,\quad PM=CQ=y,$$

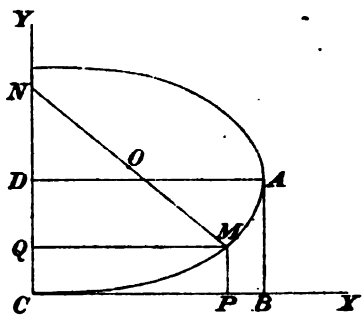


Fig. 99.

so ist die der Abszisse $CB=1$ entsprechende Ordinate:

$$CD=\int_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}=a.$$

Die Kurve ist symmetrisch in bezug auf die durch D zur x-Achse parallel gezogene Gerade DA. Man findet ferner, wenn MN die Normale in M, N ihren Schnittpunkt mit der y-Achse, O den Krümmungsmittelpunkt bezeichnet:

$$CM=s=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},\quad CA=c=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

$$MN=\frac{1}{x},\quad MO=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}MN.$$

---

[1]) De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione

$$y=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

contentae, Acta Acad. Petrop. 1782, P. II (publ. 1786), p. 34—61. [2]) Siehe diese Vorl., III², S. 221; Enneper, a. a. O., p. 525.

Setzt man $P = ys$, so folgt:

$$P = \int y ds + \int s dy, \quad ac = \left[\int y ds + \int s dy\right]_{x=0}^{x=1};$$

es ist aber:

$$y = \int_0^x \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2r} x^{4r+2} dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2r} \frac{x^{4r+3}}{4r+3},$$

$$s = \int_0^x \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2r} x^{4r} dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2r} \frac{x^{4r+1}}{4r+1},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \frac{x^{4r+3} dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{4r}{4r+2} \int_0^1 \frac{x^{4r-1} dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{4r(4r-4)\cdots 8 \cdot 4}{(4r+2)(4r-2)\cdots 10 \cdot 6} \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2r}{3 \cdot 5 \cdots (2r+1)} \frac{1}{2},$$

folglich:

$$\left[\int y ds\right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2r} \frac{1}{4r+3} \int_0^1 \frac{x^{4r+3} dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)(4r+3)},$$

$$\left[\int s dy\right]_{x=0}^{x=1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2r-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2r} \frac{1}{4r+1} \int_0^1 \frac{x^{4r+3} dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)(4r+1)},$$

und hieraus:

$$ac = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2r+1} \left(\frac{1}{4r+1} + \frac{1}{4r+3}\right) = 2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(4r+1)(4r+3)}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \left[\frac{1}{4r+1} - \frac{1}{4r+3}\right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2r+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Man kann selbstverständlich für die elastische Kurve alle Rektifikationsprobleme auflösen, deren Behandlung für die Kegelschnitte schon oben besprochen wurde. Bezeichnen x_1, x_2 die Abszissen von zwei Kurvenpunkten M_1, M_2, so ist:

$$x_3 = \frac{x_1 \sqrt{1-x_2^4} + x_2 \sqrt{1-x_1^4}}{1 + x_1^2 x_2^2}$$

die Abszisse eines dritten Punktes M_3, der zu den oberen in der Beziehung:

$$CM_3 = CM_1 + CM_2$$

steht. Sind ferner P, Q, R drei Kurvenpunkte, so läßt sich ein vierter Punkt S derart angeben, daß $RS = PQ$ ist.

Unter den zahlreichen Schriften geometrischen Inhalts, welche elliptische Funktionen berücksichtigen, erwähnen wir hier eine Abhandlung von Euler über die Oberfläche des schiefen Kegels (s. o. S. 520)[1]), und eine von Schubert über die Abwicklung der ebenen Schnitte eines Zylinders[2]) (s. o. S. 521).

Wir können diesen Abschnitt nicht beschließen, ohne einen Namen auszusprechen, der in der künftigen Periode eine Hauptrolle spielen wird. Der princeps mathematicorum, Karl Friedrich Gauß (1777—1855), beschäftigte sich seit seiner ersten Jugend mit elliptischen Integralen, und es ist wohlbekannt, daß manche von den wichtigsten Entdeckungen Jacobis und Abels ihm seit lange angehörten. Leider hinterließ er von seinen jugendlichen Studien über diesen Gegenstand nur einige handschriftliche Fragmente, welche erst nach seinem Tode gedruckt wurden[3]), und aus welchen es nicht leicht zu ersehen ist, wie tief er während unseres Zeitabschnittes in die neue Theorie eingedrungen war. Wichtige Aufschlüsse hat jedoch das Tagebuch von Gauß gegeben.[4])

---

[1]) De superficie coni scaleni, ubi imprimis ingentes difficultates, quae in hac investigatione occurrunt, perpenduntur (1776), Nova Acta Acad. Petrop. III, 1785 (publ. 1788), p. 69—89. Siehe auch die oben besprochenen Schriften von Legendre von 1786 und 1793. [2]) De evolutione sectionum cylindri (1798), Nova Acta Acad. Petrop. XIII, 1795—1796 (publ. 1802), p. 190—204. [3]) Gauß, Werke III, Göttingen 1866, S. 404—406 (1797), 433—435 (1799); VIII, Göttingen 1901, S. 93—117. [4]) Über das von P. Stäckel entdeckte Tagebuch vgl. F. Klein, Mathem. Annal. LVII, 1903, p. 14—32.

ABSCHNITT XXVII

TOTALE UND PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DIFFERENZEN- UND SUMMENRECHNUNG VARIATIONSRECHNUNG

VON

C. R. WALLNER

Totale und partielle Differentialgleichungen.

Um die Mitte des 18. Jahrhunderts sehen wir die Theorie der Differentialgleichungen bereits als eine selbständige mathematische Disziplin vor uns. Während die Untersuchung von Differentialgleichungen anfänglich nur Mittel zum Zweck war, während ihre Lösung ursprünglich sozusagen nur als Nebenrechnung bewerkstelligt wurde, war ihre Integration mittlerweile Selbstzweck geworden. Auch die Problemstellung hat sich geändert. In den ersten Zeiten werden Integrationen in geschlossener Form durch elementare Transzendenten verlangt, bald beschränkt man sich auf bloße Quadraturen; aber auch diese Forderung wird fallen gelassen; man ist zufrieden, überhaupt die durch die gegebene Differentialgleichung definierte Abhängigkeit diskutieren und womöglich durch unendliche Reihen oder bestimmte Integrale ausdrücken zu können. Trotz dieses freiwilligen Aufgebens zu hoch geschraubter Forderungen ist natürlich die Frage nach Integrationen in endlicher, geschlossener Form nicht erloschen; aber während man früher schlechthin für jede Differentialgleichung ein derartiges Integral verlangte, fragt man jetzt umgekehrt nach Gleichungen, welche eine Integration durch eine endliche Zahl elementarer Funktionen erlauben. Derartige Nachforschungen haben die Entdeckung größerer Gruppen integrabler Typen zur Folge. Solche enthält z. B. eine Arbeit von d'Alembert in den Memoiren der französischen Akademie von 1767.[1]) D'Alembert sucht zuerst Ausdrücke, die sich mit Hilfe der Exponentialfunktion, des Integrallogarithmus, von Logarithmen und elliptischen Integralen integrieren lassen. Im folgenden gibt er eine Reihe von eigentlichen Differentialgleichungen, meistens 2. Ordnung, die aber viel zu speziell sind, als daß wir hier darauf eingehen könnten, und Bedingungen für ihre Integrabilität. Wie er diese Gleichungen erhalten hat, legt er in einem späteren Aufsatze dar[2]): Seine Methode besteht darin,

---

[1]) Histoire de l'Académie Royale des Sciences (avec les Mémoires de Mathématique et de Physique) 1767 (1770), p. 573 ff. (s. o. S. 728, 838). Die Seitenzahl bezieht sich hier, wie bei den Petersburger Akademieschriften, nur wenn besonders bemerkt auf die Histoire selber. [2]) Ebenda 1769 (1772), p. 73 ff.

aus einer integrablen Gleichung durch verschiedene Kunstgriffe wieder neue abzuleiten. Ähnlich leitet Euler[1]) aus der Gleichung $ddy = Ydx^2$, wo Y eine Funktion von y allein ist, und die mit Hilfe des Multiplikators $2\frac{dy}{dx}$ integriert werden kann, neue Typen ab, indem er z. B. x als abhängige Variable auffaßt. So ergibt sich

$$dy\,d^2x = -Ydx^3,$$

d. i. in unserer Schreibweise

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -Y\left(\frac{dx}{dy}\right)^3.$$

Eine neue Gleichung liefert die Einführung von

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

usw. Aus

$$SSddz + SdSdz - aazdx^2 = 0$$

leitet er[2]) durch Substitutionen wie $z = \frac{y}{P}$ und $S = \frac{P}{R}$, wo P und R Funktionen von x sind, neue Gleichungen und im Falle der Integrabilität neue Fälle integrabler Gleichungen ab. Ähnlich erkennt er, daß die Gleichung

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx}z$$

ein endliches Integral besitzt.[3]) Ein von Euler oft geübtes Verfahren, in endlicher Form integrable Differentialgleichungen zu finden, besteht darin, daß er die Bedingungen aufsucht, unter welchen die das Integral darstellende unendliche Reihe abbricht (vgl. S. 913, 989 und 992). So integriert[4]) er die Gleichung

$$\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{ccy}{x^{2m+2}} = 0$$

allgemein in der Form

$$y = kx^{\frac{m+1}{2}}(1 - Bx^{2m} + Dx^{4m} - \cdots)\sin\left(\frac{c}{mx^m} + \theta\right)$$
$$- kx^{\frac{m+1}{2}}(Ax^m - Cx^{3m} + \cdots)\cos\left(\frac{c}{mx^m} + \theta\right),$$

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. II, 1769, p. 25. [2]) Ebenda, p. 142. [3]) Miscellanea Taurinensia t. III_2 (der Index 2 deutet die 2. Paginierung an) 1762/65 (1766), p. 70. Die Klammern deuten, wie überall im folgenden, partielle Differentialquotienten an. [4]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), p. 298.

wo k und θ die Integrationskonstanten sind; er untersucht, für welche Werte von m die Reihen abbrechen. Denselben Gedankengang wendet Laplace auf die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung an (vgl. S. 1001).

Naturgemäß mußte sich bei eingehender Beschäftigung mit der Theorie der Differentialgleichungen rasch eine Einteilung derselben herausbilden: man schied in die zwei Hauptgruppen der totalen und partiellen Gleichungen. Des weiteren wurden die Begriffe Ordnung[1]) und Grad einer Differentialgleichung zur Abgrenzung einzelner Typen herangezogen und zwar in der Weise, daß man bald Gleichungen gegebener (meist 1. oder 2.) Ordnung aber beliebigen Grades, bald Gleichungen gegebenen (besonders 1.) Grades und beliebiger Ordnung ins Auge faßte. Einen anderen Gesichtspunkt bildete die Zahl der Variabeln, und hier ist es wieder die Gleichung mit 2 bzw. 3 Veränderlichen, die am meisten untersucht wurde. Diese Art der Einteilung ergibt sich als die natürliche, wenn man die Integration der Differentialgleichungen als rein mathematisches Problem auffaßt, und demgemäß werden auch die einfachsten Fälle, die sich bei dieser Unterscheidung ergeben, wegen ihrer theoretischen Bedeutung eifrig behandelt. Die Praxis freilich führt sehr häufig gerade auf viel schwierigere und kompliziertere Fälle; Simultansysteme und große Zahl von Variabeln sind in Astronomie und Mechanik Regel, und es ist nichts Seltenes, daß alle die schönen Integrationstheorien der reinen Mathematik vollständig versagen und man zu Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß. Trotzdem haben hierher gehörige Probleme wegen ihrer eminenten Bedeutung die hervorragendsten Geister dauernd beschäftigt, und wir begreifen, daß die Weiterentwicklung der Theorie der Differentialgleichungen der Verfolgung von zweierlei Absichten zuzuschreiben ist: erstlich war es das Streben nach — soweit möglich — vollständigen und erschöpfenden Theorien für die theoretisch interessanten Fälle; andererseits war es das Verlangen, die aus der Anwendung hervorgegangenen Methoden und Kenntnisse so allgemein und einheitlich als möglich zu gestalten. Diese Anregung aus der Praxis, dies Verlangen nach Ausbau wichtiger theoretischer Fragen lösen sich fortwährend ab und fördern, sich gegenseitig beständig ergänzend, in gleicher Weise die schon gewonnenen Resultate.

Indessen ist doch wenigstens zu Beginn des hier geschilderten Zeitabschnittes ein deutlicher Unterschied hinsichtlich des Objektes dieser treibenden Momente zu konstatieren. Der Gesichtspunkt prak-

[1]) Im Lateinischen „gradus".

tischer Verwertbarkeit kommt vorzüglich für partielle Differentialgleichungen in Frage, während von den totalen Gleichungen hauptsächlich solche behandelt werden, die formal, also vermöge Grad, Ordnung, Variabelnzahl eine ausgezeichnete Rolle spielen. Doch bietet auch bei totalen Gleichungen die Anwendung noch oft genug den Ausgangspunkt, die Veranlassung zur Untersuchung; es sei hier nur auf das Vorkommen der natürlichen Gleichungen bei Nils Landerbeck (1735—1810, Professor zu Upsala) hingewiesen. In einer Abhandlung aus dem Jahre 1783 wird zunächst ein index variationis curvaturae $T = \frac{dR}{dz}$,[1]) wo R den Krümmungsradius, ds das Bogenelement einer ebenen Kurve bedeutet, sowie eine Hilfsgröße p, die mit unserem $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ identisch ist, definiert. Es werden nun Kurven gesucht, die durch eine Relation zwischen T und p oder verwandten Gebilden definiert sind. Interesse für uns besitzt nur ein Scholion[2]), das die Aufgabe enthält, aus einer Gleichung zwischen T und R, also einer speziellen Gattung natürlicher Gleichungen die betreffende Kurve zu ermitteln. Landerbeck benutzt zur Integration einen Hilfssatz

$$\frac{dR}{RT} = -\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}},^{3)}$$

der sich leicht verifizieren läßt. Die Integrationen selbst bieten, weil an ganz speziellen Beispielen vorgenommen, keinerlei mathematisches Interesse. In einer Fortsetzung dieses Aufsatzes[4]) ist auf die Möglichkeit hingewiesen, aus einer Relation zwischen T und s oder zwischen R und s die Gleichung der Kurve in x und y Koordinaten zu bestimmen. An die umgekehrte Aufgabe, eine gegebene Kurve durch eine Gleichung zwischen R und s darzustellen, ist in keiner Weise gedacht; sind doch auch die erwähnten Probleme für Landerbeck nur Aufgaben unter vielen anderen und in keiner Weise ausgezeichnet.

Wir haben heutzutage für die Einteilung der Differentialgleichungen außer den oben genannten noch andere Gesichtspunkte mehr funktionentheoretischer Natur, wie die Art der Unstetigkeiten des Integrals (z. B. ob fest oder verschiebbar), das Verhalten im Unendlichen u. a. m. Derartige Untersuchungen kommen natürlich vor Ausbildung der Funktionentheorie fast nicht vor, doch sei hier auf

---

[1]) Philosophical Transactions, vol. 73, 1783, p. 458. [2]) Ebenda, p. 467
[3]) Das negative Vorzeichen rührt von geometrischen Betrachtungen her.
[4]) Philosophical Transactions, vol. 74, 1784, p. 478, Schol. 2.

eine Stelle bei Euler[1]) hingewiesen, an der gezeigt ist, wie eine gewisse Methode der Integration durch Approximation infolge bestimmter Unstetigkeiten des Integrals hinfällig werden kann. Es ist speziell von der Differentialgleichung

$$ddy + \frac{2dxdy}{x} - \frac{ffydx^2}{x^4} = 0$$

die Rede, deren vollständiges Integral

$$y = A \sin \cdot \left(\frac{f}{x} + \alpha\right)$$

ist. Hier geht, sagt Euler, während x von 0 bis ω, d. i. einer sehr kleinen Größe, wächst, der Winkel $\frac{f}{x} + \alpha$ aus dem Unendlichen ins Endliche über, so daß sein Sinus inzwischen alle Zwischenwerte von $+1$ bis -1 unendlich oft annimmt.

Die Frage nach der Existenz der Integrale, die nach unserer Ansicht den speziellen Untersuchungen voranzugehen hat, existiert vor Cauchy überhaupt nicht. Einerseits war die Zeit für derartig kritische Fragestellungen noch nicht reif, andererseits mochte die geometrisch oder physikalisch evidente Existenz der Lösung von Problemen, die aus der Praxis genommen waren, die Überzeugung erwecken, daß auch der entsprechenden mathematischen Formulierung der Aufgabe eine Bedeutung zukommen muß. Indessen findet sich doch, wiederum bei Euler, eine Überlegung, die, wenngleich mit der Frage nach der Existenz der Integrale in keinerlei Zusammenhang stehend, doch Cauchy nachmals bei seinen Untersuchungen genützt haben kann. Euler stellt nämlich an die Spitze eines Kapitels seiner Integralrechnung, das speziell von der Integration durch Approximation handelt[2]), folgende Auslegung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = V$, wo V eine gegebene Funktion von x und y ist (s. o. S. 734): Nimmt x der Reihe nach die Werte $a, a', a'', a''', \ldots$ an, so nehmen, wenn die Differenzen $a' - a,\ a'' - a', \ldots$ sehr kleine Zahlen sind, y und V die Werte $b, b', b'', b''', \ldots$ bzw. $A, A', A'', A''', \ldots$ an, wo die a, b, A durch die Gleichungen

$$b' = b + A(a' - a); \qquad b'' = b' + A'(a'' - a');$$
$$b''' = b'' + A''(a''' - a''); \ \ldots$$

verbunden sind. Euler hat also hier ähnlich wie Cauchy ein Inte-

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 355. [2]) Ebenda, vol. I, 1768, p. 493.

grationsintervall $a\,x$ in Teilintervalle $a\,a'$, $a'\,a''$,... zerlegt und die vorgelegte Differentialgleichung näherungsweise als Differenzengleichung angesehen.

Unter der stillschweigenden Voraussetzung also, daß eine Integration immer möglich sei, war man zu verschiedenen Erkenntnissen über die Natur der Integrale gelangt. Die Tatsache, daß in das Integral der totalen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit 2 Variabeln immer n Konstante eintreten, ist längst bekannt[1]); über die Zahl der willkürlichen Funktionen im Falle partieller Differentialgleichungen finden sich Untersuchungen in den Memoiren der Pariser Akademie[2]). Umgekehrt wird die Frage nach der Ordnung der Differentialgleichung, die durch Elimination von n Konstanten entsteht, behandelt. So zeigt Lagrange[3]), daß aus einer Gleichung mit 3 Variabeln und 5 Konstanten immer eine partielle Differentialgleichung mit 3 Variabeln und 5 Differentialquotienten hervorgeht, so daß also die gegebene Gleichung einer partiellen Gleichung 2. Ordnung gleichwertig ist.

Einen größeren Reiz übte auf viele Mathematiker das Problem, von vornherein, a priori, ganz allgemein den Bau, die analytische Form der Integrale und die Natur der darin auftretenden Transzendenten zu bestimmen. Die betreffenden Mathematiker waren sich natürlich der Schwierigkeit und Unbestimmtheit dieser Fragestellung gar nicht bewußt; man denke nur, welche Hilfsmittel allein die Theorie der Integrale von Funktionen mit ausschließlich algebraischen Irrationalitäten erfordert, wie sie das abgelaufene Jahrhundert geschaffen hat, und man wird die Zwecklosigkeit jener Versuche einsehen. Insbesondere hat sich der Marquis de Condorcet mit diesem Problem beschäftigt[4]), ohne allgemein giltige Resultate zu erhalten; auch Laplace ist in dieser Hinsicht tätig, steckt sich aber von Anfang an engere Grenzen. Er versucht von vornherein, ohne wirklich Integrationen durchzuführen, lediglich auf Grund funktionentheoretischer, sehr interessanter, allerdings nicht ganz korrekter Schlüsse die Form des Integrals der partiellen Differentialgleichungen 1. und 2. Ordnung festzustellen[5]), d. h. die Art der Verknüpfung der darin auftretenden willkürlichen Funktionen zu bestimmen. Die Ergebnisse seiner Untersuchung bilden die wesentliche Grundlage seiner Theorie der Integration der partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung.

[1]) Siehe z. B. Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 367. [2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 1 ff. [3]) Oeuvres de Lagrange publ. par Serret, t IV, p. 89. [4]) Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), Histoire, p. 66. Viele spezielle brauchbare Erkenntnisse: Ebenda, Mémoires, p. 1 ff. [5]) Ebenda 1773 (1777), p. 347 ff.

Ein wichtiges sich zwar nicht auf den äußeren Bau, so doch ebenfalls auf die Natur der Integrale beziehendes Problem wirft man mit der Frage auf, welcherlei Unstetigkeiten in den willkürlichen Funktionen einer Integralgleichung auftreten dürfen. Wir wissen aus dem vorigen Band[1], daß dieses Problem durch die Integration der Differentialgleichung der Saitenschwingungen veranlaßt wurde und ein Gegenstand lebhaften Streites unter den einzelnen Mathematikern war. Der vorsichtige d'Alembert, welcher von seinen Zeitgenossen am meisten Sinn für Präzision und Exaktheit, für Strenge in der Rechnung zeigte, wollte, wie wir uns erinnern, nur solche Funktionen zulassen, die nach Taylors Reihe entwickelbar sind, Euler glaubt diesen Funktionen keinerlei Beschränkung auferlegen zu dürfen. Beide Forscher bleiben bis zu Ende ihres Lebens hartnäckig auf ihrer Meinung bestehen und geben ihrer Ansicht wiederholt bestimmtesten Ausdruck, d'Alembert besonders in seinem Briefwechsel und in seinen Opuscules mathématiques, Euler u. a. in seiner Integralrechnung[2]. Die willkürliche Funktion f, sagt dieser, kann so gewählt werden, daß die durch $\xi = f(\eta)$ dargestellte Kurve mit freier Hand gezogen und aus Teilen verschiedener Kurven zusammengesetzt ist. Derartige Funktionen nennt Euler „discontinuas seu nexu continuitatis destitutas"; die Fähigkeit, auch diskontinuierlich sein zu dürfen, bezeichnet er als eine „vis praecipua" der willkürlichen Funktionen. Zur Begründung für seine Behauptungen benutzt er gleich darauf das Beispiel der schwingenden Saite: Die willkürlichen Funktionen des Integrals, heißt es, stellen die Anfangsbedingungen dar im Fall, daß sie (analytisch) bestimmt werden können; da diese Lösung allgemein sein muß, jedem Anfangszustand genügen muß, ist sie notwendig auch für jene Fälle tauglich, in welchen man der Saite zu Beginn der Schwingungen eine ganz unregelmäßige, diskontinuierliche Form gibt, und die Integrationsfunktion muß sich auch diesen Fällen anpassen lassen.

Während nun Euler und d'Alembert, neben Daniel Bernoulli die Häupter der beiden Parteien, ihrer ursprünglichen Ansicht unerschütterlich treu blieben, hat Lagrange, der den fast beruhigten, weil aussichtslosen Streit durch seine beiden großen Aufsätze über Natur und Fortpflanzung des Schalles neu entfachte und darin sich auf die Seite Eulers stellte, sich von d'Alembert zwar nicht völlig überzeugen, aber doch wenigstens zu dem Zugeständnis drängen lassen, seine Lösung sei nicht von jeglicher Beschränkung frei, sondern setze die Endlichkeit sämtlicher Differentialquotienten in allen

---

[1] Vgl. diese Vorlesungen, III[2], S. 900 ff. [2] Institutiones calculi integralis, vol. III, 1770, p. 39.

Punkten der gegebenen Anfangsfigur implizite voraus[1]). Nach und nach flaute die Debatte ab, da eine Einigung nicht zu erzielen war; die späteren Forscher begnügten sich damit, gelegentlich zu der Sache Stellung zu nehmen. Auf diese Weise wird ersichtlich, daß Condorcet[2]) und Laplace mehr auf der Seite d'Alemberts standen, insofern als auch sie die willkürlichen Funktionen gewissen Beschränkungen unterworfen wissen wollten. So fordert Laplace für das Integral einer Gleichung n^{ter} Ordnung die Stetigkeit der Ableitungen aber nur bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich.[3]) Für seine Auffassung ist folgende Überlegung maßgebend: Man kann jede Differentialgleichung als Spezialfall einer Differenzengleichung auffassen, es sind lediglich die Differenzen unendlich klein geworden. Für die Differenzengleichungen brauchen aber (wie durch geometrische Konstruktion der Integrale solcher Gleichungen gezeigt wird) die willkürlichen Funktionen durchaus nicht stetig zu sein. Die übrigen Geometer nehmen fast alle Eulers Standpunkt ein. Der Streit hat übrigens eine wichtige Unterscheidung der bei Kurven möglichen Unstetigkeiten geschaffen; nach einer von der Petersburger Akademie preisgekrönten Arbeit[4]) ist „discontiguité", d. i. Unstetigkeit in unserm Sinne (etwa durch Sprung), von „discontinuité" zu trennen. Letztere Art von Unstetigkeit besteht darin, daß die Funktion in verschiedenen Intervallen verschiedenen Gesetzen gehorcht. Der Verfasser, L. F. A. Arbogast (S. 667, Note 1), ist der Ansicht, daß beiderlei Gattungen von Unstetigkeiten in den Integralgleichungen zuzulassen sind; die Differentialgleichung verlange ja nur, daß ein Sprung des einen Differentialquotienten durch einen analogen Sprung des übrigen kompensiert werde. Die Unstetigkeiten im zweiten Sinne werden überhaupt von den meisten Mathematikern zugelassen; erwähnt sei z. B. der Abbé T. Valperga di Caluso[5]) (1737—1825). Einen wirk-

---

[1]) Nach Burkhardt, Entwicklungen nach oscillirenden Funktionen, Heft 1, S. 40. Dieser Aufsatz, im folgenden einfach als Burkhardt zitiert, findet sich in den Jahresberichten der deutschen Mathematikervereinigung; daselbst ist der ganze Streit bezüglich des Problems der schwingenden Saiten ausführlich dargestellt. Der Briefwechsel zwischen d'Alembert und Lagrange in Oeuvres de Lagrange, t. XIII. Man vgl. auch d'Alembert, Opuscules mathématiques, t. I, 1761, p. 65ff. [2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1771 (1774), p. 49ff. und p. 69. Seine Schlüsse sind nicht streng, die Darstellung ist schwerverständlich. [3]) Ebenda 1779 (1782), p. 299ff. [4]) Vgl. Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. V, 1787 (1789), Histoire, p. 5. Die Arbeit heißt Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires, qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles, St. Pétersbourg 1791. Vgl. auch Burkhardt a. a. O. [5]) Nach Burkhardt, Heft 1, S. 44 Mem. Tor. 1786/87 (1788), p. 571.

lichen und zwar hochwichtigen Fortschritt bedeutet eine Arbeit von Jacques Charles (1746—1823, erst Beamter im französischen Finanzministerium, später Professor der Physik am Conservatoire des arts et métiers und Mitglied der Académie des sciences). Dieser unterscheidet zunächst zwischen Kurven, die vollkommen willkürlich, etwa aus freier Hand gezogen sind, die also, wie er sagt, nicht durch analytische Formeln ausgedrückt werden können, und Kurven, die in verschiedenen Abschnitten ihres Verlaufes verschiedenen Gesetzen gehorchen. Von letzteren behauptet er, daß sie immer durch einen einzigen analytischen Ausdruck dargestellt werden können und behandelt auch die Aufgabe, ein gegebenes „Gemisch" von Flächen, Linien und Punkten durch eine einzige Formel auszudrücken. Als Vorbereitung zu dieser Aufgabe gibt er umgekehrt analytische Ausdrücke an, welche derartige Unstetigkeiten aufweisen. Ich bringe hiervon nur folgendes Beispiel[1]). Sei

$$z = g + kx + \left(\frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{1-\frac{x}{a}}} + \frac{1}{1 + F\left[\frac{y}{a}\right]^{\frac{x}{b}-1}}\right)\sqrt{(x-a)(b-x)},$$

wo $a < b$. Charles untersucht diese Gleichung für den Fall

$$F\left(\frac{y}{a}\right) = 0.$$

Für $a < x < b$ sind $1 - \frac{x}{a}$ und $\frac{x}{b} - 1$ beide negativ und die Gleichung reduziert sich auf $z = g + kx$. Liegt hingegen x außerhalb dieses Intervalls, so ist eine von den Differenzen $1 - \frac{x}{a}$ und $\frac{x}{b} - 1$ positiv, die andere negativ, die Gleichung reduziert sich auf

$$z = g + kx + \sqrt{(x-a)(b-x)};$$

dieser Ausdruck ist aber dann imaginär. Die Schnittlinie der Ebene $F\left(\frac{y}{a}\right) = 0$ mit der gegebenen Fläche ist demnach ein Geradenstück mit der Gleichung $z = g + kx$, wenn x von a bis b läuft. Analog läßt sich eine Fläche angeben, die mit $F\left(\frac{y}{a}\right) = 0$ ein Geradenstück $z = g' + k'x$ gemeinsam hat, wenn x von b bis c läuft. Das Produkt all der erwähnten Gleichungen stellt schließlich eine Fläche dar, von der $F\left(\frac{y}{a}\right) = 0$ einen gebrochenen Linienzug ausschneidet. Einzelne Punkte stellt Charles analytisch dar, indem er sie als isolierte Punkte von Kurven auffaßt.

[1]) Mémoires de mathématique et de physique présentés par divers Savans, t. X, 1785, p. 586.

Als ganz entschiedener Anhänger Eulers ist endlich Monge zu nennen, der von geometrischen Überlegungen geleitet wird. In einem Aufsatz über die Bestimmung der willkürlichen Funktionen einiger partieller Differentialgleichungen[1]) zeigt er, daß dies Problem bei gegebenen Anfangsbedingungen auch auf rein geometrischem Wege durch Konstruktion der Integrale behandelt werden kann. Da ergibt sich denn, daß unter Umständen diese Konstruktion, m. a. W. die geometrische Lösung des Problems noch einen Sinn behält, wenn jene willkürlichen Funktionen wegen auftretender Unstetigkeiten in den Anfangsbedingungen nicht mehr angebbar (inassignable)[2]) geworden sind (vgl. auch oben S. 561). So ist ihm z. B. die Aufgabe, die willkürliche Funktion φ in der Gleichung $Z = \varphi\{V(x,y)\}$ zu bestimmen, wenn für ein gegebenes $y = \Delta(x)$ gleichzeitig $z = \psi(x)$ sein soll, identisch mit der Forderung, diejenige Fläche einer gewissen Flächenfamilie zu finden, welche durch eine gewisse Raumkurve, nämlich $y = \Delta(x)$ und $z = \psi(x)$, hindurchgeht. Die betreffende Konstruktion wird sehr anschaulich und einfach durch Einführung der Schar von Zylinderflächen

$$V(x, y) = b,$$

welche auf der gesuchten Fläche eine Schar von ebenen Kurven ausschneidet. Monge geht im folgenden zu Integralgleichungen mit mehreren willkürlichen Funktionen über, immer an einzelnen speziellen Aufgaben rechnerisches und konstruktives Verfahren erprobend. Dies ist übrigens nicht der erste Aufsatz von Monge über diesen Gegenstand[3]), und auch später ist er wiederholt darauf zurückgekommen.[4]) Er bringt indessen nichts wesentlich Neues mehr; zu den schwierigeren späteren Aufgaben gehört z. B. folgende[5]): Sei $z = \varphi(U) + \psi(V)$, wo U und V gegebene Funktionen von x und y sind; es sollen φ und ψ so bestimmt werden, daß für $y = Fx$ von selbst $z = fx$ und für $y = F'x$ analog $z = f'x$ wird. Die Schwierigkeiten der Konstruktion von $z = M + N\varphi(V) + P\psi(W) + \cdots$ kann er nicht allgemein überwinden[6]); die Konstruktion gelingt ihm nur, wenn die willkürlichen Funktionen alle das nämliche Argument besitzen. Im ersten Fall wird Monge zu Differenzengleichungen geführt (vgl. S. 1051). Im Supplement zur Applikation kommt er endlich noch einmal auf diese Aufgaben zu sprechen.

Die Bestimmung der willkürlichen Funktionen unter gegebenen

---

[1]) Miscellanea Taurinensia V[2], 1770—1773, p. 16 ff. [2]) Ebenda, p. 21.
[3]) Vgl. ebenda, p. 18: dans un mémoire précédent. [4]) Mémoires présentés par divers Savans, t. VII[2], 1773 (1776), p. 267 ff. Vgl. auch p. XIII der Vorrede.
[5]) Ebenda, p. 306. [6]) Ebenda, t. IX (1780), p. 345 ff. Der Aufsatz wurde 1774 der Akademie vorgelegt.

Anfangsbedingungen tritt noch viel häufiger in der mathematischen Physik auf, und hier hat Euler für eine Reihe spezieller Probleme die Aufgabe rechnerisch gelöst. Die Erfüllbarkeit der gegebenen Anfangsbedingungen schien, auch wenn sie in analytischer Form vorlagen, gemäß ihrer geometrisch-physikalischen Bedeutung bei allen derartigen Problemen schon von vornherein gesichert und wurde deshalb nie Gegenstand besonderer Untersuchungen.

Im Anschluß daran behandeln wir einen interessanten Fall einer Randwertaufgabe bei d'Alembert.[1]) Vom Problem der schwingenden ungleichförmigen Saite ausgehend, kommt er zu der Gleichung

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \lambda X \cdot \zeta,$$

wo X eine gegebene positive Funktion von x bedeutet. Er fragt nun, ob man den Parameter λ so bestimmen kann, daß diese Gleichung eine Lösung zuläßt, welche in a und b verschwindet, ohne identisch zu verschwinden. Um diese Frage zu beantworten, führt er die obige Gleichung in eine Riccatische Gleichung über durch Einführung der neuen abhängigen Veränderlichen $z = \frac{y'}{y}$. Durch Untersuchung dieser Gleichung kommt er zu dem Resultat, daß die gewünschte Parameterbestimmung stets möglich ist, und zwar so, daß die betr. Lösung zwischen a und b nicht verschwindet. Daß es aber nur einen solchen Parameterwert gibt, wird nicht erwähnt, ebensowenig ist von den unendlich vielen Parameterwerten die Rede, welche man bekommt, wenn man Nullstellen zwischen a und b zuläßt.

Man hat ziemlich von allem Anfang an die Integrale in vollständige (bzw. allgemeine) und partikuläre unterschieden. Dazu kam dann später unser singuläres Integral hinzu.[2]) Endlich unterschied Lagrange bezüglich der Integrale partieller Differentialgleichungen zwischen vollständigem und allgemeinem Integral (vgl. indessen S. 969 und S. 972 Anm. 2).[3]) — Bezüglich des Integrals, das aus

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \quad b = \varphi(a), \quad \frac{dz}{da} + \frac{dz}{db}\varphi'(a) = 0 \text{ [4])}$$

---

[1]) Histoire de l'Académie de Berlin, t. XIX, 1763 (1770), p. 244. Nach dem Artikel „Randwertaufgaben bei totalen Differentialgleichungen" in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, II A 7 a, S. 439. [2]) Eine Definition des partikulären Integrals bei Euler, Institutiones calculi integralis, vol. I, sect. 2, cap. 4. Ferner bei Laplace, Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 174 (verdruckt statt 274), Definition des singulären Integrals bei Condorcet, ebenda, t. IV², 1766/69, p. 6 (solution particulière); siehe auch Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 7. [3]) Die Benennung der verschiedenen Arten von Integralen war jedoch beständigem Wechsel unterworfen. [4]) Wir haben bei den partiellen

durch Elimination von a und b hervorgeht, sagt Lagrange[1]), es sei beaucoup plus générale als das vollständige Integral und nennt es daher intégrale générale. Bald darauf[2]) sagt er, das allgemeine Integral schließe die vollständigen Integrale ein comme des cas particuliers. Lagrange beschäftigt sich auch mit dem Zusammenhang zwischen vollständigem und allgemeinem Integral und sucht letzteres im Falle der Differentialgleichung 2. Ordnung sowohl aus dem endlichen vollständigen Integral als aus ersten Integralen herzuleiten. Er zeigt dabei[3]), daß das allgemeine Integral dieser Gleichung viel leichter aus den beiden vollständigen ersten Integralen als aus dem vollständigen endlichen Integral entwickelt werden kann und sucht deshalb aus dem letzteren auf das erste Integral zu schließen. Durch Einführung der partiellen Differentialquotienten 1. Ordnung geht aber aus der vollständigen Integralgleichung mit 5 willkürlichen Konstanten im allgemeinen eine Gleichung mit 3 Konstanten hervor, die nicht als erstes Integral der ursprünglichen Gleichung angesehen werden kann, da ein solches nur zwei Konstanten besitzen darf.[4]) Doch kann man durch geschickte Kombination der einzelnen Gleichungen in speziellen Fällen eine Gleichung mit bloß zwei Konstanten erhalten, wie Lagrange an einigen Beispielen zeigt.

Auch Monge beschäftigte sich[5]) mit der Aufsuchung erster Integrale besonders für Differentialgleichungen, von denen zu seiner Zeit wohl das endliche, aber nicht das erste Integral bekannt war; von den Zwischenintegralen einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung verlangt er[6]): sie dürfen keine Differentiationen 2. Ordnung aufweisen, müssen aber dafür eine willkürliche Funktion enthalten und sich durch einmalige totale Differentiation der Integralgleichung und nachfolgender Elimination einer der zwei willkürlichen Funktionen samt ihrer Derivierten ergeben. J. Trembley (1749—1811) kommt gelegentlich[7]) auf die Ergebnisse von Monge zu reden und spricht dessen Gleichungen den Charakter von ersten Integralen ab.

Differentialgleichungen die Schreibweise des Originals durchweg beibehalten, weil die sehr verschiedenartigen Manieren in der Bezeichnung das Suchen nach einer vorteilhaften Schreibweise am besten erkennen lassen. Lagrange deutet wie dies zum Teil noch heute üblich ist, die partielle Differentiation nicht besonders an.

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 74. Dieser Aufsatz stammt aus den Memoiren der Berliner Akademie für 1774. [2]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 88. [3]) Ebenda, p. 101. [4]) Ebenda, p. 104. [5]) In seinem großen Aufsatz über Differentialgleichungen in der Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), der unten eingehend besprochen wird. [6]) Ebenda, p. 135. [7]) Nova Acta Academiae Petropolitanae. t. XI, 1793 (1798), p. 79.

Eine gemischte Form des Integrals, die neben willkürlichen Funktionen auch eine Integrationskonstante a enthält, will Monge zulassen.[1]) Die Gleichung

$$z = \varphi\left[ax - y + \psi(bx - y)\right]$$

ist Integral von

$$\frac{\partial z}{dy}\frac{\delta\delta z}{dx^2} - \left[\frac{\delta z}{dx} - b\frac{\partial z}{dy}\right]\frac{\delta\partial z}{dxdy} - b\frac{\delta z}{dx}\frac{\partial\partial z}{dy^2} = 0^{2)}.$$

Schließlich darf nicht unerwähnt bleiben, daß Laplace auf die Existenz trivialer Lösungen einer Differentialgleichung hingewiesen hat, die nicht als Integrale zu betrachten sind.[3]) So wird

$$\mu M\partial x + \mu N\partial y = 0$$

durch $\mu = 0$ erfüllt; aber die „eigentliche" Lösung muß die Gleichung $\partial y = p\partial x$ erfüllen, wo p eine Funktion von x und y ist. Eine genaue Definition, was als Integral zu gelten hat und was nicht, läßt sich bekanntermaßen bei Verwendung Monge-Liescher Vorstellungen in besonders anschaulicher Weise geben.

Von größter Wichtigkeit sind die Untersuchungen, die sich auf die Theorie der singulären Integrale beziehen. Clairaut[4]) und Euler fanden auf diesem Gebiet zunächst keine Nachfolger; dieser leitet 1768 für Gleichungen 1. Ordnung ein allerdings wenig allgemeines Kriterium ab, durch das ein partikuläres Integral von einem singulären unterschieden werden kann, ohne daß das vollständige Integral der Gleichung bekannt ist. D'Alembert fügt in einer Abhandlung aus dem Jahre 1769[5]) wenig Neues hinzu; höchstens kann man sagen, daß er Eulers Überlegung strenger und schärfer macht. Erst Laplace faßt 1772 das Problem bedeutend weiter. Er verlangt ein für Gleichungen beliebiger Ordnung mit beliebiger Variabelnzahl geltendes, dem Eulerschen ähnliches Kriterium; außerdem stellt er die Forderung, es sollen sämtliche singuläre Integrale einer gegebenen Differentialgleichung angegeben werden. Durch Laplaces Arbeit angeregt, nimmt endlich Lagrange 1774 das Problem von neuem vor; er erkennt als erster die wahre Natur des singulären Integrals und seinen Zusammenhang mit dem vollständigen Integral. Die dar-

[1]) Mémoires présentés par divers Savans 1773 (1776), p. 322. Auf eine ähnliche Form des Integrals bei Monge (Mémoires de Turin, t. V, p. 52) kommt Trembley eingehend zu sprechen in Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XIII, 1795/96 (1802), p. 134. [2]) Wegen der Schreibweise vgl. S. 1012 u. 1019. [3]) Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 344. [4]) Vgl. diese Vorl., III², S. 889. [5]) Histoire de l'Académie des Sciences 1769 (1772), p. 85 ff.

auf gegründete Methode zur Bestimmung der singulären Integrale durch Elimination der Konstanten der Integralgleichung ist der Laplaceschen Herleitung an Eleganz, Sicherheit und Leichtigkeit der Handhabung bedeutend überlegen und hat deshalb das ältere Verfahren vollständig verdrängt. Die zweite, schon von Clairaut und Euler geübte Methode wiederholter Differentiation, die nicht vom Integral, sondern von der Differentialgleichung ausgeht, besitzt Lagrange ebenfalls, auch gibt er erweiterte Kriterien. Endlich behandelt er die geometrische Deutung des singulären Integrals als Enveloppe einer Kurvenschar[1]), und ist der Ansicht, daß im allgemeinen ein singuläres Integral vorhanden ist. Daß ein Ort der Spitzen oder anderer Singularitäten auftreten kann, ist ihm dabei entgangen; ebensowenig weiß er, daß es Integrale gibt, die zugleich partikulär und singulär sind, d. h. geometrisch gesprochen, daß ein Zweig der Enveloppe zu den Kurven der Schar gehören kann. 1774 dehnt Lagrange seine Untersuchungen auf Differentialgleichungen höherer Ordnung und partielle Differentialgleichungen aus; endlich sind noch die Arbeiten von Trembley[2]) und Legendre zu erwähnen.

Wir können uns nicht versagen, näher auf die Aufsätze von Euler, Laplace, Lagrange und Legendre einzugehen. Euler sucht[3]), wie schon erwähnt, ein Kriterium, das gestattet, ein singuläres oder partikuläres gegebenes Integral als solches zu erkennen. In gewohnter Weise geht er allmählich von einfachen Fällen zu schwierigeren über. So kommt er unter der Voraussetzung, das vollständige Integral laute $y = C + P$, zu dem Schlusse, daß L für $x = a$ nicht unendlich werden darf, wenn $x = a$ partikuläres und nicht singuläres Integral von $dy = \frac{dx}{L}$ sein soll. Es ist dabei natürlich angenommen, daß $x = a$ die letztgenannte Differentialgleichung befriedigt. Er untersucht noch weitere Fälle, wie

$$dy = \frac{P\,dx}{\sqrt{S}} \quad \text{und} \quad dy = \frac{P\,dx}{\sqrt[n]{S^m}},$$

und bildet an ihnen folgende Untersuchungsmethode heraus[4]): Sei

$$dy = \frac{P\,dx}{Q},$$

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 88. Die Deutung des singulären Integrals partieller Differentialgleichungen: ebenda, p. 67. [2]) Mémoires de l'académie royale des sciences de Turin 1790/91. Ferner Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1792/93 (1798), p. 341—416. Vgl. unten S. 908. [3]) Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 393. [4]) Ebenda, p. 402.

wo Q für $x=a$ verschwindet, P aber nicht. Man setze $x=a\pm\omega$, und „betrachte ω als unendlich klein", so wird Q die Form $R\omega^\lambda$ annehmen; $x=a$ wird dann immer partikuläres Integral sein, außer wenn $\lambda<1$. Als Beispiel gibt er:

$$dy=\frac{dx}{\sqrt{\left(1+\cos\frac{\pi x}{a}\right)}},$$

wo sich der Nenner für $x=a-\omega$ bei sehr kleinem ω auf $\frac{\pi\omega}{a\sqrt{2}}$ reduziert, wie durch Reihenentwicklung unmittelbar zu sehen ist. Hier ist $\lambda=1$; hätte man aber statt der Quadratwurzel eine dritte Wurzel im Nenner, so wäre offenbar $\lambda<1$. Im folgenden gibt Euler die naturgemäße Erweiterung dieser Regel für Differentialgleichungen der Form $\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}$, wo X und Y Funktionen von x bzw. y allein sind, und geht endlich[1]) zu dem Fall $Pdx=Qdy$ über, wo P und Q irgendwelche Funktionen von x und y sind. Dieser Gleichung genüge die endliche Auflösung $y=X$, wo X eine Funktion von x allein. Euler sagt, man ersetze in der gegebenen Differentialgleichung y durch $X+\omega$ und bestimme $\frac{d\omega}{dx}$ für unendlich kleine ω. Es wird $\frac{d\omega}{\omega^\lambda}=Sdx$ werden, und $y=X$ ist ein Integral oder nicht, je nachdem $\lambda\geqq 1$ oder $\lambda<1$. Nach dieser Ausdrucksweise sieht es fast so aus, als ob Euler die singulären Integrale nicht als Integrale gelten lassen wollte; Namen hat er keinen dafür. Die oben beschriebene Methode führt z. B. bei

$$a\,dy-a\,dx=dx\sqrt{(yy-xx)},$$

wo $X=x$, auf

$$a\frac{d\omega}{\sqrt{\omega}}=dx\sqrt{2x},\quad\text{d. i.}\quad\lambda=\frac{1}{2}.$$

Hieran knüpft Euler die weitere Bemerkung[2]): das Integral der gegebenen Differentialgleichung ist:

$$2a\sqrt{\omega}=C+\frac{2}{3}x\sqrt{2x},$$

wo ω nach Voraussetzung unendlich klein ist. Es wird aber, heißt es weiter, wie man auch die Konstante C bestimmen mag, ω einen endlichen Wert erhalten, woraus notwendig folgt, daß die Gleichung $y=x$ kein Integral sein kann.

Auf diese Abhandlung Eulers weist Laplace hin und sagt, sie

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 408. [2]) Ebenda, p. 411.

habe den Anstoß zu seinen eigenen Untersuchungen gegeben[1]). Zunächst schafft er das, was **Euler** fehlt, nämlich eine besondere Benennung für die singulären Integrale. Er definiert allgemein als „solution"[2]) jede Gleichung, die eine gegebene Differentialgleichung befriedigt, behält aber dann diesen Ausdruck mit dem Beiwort „particulière" speziell für unser singuläres Integral und spricht im Gegensatz dazu von einem „intégrale particulière" bzw. „générale" (auch „résolution complète"). Sodann stellt sich **Laplace** die Aufgabe: Eine Lösung von $\delta y = p\delta x$ ist bekannt; man soll feststellen, ob sie im allgemeinen Integral enthalten ist oder nicht, ohne dieses zu kennen. **Laplace** geht von der geometrischen Versinnlichung der Integralgleichung aus. $\mu = 0$ sei die gegebene Lösung, $\varphi = 0$ das unbekannte vollständige Integral. Man konstruiere die Kurve HCM mit der Gleichung $\mu = 0$ und diejenige Kurve $\varphi = 0$, welche durch einen gegebenen Punkt C von HCM geht. Heißt sie LCN, so ist also LCN Repräsentantin eines partikulären Integrals. Ist nun $\mu = 0$ im allgemeinen Integral enthalten, so muß, behauptet **Laplace**, HCM Punkt für Punkt mit LCN zusammenfallen.

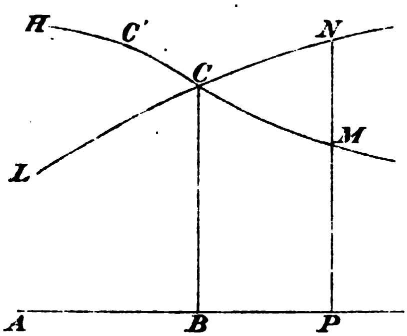


Fig. 100.

Indem er jetzt die Ordinaten von LCN mit Y, die zugehörigen Differentiale mit ∂, die Ordinaten von HCM mit y, die Differentiale mit δ bezeichnet und Y und y für die Umgebung des Punktes C nach der **Taylorschen** Reihe entwickelt, erhält er als Bedingung für das Zusammenfallen beider Kurven, d. i. als Bedingung dafür, daß HCM, also $\mu = 0$, ein partikuläres Integral ist, folgendes System von Gleichungen:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad \frac{\delta^3 y}{\delta x^3} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

usw. Diese Relationen sind zunächst nur für den Punkt C, d. i. für ein bestimmtes Wertepaar x, y abgeleitet; nimmt man aber einen anderen Punkt C' der Kurve HCM, deren Zugehörigkeit zu den partikulären

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 343. Vgl. auch die Zusätze p. 641 und die Histoire desselben Jahres, p. 67 ff. Ferner eine bereits früher veröffentlichte Notiz am Schlusse eines Aufsatzes über Wahrscheinlichkeitsrechnung in den Mémoires présentés par divers Savans, t. VI (1774), p. 654. Daselbst ist noch auf einen Aufsatz in den Actes de Leipsic für 1771 hingewiesen, der indessen nach **Laplaces** eigenem Zugeständnis Fehlerhaftes enthält. [2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 344.

oder singulären Kurven in Frage steht, und legt durch C die entsprechende partikuläre Kurve[1]), so erhält man dieselben Bedingungen; demnach müssen letztere, wenn HCM ein partikuläres Integral darstellen soll, für jedes x giltig sein.

Nun lassen sich aber die ∂-Derivierten aus der gegebenen Differentialgleichung leicht bilden; man erhält nämlich der Reihe nach:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = p; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) \cdot p \quad \text{usw.}^{2)}:$$

p ist hierbei eine gegebene Funktion von x und y. Andererseits können auch die δ-Derivierten aus der bekannten Gleichung der Kurve HCM erhalten werden.

Laplace bemerkt sodann, daß natürlich die Gleichung

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$$

von selbst schon erfüllt ist; hierauf geht er zu subtileren Untersuchungen über, deren Gang und Ergebnisse hier nur kurz angedeutet werden können. Er formt zunächst die ursprüngliche Differentialgleichung so um, daß der Buchstabe μ der gegebenen Integralgleichung $\mu = 0$ darin auftritt, und erhält schließlich die Gleichungen:

$$\partial \mu = \mu^n \cdot h \partial x$$

oder unter gewissen Voraussetzungen

$$-\mu^n q \partial x = \frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\right)} \partial x + \partial y,$$

wo h immer endlich, solange $\mu = 0$. Diese Gleichung gibt er als Kriterium für den Charakter von $\mu = 0$: im Falle $n \geqq 1$ handelt es sich um ein partikuläres, im Falle $n < 1$ um ein singuläres Integral. So liefert die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{y - \sqrt{(xx + yy - aa)}}$$

mit dem Integral

$$\mu = xx + yy - aa = 0$$

unschwer

$$\mu^n q = \frac{x}{y - \sqrt{(xx + yy - aa)}} - \frac{x}{y} = \mu^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\frac{x}{yy - y\sqrt{(xx + yy - aa)}}\right]$$

---

[1]) Man beachte, daß Laplace nur immer einzelne Integralkurven LCN und nie die ganze Schar ins Auge faßt, was ihn wahrscheinlich zu tieferer Einsicht in das Wesen der singulären Lösungen geführt hätte. [2]) Die Klammern bedeuten, wie immer, partielle Differentiation.

Da $n = \frac{1}{2} < 1$, so ist das Integral ein singuläres. Die ganze Darstellung hat vor der Eulerschen den Vorzug, daß sie nicht mit bloßen Worten geschildert, beschrieben, sondern mit den Symbolen p, μ, ∂ usw. wirklich rechnerisch durchgeführt ist. Beide Gedankengänge betonen in gleicher Weise das Endlichbleiben oder Unendlichwerden gewisser im Lauf der Untersuchung auftretender Ausdrücke. Im folgenden[1]) zeigt Laplace, daß μ, wenn $\mu = 0$ ein singuläres Integral von $\partial y = p\partial x$ sein soll, gemeinschaftlicher Faktor von

$$p + \frac{\left(\frac{\partial \partial p}{\partial x \partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \partial p}{\partial y^2}\right)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}$$

ist. Dieses Theorem verwertet er zur Bestimmung der singulären Integrale, wenn nur die Differentialgleichung gegeben ist. Er behandelt speziell den Fall, daß μ eine Funktion von x oder y allein ist. Endlich geht Laplace zu Differentialgleichungen 2. Ordnung und zu solchen mit 3 Variabeln über, welche die Integrabilitätsbedingungen erfüllen. Als Kriterium für die Natur eines Integrals $\mu = 0$ der Gleichung $dz = pdx + qdy$ gibt er die Regel: man bilde

$$\partial \mu = -\mu^n \cdot K \cdot \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) \partial x - \mu^{n'} \cdot K \cdot \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right) \partial y;$$

je nachdem der kleinere der beiden Exponenten n und $n' \gtreqless 1$ oder < 1 ist, hat man ein partikuläres oder singuläres Integral vor sich.[2])

Lagrange gibt zu Beginn seiner Arbeit[3]) einen kurzen geschichtlichen Überblick über die Theorie der singulären Lösungen. Er verweist auf Eulers Mechanik[4]) und Integralrechnung, auf d'Alembert, Condorcet und besonders Laplace. Er definiert sodann intégrale particulière als unser singuläres Integral und verlangt ausdrücklich, daß es nicht durch Spezialisierung aus dem vollständigen Integral erhalten werde.[5]) Dann betrachtet er, in welcher Weise eine Integralgleichung $V(x, y, a) = 0$, wo a die Integrationskonstante bedeutet, einer Differentialgleichung

$$Z\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

Genüge leisten kann, m. a. W. wie die Differentialgleichung aus der

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 355.
[2]) Ebenda, p. 367. [3]) Oeuvres, t. IV, p. 5 ff. (Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1774.) [4]) Lagrange selbst zitiert t. II, Articles 268, 303, 335. [5]) Dies erkennt schon Euler, vgl. S. 887.

Integralgleichung entstehen könne. Die Gleichung $V = 0$ gibt durch Differentiation, sagt Lagrange, eine Gleichung

$$dy = p(x, y, a)dx,$$

und die Gleichung $Z = 0$ folgt hieraus und aus $V = 0$ durch Elimination von a. Hierbei ist der Wert von a vollkommen gleichgiltig. Das Resultat der Elimination wird immer dasselbe, nämlich $Z = 0$, bleiben, ob a konstant oder variabel ist, so lange nur die beiden Eliminationsgleichungen $V = 0$ und $dy = pdx$ heißen. Faßt man aber den Fall eines variabeln a ins Auge[1]), so erhält man aus $V = 0$ die Gleichung $dy = pdx + qda$, wo p und q Funktionen von x, y und a sind. Letztere Gleichung kann sich aber bei variablem a nur dann auf $dy = pdx$ reduzieren, wenn $q = 0$ ist. Der Wert von a aus

$$\frac{dy}{da} = q = 0^{2})$$

berechnet und in $V = 0$ substituiert, wird ein singuläres Integral geben. Desgleichen wird $\frac{dx}{da} = 0$ ein singuläres Integral liefern. Lagrange betrachtet auch den Fall, daß die Bestimmungsgleichungen für a dieses a entweder nur in Verbindung mit Konstanten oder überhaupt nicht enthalten: im ersten Fall, sagt er, haben wir kein eigentlich singuläres Integral, im zweiten wird eine besondere Prüfung notwendig sein. Den Fall $a = \frac{0}{0}$ weist er als unbrauchbar zurück.

Nach dieser Voruntersuchung fragt er nach einer Methode, welche die singulären Integrale ohne Kenntnis des vollständigen Integrals zu finden gestattet. Er weist zunächst darauf hin, daß die singulären Integrale einer Differentialgleichung Integrale der aus diesen abgeleiteten Differentialgleichungen nur unter besonderen Bedingungen sind, was für die Integrale einer auf niedrigere Ordnung reduzierbaren Differentialgleichung höherer Ordnung von großer Wichtigkeit ist. So hat z. B. die Gleichung $xdx + ydy - dy\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0$ ein singuläres Integral $x^2 + y^2 - b^2 = 0$; letzteres ist aber kein Integral der Differentialgleichung 2. Ordnung $xd^2y - dydx = 0$, von der jene Gleichung 1. Ordnung erstes Integral ist.[3]) Lagrange zeigt dann, daß, wenn die erwähnten Bedingungsgleichungen

---

[1]) Lagrange macht in der Bezeichnung totaler und partieller Differentialquotienten keinen Unterschied. [2]) Schon Euler läßt den Parameter einer Integralgleichung nachträglich variieren (vgl. S. 925). [3]) Diese etwas ungewöhnliche Form erhält man aus dem ersten Integral, wie es sich zunächst ergibt, bei Benutzung des vollständigen Integrals.

$$\frac{dy}{da} = 0; \quad \frac{d^2y}{dx\,da} = 0; \quad \frac{d^3y}{dx^2\,da} = 0; \ldots$$

(und analog, wenn x mit y vertauscht wird) alle bis ins Unendliche erfüllt sind, d. h. wenn das in Frage kommende Integral sämtliche aus $Z = 0$ durch Differentiation hervorgehenden Gleichungen befriedigt dieses Integral kein singuläres, sondern nur ein partikuläres Integral ist. Für den Fall eines singulären Integrals dürfen also diese Gleichungen nur bis zu einer bestimmten erfüllt sein; wie bei Laplace ist der Charakter eines partikulären Integrals von unendlich vielen Bedingungsgleichungen abhängig gemacht.

Diese Bemerkung dient nun als Grundlage zu der folgenden Untersuchung, welche die Bestimmung der singulären Integrale unmittelbar aus der gegebenen Differentialgleichung bezweckt. Lagrange sagt: da Z die Größe a nicht enthält, so ist zunächst $\frac{dZ}{da} = 0$. Nun kann aber das in Z auftretende y gemäß der Gleichung $V = 0$ als Funktion von x und y angesehen werden; es ist demnach

$$\frac{dZ}{da} = A \cdot \frac{d^2y}{dx\,da} + B\frac{dy}{da} = 0.$$

Handelt es sich jetzt um ein singuläres Integral, so ist fernerhin

$$\frac{dy}{da} = 0,$$

und es ergibt sich

$$A\,\frac{d^2y}{dx\,da} = 0,$$

da B unter der Voraussetzung, daß Z eine ganze rationale Funktion von x und $\frac{dy}{dx}$ ist, nicht unendlich werden kann. Für den Fall, daß $\frac{d^2y}{dx\,da} = 0$ ist, betrachtet Lagrange die höheren Ableitungen. Er kommt zu dem Ergebnis, daß dann $A\frac{d^3y}{dx^2da}$ usw. gleich Null sein müssen. Da aber das Nullsein sämtlicher derivierten $\frac{dy}{da}, \frac{d^2y}{dx\,da}, \ldots$ nach dem Obigen den Charakter eines partikulären Integrals anzeigen würde, so folgert Lagrange, daß für ein singuläres Integral $A = 0$ sein muß. Da aber

$$dZ = A \cdot d\frac{dy}{dx} + Bdy + Cdx = 0,$$

so folgt

$$Bdy + Cdx = 0;$$

d. h. im Falle des singulären Integrals muß der aus $Z = 0$ abgeleitete Wert

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{B\frac{dy}{dx}+C}{A} = \frac{0}{0}$$

werden, und diese Gleichung wird umgekehrt als Bedingung für das Auftreten eines singulären Integrals hingestellt. Sie liefert zwei Gleichungen, die mit $Z=0$ simultan bestehen müssen.

Nach der geometrischen Deutung des singulären Integrals als Enveloppe wendet sich Lagrange zu den totalen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Lautet die Integralgleichung wieder $V=0$, wo V eine Funktion von x, y und den Integrationskonstanten a und b ist, so faßt Lagrange die Größe b zunächst als willkürliche Funktion von a auf. Die Bedingungen für das Vorhandensein eines singulären Integrals $\frac{dy}{da}=0$ und $\frac{d^2y}{dx\,da}=0$ verwandeln sich dann in

1. $$\frac{dy}{da}+\frac{dy}{db}\cdot\frac{db}{da}=0 \quad\text{und}\quad \frac{d^2y}{dx\,da}+\frac{d^2y}{dx\,db}\cdot\frac{db}{da}=0.$$

Durch Elimination von $\frac{db}{da}$ ergibt sich

2. $$\frac{dy}{da}\,\frac{d^2y}{dx\,db}-\frac{dy}{db}\,\frac{d^2y}{dx\,da}=0.$$

Es ist ferner

$$dy = p\,dx+\frac{dy}{da}\,da+\frac{dy}{db}\,db,$$

folglich

3. $$dy-p\,dx=0.$$

Dazu kommt noch die Integralgleichung

4. $$V=0.$$

Aus diesen vier Gleichungen sind a, b und $\frac{db}{da}$ zu eliminieren. Durch Vertauschung von x und y ergibt sich eine Reihe analoger Gleichungen.

Später[1]) gibt dann Lagrange eine Methode an, aus einem ersten Integral der gegebenen Differentialgleichung 2. Ordnung, also aus einer Differentialgleichung 1. Ordnung das singuläre Integral der ursprünglichen Gleichung zu ermitteln, die dem Verfahren, das singuläre Integral einer Differentialgleichung 1. Ordnung aus deren endlichem Integral herzuleiten, völlig analog ist. Die Methode läßt sich auf Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung übertragen.[2])

Wichtiger sind die Untersuchungen über die singulären Integrale partieller Differentialgleichungen. Die zu einer Integralgleichung

---

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 53. [2]) Ebenda, p. 59.

$$V(x, y, z, a, b) = 0$$

gehörige partielle Differentialgleichung $Z = 0$ entsteht nämlich durch Elimination von a und b aus den Gleichungen

$$V = 0; \quad \frac{dz}{dx} - p = 0; \quad \frac{dz}{dy} - q = 0,$$

wo p und q Funktionen von x, y, z, a und b sind. Das Resultat dieser Elimination wird dasselbe sein, ob a und b konstant sind oder nicht, wenn nur die drei Gleichungen, aus denen a und b eliminiert werden sollen, dieselben sind. Dazu ist aber im Fall variabler a und b das Bestehen der Gleichung $rda + sdb = 0$ notwendig, wie sich aus $dz = pdx + qdy + rda + sdb$ ergibt. Die einfachste Manier, dieser Gleichung Genüge zu leisten, sagt Lagrange, besteht darin, daß man getrennt $r = 0$ und $s = 0$ setzt. Während Lagrange soeben r und s für sich gleich Null setzte, leistet er der Gleichung $rda + sdb = 0$ im folgenden allgemeiner dadurch Genüge, daß er die Existenz einer Relation zwischen a und b annimmt und demzufolge $b = \varphi(a)$ setzt. So wird er, von der Theorie der singulären Integrale ausgehend, wieder zum allgemeinen Integral geführt. Um das singuläre Integral aus der Differentialgleichung selbst zu ermitteln, gibt Lagrange[1]) folgende Regel: Differentiiert man die Gleichung $Z = 0$, so erhält man

$$Md\frac{dz}{dx} + Nd\frac{dz}{dy} + Pdx + Ldy = 0,$$

wo M, N, P, L ganze Funktionen von $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ sind, denn dz kann vermöge der Relation

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

immer eliminiert werden. Man setze jetzt M, N, P, L jedes für sich gleich Null, was mit $Z = 0$ nach Elimination von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ drei Gleichungen in x, y, z gibt, die gleichzeitig statthaben müssen. Besitzen sie einen gemeinschaftlichen Faktor, so ist dieser als das gesuchte singuläre Integral anzusehen. Reduziert sich dZ auf

$$Ad\frac{dz}{dx} + Bd\frac{dz}{dy} = 0,$$

so hat man nur die drei Gleichungen $Z = 0$, $A = 0$, $B = 0$, die immer ein singuläres Integral liefern. Durch Besprechung dieses Falles kommt er zu der Einsicht, daß dann das vollständige Integral

[1]) Oeuvres de Lagrange. t. IV, p. 71.

$$Z = ax + by + f(a, b)$$

und die gegebene Differentialgleichung

$$Z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right)$$

sein muß. Auf die Ähnlichkeit mit der Clairautschen totalen Gleichung ist bei Lagrange nicht hingewiesen.

Weiterhin[1]) zeigt Lagrange, daß das singuläre Integral nicht im allgemeinen Integral enthalten ist, an einem speziellen, in alle Lehrbücher übergegangenen Beispiel und geht dann auf die geometrische Interpretation der Integrale partieller Differentialgleichungen ein. Die durch das singuläre Integral dargestellte Fläche, sagt er, berührt alle im vollständigen Integral enthaltenen Flächen; die durch das allgemeine Integral bei Wahl eines bestimmten Wertes der willkürlichen Funktion φ dargestellte Fläche berührt nur jene Flächen des vollständigen Integrals, welche bei der speziellen Annahme $b = \varphi(a)$ herausgegriffen werden.

Auch über die singulären Integrale partieller Gleichungen 2. Ordnung macht Lagrange einige Angaben; um das singuläre Integral aus dem vollständigen Integral $V = 0$ zu finden, gibt er folgende Regel an[2]): Man lasse in den Gleichungen

$$V = 0; \quad \frac{dz}{dx} = p; \quad \frac{dz}{dy} = q$$

die fünf Integrationskonstanten a, b, c, g, h variieren und halte währenddessen x, y und z konstant, setze dV, dp und dq gleich Null und eliminiere aus diesen drei Gleichungen zwei der fünf Differentiale da, db, dc, dg, dh. Endlich setze man in der Eliminationsgleichung die Koeffizienten der übrigen drei Differentiale gleich Null. Bei Kombination mit den oben angeführten drei Gleichungen

$$V = 0; \quad \frac{dz}{dx} - p = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} - q = 0$$

erhält man durch Elimination der Integrationskonstanten a, b, c, g, h eine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, die als singuläres Integral der gegebenen Gleichung 2. Ordnung aufzufassen ist. Ist hingegen die Differentialgleichung allein, nicht aber ihr Integral gegeben, so bilde man das vollständige Differential der gegebenen Gleichung in der Form

$$Md\frac{d^2z}{dx^2} + Nd\frac{d^2z}{dy^2} + Pd\frac{d^2z}{dxdy} + Qdx + Rdy = 0$$

---

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 79. [2]) Ebenda, p. 91

und setze die Koeffizienten M, N, P, Q, R für sich gleich Null. So erhält man fünf Gleichungen, die mit der gegebenen Differentialgleichung zusammen bestehen müssen. Durch Elimination der drei partiellen Differentialquotienten 2. Ordnung erhält man simultane Gleichungen in $x, y, z, \frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$; ein gemeinschaftlicher Faktor derselben ist als singuläres Integral aufzufassen; der Spezialfall $Q=0$, $R=0$ ist wie bei der Gleichung 1. Ordnung von besonderem Interesse.

Lagrange charakterisiert den Unterschied zwischen seinen und den Arbeiten seiner Vorgänger mit den Worten[1]): „Ich habe zuerst die wahren Prinzipien dieser Theorie gegeben. Man hat Regeln mehr oder weniger allgemeiner Art aufgefunden, ein gegebenes Integral von vornherein als singuläres oder partikuläres zu erkennen, auch für die Auffindung der singulären Integrale sind Regeln entdeckt worden. Aber niemand hat meines Wissens den Ursprung dieser Integrale entwickelt.“ Das berechtigte Selbstbewußtsein, den freudigen Stolz dieser Worte wird wohl jeder nachfühlen, der Gelegenheit hat, den Entwicklungsgang der Theorie aus den Originalarbeiten selbst kennen zu lernen.

Legendre kommt zu seinen Resultaten durch Benutzung des Prinzips, daß das singuläre Integral immer weniger willkürliche Konstanten enthält als das vollständige; er stellt diese Eigenschaft als Fundamentalsatz an die Spitze seiner Abhandlung. Von diesem Theorem aus gelangt er folgendermaßen zur Bestimmung der singulären Integrale aus der Differentialgleichung[2]): sei ein Wert von y, welcher der Gleichung genügt, bekannt, ein benachbarter Wert $y+\delta y$ gesucht. Zu diesem Zweck variiere man, sagt Legendre, in der gegebenen Gleichung von der Ordnung n bei konstantem x die Größen $y, \frac{dy}{dx}, \frac{ddy}{dx^2}, \ldots$ und man wird wegen der Relationen

$$\delta dy = d\delta y, \quad \delta ddy = dd\delta y \quad \text{usw.}$$

eine lineare Gleichung der Form

$$A\frac{d^n\delta y}{dx^n} + B\frac{d^{n-1}\delta y}{dx^{n-1}} + \cdots + T\delta y = 0$$

erhalten, die als Differentialgleichung für δy aufgefaßt werden kann. Nun läßt sich aber die Form dieser Größe δy aus der Integralgleichung erschließen; differentiiert man diese nämlich, indem man die

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 585. [2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1790 (1797), p. 222.

Integrationskonstanten $a, b, c, \ldots$ variieren läßt, so ergibt sich eine Beziehung:

$$\delta y = \frac{d\varphi}{da}\delta a + \frac{d\varphi}{db}\delta b + \frac{d\varphi}{dc}\delta c + \cdots + .$$

Diese Gleichung ist aber nach Legendres Auffassung das Integral der vorerwähnten linearen Differentialgleichung für δy; die Größen $\delta a, \delta b, \delta c, \ldots$ sind hierbei die Integrationskonstanten. Wenn nun y ein vollständiges Integral ist, wird die Zahl der Größen $a, b, c, \ldots$ gleich n sein, δy enthält demnach ebenfalls n Integrationskonstanten, und die Differentialgleichung für δy wird n^{ter} Ordnung. In diesem Falle kann der Koeffizient A von $\frac{d^n \delta y}{dx^n}$ niemals Null sein. Im Fall des singulären Integrals hingegen enthält y und damit δy höchstens $n - 1$ Konstante, die Differentialgleichung für δy wird deshalb höchstens $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; es muß also jedenfalls $A = 0$ sein, wobei außerdem auch die Relationen $B = 0$, $C = 0, \ldots$ bestehen können. So liefert die Differentialgleichung

$$y^2 \frac{dy^2}{dx^2} + 2xy\frac{dy}{dx} + b^2 - y^2 = 0,$$

indem man y und $\frac{dy}{dx}$ variiert,

$$\left(y^2 \frac{dy}{dx} + xy\right)\delta\frac{dy}{dx} + \left(y\frac{dy^2}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - y\right)\delta y = 0.$$

Setzt man den Koeffizienten von $\delta\frac{dy}{dx}$ gleich Null, so kommt $y = 0$ und $y\frac{dy}{dx} + x = 0$. Letztere Gleichung gibt im Verein mit der vorgegebenen das singuläre Integral $y^2 + x^2 - b^2 = 0$.

Aus einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung[1]) erhält man durch Variation von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ nach Unterdrückung der Nenner eine Relation der Form

$$A\delta\frac{dz}{dx} + B\delta\frac{dz}{dy} + C\delta z = 0,$$

die als partielle Gleichung für δz aufgefaßt werden kann. Soll sie also ein singuläres Integral liefern, so müssen gleichzeitig $A = 0$ und $B = 0$ sein, da eine gegenteilige Annahme eine willkürliche Funktion in den Ausdruck für δz einführen würde. Bei partiellen Gleichungen 2. Ordnung kann das singuläre Integral höchstens eine einzige willkürliche Funktion besitzen, die partielle Gleichung für δz daher höchstens 1. Ordnung sein. Variiert man daher in der gegebenen Differentialgleichung die Größen

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1790 (1797), p. 236.

$$\frac{ddz}{dx^2},\quad \frac{ddz}{dxdy},\quad \frac{ddz}{dy^2},\quad \frac{dz}{dx},\quad \frac{dz}{dy},\quad z,$$

so müssen im Falle eines singulären Integrals außer der gegebenen Gleichung noch drei Relationen bestehen, die man durch Nullsetzen der Koeffizienten von

$$\delta\frac{ddz}{dx^2},\quad \delta\frac{ddz}{dxdy},\quad \delta\frac{ddz}{dy^2}$$

erhält.

Wir sahen im vorhergehenden — bei der Konstruktion willkürlicher Funktionen unter gegebenen Anfangsbedingungen durch Monge sowie bei der Theorie der singulären Integrale — wiederholt geometrische Vorstellungen zur Aufhellung der Theorie herangezogen. Man muß sich aber hüten, den Einfluß solcher Hilfsmittel auf die Entwicklung dieser Theorie zu überschätzen, zumal es sich um eine vorwiegend analytische Epoche der Mathematikgeschichte handelt. Monge kommt rückwärts von geometrischen Problemen aus zu seinen Differentialgleichungen und gewinnt durch Übersetzung erprobter Verfahren und Überlegungen geometrischer Natur in die Sprache der Analysis viele seiner rechnerischen Methoden; aber es ist ihm nicht umgekehrt darum zu tun, eine eigentliche geometrische Theorie der Differentialgleichungen und ihrer Integrale zu entwickeln, d. h. eine Theorie, welche in konsequenter Weise analytische Operationen durch geometrische Konstruktionen ersetzt. Und wenn es auch manchmal den Anschein hat, daß er Differentialgleichungen durch geometrische Überlegungen löst, so darf man doch sicher sein, daß er in allen diesen Fällen das Resultat schon vorher besessen und die betreffende Differentialgleichung erst nachträglich aufgestellt hat. Es finden sich demgemäß bei Monge Stellen genug, welche die geometrische Bedeutung gewisser Gleichungen anschaulich und klar machen, und die, zusammengetragen, eine geometrische Theorie der Differentialgleichungen liefern würden, aber Monge scheint selbst nicht an eine solche Zusammenstellung zu denken. Die bedeutendsten Überlegungen dieser Art vor dem Erscheinen der „Application de l'analyse à la géometrie" sind auf S. 561 ff. und S. 1037 ff. dargestellt. Schwierigere Probleme dieser Art, wie wir sie heutzutage behandeln, so die Frage nach der Gestalt der durch eine Differentialgleichung definierten Kurven, oder die Untersuchung einzelner Punkte und ihrer Umgebung werden naturgemäß überhaupt gar nicht aufgeworfen.

Wir wenden uns im folgenden zu den allgemeinen Methoden, welche dem Charakter des jeweiligen Problems angepaßt in veränderter Form auf die verschiedensten Gattungen von Differentialgleichungen Anwendung finden. Dabei ist auch einiger Versuche zu gedenken, einen unbedingt gangbaren Weg zu finden, auf dem sich alle Diffe-

rentialgleichungen, gleichviel welcher Beschaffenheit, integrieren lassen. Man möchte meinen, daß die Existenz von so vielen und dabei so verschiedenen Lösungsmethoden, die Leichtigkeit der Integration in den einen, die ungeheure Schwierigkeit in den anderen Fällen, es hätte wahrscheinlich machen müssen, daß eine einheitliche, unter allen Umständen zum Ziele führende Integrationsmethode nicht existiert; und dieser Vorwurf trifft den Marquis de Condorcet, der mit seinen zahlreichen Arbeiten sich das Lob der Zeitgenossen, wie Lagranges und d'Alemberts[1]) erwarb, aber doch gerade auf diesem seinem Lieblingsgebiete keine wirklich lebensfähige Integrationsmethode in Umlauf zu setzen wußte, in viel höherem Grade als den bedeutend früheren Fontaine (1705—1771), zu dessen Zeiten ein derartiger Versuch noch nicht so aussichts- und zwecklos erscheinen mußte als später. Fontaines Abhandlung von 1738 erschien erst 1764 im Druck[2]); sie enthält eine eigenartige, von der herkömmlichen abweichende Bezeichnungsweise, die mir, da ich das Original nicht zur Verfügung hatte, nicht recht verständlich wurde.[3]) Condorcet sucht das Integrationsgeschäft auf eine kanonische Reihe von Fundamentaloperationen, wie Differentiation, Elimination, Substitution usw. zurückzuführen[4]) und erläutert seine Methode an einigen einfachen Beispielen; es ist aber nicht recht einzusehen, was er mit seinen Spekulationen eigentlich will, bis wieweit er seine Behauptungen für richtig hält, und in welchem Umfang er seine Regeln für die Integration auch praktisch anwendbar und ausführbar ansieht; auf die Arbeiten der anderen Mathematiker sind gerade diese Untersuchungen Condorcets ohne allen Einfluß geblieben.

Sehen wir von unmittelbar integrablen Gleichungen, wie dem Fall separierter Wurzeln, oder anderen, durch Kunstgriffe zu behandelnden Gleichungen spezieller Form ab, so ist als eine der ältesten Integrationsmethoden allgemeinerer Art die Reduktion auf integrable oder wenigstens diskutable Gleichungen durch Einführung neuer Variabeln zu nennen. In der ersten Zeit war überhaupt mehr oder minder bewußt die Ansicht herrschend, daß in der Separation durch Anwendung von Substitutionen „die Integrationsmethode" zu erblicken sei. Bald dachte man kühler. Euler zeigt, daß alle Fälle, in denen Differentialgleichungen durch Trennung der Veränderlichen integriert werden können, auch mittels Multiplikator integrabel sind, aber nicht umgekehrt, und sieht deshalb im integrierenden Faktor die umfassen-

[1]) Vgl. Nouvelle Biographie générale über Condorcet. [2]) Vgl. diese Vorl., III^2, S. 883. [3]) Einiges bei Montucla, Histoire des Mathématiques, t. III, p. 187. [4]) Du calcul intégral 1765, Sect. II. Ferner Miscellanea Taurinensia, t. IV^2, 1766/69, p. 1 ff.

dere, allgemeinere Methode. Er weist ferner[1]) auf die Unmöglichkeit hin, bestimmte Prinzipien für die Auffindung von Substitutionen, die auf integrable Gleichungen führen, anzugeben, sowie auf das Versagen der Separationsmethode bei Differentialgleichungen höherer Ordnung. Die Auffindung von Substitutionen, welche Trennung der Variabeln ermöglichen, erfordert, wie er sagt[2]), nicht weniger Scharfsinn als die Integration selbst.

Wenn auch im allgemeinen bei einer beliebig gegebenen Differentialgleichung jene Transformationen, welche eine Integration, sei es durch vorgeschriebene Transzendenten, ermöglichen, nicht angegeben werden können, weil die Angabe dieser Transformationen mit der Integration der Gleichung selbst identisch wäre, so sind es doch Transformationsverfahren, welche, selbst wenn sie nicht auf integrable Typen führten, immer noch die theoretisch bedeutendsten Resultate zeitigten. Viele Methoden der Ordnungserniedrigung, die Eulersche und die Laplacesche Theorie der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung, die Theorie der Eulerschen homogenen partiellen Differentialgleichung, in gewissem Sinne auch die Methode der Variation der Konstanten beruhen auf solchen Verfahren. Schließlich dürfen Transformationen höherer Ordnung nicht unerwähnt bleiben, welche auch Differentialquotienten enthalten; es sei nur an die d'Alembertsche Gleichung[3]) erinnert.

Die eben erwähnte Methode der Ordnungserniedrigung ist im Grunde genommen die vorbildliche klassische Integrationsmethode für alle Differentialgleichungen höherer Ordnung und beliebigen Grades. Man hat entweder mit Hilfe von passenden Substitutionen oder mit Benutzung eines Multiplikators ein erstes Integral zu finden, das dann ebenso weiter behandelt wird. Dieser allgemeine Gedankengang liegt den meisten speziellen Integrationsmethoden zugrunde, und besonders Euler hat versucht ihn brauchbar zu machen; freilich ist seine Durchführung in der Praxis im allgemeinen nicht möglich. Aber man hat in Verfolgung dieser Idee wenigstens eine Reihe von allgemeinen Gleichungstypen gefunden, auf die sie mit Erfolg angewendet werden kann. Auf Ordnungserniedrigung durch Substitution beruhen die Theorie gewisser zuerst von Monge behandelter partieller Gleichungen beliebiger Ordnung (vgl. S. 1019), die Theorie des Zusammenhangs zwischen homogener linearer Gleichung 2. Ordnung und Riccatischer Gleichung, die Reduktion der totalen Differentialgleichung 2. Ordnung, welche die unabhängige Variable

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 290. [2]) Ebenda, vol. III, p. 600. [3]) Vgl. diese Vorl., III[2], S. 867.

nicht explizite enthält[1]), die Verwandlung von Differentialgleichungen höherer Ordnung in ein Simultansystem von Gleichungen 1. Ordnung. So führt z. B. Euler[2]) die Gleichung beliebiger Ordnung

$$Ay + B\frac{dy}{dx} + C\frac{ddy}{dx^2} + \cdots$$

durch die Substitutionen

$$dy = p\,dx; \quad dp = q\,dx; \ldots$$

in ein System linearer Gleichungen 1. Ordnung über, ohne gerade besonderen Nachdruck auf die Bedeutung dieses Schrittes zu legen.

Hier sei noch folgende originelle Methode von Lagrange für eine spezielle Gleichung erwähnt[3]): Ist

$$0 = \text{fonct}\cdot\left(\frac{x}{y}, p, qx, rx^2, \ldots\right),$$

wo

$$p = \frac{dy}{dx}; \quad q = \frac{dp}{dx}; \quad r = \frac{dq}{dx}; \cdots,$$

so ergibt sich mittels der Substitutionen

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{t}$$

der Reihe nach:

$$p = u + t, \quad qx = \frac{t \cdot d(u+t)}{du}; \quad rx^2 = \frac{t \cdot d\left(\frac{t \cdot d(u+t)}{du}\right)}{du}; \ldots.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die ursprüngliche Gleichung ein, so ist die Ordnung um 1 Grad erniedrigt.

Im Anschluß an die Verwertung der Transformationen überhaupt sei noch auf das Auftreten von Berührungstransformationen bei Monge hingewiesen (vgl. S. 980ff.).

Wie schon erwähnt hat Euler die Anwendung von Multiplikatoren zwecks Ordnungserniedrigung der Integration durch Substitution vorgezogen und sich deshalb eingehend mit der Theorie der Multiplikatoren als der „wahren und natürlichen Quelle aller Integrationen"[4]) beschäftigt. Er geht dabei auf zwei gänzlich ver-

[1]) Die Reduktion gelingt, wenn man den 1. Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen als neue Variable einführt; x und y ergeben sich dann als Funktionen dieser Variablen in Parameterdarstellung. Siehe Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 40. [2]) Ebenda, vol. II, p. 373. Diese Reduktion, nach einer gütigen Mitteilung von Herrn Prof. v. Braunmühl schon bei d'Alembert, Histoire de l'Académie de Berlin, t. IV, 1748 (1750), p. 289. [3]) Miscellanea Taurinensia, t. IV[2], p. 342. [4]) Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 314.

schiedenen Wegen vor; einmal sucht er Gleichungen, welche einen Multiplikator von gegebener Form besitzen, das andere Mal sucht er zu gegebenen Differentialgleichungen einen integrierenden Faktor zu finden. Das erste, leichtere Problem ist in der Integralrechnung ausführlich behandelt.[1]) Euler nimmt dabei die Form der Differentialgleichungen bis auf gewisse unbestimmte Funktionen schon von vornherein an, wozu natürlich viel Geschick und mathematischer Blick gehören, damit die Aufgabe lösbar wird. Die Bestimmung der unbestimmt gelassenen Funktionen erfolgt natürlich mit Zuhilfenahme der Integrabilitätsbedingungen; die Resultate sind aber viel zu speziell, zu wenig interessant und übersichtlich, als daß wir darauf eingehen könnten.

Auch Trembley sucht Differentialgleichungen

$$Rdx + Sdy = 0,$$

die durch einen gegebenen Multiplikator M integrabel werden. Aus der Bedingung

$$R\left(\frac{dM}{dy}\right) - S\left(\frac{dM}{dx}\right) + \left(\left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right)\right) M = 0$$

folgt vermöge $R = -S\frac{dy}{dx}$ die Gleichung

$$-S\left(\left(\frac{dM}{dy}\right)dy + \left(\frac{dM}{dx}\right)dx\right) + M\left(\left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right)\right)dx = 0,$$

d. h.

$$\frac{dM}{M} = \frac{\left(\left(\frac{dR}{dy}\right) - \left(\frac{dS}{dx}\right)\right)dx}{S}.$$

Auf diese Gleichung gründet Trembley seine Rechnung; ihre Einzelheiten müssen hier übergangen werden; sie bietet, sagt Trembley[2]), keinerlei Schwierigkeiten als ihre Länge. Und daran ist ihm, wie wir noch sehen werden, gar nichts gelegen. Schwieriger ist die Aufgabe, zu einer gegebenen Differentialgleichung einen integrierenden Faktor zu finden; so verlangt Euler[3]), die Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$, die zunächst das Integral in transzendenter Form liefert, mit Hilfe eines geeigneten Multiplikators unmittelbar in algebraischer Form zu integrieren. Für Gleichungen n^{ter} Ordnung verwendet Euler einen Multiplikator, welcher die Differentialquotienten bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ einschließlich enthält. So versucht[4]) er z. B. für die Gleichung

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 351 ff. [2]) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1790/91 (1796), p. 328. [3]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 603 ff. [4]) Ebenda, vol. II, p. 153.

$$ddy + \frac{Aydx^2}{(Byy + C + 2Dx + Exx)^2} = 0$$

einen Multiplikator der Form

$$2Pdy + 2Qydx,$$

wo P und Q Funktionen von x sein sollen, und zwar verlangt er das Integral in der Form

$$Pdy^2 + 2Qydxdy + Vdx = \text{Const. } dx^2,$$

wo V eine Funktion von x und y sein soll. Durch Anwendung der Integrabilitätsbedingungen erhält er schließlich den Multiplikator

$$2dy(C + 2Dx + Exx) - 2ydx(D + Ex).$$

Besondere Eleganz und Übersichtlichkeit ist bei dieser Rechnung allerdings nicht zu finden; Euler benutzt die Formel, um aus ihr Spezialfälle abzuleiten. Für die Gleichung

$$yyddy + ydy^2 + Axdx^2 = 0$$

wird, wie Euler sagt[1]), vergeblich der Versuch mit einem Multiplikator der Form

$$Ldy + Mdx$$

gemacht; möge also, fährt er fort, der Versuch mit der Form

$$3Ldy^2 + 2Mdxdy + Ndx^2$$

und dem Integral

$$Lyydy^3 + Myydxdy^2 + Nyydx^2dy + Vdx^3 = Cdx^3$$

gemacht werden. Es ergibt sich

$$L = y, \quad M = 0, \quad N = 3Ax$$

mit

$$V = -Ay^3 + AAx^3$$

als eine brauchbare Lösung. Die folgende Behandlung dieses Beispiels, wobei von der Substitution $\frac{ydy}{dx} = z$ Gebrauch gemacht wird, ist nicht uninteressant. Übrigens sind wir auf diese Beispiele nur eingegangen, weil sie zeigen, welcher Art die Differentialgleichungen sind, an die sich Euler wagt. Daß er schon früher einfachere Beispiele behandelt hat[2]), wird niemand wundern.

Für die Theorie der Multiplikatoren von Differentialgleichungen

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 162. [2]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. VII. 1758/59 (1761), p. 163 ff.

höherer Ordnung wird ein **Integrabilitätskriterium** von höchster Wichtigkeit, das **Euler** bei seinen Untersuchungen über die Variationsrechnung nebenbei gefunden hat. Er fragt nach der Bedingung dafür, daß $\int Zdx$ ein Maximum oder Minimum werde und findet, wie schon früher[1]), dafür die Gleichung

$$0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2L}{dx^2} + \cdots,$$

wo

$$dZ = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \cdots$$

und

$$p = \frac{dy}{dx}; \quad q = \frac{dp}{dx} \cdots.$$

Am Schluß der betreffenden Abhandlung endlich erwähnt er[2]) ganz kurz und ohne Beweis, daß die identische Erfüllung jener Maximalbedingung die Integrabilität von Zdx zur Folge habe. Diese Bemerkung blieb anscheinend unbeachtet; wenigstens knüpft **Lexell**, der sich eingehend mit diesem Kriterium beschäftigt hat (vgl. unten), erst an **Eulers** Integralrechnung an, deren 3. Band in einem Anhang über Variationsrechnung den genannten Satz wieder enthält. Man beachte, daß **Euler** nicht von vornherein nach einem Integrabilitätskriterium für Zdx, wo Z Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung enthält, gesucht hat; vielmehr ist er von ganz anderen Problemen aus zu jener Gleichung gelangt, nach deren tieferer Bedeutung er sich nachträglich gefragt hat. **Euler** verwendet seinen Satz zur Auffindung integrabler Zdx. So geht er einmal[3]) von dem Ausdruck

$$\frac{(x\partial x + y\partial y)(\partial y\partial\partial x - \partial x\partial\partial y)}{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

aus, der ein Integral

$$\frac{y\partial x - x\partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$$

besitzt und fragt nach ähnlichen integrablen Fällen. Er gibt dabei dem zu integrierenden Ausdruck von vornherein schon eine bestimmte Form und sucht die darin unbestimmt gelassenen Funktionen so zu bestimmen, daß sie die Integrabilitätsbedingung erfüllen, ganz ähnlich wie er früher Differentialgleichungen suchte, die einen Multiplikator von gegebener Form zulassen.

Unabhängig von **Euler** beschäftigte sich **Condorcet** mit der

---

[1]) Vgl. diese Vorl., III[2], S. 868. [2]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. X, 1764 (1766), p. 134. [3]) Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XI, 1793 (1798), p. 3. Zu diesem Aufsatz steht ein anderer Artikel von **Euler** aus dem Jahre 1777 in Beziehung: Ebenda, t. IX, 1791 (1795), p. 81 ff.

Frage nach der Integrabilität von Ausdrücken mit 2 Variabeln; er kommt auf ziemlich mühsamen Wegen zu derselben Gleichung[1]). Am eingehendsten hat sich Lexell mit dieser Frage beschäftigt. Zunächst verlangt er[2]) einen von den Prinzipien der Variationsrechnung freien, rein analytischen Beweis des Eulerschen Kriteriums. Sei also V eine Funktion von $x, y, p, q, r, \ldots$ und

$$dy = p\,dx;\quad dp = q\,dx;\quad dq = r\,dx;\ \ldots;\ dt = u\,dx,$$

und sei weiterhin

$$dV = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \cdots + U\,du.$$

Nun kann man, sagt Lexell, jedenfalls setzen:

$$V\,dx = \mu\,dx + \nu\,dy + \varkappa\,dp + \cdots + \tau\,dt$$

und demzufolge

$$V = \mu + \nu p + \varkappa q + \cdots + \tau u;$$

hieraus gewinnt man

$$\begin{aligned} dV = d\mu + p\,d\nu + q\,d\varkappa + \cdots + u\,d\tau \\ + \nu\,dp + \varkappa\,dq + \cdots + \tau\,du. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Form mit der ursprünglichen, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dx}\right) + q\left(\frac{d\varkappa}{dx}\right) + \cdots, \\ N &= \left(\frac{d\mu}{dy}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\varkappa}{dy}\right) + \cdots, \\ P &= \left(\frac{d\mu}{dp}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + q\left(\frac{d\varkappa}{dp}\right) + \cdots + \nu, \\ Q &= \left(\frac{d\mu}{dq}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dq}\right) + q\left(\frac{d\varkappa}{dq}\right) + \cdots + \varkappa, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Bei allen Differentiationen sind dabei $x, y, p, \ldots u$, wie vollständig voneinander unabhängige Variable zu behandeln, so daß also z. B. $\left(\frac{dp}{dx}\right)$ und ähnliche Ausdrücke Null zu setzen sind. Soll jetzt $V\,dx$ ein exaktes Differential sein, so müssen Gleichungen bestehen, wie

---

[1]) Condorcet, Du calcul intégral. Paris 1765. An Stelle dieses Werkes, das mir leider nicht zur Verfügung stand, benutzte ich die eingehende zeitgenössische Besprechung durch Pietro Ferroni in den Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., tomo V, 1790, p. 130 ff. [2]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XV, 1770 (1771), p. 128.

$$\left(\frac{d\mu}{dy}\right) = \left(\frac{d\nu}{dx}\right); \quad \left(\frac{d\mu}{dp}\right) = \left(\frac{d\varkappa}{dx}\right); \quad \left(\frac{d\nu}{dp}\right) = \left(\frac{d\pi}{dy}\right);$$

usw. Dann wird aber

$$\begin{aligned}
M &= \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\mu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\mu}{dp}\right) + \cdots,\\
N &= \left(\frac{d\mu}{dx}\right) + p\left(\frac{d\nu}{dy}\right) + q\left(\frac{d\nu}{dp}\right) + \cdots,\\
P &= \left(\frac{d\pi}{dx}\right) + p\left(\frac{d\pi}{dy}\right) + q\left(\frac{d\pi}{dp}\right) + \cdots + \nu,\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit dx durch und berücksichtigt die Gleichungen

$$p\,dx = dy; \quad q\,dx = dp,$$

usw., so erhält man

$$\mu = \int M\,dx; \quad \nu = \int N\,dx; \quad \pi = \int (P - \nu)\,dx; \quad \varkappa = \int (Q - \pi)\,dx; \ \ldots$$

Daraus ergeben sich aber die $\mu, \nu, \pi, \ldots$ durch die $M, P, Q, \ldots$ ausgedrückt und zwar in Form von Summen mehrfacher Integrale.

Diese Werte in

$$V = \mu + \nu p + \pi q + \cdots + \tau u$$

eingeführt, ergeben in leicht verständlicher Bezeichnungsweise die Gleichung

$$\begin{aligned}
V = \int M\,dx + p\int N\,dx + q\left(\int P\,dx - \int^{(2)} N\,dx\right)&\\
+ r\left(\int Q\,dx - \int^{(2)} P\,dx + \int^{(3)} N\,dx\right) + \cdots&\\
+ u\left(\int P\,dx + \cdots \pm \int^{(m-1)} P\,dx \mp \int^{(m)} N\,dx\right)&\\
= \int M\,dx + \left[p\int N\,dx - q\int^{(2)} N\,dx + \cdots \mp u\int^{(m)} N\,dx\right]&\\
+ \left[q\int P\,dx - r\int^{(2)} P\,dx + \cdots \pm u\int^{(m-1)} P\,dx\right]&\\
+ \cdots.&
\end{aligned}$$

Nun ist identisch

$$Ndy \mp du \int^{(m)} Ndx = \left(pNdx + dp \int Ndx\right)$$
$$- \left(dp \int Ndx + dq \int^{(2)} Ndx\right) + \cdots$$
$$\mp \left(dt \int^{(m-1)} Ndx + du \int^{(m)} Ndx\right)$$
$$= d \cdot p \int Ndx - d \cdot q \int^{(2)} Ndx + \cdots \mp d \cdot u \int^{(m)} Ndx.$$

Ebenso ist

$$Pdp \pm du \int^{(m-1)} Pdx = d \cdot q \int Pdx - d \cdot r \int^{(2)} Pdx + \cdots \pm d \cdot u \int^{(m-1)} Pdx$$
$$= d\left[q \int Pdx - r \int^{(2)} Pdx + \cdots \pm u \int^{(m-1)} Pdx\right]$$

usw.

Durch Benutzung dieser Gleichungen folgt unmittelbar

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + \cdots + Tdt$$
$$\mp du\left(\int^{(m)} Ndx - \int^{(m-1)} Pdx + \int^{(m-2)} Qdx + \cdots \mp \int Tdx\right).$$

Da aber nach Voraussetzung

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + \cdots + Udu,$$

so folgt

$$U = \mp \int^{(m)} Ndx \pm \int^{(m-1)} Pdx \mp \cdots + \int Tdx.$$

Hieraus endlich gewinnt man durch wiederholte Differentiation und Umstellung als notwendige Bedingung für die Integrabilität von Vdx die Gleichung

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \cdots = 0\,[1];$$

Im folgenden sucht Lexell ähnliche Kriterien für den Fall dreier Variabeln x, y, z[2]; in einer späteren Abhandlung kommt er nochmals auf das Problem zurück und rechnet[3] auch ein praktisches Beispiel durch, des weiteren kommt er auf die wichtige Frage eines Multiplikators für nichtintegrable Vdx zu sprechen. Wegen einer Anwendung dieser Untersuchungen vgl. S. 1032.

---

[1] Wir sind gegen Schluß unwesentlich von der etwas unübersichtlichen Darstellung des Originals abgewichen.
[2] Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XV, 1770 (1771), p. 193.
[3] Ebenda, t. XVI, 1771 (1772), p. 189.

Wir haben diese Fragen im Anschluß an die Theorie des integrierenden Faktors gebracht; in dieser Hinsicht ist noch einiges zu sagen. Schon Condorcet beschäftigt sich mit dem Zusammenhang zwischen Integral und Multiplikator[1]). Euler zeigt[2]), daß jeder Multiplikator M von $Pdx + Qdy = 0$ ein partikuläres Integral $M = 0$ liefert, sofern nicht einer der Koeffizienten P oder Q dadurch unendlich wird; analoges gilt von einem integrierenden Divisor. An anderer Stelle hat er den leicht beweisbaren Satz[3]): Ist L ein Multiplikator von $Pdx + Qdy$, so ist auch $L \cdot \Phi(Z)$ ein solcher, wo Φ eine willkürliche Funktion bedeutet, und Z sich aus $dZ = L(Pdx + Qdy)$ bestimmt. Dieser Satz ist nur eine andere Form des bekannteren, daß der Quotient zweier Multiplikatoren, einer Konstanten gleichgesetzt, das vollständige Integral der Differentialgleichung gibt. Der Zusammenhang zwischen Partikulärintegral und Multiplikator hat für Trembley großen Reiz; seine Absicht ist, aus einem bekannten partikulären oder singulären Integral einen Multiplikator herzuleiten und mit diesem das vollständige Integral zu ermitteln. Er braucht also vor allem ein Integral, das er sich mit Hilfe unbestimmter Koeffizienten folgendermaßen zu verschaffen sucht.[4]) Ist die gegebene Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} + U = 0$, so bildet er zunächst den Ausdruck

$$\frac{dU}{dx} = \left(\frac{dU}{dx}\right) + \left(\frac{dU}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dU}{dx}\right) - U\left(\frac{dU}{dy}\right).^{5)}$$

In diesem Ausdruck, der eine Summe von Funktionen von x und y sein wird, ersetzt er die Koeffizienten der einzelnen Summanden durch Buchstaben, die er so zu bestimmen sucht, daß der ganze Ausdruck, gleich Null gesetzt, die gegebene Differentialgleichung erfüllt. Ist z. B.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{ay^3}{c} - \frac{by^2}{c\sqrt{x}} = 0$$

gegeben, so ist

$$U = -\frac{ay^3}{c} - \frac{by^2}{c\sqrt{x}};$$

dann findet man

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) - U\left(\frac{dU}{dy}\right)$$

bis auf die Koeffizienten gleich

---

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 7 ff. Nach Lagrange auch Du Calcul intégral, p. 67. [2]) Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 414 bzw. 416. [3]) Ebenda, vol. I, p. 329. Vgl. diese Vorl., III², S. 883. Eine Verallgemeinerung des im Text erwähnten Satzes bei Condorcet: Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 14. [4]) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1792/93 (1798), p. 341—416. Diesem Aufsatz geht ein Artikel ähnlichen Inhalts in den Turiner Memoiren für 1790 voran. [5]) Man vergleiche die Bedingungsgleichungen von Lagrange für das Auftreten eines singulären Integrals S. 893 oben.

$$y^5 + \frac{y^4}{\sqrt{x}} + \frac{y^3}{x} + \frac{y^2}{x\sqrt{x}}.$$

Mit Unterdrückung des Faktors y^2[1]) setzt Trembley:

$$0 = \Phi = \alpha y^3 + \frac{\beta y^2}{\sqrt{x}} + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta}{x\sqrt{x}}.$$

Substitution in

$$\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) - U\left(\frac{d\Phi}{dy}\right) = 0$$

— so kann nämlich die ursprüngliche Differentialgleichung geschrieben werden, wenn sie das Integral $\Phi = 0$ besitzt — gibt die Gleichung

$$\frac{3a\alpha}{c}y^5 + \left(\frac{3\alpha b}{c} + \frac{2\beta a}{c}\right)\cdot\frac{y^4}{\sqrt{x}} + \left(\frac{2\beta b}{c} + \frac{\gamma a}{c}\right)\frac{y^3}{x}$$

$$+ \left(\frac{\gamma b}{c} - \frac{\beta}{2}\right)\frac{y^2}{x\sqrt{x}} - \frac{\gamma y}{xx} - \frac{\frac{3}{2}\delta}{x^2\sqrt{x}} = 0.$$

Daraus lassen sich mit Hilfe von

$$\Phi = \alpha y^3 + \frac{\beta y^2}{\sqrt{x}} + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta}{x\sqrt{x}} = 0$$

die Glieder mit y^5 und y^4 eliminieren; der Ausdruck wird dadurch noch umfänglicher; es resultiert eine Gleichung, die sich von $\Phi = 0$ nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle der $\alpha, \beta, \ldots$ komplizierte Funktionen dieser Größen getreten sind. Da aber die Schlußgleichung bis auf einen Faktor mit $\Phi = 0$ identisch sein muß, ist Koeffizientenvergleichung statthaft, und es ergibt sich schließlich

$$\Phi = ay^3 + \frac{by^2}{\sqrt{x}} + \frac{cy}{2x} = 0.$$

Die Methode erfordert umfangreiche Rechnungen; weit einfacher hätte Trembley gleich das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung

$$Cx = y^\alpha \cdot \left(y - \frac{w_1}{\sqrt{x}}\right)^\beta \cdot \left(y - \frac{w_2}{\sqrt{x}}\right)^\gamma,$$

wo w_1 und w_2 die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{a}{c}w^2 + \frac{b}{c}w + \frac{1}{2} = 0,$$

und α, β, γ leicht zu bestimmende Konstante sind, abgeleitet; das von Trembley gefundene Integral läßt sich unschwer in der Form schreiben:

[1]) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1792/93 (1798), p. 343.

$$0 = ay\left(y - \frac{\varkappa_1}{\sqrt{x}}\right)\left(y - \frac{\varkappa_2}{\sqrt{x}}\right).$$

Trembley gibt noch zahlreiche andere Beispiele, die indes zum großen Teil auf ganz ungeheuerliche Rechnungen führen; dann nimmt er als Integralgleichung statt des einfachen $\Phi = 0$ das kompliziertere $e^{\mu}\Phi = C$, wo μ und Φ Funktionen von x und y sein sollen[1]); ja er dehnt seine Methode auf totale Differentialgleichungen mit 3 Variabeln[2]) und auf Differentialgleichungen 2. Ordnung aus[3]). Auf das letztgenannte Problem kommt er in einem späteren Aufsatz[4]) zurück; er rechnet hauptsächlich Beispiele, die Euler und andere schon behandelt haben, und sucht auch Multiplikatoren zu bestimmen. Endlich geht er auf ein interessantes Paradoxon ein; man findet, sagt er[5]), in den Beispielen bei Euler und Waring algebraische integrierende Faktoren, die gleich Null gesetzt, kein partikuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung liefern, was der Theorie zu widersprechen scheint. Aber diese Gleichungen werden in Wahrheit durch Exponentialfunktionen integriert, und die von den genannten Autoren gefundenen Faktoren sind das Resultat der Kombination zweier erster Integrale, wobei sich die Exponentialfunktionen gegenseitig aufheben. Den Satz, daß ein Multiplikator M gleich Null gesetzt ein partikuläres Integral gibt, überträgt Trembley auf Gleichungen n^{ter} Ordnung.[6])

Wirklichen Erfolg und praktische Bedeutung hat die Methode des integrierenden Faktors nur in wenigen Fällen errungen; hier ist in erster Linie ihre Anwendung bei der totalen linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwecks Ordnungserniedrigung zu nennen[7]); man wird hier zu der sogenannten Lagrangeschen Adjungierten geführt, von der an einschlägiger Stelle die Rede sein wird (vgl. S. 928). Dann ist auf die Benutzung von Multiplikatorensystemen bei Simultansystemen von Differentialgleichungen hinzuweisen; so sei z. B. an die elegante Behandlung der Differentialgleichungen der Bewegung mit Nebenbedingungen mittels unbestimmter Multiplikatoren erinnert.

Im Gegensatz zur Methode des integrierenden Faktors war die Integration der Differentialgleichungen durch unendliche Reihen stets von höchster praktischer Bedeutung[8]), sei es nun, daß man die

---

[1]) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1792/93 (1798), p. 386.
[2]) Ebenda, p. 391. [3]) Ebenda, p. 397. [4]) Ebenda, 1794/95 (1799), p. 3—68
[5]) Ebenda, p. 69. [6]) Ebenda, p. 90. [7]) Auch Euler behandelt die vollständige lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten mittels eines integrierenden Faktors: Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 402. [8]) Laplace z. B. stellt sich in der Histoire de l'Académie des Sciences

gesuchten Reihen direkt oder erst durch sukzessive Annäherung bestimmte. Entwicklung nach Potenzreihen mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten treffen wir in Eulers Integralrechnung; besonders die Differentialgleichung 2. Ordnung ist dort eingehend behandelt.[1]) Wie gewöhnlich ist von einfacheren Beispielen zu solchen schwierigerer Art übergegangen. So behandelt Euler[2]) z. B. die Gleichung

$$ddy + ax^n y dx^2 = 0.$$

Er setzt eine Reihenentwicklung mit steigenden Exponenten an:

$$y = Ax^\lambda + Bx^{\lambda+n+2} + Cx^{\lambda+2n+4} + \cdots$$

und erhält durch Einsetzen in die gegebene Differentialgleichung zunächst die Bedingung

$$\lambda(\lambda - 1) = 0.$$

Daraus folgt $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$, weshalb Euler die neue Reihe ansetzt:

$$\begin{aligned} y = A \quad &+ Bx^{n+2} + Cx^{2n+4} + \cdots \\ &+ \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}x^{n+3} + \mathfrak{C}x^{2n+5} + \cdots. \end{aligned}$$

Die B, C, ... und $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ drücken sich dann leicht durch die beiden Integrationskonstanten A und $\mathfrak{A}$ aus. Ein Ansatz mit abnehmenden Exponenten führt, wie er sagt, zu keinem Ergebnis. Im folgenden integriert er durch Reihen die Gleichung

$$xx(a + bx^n)ddy + x(c + ex^n)dxdy + (f + gx^n)ydx^2 = 0,$$

und Spezialfälle davon, weil gerade bei ihr die Rekursionsformeln für die Koeffizienten der Reihenentwicklung ganz besonders einfach werden; es drückt sich nämlich jeder Koeffizient durch den unmittelbar vorhergehenden aus. Diese Bemerkung veranlaßt Euler zur Behandlung des Problems[3]), alle linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung von der Eigenschaft aufzusuchen, daß in den zugehörigen Reihenentwicklungen jeder Koeffizient sich durch die zwei unmittelbar vorhergehenden Koeffizienten ausdrückt. Hier sei auch noch auf das Auftreten der Zylinderfunktionen bei Euler hingewiesen; das Problem der Schwingungen einer Membran führt ihn nämlich[4]) auf die Differentialgleichung

1782 (1785), p. 5 bzw. p. 31 ff. die Aufgabe, Reihenentwicklungen für gewisse Integrale zu finden, die durch starke Konvergenz für die Praxis brauchbar sind. Vgl. o. S. 785.

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. II. p. 182 ff. [2]) Reihen mit unbestimmten Koeffizienten auch in Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVII, 1772 (1773), p. 129, und Institutiones calculi integralis, vol II, Sect. I, cap. VII, VIII, IX. [3]) Ebenda (Inst. calc. int.), p. 252. [4]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. X, 1764 (1766), p. 243.

$$\left(\alpha^2 - \frac{\beta^2}{r^2}\right)u + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{d^2u}{dr^2} = 0,$$

die mit der bekannten Besselschen Differentialgleichung identisch ist. Euler entwickelt in eine unendliche Reihe. Eine andere nicht uninteressante Reihenentwicklung für die Gleichung

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{m}{x}\frac{dM}{dx} = kM$$

findet sich bei Lagrange.[1]) Für $m = 0$ hat man das Integral

$$M = A \sin x\sqrt{-k},$$

für $m = 2$ aber

$$M = A \sin x\sqrt{-k} - Ax\frac{d \sin x\sqrt{-k}}{dx};$$

daraus läßt sich, sagt Lagrange, für $m = 4, 6, \ldots$ auf die Form

$$M = A \sin x\sqrt{-k} + Bx\frac{d \sin x\sqrt{-k}}{dx} + Cx^2\frac{d^2 \sin x\sqrt{-k}}{dx^2} + \cdots$$

schließen, wo $A, B, C, \ldots$ Funktionen von x sind. Durch Substitution in die gegebene Differentialgleichung ergibt sich eine Folge von Differentialgleichungen zur Bestimmung von $A, B, C, \ldots$. Lagrange findet

$$A = f + hx^{m+1}; \quad B = -fx - hx^{m+2};$$

$$C = f\frac{(m-2)}{2(m-1)}x^2 + h\frac{(m+4)}{2(m+3)}x^{m+3};$$

$$D = -f\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3(m-1)(m-2)}x^3 - h\frac{(m+4)(m+6)}{2\cdot 3(m+3)(m+4)}x^{m+4}; \quad \text{usw.},$$

wo f und h Integrationskonstanten sind, und bemerkt hierzu: ist m eine positive gerade Zahl $\geqq 2$, so bricht die Reihe der mit f multiplizierten Terme ab, ist m negativ und gerade $\leqq -4$, so ist die Anzahl der in h multiplizierten Terme eine endliche; man erhält dann Integrale in endlicher Form, indem man h bzw. f gleich Null setzt; für $m = 0$ und $m = -2$ wird die Formel unbrauchbar; Lagrange macht dann hinsichtlich der Brauchbarkeit dieser Entwicklung eine Reihe von Bemerkungen; insbesondere spricht er von einer Unannehmlichkeit, die allen allgemeinen Integrationsformeln anhafte, daß sie nämlich in gewissen Fällen, die dann eine Sonderuntersuchung erfordern, ungiltig werden. Auch auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen hat die Entwicklung nach unendlichen Reihen oft Dienste geleistet; Angaben über die Zahl der dabei auftretenden will-

---

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 81 ff. Vgl. auch S. 980 dieses Bandes.

kürlichen Funktionen, die ja kleiner als die Ordnung der Differentialgleichung sein kann, haben wir nicht gefunden. So behandelt Euler[1]) die Gleichung

$$(x+y)^2\left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right)+m(x+y)\left(\frac{dz}{dx}\right)+m(x+y)\left(\frac{dz}{dy}\right)+nz=0;$$

er setzt das Integral in der Form

$$z=A(x+y)^\lambda f(x)+B(x+y)^{\lambda+1}f'(x)+C(x+y)^{\lambda+2}f''(x)+\cdots$$

an und drückt die Koeffizienten $B, C, D, \ldots$ durch A aus. Die Rekursionsformeln hierfür, die quadratische Gleichung

$$n+2m\lambda+\lambda\lambda-\lambda=0$$

mit eingeschlossen, nennt er determinationes. Bei Vertauschung von x mit y muß man wieder ein Integral haben; daraus ergibt sich

$$z=A(x+y)^\lambda(f(x)+F(y))+B(x+y)^{\lambda+1}(f'(x)+F'(y))+\cdots.$$

In die Gleichung für λ setzt Euler

$$\lambda+m=-i$$

und erhält so

$$n=(m+i)(m-i-1);$$

durch passende Wahl von i bricht dann die Reihe von selbst ab.

Im Anschluß daran behandelt Euler die Frage, wann sich die Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)-Q\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)+R\left(\frac{dz}{dy}\right)+S\left(\frac{dz}{dx}\right)+Tz=0$$

auf die eben integrierte Gleichung zurückführen läßt, und gewinnt so viele Fälle integrabler Gleichungen.

Hier sei eine Aufgabe von Condorcet angefügt, der zur Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}\frac{1+x}{1+y}=0$$

die unendliche Reihe

$$z=F(x+y)+P\cdot\frac{\partial F(x+y)}{\partial x}+Q\cdot\frac{\partial^2 F(x+y)}{\partial x^2}+\cdots$$

ansetzt[2]), wo $P, Q, \ldots$ Funktionen von x und y sind. Durch Substitution in die gegebene Gleichung und Nullsetzen der Koeffizienten

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 262 ff. [2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1772 (1775), p. 40.

bzw. der 1., 2., ... Ableitung von F erhält er eine Reihe von partiellen Gleichungen. So liefert der Koeffizient von

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y}$$

die Gleichung

$$(1+y)\left(1+\frac{\partial P}{\partial y}\right) = (1+x)\left(1+\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

mit dem partikulären Integral $P = xy$. Die 2. Ableitung von F ergibt

$$\left(P+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)(1+y) - \left(P+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)(1+x) = 0;$$

wegen $P = xy$ ist aber

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(1+x) - \frac{\partial Q}{\partial y}(1+y) = -x^2y + xy^2.$$

Diese Gleichung wird durch

$$Q = \frac{x^2y^2}{2}$$

befriedigt. So kann man fortfahren; aber, wie leicht ersichtlich, die unmittelbare Aufstellung des allgemeinen Integrals in endlicher Form kostet weniger Zeit und Mühe als die Berechnung der von Condorcet angegebenen Reihen. Wir sind dabei der größeren Deutlichkeit halber von der Schreibweise des Originals abgewichen, indem wir Klammern gesetzt haben, wo auch schon zu Condorcets Zeit solche geschrieben wurden, und verschiedene Druckfehler verbessert haben.

Lagrange versucht 1788[1]) bei der Integration von

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

eine Reihe

$$\varphi = \varphi' + z\varphi'' + z\cdot\varphi''' + \cdots,$$

wo die φ', φ'', φ''', ... Funktionen von x, y, t, aber nicht von z bedeuten; er erhält durch Einführung der Reihe in die vorgegebene Differentialgleichung die Beziehungen

$$\varphi''' = -\frac{d^2\varphi'}{2\,dx^2} - \frac{d^2\varphi'}{2\,dy^2}; \quad \varphi^{\mathrm{IV}} = -\frac{d^2\varphi''}{2\cdot 3\,dx^2} - \frac{d^2\varphi''}{2\cdot 3\,dy^2} \quad \text{usw.,}$$

φ' und φ'' bleiben hierbei unbestimmt und stellen die beiden willkürlichen Funktionen dar. Vielfach wird das Integrationsgeschäft durch die Annahme komplizierterer Reihenformen sehr erleichtert; hierbei können schon bekannte partikuläre Integrale mit Vorteil ver-

---

[1]) Mécanique analytique, 3. édit. par Bertrand, t. II, p. 280. Nach einer liebenswürdigen Mitteilung von Herrn Prof. v. Braunmühl.

wendet werden; so beruht die eben angeführte Reihenentwicklung von Euler auf der Kenntnis eines partikulären Integrals

$$z = (x + y)^\lambda,$$

die Integration der Gleichung der Saitenschwingungen durch trigonometrische Reihen ebenso auf der Einsicht, daß trigonometrische Funktionen partikuläre Lösungen sind. In interessanter Weise verwendet Condorcet die unendlichen Reihen[1]) für Differentialgleichungen wie

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m\,dz}{dy} \quad \text{und} \quad \frac{ddz}{dx^2} = \frac{c^2 ddz}{dy^2};$$

er integriert zunächst, wobei die Koeffizienten willkürlich bleiben, und sucht sodann aus der Reihendarstellung das Integral, welches willkürliche Funktionen enthält, in endlicher Form zu ermitteln. Dieser Gedanke ist deshalb von Wichtigkeit, weil man mit seiner Hilfe hätte schließen können, daß, wie schon D. Bernoulli behauptet hatte, eine derartige Entwicklung mit unendlich vielen Integrationskonstanten unter Umständen gerade so allgemein sein kann wie das Integral mit willkürlichen Funktionen; man erinnere sich, daß Euler z. B. die Integration der Gleichung der Saitenschwingungen durch trigonometrische Funktionen, die nach Vielfachen des Arguments fortschreiten, für weniger allgemein als das sog. allgemeine Integral hielt[2]) (vgl. S. 995). Condorcets Methode besteht nun einfach darin, daß er das Integral z. B. von

$$\frac{dz}{dx} = \frac{m\,dz}{dy}$$

zunächst in der Form

$$z = a + bx + b'y + cx^2 + c'xy + c''y^2 + \cdots$$

ansetzt, und aus

$$a + b\left(x + \frac{y}{m}\right) + c\left(x + \frac{y}{m}\right)^2 + \cdots$$

wo $a, b, c, \ldots$ Integrationskonstante sind, dann auf

$$z = \varphi\left(x + \frac{y}{m}\right) + N$$

schließt (vgl. S 998). Schließlich sind noch die Methoden von Cousin zu erwähnen (vgl. S. 952ff.).

Auf Reihenentwicklungen nach bestimmten Funktionen, wie trigonometrischen Funktionen, Kugelfunktionen, kann hier nicht einge-

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1769 (1772), p. 193ff. [2]) Vgl. diese Vorl., III[2], S. 906. Wegen der Entwickelbarkeit einer Funktion nach Vielfachen des Arguments des Sinus vgl. man u. a. besonders Lagrange: Miscellanea Taurinensia, t. III[2], 1762/65 (1766), p. 221.

gangen werden; wir verweisen deshalb auf den XXVI. Abschnitt dieses Bandes.

Unter den Näherungsverfahren, welche nicht von vornherein gleich die ganze Reihe bis auf gewisse erst zu bestimmende Koeffizienten in Form der Taylorschen Reihe event. mit veränderlichen Koeffizienten ansetzen, können wir zwei Gruppen unterscheiden, solche, welche die gegebene Differentialgleichung ohne weiteres in der gegebenen Form benutzen und lediglich durch beständige Korrektion das Integral zu finden suchen, und solche, welche von vornherein sich nicht der vollständigen Differentialgleichung, sondern nur einer genäherten Form derselben bedienen, wobei natürlich die Schätzung der erreichten Genauigkeit viel schwieriger wird. Das letztgenannte Verfahren wird besonders häufig in der Astronomie geübt; unter den ersten steht die Integration durch Kettenbrüche wegen ihrer Eleganz und Allgemeinheit obenan. Hierzu bemerkt Lagrange[1]) in den Berliner Memoiren für 1776, die Methode der Integration durch unendliche Reihen habe den Nachteil, daß rationale endliche Ausdrücke als solche nicht erkannt werden; die Kettenbruchentwicklung habe dagegen alle Vorteile der Reihenentwicklung und sei von dem letzterwähnten Übelstand frei, da ein endlicher und rationaler Wert des betr. Ausdrucks als Kettenbruch von selbst abbrechen wird. Sein Verfahren ist etwa folgendes: ein erster Näherungswert von y für sehr kleine x sei ξ; setzt man jetzt

$$y = \frac{\xi}{1 + y'}$$

in die gegebene Differentialgleichung ein, so erhält man eine neue Gleichung derselben Ordnung und desselben Grades zwischen x und y'. In derselben Weise sucht man jetzt für sehr kleine x einen Näherungswert ξ' von y', und setzt

$$y' = \frac{\xi'}{1 + y''}.$$

Die Größen $\xi, \xi', \xi'', \ldots$ müssen von der Form ax^{α} sein, und zwar muß α (außer für die Größe ξ selbst) immer positiv sein. Die fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens liefert den gewünschten Kettenbruch; die Bestimmung von a und α bietet hierbei die einzige Schwierigkeit. Mittels dieser Methode erhält Lagrange bei Differentialgleichungen, die durch bekannte Transzendenten integrabel sind, die Kettenbruchentwicklung von Funktionen wie log, tg, arctg, die übrigens schon Euler gegeben hatte (vgl. S. 270).

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 301.

Auf die Entwicklung der übrigen Näherungsverfahren war die theoretische Astronomie von großem Einfluß. Da die Exzentrizitäten der Planetenbahnen, sowie ihre Neigungen meistens ziemlich klein sind, nahm man seit d'Alembert die Kreisbahn als genäherte Lösung an[1]) und suchte diese durch Korrektionen in der Weise zu verbessern, daß man schließlich Reihen erhielt, welche nach Potenzen dieser kleinen Größen fortschritten. Die verschiedenen Methoden, deren man sich hierzu bediente, charakterisiert Condorcet[2]), der sich selbst sehr viel mit der Integration durch Reihen beschäftigt hat[3]): entweder setzt man, sagt er, die Unbekannte gleich einem angenäherten Wert vermehrt um ein Korrektionsglied, dessen 2., 3., ... Potenz man vernachlässigt. Diesen Ausdruck substituiert man in die ursprüngliche Gleichung, integriert und bestimmt das Korrektionsglied angenähert. Mit dem so verbesserten Wert der Unbekannten wiederholt man das Verfahren. Diese Methode ist vereinfacht von d'Alembert in den Turiner Memoiren und in seinen Opuscules, auch von Euler in seiner preisgekrönten Abhandlung über die Mondbewegung von 1770 benutzt. Bei der zweiten Methode vernachlässigt man nicht alle höheren Potenzen des Korrektionsgliedes.[4]) Endlich geht Condorcet auf die Methoden von Lagrange und d'Alembert des näheren ein. Von welcher Wichtigkeit diese Verfahren für die Praxis sind, kann aus der großen Zahl von diesbezüglichen Abhandlungen entnommen werden.

Unter den speziellen Näherungsverfahren, die wir hier genauer darlegen wollen, sei zuerst eine Methode von Euler zur Integration totaler Differentialgleichungen genannt. Die Gleichung 1. Ordnung denkt sich Euler[5]) auf die Form

$$\frac{dy}{dx} = V$$

gebracht, wo V eine Funktion von x und y ist. Für die höheren Differentialquotienten ergibt sich leicht

$$\frac{ddy}{dx^2} = \left(\frac{dV}{dx}\right) + V\left(\frac{dV}{dy}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left(\frac{ddV}{dx^2}\right) + \left(\frac{dV}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) + 2V\left(\frac{ddV}{dxdy}\right) + V\left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + VV\left(\frac{ddV}{dy^2}\right) \text{ usw.;}$$

---

[1]) Nach einer Arbeit, die mir Herr Professor von Braunmühl in liebenswürdigster Weise im Manuskript zur Verfügung stellte. [2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1771 (1774), p. 281. [3]) Vgl. auch den bereits erwähnten Aufsatz: Ebenda 1769 (1772), p. 193; ferner 1770 (1773), p. 191. [4]) Hierzu zitiert er Lagrange, Miscellanea Taurinensia, t. III. Vgl. die drittnächste Anmerkung und d'Alembert, Opuscules mathématiques, t. V. [5]) Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 498. Vgl. auch o. S. 731.

Anwendung der Taylorschen Reihe liefert die gewünschte Reihenentwicklung. So führt die Gleichung

$$dy = dx(x^n + cy)$$

auf

$$y = b + \omega(a^n + cb) + \frac{1}{2}\omega^2(ccb + ca^n + na^{n-1})$$
$$+ \frac{1}{6}\omega^3(c^3b + cca^n + nca^{n-1} + n(n-1)a^{n-2}) + \cdots,$$

wo b der zu $x = a$, y der zu $x = a + \omega$ gehörige Wert von y ist. Bei der Gleichung 2. Ordnung

$$\frac{dp}{dx} = V,$$ [1]

wo $dy = pdx$, und V eine Funktion von x, y, p ist, seien die Anfangswerte $x = a$, $y = b$, $p = c$. Für das Intervall

$$x = a \quad \text{bis} \quad x = a + \omega$$

ist

$$p = c + V(x - a) - \int (x - a)dV.$$

Die Größe dV ergibt sich aus der gegebenen Differentialgleichung zu

$$dV = Pdx + Qdy + Rdp = (P + Qp + RV)dx.$$

Die Annahme, daß $P + Qp + RV$ in dem Intervall a bis x konstant ist, führt auf

$$p = c + F(x - a) - \frac{1}{2}(P + Qc + RF)(x - a)^2,$$

wo F den Anfangswert von V bedeutet. Integration dieser Gleichung liefert endlich

$$y = b + c(x - a) + \frac{1}{2}F(x - a)^2 - \frac{1}{6}(P + Qc + RF)(x - a)^3.$$

Aus diesem Näherungswert von y läßt sich sodann derjenige eines benachbarten y finden; auf diese Weise läßt sich allmählich das Intervall zwischen dem gegebenen a und einem beliebig großen x zurücklegen; auf das eventuelle Auftreten von Unstetigkeiten macht Euler aufmerksam.

Ein sehr eigentümliches Verfahren wendet Lagrange an[2]): Die partielle Differentialgleichung

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 362. [2]) Miscellanea Taurinensia, t. II[2], 1760/61, p. 118. Im Original ist aus Versehen in der ersten Gleichung die Größe c weggelassen.

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c\,\frac{d^2 z}{dt(dx+dz)} + c\,\frac{2\,dz}{dx(x+z)} - c\,\frac{2z}{x(x+z)},$$

führt er mit Hilfe von Reihen zurück auf

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2\,d\frac{z}{x}}{dx}\right) - c\left(\frac{dz\,d^2 z}{dx^3} + 2\,\frac{z}{x} \times \frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right)$$
$$+ c\left(\frac{dz^2 d^2 z}{dx^4} + 2\,\frac{z^2}{x^2} \times \frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right) + \cdots.$$

Indem er auf der rechten Seite nur die ersten zwei Klammerausdrücke berücksichtigt, alle folgenden Glieder aber vernachlässigt, ohne natürlich den Einfluß dieser Unterdrückung auf die Integralgleichung festzustellen, gewinnt er eine Gleichung, die er auf Grund der Besonderheit, daß

$$\left(\frac{dz\,d^2 z}{dx^3} + 2\,\frac{z}{x} \times \frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right) dx$$

ein totales Differential ist, weiter behandeln kann.

Im folgenden gehen wir auf die Integration einer Gleichung ein, die für die Erfindung der Methode der Variation der Konstanten von Wichtigkeit geworden ist. Lagrange behandelt[1]) die für die Astronomie wichtige Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + L + iMy^2 + i^2 Ny^3 + \cdots = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $K, L, M, \ldots$, wo i eine sehr kleine Größe ist. Es wird sich zeigen, daß die einzelnen Näherungsgleichungen immer die Form

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + L + a\cos\alpha t + b\cos\beta t + \cdots$$

annehmen. Das Integral dieser Gleichung ist aber

$$y = f\cos Kt + \frac{g}{K}\sin Kt + \frac{L}{K^2}(\cos Kt - 1) + \frac{a}{K^2 - \alpha^2}(\cos Kt - \cos\alpha t)$$
$$+ \frac{b}{K^2 - \beta^2}(\cos Kt - \cos\beta t) + \cdots;$$

für den Fall — und der tritt gerade in unserm speziellen Problem ein —, daß eine der Zahlen $\alpha, \beta, \cdots = K$ wird, findet Lagrange den Wert des dadurch unbestimmt werdenden Terms durch Grenz-

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 262 ff.

übergang in bekannter Weise. Als erste Näherungsgleichung nimmt Lagrange

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L = 0.$$

Das Integral hiervon kann aus der oben angegebenen allgemeinen Formel entnommen werden, indem man $a = b = \cdots = 0$ setzt. So ergibt sich als erste Näherung

$$y = f\cos Kt + \frac{g}{K}\sin Kt + \frac{L}{K^2}(\cos Kt - 1);$$

Lagrange setzt „der Einfachheit halber" $g = 0$. Führt man diesen Wert von y in das Schlußglied der zweiten Näherungsgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMy^2 = 0$$

ein, so ergibt sich als integrable Form der zweiten Näherungsgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iM\left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^4}{K^4}\right) - 2i\frac{MLF}{K^2}\cos Kt$$
$$+ i\frac{MF^2}{2}\cos 2Kt = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$f + \frac{1}{K^2} = F$$

gesetzt wurde. Das Integral dieser Differentialgleichung kann wieder aus der allgemeinen Formel entnommen werden, und man erhält nach Auswertung des dabei auftretenden Terms $\frac{0}{0}$ einen zweiten Näherungswert. Indessen geht bei Ausführung des Grenzübergangs ein Summand von der Form $At\sin Kt$ in das Integral ein, und bei Fortsetzung der Methode würden auch Glieder auftreten, die in t^2, t^3 usw. multipliziert sind. Dieser Umstand macht die gefundene Reihenentwicklung für die Praxis unbrauchbar. Lagrange sucht deshalb die Reihe so umzuformen, daß sie derartige Terme nicht mehr enthält. Sein Verfahren ist jedoch ziemlich mühevoll[1]): verständlicher ist eine Abhandlung von Laplace über denselben Gegenstand.[2]) Laplace bezeichnet sein Verfahren als eine nouvelle méthode d'approximation. Sie besteht darin, sagt er, daß man die willkürlichen Konstanten in den angenäherten Integralen variieren läßt und so womöglich die Kreisbogen (er meint damit die Potenzen von t) zum Verschwinden bringt. Diese Methode ist, fährt er fort, wenn ich mich nicht

---

[1]) Das Schlußresultat Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 273.
[2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 651 ff.

täusche, vollständig neu und von großer Fruchtbarkeit für die Rechnung. Diese Worte beweisen, daß sich Laplace der Neuheit, Eigenart und Wichtigkeit seiner Methode vollkommen bewußt ist. Zur Integration von

$$0 = \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + y - l + \alpha y^2,$$

wo α sehr klein und konstant ist, setzt Laplace ganz ähnlich wie Lagrange zuerst

$$0 = \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + y - l,$$

woraus

$$y = l + p \sin t + q \cos t,$$

wo p und q zwei willkürliche Konstante sind. Setzt man jetzt

$$y = l + p \sin t + q \cos t + \alpha z$$

in die ursprüngliche Differentialgleichung ein, wobei l, p, q, α konstant sind und z eine Funktion von t ist, vernachlässigt hierbei α^2 und α^3 und dividiert mit α weg, so ergibt sich

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z + l^2 + p^2 \sin t^2 + q^2 \cos t^2 + 2lp \sin t + 2lq \cos t$$
$$+ 2pq \sin t \cos t = 0.$$

Diese Gleichung liefert ein Integral

$$z = -\frac{[2l^2 + p^2 + q^2]}{2} - lqt \sin t + lpt \cos t + \frac{q^2 - p^2}{6} \cos 2t + \frac{pq}{3} \sin 2t.$$

Bis hierher unterscheidet sich das Verfahren von dem Lagranges nicht wesentlich; um die mit t behafteten Glieder unschädlich zu machen, wird folgender Gedankengang benutzt: Substituiert man in der ursprünglichen Differentialgleichung $T + t_1$ an Stelle von t, so wird sie in ihrer Form nicht geändert. Man kann also das oben abgeleitete Integral durch ein anderes ersetzen, in welchem statt p und q die Konstanten $'p$ und $'q$, statt t die Variable $T + t_1$ auftreten. Nun ist der Umstand von Bedeutung, daß für $T = 0$ und $\alpha = 0$ die Gleichungen $'p = p$ und $'q = q$ statthaben, woraus Laplace schließt, daß $'p$ und p bzw. $'q$ und q sich um Größen von derselben Ordnung wie α unterscheiden. Er setzt demzufolge

$$'p = p + \delta p \quad \text{und} \quad 'q = q + \delta q.$$

Die beiden Integralgleichungen für y liefern dann bei Vernachlässigung aller Größen, die mit α^2, α^3, ... gleiche Rangordnung haben, durch Subtraktion

$$0 = [\delta p + \alpha l T q] \cdot \sin t + (\delta q - \alpha l T p) \cdot \cos t.$$

Diese Gleichung zerfällt aber, da t variabel und T konstant, in die beiden folgenden

$$\delta p = -\alpha l T \cdot q \quad \text{und} \quad \delta q = \alpha l T \cdot p.$$

Hieraus folgert Laplace

$$'p = f \cdot \cos \alpha l T - h \cdot \sin \alpha l T \quad \text{und} \quad 'q = f \cdot \sin \alpha l T + h \cdot \cos \alpha l T.^{1)}$$

Später[2]) kommt Laplace noch einmal auf das Problem der Entfernung der Potenzen von t zurück. Er geht jetzt von der allgemeineren Gleichung

$$0 = \frac{\partial \partial y}{\partial t^2} + h^2 y + T + \alpha Y$$

aus, wo Y eine ganze rationale Funktion von α, y und den Sinus und Kosinus von t sein soll. Ein Ansatz der Form

$$y = z + \alpha z^{\mathrm{I}} + \alpha^2 z^{\mathrm{II}} + \alpha^3 z^{\mathrm{III}} + \cdots$$

liefert, wenn man die Terme gleicher Ordnung in α allemal gleich Null setzt, die Gleichungen

$$0 = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + h^2 z + T; \quad 0 = \frac{\partial^2 z^{\mathrm{I}}}{\partial t^2} + h^2 z^{\mathrm{I}} + T^{\mathrm{I}};$$

$$0 = \frac{\partial^2 z^{\mathrm{II}}}{\partial t^2} + h^2 z^{\mathrm{II}} + T^{\mathrm{II}} \quad \text{usw.},$$

wo $T^{(i)}$ eine Funktion von $z, z^{\mathrm{I}}, \ldots z^{(i-1)}$, sowie der Sinus und Cosinus von t ist. Treibt man die Annäherung bis zur Ordnung von α^n, so hat man damit $n+1$ Gleichungen, deren sukzessive Integration aber im allgemeinen Kreisbogen in die Lösung einführt. Laplace behandelt nun zunächst das spezielle Beispiel

$$Y = my \cos 2t$$

nach dieser Methode und schließt aus der Form des Integrals, daß im allgemeinen Fall die Lösung folgende Form besitzen wird:

$$y = [p + At + Bt^2 + \cdots] \sin ht + [q + Mt + Nt^2 + \cdots] \cos ht + R.$$

Hierbei sind $A, B, \ldots M, N, \ldots$ ganze rationale Funktionen von p, q und α; R ist eine ganze rationale Funktion von p, q, α, t und verschiedenen Sinus und Cosinus, worunter jedoch $\sin ht$ und $\cos ht$ sich nicht befinden. Laplace formt diesen Ausdruck so um, daß an

---

[1]) Macht man die Probe, so wird $\delta\alpha$ an Stelle von α auftreten. Eine jener kleinen Ungenauigkeiten, wie sie in diesen für die Praxis geschriebenen Aufsätzen häufig zu finden sind. [2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1777 (1780), p. 373 ff. Vgl. auch die Histoire desselben Bandes, p. 55.

Stelle der Potenzen von t solche von $t - \theta$ auftreten, wo θ eine neue Konstante ist. Trotzdem kann der Ausdruck, wie er sagt, dadurch nicht allgemeiner werden, da er bereits die zwei Integrationskonstanten p und q enthält. Auf Grund einer Überlegung, welche der oben auseinandergesetzten analog ist, findet Laplace endlich folgende Regel zur Bildung eines Integrals, welches die Potenzen von t nicht enthält: Stellt man das Integral aus dem Gleichungssystem für z, z^I usw. nach gewöhnlichen Methoden in der vorerwähnten Form dar und unterdrückt nachträglich alle Glieder, die t und seine Potenzen explizite enthalten, so hat man das Integral in der gewünschten Form, sofern man nur für p und q die Werte einsetzt, welche sich durch Integration der Gleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial t} = A \quad \text{und} \quad \frac{\partial q}{\partial t} = M$$

ergeben; das gesuchte Integral wird wieder zwei Integrationskonstanten enthalten. Im folgenden zeigt Laplace[1]), wie sich seine Methode auf ein in der Störungstheorie brauchbares Simultansystem ausdehnen läßt. Dasselbe lautet:

$$0 = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + k^2 y + T + \alpha Y; \quad 0 = \frac{\partial^2 y^I}{\partial t^2} + k^{I2} y^I + T^I + \alpha Y^I; \ldots,$$

die $T, T^I \ldots$ sind hierbei ganze rationale Funktionen der Sinus und Kosinus von t, die $Y, Y^I, \ldots$ ganze rationale Funktionen derselben Größen, sowie von α und den n Variabeln $y, y^I, \ldots$. Endlich überträgt Laplace seinen Gedankengang noch auf die Integration von

$$0 = \frac{\partial^n y}{\partial t^n} + p,$$

wo p eine Funktion von y, seinen Ableitungen nach t, Sinus, Cosinus, Exponentialfunktionen mit dem Argument t, nicht aber den Potenzen von t ist.

Die Entfernung der Kreisbogen aus dem Integral, die Lagrange und Laplace durch geistreiche Überlegungen bewerkstelligt hatten, leistet Trembley, dem die Methode der Variation der Konstanten, und nicht bloß in der Laplaceschen, sondern auch in der viel durchsichtigeren, weniger anfechtbaren Lagrangeschen Form von 1775 (vgl. S. 932), verdächtig erscheint, auf anderem Wege vermöge seiner Geduld und Ausdauer im Rechnen.[2]) Trembley erkennt ganz richtig, daß das Auftreten der Kreisbogen nur auf Täuschung beruht; denn

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1777 (1780), p. 384. [2]) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1786/87 (1792), p. 368 ff.

führt man die Rechnung soweit durch, daß das Fortschreitungsgesetz der einzelnen Terme erkannt wird, so findet man, daß sich die Kreisbogen zu Potenzreihen zusammenfassen lassen, die durch Exponentialfunktionen summierbar sind. Da aber die Gleichung

$$\frac{ddy}{dt^2} + y - l + \alpha y^2 = 0$$

bzw. die Ableitung des von Laplace gegebenen von Kreisbogen freien Integrals bei Trembley allein zehn Quartseiten erfordert, zeigen wir sein Verfahren an einem einfacheren Beispiel. Sei gleichzeitig

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 2ix)z \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dx} = -(1 + 2ix)y,$$

wo i eine sehr kleine Größe bedeutet. $i = 0$ gibt zwei Näherungsgleichungen, aus denen durch Kombination die Gleichung

$$\frac{ddy}{dx^2} + y = 0$$

folgt. Korrigiert man die daraus erhältlichen Näherungswerte von y und z durch die Zusatzglieder iy' bzw. iz', so ist

$$y = Ae^{x\sqrt{-1}} + Be^{-x\sqrt{-1}} + iy';$$
$$z = A\sqrt{-1}\,e^{x\sqrt{-1}} - B\sqrt{-1}\,e^{x\sqrt{-1}} + iz'.$$

Indem man B einstweilen gleich Null setzt, ergibt sich durch Substitution in das ursprüngliche System das genäherte System

$$\frac{dy'}{dx} = 2Ax\sqrt{-1}\cdot e^{x\sqrt{-1}} + z'; \quad \frac{dz'}{dx} = -2Axe^{x\sqrt{-1}} - y'.$$

Man erhält hieraus y' und z' und hieraus verbesserte Werte von y und z, die man sogleich wieder mit Zusatzgliedern i^2y'' und i^2z'' versieht. Fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens ergibt schließlich:

$$y = Ae^{x\sqrt{-1}}\left(1 + \frac{i}{1}x^2\sqrt{-1} - \frac{i^2}{1\cdot 2}x^4 - \frac{i^3}{1\cdot 2\cdot 3}x^6\sqrt{-1} + \cdots\right)$$

$$z = A\sqrt{-1} - e^{x\sqrt{-1}}\left(1 + \frac{i}{1}x^2\sqrt{-1} - \frac{i^2}{1\cdot 2}x^4 - \frac{i^3}{1\cdot 2\cdot 3}x^6\sqrt{-1} + \cdots\right)$$

d. h. $\quad y = Ae^{x\sqrt{-1} + ix^2\sqrt{-1}}; \quad z = A\sqrt{-1}\cdot e^{x\sqrt{-1} + ix^2\sqrt{-1}}$

Ähnlich hätte man von vornherein statt B die Integrationskonstante A gleich Null setzen können; man hätte dann

$$y = B\cdot e^{-x\sqrt{-1} - ix^2\sqrt{-1}}; \quad z = -B\sqrt{-1}\cdot e^{-x\sqrt{-1} - ix^2\sqrt{-1}}$$

erhalten. Aus beiden partikulären Integralen läßt sich sofort das

vollständige Integral zusammensetzen. Im folgenden[1]) verbessert Trembley eine von d'Alembert 1769 in den Pariser Memoiren entwickelte Näherungsmethode, deren Grundgedanke darin besteht, daß man eine gegebene Differentialgleichung wiederholt differentiiert und die so erhaltenen Gleichungen derart zu kombinieren sucht, daß man eine integrable Gleichung höherer Ordnung erhält, welche die ursprüngliche näherungsweise zu ersetzen vermag.

Wir haben im vorausgehenden die Methode der Variation der Konstanten zum erstenmal bei Laplace mit vollem Bewußtsein ihrer Eigenart auftreten sehen; die Idee selbst, eine Größe zeitweilig als konstant und dann als variabel aufzufassen, ist indessen schon lange genug vorbereitet. Zunächst sei an die Bestimmung des Integrals der totalen linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit konstanten Koeffizienten im Fall gleicher Wurzeln erinnert (vgl. S. 928, Note 1), die bewerkstelligt wurde, indem man den Wurzeln, d. i. in Wirklichkeit konstanten Größen, sehr kleine, gegen Null abnehmende Differenzen erteilte, ohne sich mit der Frage nach der Berechtigung eines solchen Schrittes aufzuhalten. Euler behandelt[2]) folgende Aufgabe: Sei V eine gegebene Funktion von x und y, es soll das Differential von

$$Z = \int V dx,$$

wo die Integration bei konstantem y vorgenommen wurde, bestimmt werden, wenn dabei auch y variabel angenommen wird. Euler erhält unschwer

$$dZ = V dx + dy \int dx \left(\frac{dV}{dy}\right).$$

Kurz darauf stellt er die Aufgabe, aus einer gegebenen Differentialgleichung, die einen Parameter enthält, jene Gleichung abzuleiten, welche entsteht, wenn man die Integralgleichung so differentiiert, daß dabei auch jener Parameter variabel ist. Die Störungsgleichungen des Mondes werden von Euler und späteren mit Benutzung des Umstandes abgeleitet, daß gewisse Bewegungsgleichungen sowohl bei Konstanz als bei Variabilität bestimmter Bahnelemente bestehen müssen. Nach ihm hat Lagrange dieselbe Methode in seiner Abhandlung über die Theorie von Jupiter und Saturn benutzt[3]) und das Prinzipielle und Eigenartige dieser Methode noch besonders betont; er ist es auch, der die Methode zuerst in weitestem Umfang

---

[1]) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1786/1787 (1792), p. 387. Siehe auch p. 397. [2]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 31. Vgl. auch Klügels mathematisches Wörterbuch, I. Abtlg., unter „Differentialgleichung", S. 891. [3]) Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766). p. 323.

gebraucht hat. Von Variation der Konstanten kann man auch bei Lagranges Herleitung des singulären Integrals aus dem vollständigen Integral reden; in allen diesen Fällen handelt es sich jedoch nicht um die uns geläufige Methode der Variation der Konstanten. Diese besteht vielmehr darin, daß man statt einer gegebenen Differentialgleichung eine andere, die aus der ursprünglichen entweder durch Vernachlässigung einzelner Glieder oder dadurch, daß man einzelne Variable konstant setzt, hervorgeht, behandelt, und in dem Integral dieser Hilfsgleichung nachträglich die Integrationskonstanten oder einstweilen konstant gesetzten Veränderlichen variieren läßt. In diesem Sinne ist die Variation der Konstanten nur eine spezielle Näherungsmethode, die durch passende Korrektion einen halbwegs brauchbaren Wert genau richtig macht. Hierher könnte man z. B. die Integration totaler Differentialgleichungen mit mehr als 2 Variabeln, welche die Integrabilitätsbedingungen erfüllen, rechnen, die man bekanntermaßen dadurch vollzieht, daß man in der ursprünglichen Gleichung nur 2 Variable variieren läßt, integriert und nachträglich die Integrationskonstante als Funktion der konstant gelassenen Variablen ansieht; diese Methode ist zu Beginn des hier behandelten Zeitabschnitts bereits bekannt. Ganz analog geht man bei partiellen Differentialgleichungen vor, die nur die Ableitung nach einer Variabeln enthalten, und wir werden sehen, daß Lagrange einen ähnlichen Gedankengang in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit großem Erfolg verwertet hat (vgl. S. 970). Die eleganteste Anwendung der Variation der Konstanten hat Lagrange mit der Integration der vollständigen linearen totalen Differentialgleichung und Differenzengleichung n^{ter} Ordnung gegeben (vgl. S. 932). Derselbe geht auch auf die Möglichkeit der Integration von

$$\frac{d^n y}{d x^n} + P = \Pi,$$

wo P und Π Funktionen von x, y, $\frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}$ sind, mittels Variation der Konstanten ein, falls das vollständige Integral von

$$\frac{d^n y}{d x^n} + P = 0$$

bekannt ist.[1]) Ferner erwähnt er, daß die Methode der Variation der Konstanten mit Vorteil auf die durch Vernachlässigung sehr kleiner Größen erhaltenen angenäherten Integrale von Simultansystemen angewendet werden kann[2]), daß jedoch für ein beliebiges vollständiges

[1]) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1775 (1777), p. 192.
[2]) Ebenda, p. 195.

Integral einer Gleichung 2. Ordnung dieselbe Methode plus curieuse qu'utile sei.[1])

In Verbindung mit der Methode der unendlichen Reihen ist die Integration durch bestimmte Integrale zu nennen. Besonders Euler hat sich mit dieser Aufgabe beschäftigt; und wie er in der Theorie des Multiplikators die zu einem gegebenen integrierenden Faktor gehörige Differentialgleichung sucht, geht er auch hier von einem gegebenen Integral aus und fragt nach der äquivalenten Differentialgleichung. Bezüglich der Integration der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung nach diesem Verfahren, per quadraturas curvarum, wie er sich ausdrückt, bemerkt er selbst[2]), es sei dabei zu beachten, daß die Wahl jenes Integrals nicht völlig von der Willkür des Rechners abhängt, sondern von vornherein die Anlage haben muß, bei der Entwicklung der zugehörigen Differentialgleichung auf die 2. Ordnung zu führen; es stehe daher nicht zu hoffen, auf diesem Wege jemals zu einer beliebig vorgegebenen Differentialgleichung zu gelangen. Letzterer Aufgabe, eine gegebene Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral zu integrieren, sucht Euler dadurch beizukommen, daß er das Integral zuerst in Form einer unendlichen Reihe entwickelt und diese nachträglich in ein bestimmtes Integral verwandelt[3]); das Integral der auf Seite 911 erwähnten Differentialgleichung erhält er auf diesem Weg in mehrfach verschiedener Form. Dieselbe Methode wendet, wie wir sehen werden (vgl. S. 1006), Laplace auf die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung an; er stellt das Integral als unendliche Reihe dar, die er in ein bestimmtes Integral umformt.

Mit der Schilderung dieser Methoden haben wir die Gesichtspunkte, welche für totale wie partielle Differentialgleichungen in gleicher Weise in Betracht kommen, ziemlich erschöpft und wir wenden uns zunächst ausschließlich den totalen Differentialgleichungen zu. Hier ist es die lineare Gleichung, d. h. die Gleichung, deren Koeffizienten Funktionen der unabhängigen Variablen allein sind, welche das Hauptinteresse der Mathematiker auf sich gezogen hat, und ihrer Untersuchung ist eine ganze Reihe von Abhandlungen gewidmet. Auf diesem Gebiet hatten schon Euler und d'Alembert viel geleistet; sie hatten zunächst die unvollständige, dann aber auch die vollständige Gleichung mit konstanten Koeffizienten

---

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 101. Hier mag noch erwähnt werden, daß auch Euler gelegentlich aus partikulären Integralen die vollständigen durch Variation der Konstanten herleitet; man vgl. einen Aufsatz vom Jahre 1778 in Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XIII, 1795/96 (1802), p. 3 ff.

[2]) Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 308. [3]) Ebenda, vol. II, p. 310 ff.

integriert, auch den Fall gleicher und komplexer Wurzeln der dabei auftretenden Hilfsgleichung behandelt.[1]) Den Fortschritt zu nichtkonstanten Koeffizienten macht Lagrange[2]); er wird dabei zu einer Gleichung geführt, die wir heutzutage die Lagrangesche Adjungierte nennen. Multipliziert man die Gleichung

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots = T,$$

wo $L, M, N, \ldots T$ Funktionen von t sind, mit $z\,dt$, wo z eine noch zu bestimmende Funktion von t ist, und integriert, so erhält man durch partielle Integration

$$\int Mz\frac{dy}{dt}dt = Mzy - \int\frac{d\cdot Mz}{dt}y\,dt$$

$$\int Nz\frac{d^2y}{dt^2}dt = Nz\frac{dy}{dt} - \frac{d\cdot Nz}{dt}y + \int\frac{d^2\cdot Nz}{dt^2}\cdot y\,dt$$

. . . .

Setzt man diese Ausdrücke in die ursprüngliche Differentialgleichung ein, so kommt

$$y\left(Mz - \frac{d\cdot Nz}{dt} + \cdots\right) + \frac{dy}{dt}\left(Nz - \frac{d\cdot Pz}{dt} + \cdots\right) + \cdots$$
$$+ \int\left(Lz - \frac{d\cdot Mz}{dt} + \frac{d^2\cdot Nz}{dt^2} - \cdots\right)y\,dt = \int Tz\,dt.$$

Ist der Klammerausdruck unter dem Integralzeichen gleich Null — eine Relation, die man als Differentialgleichung für z auffassen kann — so bleibt eine Differentialgleichung für y stehen, deren Ordnung im Vergleich zu der gegebenen Differentialgleichung um einen Grad niedriger ist. Die Relation zur Bestimmung von z behandelt Lagrange auf dieselbe Art weiter; er verlangt eine Funktion y von t zu finden, deren Kenntnis, genau wie vorher die der Funktion z, Ordnungserniedrigung ermöglicht. Er wird dabei auf eine Differentialgleichung für y zurückgeführt, die sich von der Anfangsgleichung in y nur dadurch unterscheidet, daß die rechte Seite nicht T, sondern 0 ist. Lagrange wird damit zum Entdecker des Satzes, daß die Adjungierte der Adjungierten die ursprüngliche unvollständige Gleichung ist; da er aber für die Adjungierte keinen besonderen Namen hat, so hebt er diese auffällige Tatsache nicht besonders scharf hervor. Euler kommt in

[1]) Vgl. diese Vorl., III[2], S. 892—895 bzw. S. 898. Den Fall gleicher Wurzeln behandelt d'Alembert auch unter Tangentes im Dictionnaire des mathématiques der Encyclopédie méthodique. [2]) Miscellanea Taurinensia, t. III[2], 1762/65 (1766), p. 179 ff.

einer Abhandlung von 1778 wieder auf die Frage der Ordnungserniedrigung, scheint aber die Resultate der Lagrangeschen Abhandlung, die er jedenfalls gelesen hatte, vollständig vergessen zu haben, wenigstens hält er sein Ergebnis für vollkommen neu; er formuliert[1]) folgendes Gesetz: Die Gleichung

$$pz + qdz + rddz + sd^3z + td^4z + \cdots = 0^{2})$$

wird ein totales Differential mittels eines Multiplikators Z, welcher sich aus der „konjugierten Gleichung"

$$PZ + QdZ + Rd^2Z + Sd^3Z + Td^4Z + \cdots = 0$$

bestimmt, wo

$$\begin{aligned}
P &= p - dq + ddr - d^3s + d^4t - \cdots \\
Q &= -q + 2dr - 3dds + 4d^3t - \cdots \\
R &= r - 3ds + 6ddt - \cdots \\
S &= -s + 4dt - \cdots \\
T &= t - \cdots \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen nach $p, q, r, \ldots$ findet Euler, daß diese Größen durch die $P, Q, R, \ldots$ genau in derselben Weise ausgedrückt werden, wie letztere durch jene; daraus schließt er, daß von den beiden Gleichungen für z bzw. Z eine die konjugierte der anderen ist. Eulers Darstellung bedeutet insofern einen Fortschritt gegenüber Lagrange, als in ihr erst die vollkommen gleiche Bauart, die durchgehende Dualität zweier adjungierter Gleichungen erkannt und durch eine übersichtliche Bezeichnungsweise (kleine und große Buchstaben) angedeutet ist; Lagrange hatte nur beobachtet, daß bei zweimaliger Anwendung seines Verfahrens schließlich die ursprüngliche, aber unvollständige Gleichung resultiert.

Lagranges Hauptverdienst ist in der Aufstellung allgemeiner Sätze über die Integrale der linearen Differentialgleichungen zu sehen, m. a. W. in der Schaffung einer Theorie dieser Integrale; die Form des vollständigen Integrals als Summe von unabhängigen, mit willkürlichen Konstanten multiplizierten Partikulärintegralen, der Zusammenhang zwischen vollständiger und unvollständiger Gleichung[3]), insbesondere aber die Einsicht, daß die Kenntnis von m Partikulärintegralen (valeur particulière) der letzteren eine Ordnungserniedrigung

---

[1]) Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XIV, 1797/98 (1805), p. 58.
[2]) Die Potenzen des Differentials der unabhängigen Veränderlichen sind hier einfach weggelassen. [3]) Für die Gleichung 2. Ordnung eingehend besprochen.

der ersteren um m Grad ermöglicht[1]), sind nach meiner Ansicht die vornehmsten Resultate der erwähnten Abhandlung. In der Praxis muß natürlich Lagrange häufig zu Reihenentwicklungen seine Zuflucht nehmen; so setzt er[2]) z. B. für

$$\frac{d^2x}{du^2} + \left(2k + \frac{n}{u}\right)\frac{dx}{du} + \frac{nkx}{u} = 0,$$

auf welche Form er von

$$ast^{2m} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0$$

ausgehend kommt, die Reihe

$$x = Au^r + Bu^{r+1} + Cu^{r+2} + \cdots$$

an und bestimmt die unbestimmten Koeffizienten in gewohnter Weise. Die Lagrangesche Theorie der linearen Gleichung beliebiger Ordnung läßt sich sehr vorteilhaft auf die Gleichung

$$Ay + B(h+kt)\frac{dy}{dt} + C(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} + \cdots = T$$

anwenden, wo $h, k, A, B, \ldots$ Konstante sind. Lagrange bildet[3]) die Adjungierte und setzt versuchsweise deren Integral $(h+kt)^r$. Das gibt eine Gleichung für r, nämlich

$$A - Bk(r+1) + Ck^2(r+1)(r+2) - \cdots = 0.$$

Lagrange geht dann auf die Ermittlung des vollständigen Integrals der ursprünglichen Gleichung ein. Als Anwendung bringt er[4]) die Behandlung einer Gleichung, die eine unbekannte, zu bestimmende Funktion enthält; das Problem führt mit Zuhilfenahme des Taylorschen Satzes auf eine Gleichung der erwähnten Art von unendlich hoher Ordnung. Solche Gleichungen, allerdings nur mit konstanten Koeffizienten, hatte schon Euler vor ihm behandelt (vgl. diese Vorl., III², S. 896); in seiner Integralrechnung finden sich wieder eine Menge, teils schon früher gelöster derartiger Gleichungen[5]), aber weder Euler noch Lagrange erkennen oder erwähnen, daß in die Lösung dieser Gleichungen, weil sie im Grunde genommen nichts als Differenzengleichungen sind, eine willkürliche Funktion eingeht. Die unendlich vielen Integrationskonstanten ihrer Lösung konnten sie deshalb nicht zu dieser Einsicht führen, da ihnen die Darstellbarkeit einer beliebigen Funktion durch trigonometrische Funktionen unbekannt war.[6]) Glei-

---

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 188. [2]) Ebenda, p. 187. [3]) Ebenda, p. 190. [4]) Ebenda, p. 201. [5]) Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 459, 463, 476, 477, 480. [6]) Vgl. diese Vorl., III², S. 907.

chungen von unendlich hoher Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten behandelt Euler nicht, obwohl er z. B.

$$X = Ay + \frac{Bxdy}{dx} + \frac{Cx^2ddy}{dx^2} + \cdots$$

für beliebige Ordnungen untersucht.

An die Möglichkeit der Ordnungserniedrigung bei Kenntnis von Partikulärintegralen knüpft d'Alembert in einem Schreiben an Lagrange[1]) wieder an und bringt einen neuen Beweis dafür; derselbe Forscher gibt an anderer Stelle den bekannten Satz, daß das vollständige Integral der vollständigen Gleichung aus zwei Teilen sich additiv zusammensetzt, nämlich aus einem Partikulärintegral der vollständigen und dem vollständigen Integral der unvollständigen Gleichung.

Laplace behandelt die lineare Differentialgleichung[2]) nicht wie Lagrange mit Hilfe eines einzigen Multiplikators, sondern bedient sich gleich eines ganzen Multiplikatorsystems. Sei

$$X = y + H \cdot \frac{dy}{dx} + H' \frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + H^{n-1} \frac{d^ny}{dx^n},$$

wo X, H, H', ... Funktionen von x sind. Laplace setzt

$$\omega \frac{dy}{dx} + y = T,$$

wo ω und T erst näher zu bestimmende Funktionen von x sind. Durch Differentiation ergibt sich daraus

$$\omega \frac{ddy}{dx^2} + \left(\frac{d\omega}{dx} + 1\right) \frac{dy}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega \frac{d^ny}{dx^n} + \left(\frac{n-1}{1} \cdot \frac{d\omega}{dx} + 1\right) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \frac{d^{n-1}\omega}{dx^{n-1}} \frac{dy}{dx} = \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}}.$$

Diese Gleichungen multipliziert Laplace bzw. mit ω', ω'', ... und addiert unter Hinzuziehung von

$$\omega \frac{dy}{dx} + y = T.$$

So ergibt sich eine Gleichung, die durch Vergleichung mit der ursprünglichen auf folgendes System führt:

$$X = T + \omega' \cdot \frac{dT}{dx} + \omega'' \frac{d^2T}{dx^2} + \cdots \omega^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}T}{dx^{n-1}}$$

---

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. III[2], 1762/65 (1766), p. 381—396. Vgl. auch die Pariser Memoiren für 1767 und 1769. [2]) Ebenda (Misc. Taur.), t. IV[2], 1766/69, p. 173 ff. (verdruckt statt 273).

$$\omega\,\omega^{(n-1)} = H^{(n-1)}$$

$$\omega\,\omega^{(n-2)} + \omega^{(n-1)} + \frac{n-1}{1}\cdot\omega^{(n-1)}\frac{d\omega}{dx} = H^{(n-2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\omega + \omega' + \omega'\frac{d\omega}{dx} + \cdots = H.$$

Diese Gleichungen gestatten aber die $\omega', \omega'', \ldots$ durch ω und die $H', H'', \ldots$ auszudrücken. Durch Substitution der so erhaltenen Werte in

$$H = \omega + \omega' + \omega'\frac{d\omega}{dx} + w''\frac{dd\omega}{dx^2} + \cdots$$

und

$$X = T + \omega'\frac{dT}{dx} + \omega''\frac{d^2T}{dx^2} + \cdots$$

ergeben sich endlich zwei Differentialgleichungen für ω und T; dabei ist Ordnungserniedrigung erzielt worden. Hat man aus den letzterwähnten beiden Gleichungen eine Reihe Partikulärlösungen $\beta, \beta', \ldots$ von ω und die zugehörigen $T, T', \ldots$ gefunden, so erhält man mit Hilfe von

$$\omega\frac{dy}{dx} + y = T$$

das Integral

$$y = e^{-\int\frac{dx}{\beta}}\cdot\left(C + \int\frac{T}{\beta}\cdot e^{\int\frac{dx}{\beta}}\cdot dx\right) + e^{-\int\frac{dx}{\beta'}}\cdot\left(C + \int\frac{T'}{\beta'}\cdot e^{\int\frac{dx}{\beta'}}dx\right) + \cdots$$

Auf die weitere Theorie der bei Anwendung dieser Methode auftretenden Ausdrücke, insbesondere für den Fall konstanter $H, H', \ldots$[1]) kann hier nicht näher eingegangen werden, da die Resultate nicht neu und die auftretenden Formeln alle ziemlich kompliziert sind. Laplace behandelt speziell auch die Gleichung 2. Ordnung, welche auf die allgemeine Riccatische Differentialgleichung führt.[2])

Der nächste bedeutende Fortschritt ist die Heranziehung der Methode der Variation der Konstanten zur Nutzbarmachung des Zusammenhangs zwischen vollständiger und unvollständiger Differentialgleichungen durch Lagrange.[3]) Sei die lineare Gleichung n^{ter} Ordnung gegeben:

$$Py + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + V\frac{d^ny}{dx^n} = X,$$

wo $X, P, Q, R, \ldots$ Funktionen von x sind. Im Fall $X = 0$ sei das

---

[1]) Miscellanea Taurinensia. t. IV², 1766/69, p. 295. [2]) Ebenda, p. 297.
[3]) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1775 (1777), p. 190.

vollständige Integral der Gleichung bekannt; dieses besitzt notwendig die Form

$$y = ap + bq + cr + \cdots,$$

wo $a, b, c, \ldots$ n Integrationskonstanten, $p, q, r, \ldots$ ebensoviele partikuläre Werte von y darstellen. Betrachtet man, fährt Lagrange fort, die willkürlichen Größen $a, b, c, \ldots$ als unbestimmte Variable und setzt in den Ausdrücken $dy, d^2y, \ldots d^{n-1}y$ den Teil, der von der Variabilität von $a, b, c, \ldots$ herrührt, immer gleich Null, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
dy &= adp + bdq + cdr + \cdots\\
0 &= pda + qdb + rdc + \cdots\\
d^2y &= ad^2p + bd^2q + cd^2r + \cdots.\\
0 &= dpda + dqdb + drdc + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d^{n-1}y &= ad^{n-1}p + bd^{n-1}q + cd^{n-1}r + \cdots\\
0 &= d^{n-2}pda + d^{n-2}qdb + d^{n-2}rdc + \cdots
\end{aligned}$$

und endlich

$$\begin{aligned}
d^ny = {}& ad^np + bd^nq + cd^nr + \cdots\\
&+ d^{n-1}pda + d^{n-1}qdb + d^{n-1}rdc + \cdots.
\end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten also die Ausdrücke für $dy, d^2y, \ldots d^{n-1}y$ genau dieselbe Form, wie wenn $a, b, c, \ldots$ konstant wären, und auch d^ny unterscheidet sich von dem d^ny im Fall konstanter Koeffizienten nur durch das Zusatzglied $d^{n-1}pda + d^{n-1}qdb + d^{n-1}rdc + \cdots$. Da aber bei konstanten Koeffizienten die Ausdrücke für $y, dy, \ldots d^ny$ nach den Voraussetzungen über die Größen $a, b, c, \ldots p, q, r, \ldots$ der unvollständigen Differentialgleichung Genüge leisten, so müssen auch jetzt, im Fall der vollständigen Gleichung, bei Substitution obiger Ausdrücke für $y, dy, \ldots d^ny$ alle Terme sich gegenseitig fortheben, und nur das zu d^ny gehörige Zusatzglied und der Term X werden davon eine Ausnahme machen. Es resultiert also die Gleichung

$$d^{n-1}pda + d^{n-1}qdb + d^{n-1}rdc + \cdots = \frac{X}{V}dx^n,$$

welche mit den $n-1$ Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= pda + qdb + rdc + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
0 &= d^{n-2}pda + d^{n-2}qdb + d^{n-2}rdc + \cdots
\end{aligned}$$

zusammen n Gleichungen zur Bestimmung der Differentiale $da, db, dc, \ldots$ liefert.

Von späteren Arbeiten[1]) über die lineare Gleichung sei nur noch eine Abhandlung von Lorgna besprochen.[2]) Lorgna geht zunächst auf die vollständige Gleichung mit konstanten Koeffizienten ein; er substituiert für die abhängige Variable y den Ausdruck

$$y = \mu^{\int z\,dz} \int_c^z \left(u\,dx \cdot \mu^{-\int z\,dz}\right),$$

wo u und z neue Variable sind, während μ konstant ist, und drückt dy, ddy, ... durch z, u, y, du und das Differential dx der unabhängigen Veränderlichen x aus. Nach Einführung dieser Werte in die ursprüngliche Differentialgleichung setzt er den Teil, welcher den Faktor y besitzt, für sich gleich Null und erhält so zwei Gleichungen, deren eine nur z und seine Ableitungen nach u enthält, also als Bestimmungsgleichung für z benutzt werden kann. Zugleich ist Ordnungserniedrigung erreicht. Interessanter sind die Untersuchungen über die Gleichung 2. Ordnung[3])

$$M dx^2 = x^2(a + bx^n)ddy + x(e + fx^n)dx\,dy + (g + hx^n)y\,dx^2,$$

von der uns der Fall $M = 0$ schon wiederholt begegnet ist (vgl. S. 911 und 927). Durch die Substitution $y = \frac{z}{x}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} xM dx^2 = x^2(a + bx^n)ddz + x(-2a + e + (-2b + f)x^n)dx\,dz \\ + (2a - e + g + (2b - f + h)x^n)z\,dx^2, \end{aligned}$$

und diese Gleichung ist genau von derselben Form wie die ursprüngliche. Die wiederholte Anwendung analoger Substitutionen

$$z' = \frac{z''}{x}, \quad z'' = \frac{z'''}{x}, \quad \ldots$$

wird daher wieder eine Gleichung der alten Form hervorbringen, nämlich

$$\begin{aligned} x^m M dx^2 = x^2(a + bx^n)ddz^{(m-1)} + x(e - 2ma + (f - 2mb)x^n)dx\,dz^{(m-1)} \\ + ((m + m^2)a - me + g + ((m + m^2)b - m(f + h)x^n)z^{(m-1)}dx^2. \end{aligned}$$

Ist nun das letzte Glied gleich Null, so wird die Differentialgleichung bedeutend vereinfacht, und man kann ihr Integral leicht angeben. Ein derartiges Verschwinden wird eintreten, wenn die Gleichungen

$$m^2 a + m(a - e) + g = 0 \quad \text{und} \quad m^2 b + m(b - f) + h = 0$$

---

[1]) Siehe auch Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. VIII, 1799, parte I, p. 307 ff.
[2]) Ebenda, t. II, 1784, parte I, p. 177 ff. [3]) Ebenda, p. 197.

bei gegebenen Koeffizienten $a, b, c, \ldots$ beide durch das nämliche ganzzahlige m gelöst werden; dieses Kriterium hat die besondere Eigentümlichkeit von n unabhängig zu sein. Die Methode erinnert an die Laplacesche Kaskadenmethode für partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung (vgl. S. 1001 ff.). Auf dem nämlichen Wege leitet Lorgna ein ähnliches Kriterium für die Gleichung beliebiger Ordnung

$$Mdx^n = x^{m+1}(a+bX)ydx^n + x^{m+2}(c+eX)dydx^{n-1}$$
$$+ x^{m+3}(f+gX)ddydx^{n-2} + \cdots$$

ab; die Substitution, die hier zum Ziel führt, ist

$$y = \frac{v}{x^{m+1}}.$$

Von den nichtlinearen Differentialgleichungen ist wegen ihres Zusammenhangs mit der linearen Gleichung 2. Ordnung, sowie wegen ihrer Bedeutung für die Flächentheorie, Physik usw., die Riccatische Differentialgleichung wohl die interessanteste. Man versteht darunter heutzutage die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = a_0(x) + a_1(x)\cdot y + a_2(x)\cdot y^2,$$

und es scheint, daß d'Alembert als einer der ersten den Namen in weiterem Umfang als früher üblich gebraucht hat, wenn er die aus

$$\frac{dd\zeta}{dx^2} = \frac{-\lambda^2 x \pi^2 \zeta}{2aLe}$$

vermöge

$$\zeta = c^{\int p\,dx}$$

hervorgehende Gleichung als Riccatische bezeichnet.[1]) Spezielle Formen der allgemeinen Gleichung treten natürlich viel früher auf (vgl. Cantor III², S. 880)[2]), aber Lagrange[3]) und Euler bezeichnen gewöhnlich nur die Gleichung, die das Glied mit y^2 nicht enthält, als Riccatische; allerdings sagt Lagrange[4]) von der Gleichung

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{m}{x}\frac{dM}{dx} = k\cdot M$$

(vgl. S. 912), sie falle unter „le cas général de Riccati", sagt aber

[1]) Histoire de l'Académie de Berlin, t. XIX, 1763 (1770), p. 242. [2]) Nach einer gütigen Mitteilung von Herrn Professor von Braunmühl schon 1738 bei Euler: Commentarii Academiae Petropolitanae (1747), p. 46. [3]) Z. B. Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 189. [4]) Ebenda, t. II², 1760/61, p. 81.

nicht, was darunter zu verstehen sei; die angegebene Gleichung führt mittels

$$M = e^{\int z\,dx}$$

auf

$$\frac{dz}{dx} + z^2 - \frac{m}{x} \cdot z - k = 0,$$

doch ist die Substitution selbst an der betr. Stelle nicht angegeben. Der Zusammenhang mit der linearen Gleichung

$$ddy + Pdxdy + Qydx^2 = 0,$$

wo also P und Q Funktionen von x allein sind, sei hier im Anschluß an Eulers Integralrechnung[1]) dargestellt. Euler verlangt zunächst Ordnungserniedrigung, schreibt in üblicher Weise

$$q + Pp + Qy = 0$$

und erhält mittels der Substitutionen $p = uy$ und $q = vy$ die Gleichung

$$v = -Pu - Q.$$

Es ist aber

$$dy = uydx \quad \text{und} \quad udy + ydu = vydx.$$

Also

$$\frac{dy}{y} = udx = \frac{vdx - du}{u};$$

daraus folgt mit Hilfe von

$$v = -Pu - Q$$

endlich

$$du + uudx + Pudx + Qdx = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt bei Anwendung der Transformation

$$u = \frac{K + Mz}{L + Nz}$$

eine Gleichung von der Form

$$dz + Pzdx + Rzzdx + Qdx = 0,$$

die sich von der vorhergehenden nur durch das Auftreten der Funktion R unterscheidet; der am meisten ausgezeichnete Fall ist, sagt Euler, die Riccatische Gleichung

$$dz + zzdx = ax^n dx.$$

Endlich ist zu erwähnen, daß Euler imstande ist, die Riccatische Gleichung bei Kenntnis eines partikulären Integrals v durch die Sub-

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. II, p. 88 ff.

stitution $s = v + u^{-1}$ in eine lineare Gleichung überzuführen[1]) und bei Kenntnis zweier Partikulärlösungen durch Quadraturen zu erfüllen; der Satz von der Konstanz des Doppelverhältnisses von vier partikulären Integralen scheint erst in jüngerer Zeit gefunden worden zu sein.[2])

Von anderen speziellen Gleichungen, wie sie meist bei praktischen Aufgaben auftreten, sei beispielshalber die von Euler behandelte Gleichung

$$\frac{4n\,dds}{dn^2} + \frac{4ds}{dn} + \frac{ns}{1 - nn} = 0$$

angeführt[3]); Nikolaus Fuß schreibt[4]) über die Gleichung

$$t(1 + 4t)\frac{dds}{dt^2} - [(4n - 6)t + n]\frac{ds}{dt} + (nn - n)s = 0,$$

welche einen Spezialfall der Gaußischen Differentialgleichung darstellt, entwickelt s in eine Reihe nach Potenzen von t und leitet aus der ursprünglichen Differentialgleichung durch Transformation verschiedene neue ab. Eine Gleichung, die sich von der Riccatischen dadurch unterscheidet, daß die abhängige Variable auch in der 3. Potenz auftritt, findet Euler gelegentlich eines mechanischen Problems.[5]) Auf eine Menge interessanter, spezieller Gleichungen 2. Ordnung kommt Legendre in einem Aufsatz über die Figur der Planeten zu sprechen.[6]) Ungleich mehr Interesse beansprucht die Theorie der Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

wo X und Y Polynome in x bzw. y sind, die allerdings im Zusammenhang mit der Theorie der elliptischen Integrale zu betrachten ist (vgl. S. 795 ff.). Hier sei nur eine Untersuchung angeführt, welche ausschließlich auf Methoden beruht, wie sie für Differentialgleichungen in Anwendung gebracht werden. In einer Arbeit aus dem Jahre 1768, die sich die Auffindung von Differentialgleichungen, welche ein Additionstheorem zulassen, zur Aufgabe macht, behandelt Lagrange in direktem Anschlusse an Eulers einschlagende Arbeiten (s. o. S. 807) zunächst[7]) die Gleichung

---

1) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. VIII, 1760/61 (1763), p. 32 ff. Ebenda, t. IX, 1762/63 (1764), p. 162. 2) Hier sei noch ein Aufsatz von Lorgna über die Gleichung $Qdx + Py^2dx + dy = 0$ in Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. III, 1786 erwähnt. 3) Acta Academiae Petropolitanae 1780 (1784), pars II, p. 8. 4) Ebenda 1782 (1785), pars I, p. 107. 5) Ebenda, 1778, pars II, p. 162. Auf diese Gleichung geht Stephan Rumovski (1734 bis 1815) ebenda 1781 (1784), pars I, p. 147 ff. wieder ein. Eine andere spezielle Gleichung 1. Ordnung behandelt derselbe Nova Acta Acad. Petrop., t. XII, 1794 (1801), p. 192—195 (der Aufsatz stammt aus dem Jahre 1797). 6) Histoire de l'Académie des Sciences 1789 (1793), p. 372 ff. 7) Miscellanea Taurinensia, t. IV[2], 1766/69, p. 104.

$$\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2}}=\frac{dy}{\sqrt{\alpha+\beta y+\gamma y^2}}=dt.$$

Aus

$$\frac{dx^2}{dt^2}=\alpha+\beta x+\gamma x^2 \quad \text{und} \quad \frac{dy^2}{dt^2}=\alpha+\beta y+\gamma y^2$$

erhält er durch Differentiation und darauffolgender Division mit $\frac{dx}{dt}$ bzw. $\frac{dy}{dt}$ die Gleichungen

$$2\frac{d^2x}{dt^2}=\beta+2\gamma x \quad \text{und} \quad 2\frac{d^2y}{dt^2}=\beta+2\gamma y.$$

Die Substitution $x+y=p$ liefert

$$2\frac{d^2p}{dt^2}=2\beta+2\gamma p,$$

also

$$\frac{dp}{dt}=\sqrt{k+2\beta p+\gamma p^2};$$

hierbei bedeutet k die Integrationskonstante. Mit Berücksichtigung von

$$p=x+y \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dt}=\frac{dx+dy}{dt}$$

folgt sofort die Gleichung

$$\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}+\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)}=\sqrt{[k+2\beta(x+y)+\gamma(x+y)^2]},$$

welche den Zusammenhang zwischen x und y algebraisch ausdrückt. Analog führt die Substitution $x-y=q$ zu

$$2\frac{d^2q}{dt^2}=2\gamma q$$

und damit zu

$$\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}-\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2)}=\sqrt{[H+\beta(x-y)^2]}.$$

Lagrange wendet seine Methode auch auf elliptische Integrale an und behandelt dann[1]) allgemein die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

wo X und Y dieselbe ganze rationale Funktion beliebigen Grades von x bzw. y darstellen; er probiert verschiedene mögliche Formen der Integralgleichung[2]), führt aber die Untersuchung wegen ihrer Schwierigkeit nicht zu Ende; nach seiner Ansicht ist die Entdeckung weiterer Differentialgleichungen, die zunächst auf Transzendenten führen, aber auch durch eine algebraische Gleichung integrabel sind, nicht ausgeschlossen.

---

[1]) Miscellanea Taurinensia, t IV², 1766/69, p. 111. [2]) Ebenda, p. 114, 124. Vgl. S. 810 dieses Bandes.

Totale Differentialgleichungen höheren Grades finden sich in Eulers Integralrechnung viel behandelt; der wichtigste Fall ist derjenige, in welchem die eine Variable nicht explizite in die Differentialgleichung eingeht. Man erhält dann das Integral zunächst in Parameterdarstellung. So liefert[1])

$$x^3 + p^3 = apx,$$

wo $p = \frac{dy}{dx}$, bei Anwendung der Substitution $p = ux$ die Gleichungen

$$x = \frac{au}{1+u^3} \quad \text{und} \quad p = \frac{auu}{1+u^3},$$

also vermöge $dy = pdx$ auch

$$y = aa\int \frac{u\,du\,(1-2u^3)}{(1+u^3)^3}.$$

Die Schlußgleichung zwischen x und y, welche gerade bei diesem Beispiel leicht aufzustellen ist, gibt Euler nicht an. Dagegen bemerkt er, daß jede Gleichung zwischen x, y und p, die in x und y homogen ist, eine derartige Integration in Parameterdarstellung gestattet. Durch die Substitution $y = ux$ wird nämlich die Gleichung auf eine solche zwischen u und p reduziert; die beiden Gleichungen

$$dy = udx + xdu \quad \text{und} \quad dy = pdx$$

ergeben

$$pdx - udx = xdu,$$

woraus

$$lx = \int \frac{du}{p-u}$$

folgt. Da sich aber p durch u ausdrückt, so ist damit x als Funktion von u und wegen $y = ux$ auch y als Funktion von u gefunden. Hier sei auch noch eine Gleichung behandelt, auf welche Lagrange[2]) bei Gelegenheit der Untersuchung der Evolvente einer ebenen Kurve stößt:

$$y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \varphi\left[x - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\,\frac{dy}{dx}\right].$$

Er ersetzt das Argument von φ durch p und erhält mittels der Substitution $\frac{dy}{dx} = z$ die Gleichungen

$$x - \frac{(1+z^2)z\,dx}{dz} = p \quad \text{und} \quad y + \frac{(1+z^2)\,dx}{dz} = \varphi(p).$$

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 514. [2]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 594 ff.

Daraus folgt zunächst

$$y + \frac{x-p}{z} = \varphi(p)$$

und durch Differentiation und Elimination von dz (mit Hilfe der ersten der beiden Gleichungen)

$$-\frac{dp}{z} = \varphi'(p)dp.$$

Hier hat man entweder $dp = 0$, d. h. p ist konstant, was in Verbindung mit

$$y + \frac{x-p}{z} = \varphi(p)$$

die Gleichung

$$(x-p)^2 + [y - \varphi(p)]^2 = r^2$$

gibt. Im anderen Fall hat man die Gleichung

$$-\frac{1}{z} = \varphi'(p),$$

die sich auf die Form $p = Z$ bringen läßt; Z ist hierbei eine Funktion von z. Dann läßt sich aber

$$x - \frac{(1+z^2)z\,dx}{dz} = p$$

in der Form

$$dx = \frac{x-Z}{(1+z^2)z}\,dz$$

schreiben, was

$$\frac{x\sqrt{1+z^2}}{z} = -\int\frac{Z\,dz}{z^2\sqrt{1+z^2}} + \text{cst.}$$

gibt; berechnet man endlich z aus

$$y + \frac{x-Z}{z} = \varphi Z$$

und setzt diesen Wert in die vorhergehende Gleichung ein, so ist das Integral der ursprünglichen Gleichung gefunden.

Tiefer in das Wesen der Gleichungen höheren Grades und ihrer Integrale dringt Monge ein.[1]) Er nimmt an, die algebraische Gleichung

$$\begin{aligned}0 = Ay^m + Bxy^{m-1} + Cx^2y^{m-2} + \cdots \\ + A'y^{m-1} + B'xy^{m-2} + \cdots \\ + A''y^{m-2} + \cdots\end{aligned}$$

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786) (Monge selbst zitiert 1782), p. 719—724. Ausführlicher: ebenda 1784 (1787), p. 164 ff.

sei das „allgemeine“ Integral einer Differentialgleichung, diese selbst sei gesucht. Monge zeigt, daß die auf normalem Weg, also durch wiederholte Differentiation und Elimination der Integrationskonstanten $A, B, \ldots$ entstehende Differentialgleichung in bezug auf den höchsten darin auftretenden Differentialquotienten immer vom ersten Grad ist und erläutert diese Ausführungen an dem Beispiel

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1,$$

das nacheinander die Gleichungen

$$2Axdx + B(xdy + ydx) + 2Cydy = 0;$$
$$2Adx^2 + B(xd^2y + 2dxdy) + 2C(dy^2 + yd^2y) = 0; \quad \text{usw.}$$

liefert.[1]) Aus dem Umstand, daß derartige Elimination der Integrationskonstanten stets auf Gleichungen 1. Grades führt, folgert Monge, daß Differentialgleichungen nur dann in bezug auf die höchste darin vorkommende Derivierte von höherem Grade sein können, wenn die zugehörige Integralgleichung nicht alle ihre willkürlichen Konstanten in der 1. Potenz enthält, und man wird auch, wenn man die $A, B, \ldots$ als Funktionen von neuen Konstanten $a, b, \ldots$ ansieht, bei Elimination der $a, b, \ldots$ auf Gleichungen höheren Grades stoßen; das Gleiche findet statt, wenn zwischen den $A, B, \ldots$ irgendwelche Relationen bestehen; darauf gründet er nun seine Integrationsmethode für Gleichungen höheren Grades: man ersetze letztere durch die zugehörige Differentialgleichung ersten Grades und höherer Ordnung, integriere und entferne die dabei auftretenden überzähligen Konstanten durch Substitution des Integrals in die ursprüngliche Differentialgleichung. Als Beispiel gibt Monge die Gleichung[2])

$$\frac{dy^2}{dx^2}(a^2 - x^2) + 2xy\frac{dy}{dx} + a^2 - y^2 = 0.$$

Durch Differentiation folgt unmittelbar

$$(a^2 - x^2)\frac{dy}{dx}ddy + xyddy = 0.$$

Diese Gleichung ist in bezug auf den 2. Differentialquotienten vom 1. Grad; $ddy = 0$ gibt $\frac{dy}{dx} = A$. Setzt man diesen Wert in die ursprüngliche Gleichung ein, so erhält man ohne weiteres

[1]) Dasselbe Verfahren auf die weitaus einfachere Gleichung

$$Ax + By + Cxy = 1$$

angewandt hätte Monge auf die Schwarzsche Abgeleitete geführt.

[2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 725.

$$A^2(a^2 - x^2) + 2Axy + a^2 - y^2 = 0;$$

überzählige Konstante tritt hier natürlich keine auf. Monge sagt zwar nicht, daß sich die gefundene Gleichung in zwei Linearfaktoren spalten läßt; gibt aber dafür die geometrische Bedeutung der Integralgleichung an. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß der andere Faktor

$$(a^2 - x^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

in Verbindung mit der ursprünglichen Differentialgleichung deren singuläres Integral (intégrale particulière)

$$x^2 + y^2 = a^2$$

liefert. Eine andere Methode, die Monge in Vorschlag bringt, wird in Zusammenhang mit seiner Theorie der Berührungstransformationen erörtert werden (vgl. S. 983).

Totale Differentialgleichungen mit mehreren Variabeln und Simultansysteme von totalen Gleichungen behandeln wir aus praktischen Gründen erst nach den partiellen Gleichungen, zu deren Besprechung wir hiermit übergehen. Wie schon erwähnt geht die Veranlassung zur Untersuchung bestimmter partieller Gleichungen zu Beginn unseres Abschnitts, abgesehen von Fragen der Differentialgeometrie (vgl. Abschnitt XXIV, bes. S. 550ff.), noch hauptsächlich auf die Probleme der Praxis zurück; das rein theoretische Interesse erwacht erst viel später. Es sind hauptsächlich die Probleme der Störungstheorie, der Potentialtheorie und der Hydrodynamik, speziell der Saitenschwingungen, welche in diesem Sinne anregend gewirkt haben. Das Potential wurde schon lange vor Green und Gauß benutzt, wenn auch anscheinend vor diesen beiden ein Name dafür fehlt[1]); von der unter gewissen Umständen bestehenden Möglichkeit, die Komponenten der auf einen Punkt wirkenden Kraft als Differentialquotienten ein und derselben Funktion darzustellen, wurde mit mehr oder minder deutlichem Bewußtsein von der Wichtigkeit dieses Umstandes Gebrauch gemacht. Schon bei D. Bernoulli[2]) und Lagrange[3]) tritt die Kräftefunktion auf, bei letzterem sogar für kontinuierliche Massen; Niveauflächen finden wir bei Maclaurin in seinem Treatise of fluxions 1742 und in der Figure de la terre 1743 von Clairaut. Die berühmte Differentialgleichung 2. Ordnung, welcher

[1]) Nach einer gütigen Mitteilung von Herrn Prof. Stäckel findet sich der Name schon in D. Bernoullis Hydrodynamik. [2]) Histoire de l'Académie de Berlin, t. IV, 1748 (1750), p. 361. Im folgenden wurden teils der vorerwähnte Aufsatz von Burkhardt teils verschiedene Aufsätze der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften benutzt. [3]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 402 (aus dem Jahr 1777) und t. VI, p. 349.

das Potential V eines beliebigen Körpers auf einen außerhalb gelegenen Punkt mit den Polarkoordinaten r, ϑ und ω gehorcht, ist von Laplace 1782[1]) angegeben; dieser setzt für V in der Gleichung

$$0 = \left\{\frac{\partial\left[(1-\mu\mu)\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial\mu}\right)\right]}{\partial\mu}\right\} + \frac{\left(\frac{\partial\partial V}{d\omega^2}\right)}{1-\mu\mu} + r\left(\frac{\partial\partial r V}{\partial r^2}\right),$$

wo $\cos\vartheta = \mu$, eine Reihenentwicklung mit fallenden Potenzen von r und bestimmt die Entwicklungskoeffizienten dieser Reihe. 1787 endlich gibt er auch die Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

die nach ihm benannt ist.[2]) Letztere Gleichung tritt zwar schon früher in der Dynamik inkompressibler Flüssigkeiten bei Lagrange[3]) auf, aber nur nebenbei, zufällig, weil sie eben der Natur des behandelten Problems nach notwendig auftreten muß; bei Laplace hingegen bildet die Bestimmung der Eigenschaften der Funktion V den Kernpunkt der Untersuchung, die Differentialgleichung ist bei ihm mit voller Einsicht ihrer Bedeutung in den Vordergrund gerückt. Den direkten Anlaß zu Laplaces Arbeit gab das Problem der Attraktion der Sphäroide und das Problem der Erdfigur, mit dem sich auch Legendre beschäftigt hat[4]). Die Untersuchungen auf diesem für die Astronomie bedeutungsvollen Gebiet führten zur Benutzung wichtiger Reihenentwicklungen und zur Verwendung der Kugelfunktionen[5]) (s. o. S. 792); insbesondere die Gleichgewichtsfigur einer rotierenden Flüssigkeitsmasse, deren Teilchen sich nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, war schon früher besonders von Clairaut in seiner Figure de la terre behandelt. Es waren also Mechanik, Hydrodynamik und Astronomie in gleicher Weise, welche auf die Einführung des Potentialbegriffes hinwiesen. Auf die Untersuchungen über den Fall, daß der Punkt μ, ϑ, ω innerhalb der anziehenden Masse liegt, auf das Auftreten des logarithmischen Potentials und ähnliche Fragen kann hier nicht eingegangen werden.

Die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen versucht Lagrange zu integrieren (vgl. S. 1024); es sind indessen begreiflicherweise nur speziellere Probleme, die zu brauchbaren interessanten Er-

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1782 (1785), p. 135. Dieser Aufsatz handelt von der Anziehung der Sphäroide und der Figur der Planeten. Man vgl. hierzu auch: ebenda, 1783 (1786), p. 25. [2]) Ebenda 1787 (1789), p. 252 in einer Abhandlung über die Saturnringe. [3]) Miscellanea Taurinensia, t. II[2], 1760/61, p. 273. Vgl. auch oben S. 914. [4]) Vgl. Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 370 ff. Ebenda 1789 (1793), p. 372 ff. [5]) Ebenda 1785 (1788), p. 64 ff.

gebnissen geführt haben. Um von der Art der untersuchten Probleme eine Vorstellung zu gewinnen, seien einige Beispiele aufgeführt. **Euler** behandelt das Problem der Fortpflanzung von Wellen, die von einem Störungszentrum ausgehen, sowohl für die Ebene, wie für den Raum; diese Aufgabe führt auf die Gleichung

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{n}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

wo V den Radius einer Welle bedeutet, und zwar ist n beim ebenen Problem gleich 3, beim entsprechenden räumlichen Problem gleich 4 zu setzen. Die Fortpflanzung von Wellen an der Oberfläche eines Kanals von konstanter Tiefe behandelt **Laplace** 1778[1]) unter der Voraussetzung, daß die Breite des Kanals nicht in Betracht kommt. Seien X, Z die Koordinaten eines Flüssigkeitsteilchens zur Zeit $t = 0$, $X + \alpha x$, $Z + \alpha z$ die Koordinaten desselben Teilchens zur Zeit t (α eine sehr kleine Größe), δ die Dichtigkeit, p der Druck, g das Gewicht des Teilchens, so findet **Laplace**:

$$0 = \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right);$$

$$0 = gd\cdot(Z + \alpha z) + \alpha\partial X\cdot\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right) + \alpha\partial Z\cdot\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + \frac{dp}{\delta};$$

d bedeutet dabei eine Differentiation, bei der t als konstant behandelt wird. Die letztere Gleichung kann nur bestehen, wenn auch ihr 2. und 3. Glied zusammen ein vollständiges Differential in bezug auf X und Z bilden. Aus der Bedingung hierfür erhält man durch zweimalige Integration nach t die Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial Z}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial X}\right)$$

und durch Kombination mit

$$\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial Z}\right) = 0$$

die beiden folgenden:

$$z = \varphi\{X + Z\sqrt{(-1)}\} + \psi\{X - Z\sqrt{(-1)}\}$$

und

$$x = -\sqrt{(-1)}\cdot\{\varphi[X + Z\sqrt{(-1)}] + \psi[X - Z\sqrt{(-1)}]\},$$

dabei muß $\varphi(X) = -\psi(X)$ sein, da für $Z = 0$, d. h. am Boden des Kanals, z überall und beständig Null ist. Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen lassen sich z und x für alle Punkte der Flüssigkeit be-

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1776 (1779), p. 544 ff. Das Folgende nach **Burkhardt** a. a. O.

stimmen, sobald man ihre Werte an der Oberfläche kennt. Sei für diese $Z = l + \alpha u$, wo u eine beliebige Funktion von X ist, so erhält man unter Vernachlässigung höherer Potenzen von α:

$$0 = g\left(\frac{\partial u}{\partial X}\right) + g\left(\frac{\partial z}{\partial X}\right) + g\left(\frac{\partial\partial x}{\partial t^2}\right);$$

Laplace begnügt sich mit der Angabe eines partikulären Integrals dieser Gleichung. Lagrange beschäftigt sich nach sorgfältigen Literaturstudien mit der Untersuchung der Wellenbewegung an der Oberfläche eines beinahe horizontalen Gewässers von sehr geringer Tiefe[1]) und kommt zu dem Resultat, daß sie den Gesetzen der Schallfortpflanzung in einer ebenen Luftschicht gehorcht. Das wichtigste hierher gehörige Problem ist aber das der schwingenden Saiten und überhaupt der musikalischen Instrumente. Abgesehen von der physikalischen Bedeutung dieses Problems hat seine Behandlung nach den verschiedensten Richtungen hin fördernd und fruchtbringend auf die Mathematik eingewirkt. Der ganze Streit über die Art der in den willkürlichen Funktionen einer Integralgleichung zulässigen Unstetigkeiten, die intensive Beschäftigung mit den partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung, die schließlich notwendig zu einer Theorie dieser Gleichungen führen mußte, wurde durch die genannte Aufgabe veranlaßt. Eben dieselbe führte — und das war, wenn man auch das Geleistete nicht zu erkennen vermochte, immerhin ein bedeutender Schritt — unbewußt zur Darstellung einer Funktion nach Vielfachen von sinus und cosinus[2]); die Physik verdankt diesem Problem die Erfindung des Prinzips der Superposition der Wellen durch D. Bernoulli[3]) und des Begriffs der Freiheitsgrade eines Systems, von dem Euler bei Untersuchung einer nicht in einer Ebene, sondern räumlich schwingenden Saite Gebrauch macht.[4]) Um die in Frage kommenden, für die Probleme der bezeichneten Art charakteristischen Differentialgleichungen der Bewegung bzw. deren Integral zu finden, stehen zwei Wege offen; der eine geht von den Bewegungsgleichungen einer kompressiblen Flüssigkeit aus, der andere bildet zunächst das Gleichungssystem, das die Schwingungen einer endlichen Anzahl von Massenpunkten darstellt, integriert sie und sucht dann durch Grenzübergang das für einen kontinuierlichen Komplex von Punkten gel-

---

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 746 (Berliner Memoiren für 1781).
[2]) Vgl. diese Vorl., III², S. 905 ff. [3]) Histoire de l'Académie de Berlin 1753 (1755), p. 187, 189. Vgl. Journal des sçavans 1758, p. 158. [4]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XIX, 1774 (1775), p. 340 ff. Das Problem der Schwingungen einer Saite mit Berücksichtigung ihres Gewichts; Acta Academiae Petropolitanae 1781 (1784), pars I, p. 178 ff.

tende Integral daraus abzuleiten; den letztgenannten Weg schlägt als besonders sicher und unanfechtbar Lagrange in seiner großen Abhandlung über die Fortpflanzung des Schalles ein, da er den Anschauungen seiner Zeit gemäß die dem Grenzübergang innewohnenden prinzipiellen Schwierigkeiten nicht erkennt. Euler behandelt Saiten von ungleichmäßiger Dicke, und zwar will er von einer Saite, die aus einer endlichen Anzahl von Stücken verschiedener Dicke zusammengesetzt ist, zu der Saite mit kontinuierlich veränderlicher Dicke übergehen.[1]) Euler legte auf diese Untersuchungen viel Wert, da er glaubte, mit dem Nachweis, daß bei derartigen Saiten im allgemeinen disharmonische Obertöne auftreten, die (gerade von der modernen Musiktheorie wieder aufgenommenen) Versuche widerlegen zu können, welche Konsonanz und Dissonanz, überhaupt die Harmonielehre mit der Anordnung der Obertöne in Zusammenhang bringen.[2]) Die Theorie der Pfeifen wurde von D. Bernoulli sehr gefördert[3]), der aus den Ergebnissen seiner Studien über die Verhältnisse an offenen und geschlossenen Enden auf den Grundton offener und gedeckter Pfeifen schließt, auch den Satz findet, daß bei der gedeckten Pfeife die Schwingungszahlen der Obertöne ungerade Vielfache der Schwingungszahl des Grundtons sind; er behandelt auch das der Saite von verschiedener Dicke analoge Problem einer Pfeife von veränderlichem Durchmesser. Pfeifen von nicht zylindrischer Form wurden von verschiedenen Forschern untersucht[4]); eine Theorie der Blasinstrumente für beliebige Gestalt der Begrenzungsfläche sucht Lagrange abzuleiten und die allgemeine Lösung durch Superposition einfacher Schwingungen zusammenzusetzen.[5]) Endlich ist noch der Theorie der Schwingungen von Lamellen, Membranen und Glocken zu gedenken; die diesbezüglichen Differentialgleichungen werden an Ort und Stelle angegeben werden.

Auf alle hierher gehörigen Abhandlungen konnte hier nur dann eingegangen werden, wenn darin die eigentlich physikalische Seite des Problems, obwohl ursprünglich Veranlasserin und Urheberin der ganzen Untersuchung, doch hinter den zur Lösung erforderlichen neuen Methoden und Theorien in solchem Maße zurücktritt, daß ihr Inhalt mehr den Mathematiker als den Physiker interessiert. So konnte z. B. die große

[1]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), p. 271 und ebenda, t. XVII, 1772 (1773), p. 432 ff. Endlich Miscellanea Taurinensia, t. III[2], 1762/65 (1766), p. 27—59. [2]) Vgl. auch D. Bernoulli in Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVI, 1771 (1772), p. 268. [3]) Histoire de l'Académie de Berlin 1753 (1755), p. 150. Histoire de l'Académie des Sciences 1762 (1764), p. 431 ff. [4]) Ebenda, p. 470. [5]) Wegen dieses Princips beruft er sich in den Miscellanea Taurinensia, t. II[2], 1760/61, p. 171 auf D. Bernoulli.

Abhandlung von Lagrange über Natur und Fortpflanzung des Schalls Berücksichtigung finden; des gleichen Verfassers Aufsatz über Hydrodynamik in den Berliner Memoiren von 1781 mußte dagegen übergangen werden, da er inhaltlich wie auch äußerlich den ausgesprochenen Charakter einer Untersuchung auf dem Gebiet der theoretischen Physik besitzt; die darin auftretenden Gleichungen sind meistens zu speziell und die zu ihrer Lösung benutzten Kunstgriffe bei allem Scharfsinn zu wenig allgemein, als daß sie die Aufstellung rein mathematischer Theorien hätten zur Folge haben können.

Was die Integration der partiellen Differentialgleichungen betrifft, so erkannte man bald, daß das Vorkommen gerade der partiellen Differentialquotienten in einer Gleichung auf die Integralgleichung keinen anderen Einfluß ausübt, als daß in diese willkürliche Funktionen eingehen, so daß also das eigentliche Integrationsgeschäft keinerlei Operationen erfordert, die von den bei gewöhnlichen Differentialgleichungen notwendigen prinzipiell verschieden wären. Das Problem der Integration partieller Differentialgleichungen läßt sich demnach in zwei voneinander unabhängige Aufgaben trennen, einmal in die Aufdeckung der Art und Weise, wie die willkürlichen Funktionen in das Integral eintreten, sodann aber in die Forderung, alle durch die ursprüngliche Gleichung definierten eigentlichen Integrationen für sich allein, d. i. durch Gleichungen darzustellen, deren Lösung keine willkürlichen Funktionen mehr in sich birgt; das sind eben totale Gleichungen.

Deshalb begnügen sich auch die Mathematiker, sofern es sich nicht um spezielle Gleichungen handelt, meistens damit, die partiellen Differentialgleichungen auf totale zurückzuführen und den Zusammenhang zwischen den Integralgleichungen der partiellen und totalen Gleichungen anzugeben. Diese Reduktion wird wiederholt als das Grundprinzip der Integration partieller Differentialgleichungen angesprochen; Laplace sagt[1]) klar und deutlich: je regarde une équation aux différences partielles comme intégrée, lorsqu'elle est ramenée à l'intégration d'une équation aux différences ordinaires. Wegen einer ähnlichen Stelle bei Lagrange vergleiche man S. 972.

Diese Reduktion auf totale Gleichungen hat am konsequentesten Monge in einer großen Abhandlung in den Pariser Memoiren von 1784 durchgeführt.[2]) Er findet für die verschiedensten partiellen Gleichungen die entsprechenden totalen dadurch, daß er die partiellen Differentialquotienten mit Hilfe der Gleichungen, welche diese mit den totalen Differentialen verbinden, so weit als möglich eliminiert

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1773 (1777), p. 344. Vgl. auch die Histoire desselben Jahres, p. 44. [2]) Ebenda 1784 (1787), p. 118—192.

und die so erhaltenen Schlußgleichungen derart zerfällt, daß sie unabhängig von darin noch auftretenden partiellen Derivierten Geltung haben. Sei z. B. die lineare Gleichung 1. Ordnung

$$Mp + Nq + L = 0$$

zu integrieren, wo M, N, L gegebene Funktionen von x, y und z, p und q die partiellen Differentialquotienten von z nach x bzw. y sind.[1]) Diese Gleichung stellt, wie Monge sagt, lediglich eine Beziehung zwischen p und q dar, aus welcher allein, d. h. ohne das Hinzukommen einer weiteren Gleichung, p und q nicht jedes für sich berechnet werden können. Eliminiert man also p bzw. q mit Hilfe der immer bestehenden Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so ergibt sich

$$M\,dz + L\,dx = q(M\,dy - N\,dx)$$

und

$$N\,dz + L\,dy = p(M\,dy - N\,dx);$$

damit das aber nicht zwei Bestimmungsgleichungen für q und p sind, müssen nach Monge die drei Gleichungen

$$M\,dz + L\,dx = 0; \quad M\,dy - N\,dx = 0; \quad N\,dz + L\,dy = 0$$

gleichzeitig bestehen, die indes nur zwei voneinander unabhängige Gleichungen darstellen. Genau denselben Gedankengang verwendet Monge zur Behandlung aller anderen partiellen Gleichungen, wie wir in den einzelnen Fällen an Ort und Stelle sehen werden; hier sei nur mitgeteilt, wie Monge den Zusammenhang zwischen den Integralen der partiellen und der totalen Gleichungen herstellt. Er betrachtet es nämlich als wesentlich, daß, wenn wir das eben erwähnte Beispiel beibehalten, von den beiden totalen Schlußgleichungen nicht jede einzelne für sich, sondern beide zusammen statthaben, und kommt sodann durch eigentümliche Deutung des Wortes simultan zum Integral (intégrale complète) der gegebenen partiellen Gleichung. Er erklärt den Begriff simultan folgendermaßen: Sind $V = a$ und $U = b$ die vollständigen Integrale des der partiellen Gleichung äquivalenten Systems, so müssen, wenn beide gleichzeitig bestehen sollen, nicht V und U jedes einzeln konstant sein, sondern es muß U konstant sein, solange V es ist und umgekehrt; ist hingegen das eine variabel, so ist es das andere auch, ou autrement... elles sont fonctions l'une de l'autre, sans rien statuer d'ailleurs sur la forme de cette fonction. (Vgl. o. S. 536 und 561.) Man kann dieser glücklichen Dialektik, durch welche Monge die Gleichung $V = \varphi(U)$ plausibel macht, nicht die Bewunderung versagen, wobei zu

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 121.

bedenken ist, daß das Resultat, weil längst bekannt, niemanden in Erstaunen setzte und deshalb auch einige Nachsicht bezüglich seiner Herleitung erwarten konnte. Verständlicher wird dieser ganze Gedankengang, wenn man berücksichtigt, daß Monge die Bildung des Integrals der partiellen Gleichung aus den Integralen der totalen Gleichungen als die „opération inverse" zur Elimination der willkürlichen Funktion aus einer gegebenen Integralgleichung angesehen haben will. Um diese Elimination möglichst einfach zu gestalten, verwandelt er z. B. die Gleichung $V = \varphi(U)$ mittels der Substitution $U = a$ in die beiden Gleichungen

$$U = a; \quad V = \varphi(a) = b,$$

die zu gleicher Zeit statthaben müssen und zwar in der Art, daß die eine die notwendige Folge der andern ist. Aus $dU = 0$ und $dV = 0$ erhält er

$$\left(\frac{dU}{dx}\right) dx + \left(\frac{dU}{dy}\right) dy = 0$$

und

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy = 0,$$

woraus durch Elimination „der unbestimmten Größe" $\frac{dy}{dx}$ die partielle Gleichung folgt:

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)\left(\frac{dV}{dy}\right) - \left(\frac{dV}{dy}\right)\left(\frac{dV}{dx}\right) = 0.$$

Statt $\frac{dy}{dx}$ zu eliminieren, kann, wie Monge noch erwähnt, dieselbe Schlußgleichung durch Elimination einer Unbestimmten ω aus zwei anderen Gleichungen hervorgehen; letztere stellen dann ebenfalls ein der Schlußgleichung äquivalentes System dar. Den hier entwickelten Prozeß faßt dann Monge in folgende Regel zusammen: Man setze das totale Differential des Arguments der in der Integralgleichung auftretenden willkürlichen Funktion gleich Null, differentiiere sodann die Integralgleichung selbst derart total, daß dabei die willkürliche Funktion als Konstante behandelt wird und eliminiere endlich aus den beiden so erhaltenen Gleichungen, sowie der Integralgleichung die willkürliche Funktion $\frac{dy}{dx}$, so erhält man die zur gegebenen Integralgleichung gehörige Differentialgleichung für den Fall, daß auch noch die Differentialquotienten der willkürlichen Funktion in der Integralgleichung auftreten, ist wenigstens hingewiesen. Nun ist diese Methode, aus dem Integral auf die Differentialgleichung zu schließen, in einem anderen Aufsatz[1]) desselben Bandes der Pariser Memoiren bereits ausführlich auseinandergesetzt und an Beispielen erläutert;

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 85 ff.

sie bildet nach Monges eigener Aussage die Grundlage für den Inhalt der eben besprochenen größeren Abhandlung[1]), woraus zwar nicht auf die zeitliche Abfassung der beiden Artikel, wohl aber auf die Vorgeschichte des Gedankenganges, der Methode, die in den erwähnten Aufsätzen bereits vollständig durchgebildet, sicher, abgerundet und klar dargestellt und gehandhabt wird, ein Schluß gezogen werden kann. In dieser ersten Abhandlung stellt sich nun Monge die Aufgabe, irgendwelche geometrisch oder mechanisch erzeugten Flächentypen analytisch, zunächst mit Zuhilfenahme willkürlicher Funktionen und dann mit Hilfe partieller Differentialgleichungen, darzustellen; er gewinnt so, wie jedenfalls schon früher, rückwärts verschiedene komplizierte und dennoch integrable Differentialgleichungen. Sehen wir also in diesen Untersuchungen die Grundlage, den Ausgangspunkt für die eigentlichen Forschungen Monges auf dem Gebiete der Differentialgleichungen selbst, so können wir eine erste Entwicklungsreihe für diese aufstellen: Beschäftigung mit Problemen der Flächentheorie[2]), Aufstellung der Gleichungen von Flächenfamilien, Übergang zu den gleichwertigen Differentialgleichungen durch Elimination der willkürlichen Funktionen jener Gleichungen, Vereinfachung des Eliminationsprozesses, Umkehrung dieser Methode. Daneben ist aber auch eine Anmerkung zu berücksichtigen, welche Monge dem erwähnten Aufsatz über partielle Differentialgleichungen vorangeschickt hat: Dieses Memoire sei durch einen Lehrsatz veranlaßt (a été fait à l'occasion d'une proposition), den er der Akademie mitgeteilt habe; nach seiner Vollendung habe man ihn darauf aufmerksam gemacht, daß der Grundgedanke, allerdings nur in Anwendung auf Gleichungen 1. Ordnung, bereits in einem Memoire von Lagrange in den Berliner Memoiren für 1779 veröffentlicht sei. Monge weist sodann auf einen früheren, verwandten Gedanken hin, den er 1771 der Akademie vorgelegt und hernach in den Savans Étrangers für 1773 veröffentlicht hatte, nämlich auf die Tatsache, daß sich für die partielle Gleichung $Mp + Nq = 0$, wo M und N Funktionen von x, y und z sind, dieselbe Integralgleichung ergibt, ob man jetzt z als Konstante oder als Variable behandelt. On y verra, fährt er fort, que cette proposition, dont j'étois dès-lors fortement occupé, est le germe de ce qui fait l'objet du Mémoire actuel, et qu'elle a dû me conduire aux résultats que je présente. In der zitierten Abhandlung sind aber wiederum

[1]) Tout ce que je me propose de dire sur cet objet, étant fondé sur le procédé que j'ai exposé dans le Mémoire précédent. Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 118. [2]) Hierbei empfing Monge u. a. mancherlei Anregungen durch die diesbezüglichen Arbeiten von Euler und Meusnier, die er auf p. 92 bzw. p. 106 zitiert.

geometrische Überlegung und Behandlungsweise in den Vordergrund gerückt, ist geometrische Versinnlichung das Ziel der Untersuchung; Monge konstruiert nämlich genau wie früher nichts als Flächen, die durch eine gegebene Raumkurve hindurchgehen und eine gegebene Integralgleichung erfüllen; bei Besprechung von einzelnen Beispielen wird er dann zu dem erwähnten Satz geführt; er schreibt[1]) die Differentialgleichung in der Form

$$M\frac{\delta z}{dx} + N\frac{\partial z}{dy} = 0,$$

deutet hierbei durch die Symbole δ, ∂, d die verschiedenen Differentiationen an (vgl. S. 885) und erwähnt, daß sich statt des Integrals $z = \varphi(V)$ auch $z = \varphi(V + \psi z)$ schreiben läßt. Nachdem er den Satz auch analytisch bewiesen hat, weist er zum besseren Verständnis noch auf die Gleichungen

$$dy\delta z - adx\partial z = 0; \quad dy\delta z - dx\partial z = 0; \quad dy\delta z - Zdx\partial z = 0$$

hin, wo Z eine Funktion von z ist; diese Gleichungen haben bzw. die Integrale

$$z = \varphi(ax + y); \quad z = \varphi(zx + y); \quad z = \varphi(Zx + y),$$

so daß also die Variabeln z und Z auf dieselbe Weise in das Integral eintreten wie die Konstante a.

Das allgemeine Prinzip der Behandlung partieller Differentialgleichungen, wie Laplace, Lagrange und Monge es üben, d. i. einfach die Reduktion auf totale Gleichungen, unbekümmert darum, ob diese integrabel sind oder nicht, hat Trembley mißverstanden; er betont nämlich — was nichts Neues ist —, daß die zwei totalen Gleichungen, auf welche Lagrange die lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung zurückgeführt hat, ebenso schwierig zu integrieren sind als die ursprüngliche Gleichung, und geht deshalb unmittelbar auf die partielle Gleichung selbst ein. An diese Untersuchung knüpft sich eine ganze Reihe anderer Aufsätze, die alle dieselbe Methode in ungeheuren Rechnungen durchführen; wir werden bei Gelegenheit der Gleichung 2. Ordnung darauf zurückkommen.

Auch Cousin zieht die direkte Behandlung der partiellen Differentialgleichung der Diskussion der gleichwertigen totalen Gleichungen vor; ja während die zeitgenössischen Mathematiker froh sind, die partiellen Gleichungen auf totale reduzieren zu können, verwandelt er gerade umgekehrt gewöhnliche Differentialgleichungen in partielle; er und nach ihm Trembley suchen integrable Fälle, die sich in vorgegebener

[1]) Mémoires présentés par divers Savans 1773 (1776), p. 283 corollaire II.

Weise integrieren lassen, und gehen deshalb im allgemeinen von einer gegebenen Integralgleichung aus. Die totale Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{1}{dx}dz + \mu = 0,$$

wo μ eine Funktion von x, y und $\frac{dy}{dx}$ darstellt, verwandelt Cousin[1]) durch die Substitution $\frac{dy}{dx} = z$ vermöge $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$ in die Gleichung

$$\frac{dz}{dx} + z\frac{dz}{dy} + \mu = 0,$$

wobei die partielle Differentiation in der Schreibweise nicht besonders angedeutet wird; er ersetzt also mit anderen Worten das Simultansystem

$$\frac{dz}{dx} + \mu = 0; \quad \frac{dy}{dx} = z$$

durch eine partielle Gleichung, während man gewöhnlich an Stelle letzterer das erwähnte Simultansystem betrachtet. Ist jetzt z. B.

$$\mu = \alpha z^2 + \beta z + \gamma,$$

wo α, β, γ Funktionen von x und y allein sind, so setzt Cousin als Integral die Gleichung an:

$$z = e^{\int(\sigma dx - \alpha dy)}\left\{a - \int e^{-\int(\sigma dx - \alpha dy)}[\gamma dx + (\beta + \sigma)dy]\right\}.$$

Damit die hier angedeuteten Integrationen ausgeführt werden können, müssen aber die Bedingungsgleichungen

$$\frac{d\sigma}{dy} + \frac{d\alpha}{dx} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d(\beta + \sigma)}{dx} - \sigma(\beta + \sigma) = \frac{d\gamma}{dy} + \alpha\gamma$$

bestehen; aus ihnen folgert Cousin die Gleichung

$$\sigma = \frac{\frac{d^2\alpha}{dx^2} - \frac{d^2\beta}{dx\,dy} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \frac{d\cdot\alpha\gamma}{dy} - \beta\frac{d\alpha}{dx}}{2\frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\beta}{dy}}$$

und bespricht auch den Fall, daß ihr Nenner Null ist. Interessanter werden die Untersuchungen, die sich an die Annahme knüpfen, das Integral von

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1778 (1781), p. 442 Vgl. auch Histoire, p. 42

$$\frac{dz}{dx} + z\frac{dz}{dy} + \mu = 0$$

lasse sich in der Form

$$B + F(K) = 0$$

darstellen, wo B und K Funktionen von x, y und z sind. Cousin leitet aus dem Integral durch partielle Differentiation nach x bzw. y, wobei z als Funktion von x und y zu gelten hat, und Elimination von F' eine Gleichung her, von der er verlangt, daß sie bis auf einen Faktor ψ mit der gegebenen Differentialgleichung übereinstimme. Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{dK}{dz}\frac{dB}{dy} - \frac{dB}{dz}\frac{dK}{dy} = \psi; \quad \frac{dB}{dz}\frac{dK}{dx} - \frac{dK}{dz}\frac{dB}{dx} = \psi z;$$
$$\frac{dK}{dx}\frac{dB}{dy} - \frac{dK}{dy}\frac{dB}{dx} = \psi\mu.$$

Durch Elimination von ψ folgen endlich die Gleichungen:

$$(\Gamma) \qquad \frac{dK}{dz}\left(\frac{dB}{dx} + z\frac{dB}{dy}\right) - \frac{dB}{dz}\left(\frac{dK}{dx} + z\frac{dK}{dy}\right) = 0;$$

$$(\Delta) \qquad \frac{dK}{dy}\left(\frac{dB}{dx} - \mu\frac{dB}{dz}\right) - \frac{dB}{dy}\left(\frac{dK}{dx} - \mu\frac{dK}{dz}\right) = 0;$$

Cousin nimmt nun spezielle Formen für B und K an, um integrable Fälle aufzufinden; so setzt er

$$B = mz + n \quad \text{und} \quad K = Mz + N,$$

wo m, n, M, N Funktionen von x und y allein sind. Ist wieder

$$\mu = \alpha z^2 + \beta z + \gamma,$$

so folgen bei Substitution dieser speziellen Werte in (Γ) durch Nullsetzen der Koeffizienten von z und z^2 Relationen zwischen m, n, M und N, aus deren einer die Gleichung

$$m = M \cdot \varphi_1(x)$$

gefolgert werden kann. Interessant ist nun, daß Cousin eine eigene Bezeichnung für die Funktionaldeterminante einführt, indem er[1]) $\dot{m}\dot{M}$ statt $\frac{dm}{dy}\frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx}\frac{dM}{dy}$ und analoge Symbole an Stelle ähnlicher Ausdrücke schreibt. Damit geht die Gleichung (Δ) mit Berücksichtigung von $m = M \cdot \varphi_1(x)$ in

$$-\mu M^2 \varphi_1'(x) = \dot{m}\dot{M}z^2 + (\dot{m}\dot{N} + \dot{n}\dot{M})z + \dot{n}\dot{N}$$

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1778 (1781), p. 449.

über; es soll aber

$$\mu = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

sein. Durch geschickte Kombination der verschiedenen allmählich aufgestellten Relationen und Integration erhält Cousin die Größen m, n, M, N in ziemlich verwickelter Form ausgedrückt durch α, β, γ, sowie durch vier willkürliche Funktionen $\varphi_I(x)$; $\varphi_{II}(x)$; $f_I(x)$; $f_{II}(x)$; da aber diese Größen teilweise unter Integralzeichen auftreten, müssen noch gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein, welche die praktische Anwendung der ohnehin komplizierten Cousinschen Formeln erschweren. Im folgenden[1]) geht Cousin zu Gleichungen höherer Ordnung über; für die Gleichung

$$\frac{1}{dx} dZ + \alpha Z^2 + \beta Z + \gamma = 0,$$

wo Z einen Differentialquotienten beliebiger Ordnung von y nach x bedeutet, und die α, β, γ Funktionen von x, y, z und sämtlichen Ableitungen von z bis Z sind, versucht er ein erstes Integral von der Form

$$(mZ + n) + F(MZ + N) = 0.$$

Endlich[2]) nimmt er

$$B = mz + n; \quad K = Mz^n + Nz^{n-1} + \cdots,$$

was auf ganz ungeheure Ausdrücke führt. In einer späteren Abhandlung[3]), die vor der früheren größere Übersichtlichkeit voraus hat, kommt er auf diese Untersuchungen zurück; er erwähnt, daß man die beiden vollständigen ersten Integrale einer totalen Differentialgleichung 2. Ordnung erhält, indem man in dem Integral der zugehörigen partiellen Gleichung einmal die willkürliche Funktion selbst, das andere Mal ihr Argument gleich einer Konstanten setzt. Ist wieder $B + F(K) = 0$ das Integral von

$$\frac{dz}{dx} + z\frac{dz}{dy} + \mu = 0,$$

so ergeben sich genau wie früher die Gleichungen (Γ) und (Δ). Cousin nimmt jetzt allgemeiner

$$B = m \cdot z + m_1 + \frac{m_2}{z} + \frac{m_3}{z^2} + \cdots$$

und

$$K = Mz + M_1 + \frac{M_2}{z} + \frac{M_3}{z^2} + \cdots$$

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1778 (1781), p. 452. Die im Text angeführte Gleichung p. 468. [2]) Ebenda, p. 469. [3]) Ebenda 1783 (1786), p. 649 ff.

und führt der Kürze halber Größen $n, n_1, n_2, \dots$ ein, wo

$$m\frac{dM}{dx} - M\frac{dm}{dx} = n; \quad m\frac{dM_1}{dx} - M\frac{dm_1}{dx} = n_1;$$
$$m\frac{dM_2}{dx} - M\frac{dm_2}{dx} - m_2\frac{dM}{dx} + M_2\frac{dm}{dx} = n_2; \dots$$

Es möge hier gestattet sein, die vielen einzelnen Gleichungen, die Cousin angibt, um das Bildungsgesetz erkennen zu lassen, mittels eines allgemeinen Index i in eine zusammenzufassen:

$$\begin{aligned} m\frac{dM_i}{dx} - M\frac{dm_i}{dx} - m_2\frac{dM_{i-2}}{dx} + M_2\frac{dm_{i-2}}{dx}& \\ - 2m_3\frac{dM_{i-3}}{dx} + 2M_3\frac{dm_{i-3}}{dx}& \\ \dots\dots\dots\dots& \\ - (i-1)m_i\frac{dM}{dx} + (i-1)M_i\frac{dm}{dx} &= n_i. \end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt in sinngemäßer Anwendung schon für $i=0$ und $i=1$. Setzt man jetzt die unendlichen Reihen für B und K in die Gleichung (Γ) ein, wobei B und K wie Funktionen von drei voneinander unabhängigen Variabeln x, y, z zu behandeln sind, so ergibt sich durch Nullsetzen aller Koeffizienten der einzelnen Potenzen von z eine 2. Gruppe von Ausdrücken für die Größen n, die wir wieder mit Hilfe des Buchstaben i in eine Gleichung sammeln:

$$\begin{aligned} M\frac{dm_i}{dy} - m\frac{dM_i}{dy} - M_2\frac{dm_{i-2}}{dy} + m_2\frac{dM_{i-2}}{dx}& \\ - 2M_3\frac{dm_{i-3}}{dy} + 2m_3\frac{dM_{i-3}}{dy}& \\ \dots\dots\dots\dots& \\ - (i-1)M_i\frac{dm}{dy} + (i-1)m_i\frac{dM}{dy} &= n_{i-1}; \end{aligned}$$

unter n_{-1}, das sich für $i=0$ ergibt, ist hierbei die Zahl 0 zu verstehen.

Mit Hilfe der eben gefundenen Relationen folgt aber

$$\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dz} - \frac{dB}{dz}\frac{dK}{dy} = n + \frac{n_1}{z} + \frac{n_2}{z^2} + \cdots.$$

Führt man für die Funktionaldeterminante

$$\frac{dm}{dy}\frac{dM}{dx} - \frac{dm}{dx}\frac{dM}{dy}$$

wieder das Symbol mM ein (Cousin läßt jetzt die Punkte weg), so kann man schreiben

$$\frac{dB}{dy}\frac{dK}{dx} - \frac{dB}{dx}\frac{dK}{dy} = mMz^2 + (m_1M + mM_1)z + m_2M + m_1M_1 + mM_2$$
$$+ (m_3M + m_2M_1 + m_1M_2 + mM_3)z^{-1} + \cdots;$$

und setzt man endlich die zwei zuletzt erhaltenen Gleichungen in (Δ) ein, so ergibt sich unter der Annahme, daß μ von der Form

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma + \frac{\delta}{z} + \frac{\varepsilon}{z^2} + \cdots$$

ist, nachstehende Folge von Gleichungen:

$$mM = \alpha n;$$
$$m_1M + mM_1 = \alpha n_1 + \beta n;$$
$$m_2M + m_1M_1 + mM_2 = \alpha n_2 + \beta n_1 + \gamma n;$$
$$m_3M + m_2M_1 + m_1M_2 + mM_3 = \alpha n_3 + \beta n_2 + \gamma n_1 + \delta n$$

usw. Mittels dieser Gleichungen berechnet nun Cousin sukzessive die Größen m, m_1, M_1, m_2, M_2 usw. Die Gleichung

$$n_{-1} = M\frac{dm}{dy} - m\frac{dM}{dy} = 0,$$

die in der 2. Gruppe von Ausdrücken für die n_i enthalten ist, liefert nämlich $m = M \cdot x_1$, wo x_1 eine zunächst willkürliche Funktion von x allein bedeutet. Mit Hilfe von $n_{-1} = 0$ ergibt sich aus $mM = \alpha n$ bei Berücksichtigung der Bedeutung von mM und n die Gleichung

$$\frac{dM}{dy} = \alpha M,$$

d. h.

$$M = e^{\int \alpha\, dy} \cdot X_1,$$

wo X_1 eine neue willkürliche Funktion von x allein bedeutet. So kann man fortfahren, indem man immer zuerst ein m_i und dann das zugehörige M_i berechnet; es hat aber keinen Zweck, die sehr komplizierten Formeln hier mitzuteilen. Die dabei auftretenden willkürlichen Funktionen x_1, X_1, x_2, X_2, ... müssen dem jeweils vorgelegten speziellen Problem entsprechend gewählt werden; ihre Bestimmung erläutert Cousin an einem konkreten Fall, um sodann zur totalen Gleichung 3. Ordnung, die auf eine partielle 2. Ordnung führt, überzugehen.

Wir wenden uns im folgenden zur partiellen Gleichung 1. Ordnung und beliebigen Grades mit drei oder mehr Veränderlichen. Da die Gleichung 2. Ordnung wegen ihrer physikalischen Bedeutung anfänglich im Vordergrund des Interesses stand, so kam

es erst sehr spät zu einer eigentlichen Theorie der Gleichungen 1. Ordnung, und alles, was auf diesem Gebiet vor Lagrange geleistet wurde, verdankt weniger planmäßiger Überlegung als Kunstgriffen und geistreichen Versuchen sein Entstehen. So wird begreiflich, was im ersten Augenblick wundernehmen muß, daß lange Zeit die Gleichung 1. Ordnung nicht mehr Fortschritte machte als die Gleichungen höheren Grades: man integrierte eben, was man integrieren konnte, und da lagen einfache Gleichungen höheren Grades oft viel näher als komplizierte 1. Ordnung; allerdings sind die derart gefundenen integrablen Typen meist wenig allgemein. Als erste Abhandlung haben wir einen Aufsatz von Euler zu nennen[1]); die Fragestellung ist etwas kompliziert und die partielle Gleichung tritt nur nebenbei verschleiert auf. So stellt Euler die Aufgabe

$$Pdx + Qdy$$

zu einem totalen Differential dV zu machen, wenn gleichzeitig die Relation

$$Px + Qy = 0$$

besteht; zur Lösung der Aufgabe schreibt er

$dV = Pdx + Qdy = Py \cdot \frac{ydx - xdy}{yy}$ und erkennt daraus, daß V und Py Funktionen von $S = \frac{x}{y}$ sein müssen.[2]) Ziemlich nebenbei, im Corollar I[3]) tritt der eigentliche Charakter der Aufgabe deutlicher hervor; es ist nämlich darauf hingewiesen, daß

$$P = \left(\frac{dV}{dx}\right) \quad \text{und} \quad Q = \left(\frac{dV}{dy}\right)$$

ist. In einer Menge von Einzelbeispielen behandelt Euler sodann die allgemeinere Aufgabe, V aus

$$dV = Pdx + Qdy$$

zu bestimmen, wenn P und Q durch eine beliebige Nebenbedingung, wie z. B.

$$PP + QQ = xx + yy,\text{[4])}$$

verbunden sind. Der wichtigste Fall ist aber der, daß Q eine Funktion von P allein ist.[5]) Ist

---

[1]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), p. 170 ff. [2]) Diese Schlußweise ist durchaus nicht neu; vgl. Cantor III[2], S. 901. [3]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), p. 176. [4]) Ebenda, p. 196. [5]) Ebenda, p. 192.

$$dQ = RdP,$$

so muß, wie Euler findet,

$$x + Ry = \Pi$$

sein, wo Π irgend eine Funktion von P bedeutet, und es wird

$$V = Px + Qy - \int \Pi dP.$$

Auch Relationen zwischen V, P und Q nimmt Euler an, so

$$P = nV; \quad V = mPx + nQy;$$

endlich verlangt er, daß V eine beliebige Funktion von P und Q allein sei.[1]) Es ist leicht, die zugehörigen Differentialgleichungen, auf die diese Aufgaben im Grunde genommen hinauslaufen, anzugeben, wenn man nur bedenkt, daß P und Q eigentlich partielle Differentialquotienten sind; nur die Fassung der Aufgaben ist für uns ein wenig fremdartig: Euler faßt, wenn wir den Unterschied noch einmal auseinandersetzen sollen,

$$dV = Pdx + Qdy$$

als Ausgangsgleichung und die partielle Gleichung als Nebenbedingung, während wir gerade umgekehrt letztere als Hauptproblem, erstere als Hilfsgleichung ansehen.

Wenig systematischer und übersichtlicher sind die Bemerkungen d'Alemberts über die lineare partielle Differentialgleichung; wie Euler benützt er zur eigentlichen Integration totale Gleichungen. Die Gleichung

$$\frac{dq}{dx} + \frac{Adq}{dz} + Cq = 0,$$

wo A und C Konstante sind, verwandelt er[2]) mittels der Substitution $q = \varepsilon^{\omega}$ in

$$\frac{d\omega}{dx} + \frac{Ad\omega}{dz} + C = 0,$$

d. i., wenn

$$d\omega = \alpha dx + \beta dz$$

gesetzt wird,

$$\alpha + A\beta + C = 0.$$

Da aber

$$\alpha dx + \beta dz$$

mit anderen Worten

$$\beta dz - Cdx - A\beta dx$$

ein totales Differential, nämlich $d\omega$, sein soll, muß

---

[1]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), bzw. p. 199, 203, 209. [2]) Opuscules mathématiques, t. IV (1768), p. 236.

$$\beta = \varphi(z - Ax);$$

hieraus ergeben sich unmittelbar α und ω. Die Gleichung

$$\frac{dq}{dx} + \frac{\xi dq}{dz} + \omega = 0,$$

in der ξ und ω Funktionen von x und z sind, geht vermöge

$$dz = \alpha dx + \beta dz$$

in

$$\alpha + \xi\beta + \omega = 0$$

über, und das Problem reduziert sich auf die Aufgabe,

$$\beta dz - \xi\beta dx - \omega dx$$

zu einem vollständigen Differential zu machen. D'Alembert unterscheidet einzelne Fälle, in welchen ihm die Integration gelingt, wenn nämlich βdz oder $\xi\beta dx$ oder endlich $dz - \xi dx$ vollständige Differentiale sind. Kurz darauf untersucht er die Gleichung

$$\frac{dq}{dx} + \frac{\xi dq}{dz} + \zeta q = 0,$$

die sich mittels $q = \varepsilon^{\omega}$ auf den vorigen Fall reduziert, sowie die Gleichung, die sich durch Addition einer weiteren Funktion ergibt.

Wie ungeordnet, unzusammenhängend und unübersichtlich die Kenntnisse auf dem Gebiet der Gleichung 1. Ordnung waren, zeigt der diesbezügliche Abschnitt in Eulers Integralrechnung. Trotzdem ist daselbst wenigstens ein Versuch gemacht, die verschiedenen gesammelten Resultate in eine gewisse Ordnung zu bringen und stufenweise vom Einfachen zum Schwierigeren vorzudringen. Der einfachste Fall ist der, daß die Gleichung nur eine der beiden partiellen Ableitungen enthält. Die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$$

integriert Euler dadurch, daß er das gleichwertige

$$dz = a dx + q dy$$

nach den für totale Gleichungen mit 3 Variablen geltenden Methoden behandelt. Er nimmt also zunächst y konstant an, woraus $dy = 0$ folgt, und erhält aus $dz = a dx$ die Gleichung

$$z = ax + \text{const.}$$

Indem er jetzt die Integrationskonstante als Funktion von y auffaßt, hat er das gesuchte Integral bereits gewonnen; durch Differentiation erhält er nämlich rückwärts

$$dz = a\,dx + dy \cdot f'(y)$$

und daraus $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, wie verlangt. Euler weist auch auf die Tatsache hin, daß die Integrabilitätsbedingung für

$$dz = a\,dx + q\,dy$$

nur dann erfüllt ist, wenn q eine Funktion von y allein ist. Nachdem er weiterhin die Gleichung

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = X,$$

wo X eine Funktion von x und y bzw. von x und z oder gar von allen 3 Variablen x, y, z[1]) ist, genau auf dieselbe Weise in der Form

$$z = \int X\,dx + f(y)$$

integriert hat, wendet er sich zu Gleichungen, die beide Abgeleitete

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p \quad \text{und} \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q,$$

aber keine der 3 Variablen x, y, z enthalten, d. i. zu den Gleichungen der abwickelbaren Flächen. $p = q$ z. B. führt auf

$$dz = p(dx + dy)$$

und bei Anwendung der Substitution $x + y = u$ auf

$$dz = p\,du,$$

woraus folgt, daß p eine Funktion von u allein sein muß; daraus ergibt sich endlich

$$z = f(x + y).$$

Die Gleichung

$$\alpha\left(\frac{dz}{dx}\right) + \beta\left(\frac{dz}{dy}\right) = \gamma$$

behandelt Euler der vorigen analog durch Einführung von

$$\beta x - \alpha y = u.$$

Partielle Integration zieht er in dem Beispiel $pq = 1$ heran[2]);

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

gibt nämlich

$$z = px + qy - \int(x\,dp + y\,dq)$$

(vgl. S. 1013) und damit

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, bzw. p. 41, 55, 58. [2]) Ebenda, p. 74.

$$dz = px + \frac{y}{p} - \int\left(x\,dp - \frac{y}{pp}\,dp\right).$$

Hier muß notwendig

$$x - \frac{y}{pp} = f'(p),$$

d. h. eine Funktion von p allein sein; das Integral — „solutio generalis", wie Euler hier, oder „completa", wie er bald darauf sagt — besteht dann aus den zwei Gleichungen

$$x = \frac{y}{pp} + f'(p) \quad \text{und} \quad z = \frac{2y}{p} + pf'(p) - f(p),$$

zwischen denen man sich p eliminiert denken muß. Von den hierher gehörigen Gleichungen sei noch

$$pp + qq = 1$$

erwähnt, sowie der Fall, daß q eine beliebige Funktion von p ist. Enthält die gegebene Differentialgleichung außer p und q noch die Variablen x, y und z, so unterscheidet Euler wieder verschiedene Typen. Für die Behandlung der Gleichung $P = Q$, wo P eine Funktion von p und x, Q eine solche von q und y ist, gibt er folgende Regel[1]): Man setze $P = v$ und demzufolge auch $Q = v$, berechne p als Funktion von x und v, q als Funktion von y und v, bilde ferner bei konstantem v die Integrale

$$\int p\,dx = R \quad \text{und} \quad \int q\,dy = S.$$

Diese Integrale liefern aber rückwärts, wenn man jetzt auch v als variabel ansieht, die Gleichungen

$$dR = p\,dx + V\,dv \quad \text{und} \quad dS = q\,dy + U\,dv;$$

damit aber dann

$$dz = dR + dS - dv(V + U)$$

integrabel werde, muß

$$V + U = f'(v),$$

welch letztere Gleichung mit

$$z = R + S - f(v)$$

zusammen das gewünschte Integral darstellt. Das Verfahren beruht im Prinzip auf der Variation der Konstanten. Den ganz allgemeinen Fall

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 130.

einer beliebigen Gleichung zwischen p, q, x, y und z erwähnt Euler zwar[1]), weiß ihn aber natürlich nur in speziellen Fällen zu behandeln. Um sich einen Begriff zu machen, wie er sich in solchen Einzelfällen zu helfen weiß, sei seine Integration[2]) von

$$Z = pP + qQ$$

kurz skizziert, wo Z eine Funktion von z allein ist, P und Q Funktionen von x und y bedeuten. Ein Multiplikatorensystem L, M, N liefert hier

$$Ldz = Lpdx + Lqdy; \quad MZdx = MpPdx + MqQdx;$$
$$NZdy = NpPdy + NqQdy;$$

durch Addition folgt

$$Ldz + Z(Mdx + Ndy) = p((L + MP)dx + NPdy)$$
$$+ q((L + NQ)dy + MQdx).$$

Euler verlangt jetzt das Bestehen der Proportion

$$L + MP : NP = MQ : L + NQ,$$

d. h.

$$L = -MP - NQ,$$

und erhält so die Gleichung

$$-dz(MP + NQ) + Z(Mdx + Ndy) = (Mq - Np)(Qdx - Pdy).$$

Ein neuer Multiplikator R, der $Qdx - Pdy$ integrabel macht, habe die Gleichung

$$R(Qdx - Pdy) = dU$$

zur Folge; ferner sei $\frac{Mdx + Ndy}{MP + NQ}$ ebenfalls integrabel $= dV$, was durch geeignete Wahl von M und N immer erreicht werden kann. Durch Einführung der Größen U und V in die umgeformte Differentialgleichung ergibt sich endlich

$$(MP + NQ)(-dz + ZdV) = \frac{Mq - Np}{R} \cdot dU,$$

woraus ersichtlich wird, daß $\frac{Np - Mq}{RZ(MP + NQ)}$ eine Funktion von U allein sein muß. Diese Einsicht führt unmittelbar zu dem gesuchten Integral

$$\int \frac{dz}{Z} = V + f(U).$$

Aus den angeführten Beispielen geht hervor, wie Euler nach Bedarf

---

1) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 142. 2) Ebenda, p. 168.

die verschiedensten Hilfsmittel als Substitutionen, teilweise Integrationen, Multiplikatoren zur Lösung heranzieht und durch die uneinheitliche Behandlungsweise, die ihm selbstverständlich in keiner Weise zum Vorwurf gemacht werden kann, nicht einmal den Gedanken an die Möglichkeit einer allgemeinen Integrationstheorie aufkommen läßt; das unausgesprochene Grundprinzip, das — abgesehen von den ersten Beispielen, die nach der für totale Gleichungen dreier Variablen üblichen Methode gelöst sind — bei allen seinen Aufgaben zur Anwendung kommt, besteht darin, daß er die partielle Gleichung zunächst in eine totale verwandelt, in dieser durch geschickte, dem gegebenen Fall angepaßte Umformung einen größstmöglichen integrablen additiven Teil absondert, und endlich aus dem Umstand, daß ja auch der übrige Teil der Gleichung ein exaktes Differential sein muß, Nutzen zu ziehen sucht.

Euler behandelt auch die Gleichung 1. Ordnung mit 4 Variablen. Sei v die abhängige, x, y, z seien die unabhängigen Veränderlichen,

$$dv = p\,dx + q\,dy + r\,dz.$$

Dann geht z. B. die Gleichung

$$\alpha p + \beta q + \gamma r = 0\text{[1]}$$

über in

$$\gamma dv = p(\gamma dx - \alpha dz) + q(\gamma dy - \beta dz),$$

und daraus wird mittels der Substitutionen

$$\gamma x - \alpha z = t \quad \text{und} \quad \gamma y - \beta z = u$$

die Gleichung

$$\gamma dv = p\,dt + q\,du.$$

Euler folgert

$$v = \Gamma(t \,\&\, u) = \Gamma(\gamma x - \alpha z \,\&\, \gamma y - \beta z)$$

oder auch

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} \,\&\, \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma}\right).$$

Im folgenden behandelt er u. a. die Gleichungen

$$px + qy + rz = nv + S,$$

wo S eine Funktion von x, y, z ist, und

$$pL + qM + rN = 0,$$

wo L, M, N Funktionen von x bzw. y bzw. z allein sind. Von Gleichungen höheren Grades seien

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 423.

$$pqr = 1 \quad \text{und} \quad pqr = \frac{v^3}{xyz}$$

erwähnt[1]) (vgl. auch S. 552); auf ihre Integration kann hier nicht eingegangen werden. **Euler** macht sodann die besondere Annahme, daß sich v, d. i. eine Funktion der 3 Variablen x, y, z, auch als Funktion zweier Variablen von der speziellen Form $t = \alpha x + \beta z$ und $u = \gamma y + \delta z$ auffassen lasse, und drückt die Ableitungen von v nach x, y, z durch diejenigen nach t und u aus. Unter der Voraussetzung, daß die homogene Gleichung (vgl. S. 1025)

$$A\left(\frac{dv}{dx}\right) + B\left(\frac{dv}{dy}\right) + C\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0,$$

wo A, B, C Konstante sind, in die geschilderte Kategorie gehöre, kommt durch Anwendung der beschriebenen Transformation die Gleichung

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)(A\alpha + C\beta) + \left(\frac{dv}{du}\right)(B\gamma + C\delta) = 0,$$

welche vermöge $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-A}{C}$ und $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{-B}{C}$ zur Identität wird.

Der Zeit etwas vorgreifend gehen wir hier auf die Methode von **Laplace** für die partielle Gleichung 1. Ordnung ein, um dann die **Lagrangeschen** Arbeiten auf diesem Gebiet im Zusammenhang bringen zu können. Zu Beginn seiner berühmten Abhandlung über die Gleichung 2. Ordnung kommt **Laplace** auch auf die Gleichung

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + V$$

zu sprechen[2]), wo α eine Funktion von x und y, V eine solche von x, y und z ist, und stellt sich ausdrücklich die Aufgabe, sie auf totale Gleichungen zurückzuführen. Durch Einführung einer neuen Variablen u, die eine noch zu bestimmende Funktion von x und y sein soll, erhält er, indem er z einmal als Funktion von x und y, das andere Mal als Funktion von x und u auffaßt:

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \cdot \partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \cdot \partial y,$$

$$\partial z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{I} \cdot \partial x + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \cdot \partial u,$$

$$\partial u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \cdot \partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot \partial y.$$

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, bzw. p. 428, 432, 435, 440

[2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1773 (1777), p. 344.

Führt man die dritte dieser Gleichungen in die zweite ein, so erhält man durch Vergleichung mit der ersten

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^I + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Demnach geht die vorgelegte Differentialgleichung über in

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^I + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + V.$$

Da u noch unbestimmt ist, so kann man trennen in

$$0 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^I + V.$$

Die letzte Gleichung reduziert sich, wenn aus der vorletzten y als Funktion von x und u bekannt ist, auf eine totale Gleichung (weil man u während der Integration als konstant ansehen kann). Die vorletzte Gleichung führt, wie Laplace sich ausdrückt, durch Kombination mit $\partial u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial y$ auf die Integration von

$$\partial y - \alpha\partial x = 0.$$

Um das Argument der willkürlichen Funktion der Integralgleichung zu erhalten, braucht man, wie Laplace angibt, nur das Integral der letzten Gleichung nach der Integrationskonstanten aufzulösen. Laplace hat also im Grunde genau dieselben totalen Gleichungen wie Lagrange, denn die zwei Gleichungen

$$0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^I + V \quad \text{und} \quad \partial y - \alpha\partial x = 0$$

sind, abgesehen von dem für die Integration unschädlichen Parameter v, nichts als die bekannten Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{\partial x}{1} = \frac{\partial y}{\alpha} = -\frac{\partial z}{V}$$

in etwas anderer Form — und das ist nicht verwunderlich, da in letzter Linie alle Integrationsmethoden auf dieses charakteristische System zurückkommen werden; aber die klare, elegante, die Bedeutung jenes Vereins von Gleichungen viel schärfer betonende Darstellung von Lagrange zeigt deutlich, daß sich Lagrange seines Fortschritts, der die endgiltige Erledigung der in Frage stehenden Gleichung bedeutet, vollkommen bewußt war; auch ist bei Lagrange von der Beschränkung des α Abstand genommen. Was das Entstehen der Laplaceschen Methode anlangt, so weist sie deutlich auf die Eulersche Behandlung partieller Differentialgleichungen durch Ein-

führung neuer Variabler hin (vgl. S. 994); für die Gleichung 2. Ordnung, die Laplace in dem nämlichen Aufsatz behandelt, gibt er selbst Eulers Integralrechnung als Quelle an.

Von den Lagrangeschen Abhandlungen ist zuerst ein größerer Aufsatz in den Memoiren der Berliner Akademie von 1772 zu nennen [1], welcher der partiellen Gleichung 1. Ordnung beliebigen Grades gewidmet ist. Sei u eine Funktion von x und y allein, $p = \frac{du}{dx}$ und $q = \frac{du}{dy}$, wobei die partielle Differentiation nicht besonders angedeutet wird. Die Integration einer Gleichung beliebigen Grades zwischen u, x, y, p und q bedeutet dann nichts anderes als die Aufsuchung einer Gleichung zwischen u, x und y allein. Die gegebene Differentialgleichung gestattet nun, wie Lagrange sagt, etwa q durch u, x, y, p auszudrücken; „die Größe p ist hierbei noch unbestimmt, und die ganze Frage reduziert sich darauf, p derart zu bestimmen, daß die Gleichung $du = pdx + qdy$ oder vielmehr $du - pdx - qdy = 0$ integrabel wird." Lagrange verlangt also, daß $M(du - pdx - qdy)$ das totale Differential einer Funktion N von u, x und y wird. Das ergibt sofort die drei Gleichungen

$$\frac{dN}{du} = M; \quad \frac{dN}{dx} = -Mp; \quad \frac{dN}{dy} = -Mq,$$

welche sich durch folgende drei ersetzen lassen

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{d(Mp)}{du}; \quad \frac{dM}{dy} = -\frac{d(Mq)}{du}; \quad -\frac{d(Mp)}{dy} = -\frac{d(Mq)}{dx}.$$

Die letzte Gleichung läßt sich aber auch in der Form

$$M\left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx}\right) + p\frac{dM}{dy} - q\frac{dM}{dx} = 0$$

schreiben, woraus durch Einführung der beiden ersteren Gleichungen

$$M\left(\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx}\right) - p\frac{d(Mq)}{du} + q\frac{d(Mp)}{du} = 0$$

kommt. Daraus folgt endlich

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} - p\frac{dq}{du} + q\frac{dp}{du} = 0.$$

Diese Gleichung, von der Lagrange noch eine zweite Herleitung gibt, ist nichts anderes als die Integrabilitätsbedingung für die totale Gleichung

$$du - pdx - qdy = 0$$

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. III, p. 549. Die Lagrangeschen Arbeiten sind übersetzt in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften.

mit den drei Variablen u, x und y und ist als solche längst bekannt, wie **Lagrange** selbst mit den Worten „connue depuis longtemps" zugibt; vollkommen neu ist indessen die Anwendung, die **Lagrange** von ihr macht. Er denkt sich nämlich mit Hilfe der gegebenen Differentialgleichung q (oder p) durch x, y, u und p ausgedrückt und in die genannte Integrabilitätsbedingung eingesetzt; diese definiert dann p als Funktion von u, x und y. Scheinbar ist damit wenig erreicht, denn die neue Gleichung hat vier Variable u, x, y und p; bedenkt man aber, daß die Gleichung linear ist, daß ferner eine partikuläre Lösung, wenn sie nur eine willkürliche Konstante enthält, die „solution générale et complète" der ursprünglichen Differentialgleichung liefert, so läßt sich schon ersehen, welche Bedeutung sie unter Umständen erlangen kann. Um letztere Behauptung zu erweisen, verwendet **Lagrange** einen auf der Variation der Konstanten beruhenden Gedankengang. Sei α die Integrationskonstante, welche, wie verlangt, in die partikuläre Lösung für p eingeht. Es ist dann

$$\text{cst.} = \int M(du - p\,dx - q\,dy) = N$$

das Integral der Gleichung

$$du - p\,dx - q\,dy = 0;$$

N ist eine Funktion von u, x, y und α. Läßt man jetzt α variieren, so ist

$$N = \int M(du - p\,dx - q\,dy) + \int \frac{dN}{d\alpha}\,d\alpha;$$

da aber der Ausdruck unter dem ersten Integralzeichen ein vollständiges Differential ist, so muß auch, wie **Lagrange** folgert, $\frac{dN}{d\alpha} \cdot d\alpha$ ein solches sein, d. h. es muß $\frac{dN}{d\alpha}$ eine Funktion $f'(\alpha)$ von α allein sein. Somit erhält **Lagrange** die beiden Gleichungen

$$N - f(\alpha) = \text{cst.} \quad \text{und} \quad \frac{dN}{d\alpha} = f'(\alpha)$$

mit der willkürlichen Funktion f, zwischen denen man sich α eliminiert denken muß; N bedeutet hierbei den durch Integration von

$$M(du - p\,dx - q\,dy)$$

bei konstantem α erhaltenen Ausdruck in u, x, y und α. Hier sei bemerkt, daß **Lagranges** Gedankengang nicht völlig unvorbereitet war. Wie schon gezeigt, führt **Euler** die Lösung von $\left(\frac{dz}{dx}\right) = a$ und einigen ähnlichen Problemen auf die Integration einer totalen Diffe-

rentialgleichung mit drei Variablen zurück, und es ist wohl nur die Einfachheit dieser Beispiele daran schuld, daß er die Integrabilitätsbedingung dieser Gleichung nicht stärker betont und mit zur Integration heranzieht (vgl. S. 960 oben); in seinem Aufsatz von 1762 formuliert er das Problem der Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung als die Aufgabe, $Pdx + Qdy$ zu einem totalen Differential zu machen, wenn zwischen P und Q eine Nebenbedingung besteht (vgl. S. 957), während Lagrange dasselbe von $du - pdx - qdy$ fordert; der Gedanke, die Integrationskonstante einer gegebenen Gleichung variieren zu lassen, findet sich endlich auch schon bei Euler (vgl. S. 959 unten). Von den Beispielen, an denen Lagrange seine Methode erörtert, sei nur eines mitgeteilt: Für $q = P$, wo P eine Funktion von p allein, erhält man als Integrabilitätsbedingung

$$\frac{dp}{dy} - P'\frac{dp}{dx} - P'p\frac{dp}{du} + P\frac{dp}{du} = 0.$$

Man findet leicht $p = \alpha$, d. h. $q = A$ und demnach

$$du - \alpha dx - Ady = 0.$$

Daraus ergibt sich

$$N = u - \alpha x - Ay; \quad \frac{dN}{d\alpha} = -x - A'y = f'(\alpha);$$

daraus ist α zu berechnen und in

$$u - \alpha x - Ay - f(\alpha) = 0$$

einzusetzen. In dieser Weise zählt Lagrange noch eine ganze Reihe, im ganzen neun, Fälle auf, in welchen man mit der erwähnten linearen Hilfsgleichung zum Ziele kommt; darunter befindet sich z. B. der Fall, daß die gegebene Differentialgleichung eine der beiden Variablen x oder y nicht enthält. Die erwähnte partielle Gleichung mit vier Variablen benutzt er hierbei lediglich als Hilfsgleichung, die unter Umständen, also etwa in den erwähnten neun Fällen, mit Erfolg benutzt werden kann; daß durch sie allgemein die Integration der Gleichung beliebigen Grades auf den linearen Typus zurückzuführen ist, vermag er nicht einzusehen[1]), und daran ist wohl die große Allgemeinheit dieser Idee schuld. Dafür weiß er aber seine Methode, aus einer Partikulärlösung („intégrale particulière") das „intégrale complète" herzustellen, ihrer vollen Bedeutung nach zu würdigen, indem er sie als ein besonderes „Prinzip" hinstellt.[2]) Endlich zeigt er,

---

[1]) In seiner Abhandlung von 1785 (vgl. unten) gesteht er selbst zu, die allgemeine Gleichung höheren Grades nicht lösen zu können. [2]) Oeuvres de Lagrange, t. III, p. 571.

daß statt eines partikulären Wertes von p oder q ein solcher von u mit zwei willkürlichen Konstanten und allgemein für den Fall, daß u eine Funktion der n Variabeln $x, y, z, \ldots$ ist, ein partikulärer Wert von u mit n Konstanten genau dieselben Dienste leistet.[1] Diese Bemerkung ist sehr wichtig; Lagrange zeigt damit den Zusammenhang zwischen vollständigem und allgemeinem Integral einer partiellen Gleichung; dabei ist beachtenswert, daß er in dieser Abhandlung den Wert von u mit n Konstanten noch nicht als vollständiges Integral, sondern nur als partikuläre Lösung ansieht.

In seiner großen Abhandlung über die singulären Integrale vom Jahre 1774 geht Lagrange, nachdem er den Zusammenhang von vollständigem, singulärem und allgemeinem Integral ausführlich dargetan, wieder auf die Integration der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung und beliebigen Grades ein und zwar gibt er Integrationsmethoden für verschiedene ausgezeichnete Gleichungstypen. Ist z. B. eine Gleichung der Form

$$f\left(\frac{dz}{dx}, x\right) = F\left(\frac{dz}{dx}, y\right)$$

vorgelegt[2]), so setzt er[3]) genau wie Euler, der diese Gleichung auch schon behandelt hat (vgl. S. 961), $f\left(\frac{dz}{dx}, x\right)$ gleich einer Konstanten a, berechnet aus dieser Gleichung $\frac{dz}{dx}$ als Funktion von x und a und integriert endlich bei konstantem a. So ergibt sich

$$z = X + \Psi,$$

wo X eine Funktion von x und a, Ψ eine solche von y und a ist; ganz analog führt

$$a = F\left(\frac{dz}{y}, y\right)$$

auf eine Gleichung

$$z = Y + \Xi,$$

wo Y eine Funktion von y und a, Ξ eine von x und a bedeutet. Da aber bis auf eine additive Konstante $\Psi = Y$ und $\Xi = X$ sein muß, so ergibt sich

$$z = X + Y + b.$$

Letztere Gleichung ist, weil sie die zwei Konstanten a und b enthält, als das vollständige Integral der gegebenen Gleichung anzusehen. Die Gleichung

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. III, p. 572. [2]) Schon 1772, ebenda, p. 561.
[3]) Ebenda, t. IV, p. 80.

$$f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, z\right) = 0$$

führt mit Hilfe der Substitutionen $Z = \frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy} = aZ$ auf

$$x + ay = \int \frac{dz}{Z} + b,$$

wobei Z aus

$$f(Z, aZ, z) = 0$$

als Funktion von z und a berechnet werden muß. Von größter Wichtigkeit ist das folgende Beispiel[1]), nämlich die auch von **Laplace** behandelte Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = V\frac{dz}{dy} + Z,$$

wo V eine Funktion von x und y, Z eine solche von x, y und z ist. **Lagrange** multipliziert mit dx, addiert beiderseits $\frac{dz}{dy}dy$, erhält dadurch

$$dz = (Vdx + dy)\frac{dz}{dy} + Zdx$$

und setzt, gewissermaßen versuchsweise,

$$Vdx + dy = 0.$$

Integriert man diese Gleichung, wobei die Integrationskonstante α auftritt, und differentiiert wieder, indem man jetzt α als variabel ansieht, so ergibt sich eine Gleichung

$$Vdx + dy = Ad\alpha,$$

wo A eine bekannte Funktion von x, y und α ist. Mit Benutzung dieses Wertes ergibt sich aber

$$dz = A\frac{dz}{dy}d\alpha + Zdx.$$

Lagrange verlangt nun, daß man y durch x und α darstelle und den betreffenden Ausdruck in die letzterwähnte Gleichung einsetze; diese reduziert sich dann bei konstantem α auf die totale Gleichung

$$dz = Zdx.$$

Die Integrationskonstante dieser Gleichung, führt **Lagrange** fort,

---

[1]) Ebenfalls schon 1772 behandelt, doch sind die der partiellen Gleichung entsprechenden totalen noch nicht erkennbar. Vgl. Oeuvres de **Lagrange**, t. III, p. 562.

fasse man als willkürliche Funktion von α auf, und hat somit, da bereits α als Funktion von x und y durch das Integral von

$$Vdx + dy = 0$$

bestimmt ist, ohne weiteres das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung. Hier sind also die beiden totalen Gleichungen

$$Vdx + dy = 0 \quad \text{und} \quad z = Zdx$$

wirklich angeschrieben, wenn auch noch nicht in ihrer vollen Bedeutung erkannt. Lagrange sagt aber nicht, die Gleichung

$$dz = (Vdx + dy)\frac{dz}{dy} + Zdx$$

ist jedenfalls erfüllt, wenn gleichzeitig

$$Vdx + dy = 0 \quad \text{und} \quad z = Zdx;$$

sein Gedankengang beruht vielmehr eher auf der Idee der Variation der Konstanten, deren Anwendung hier, in einer Abhandlung über singuläre Integrale, wo fortwährend Differentiationen nach Integrationskonstanten auftreten, besonders nahe lag, oder, wenn man will, auf der Einführung einer neuen Variablen α, die durch die Gleichung

$$Vdx + dy = 0$$

definiert wird. In ganz ähnlicher Weise behandelt Lagrange sodann die Gleichungen

$$x = Vy + Z,$$

wo V eine Funktion von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, Z eine solche von $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ und $z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy}$ ist, und

$$\frac{dz}{dy} = Vy + Z,$$

wo V eine Funktion von x und $\frac{dz}{dy}$, Z eine solche von x, $\frac{dz}{dy}$ und $z - y\frac{dz}{dy}$ ist. Es ist noch darauf hinzuweisen, daß Lagrange der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = V\frac{dz}{dy} + Z$$

unter den angeführten Beispielen keine ausgezeichnete Rolle zuerkennt, sondern sie einfach als einen integrablen Fall unter anderen integrablen Fällen ansieht. Zur Beschäftigung mit diesen Beispielen gaben wahrscheinlich folgende Umstände die Veranlassung: Lagrange

suchte das singuläre Integral einer partiellen Differentialgleichung aus der Integralgleichung abzuleiten, fand, daß dies leichter ist, wenn nicht das allgemeine, sondern das bereits früher von ihm entdeckte, mittlerweile auch in seiner Bedeutung erkannte vollständige Integral gegeben ist, und suchte demgemäß das vollständige Integral für verschiedene Gleichungstypen zu bilden; dem ist nicht entgegen, daß er in dem speziellen Beispiel

$$\frac{dz}{dx} = V\frac{dz}{dy} + Z$$

gerade auf das allgemeine Integral geführt wird.

Mittlerweile fällt Lagrange auf, daß er in der eben besprochenen Abhandlung die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, in der die Differentialquotienten nur linear auftreten, integriert hat; er erkennt das Prinzipielle der Methode und gibt 1779 eine Verallgemeinerung derselben. Wie Laplace formuliert er[1]) vorher die Aufgabe: „Man weiß, daß die Kunst der Integration bei partiellen Differentialgleichungen nur in der Zurückführung dieser Integration auf die von gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht, und daß man eine partielle Differentialgleichung dann als integriert betrachtet, wenn ihre Integration nur mehr von derjenigen einer oder mehrerer totalen Differentialgleichungen abhängt." Lagrange gibt sodann ohne weitere Begründung folgende Regel: Ist

$$\frac{dz}{dx} + P\frac{dz}{dy} + Q\frac{dz}{dt} + \cdots = Z,$$

wo $P, Q, \ldots Z$ beliebige gegebene Funktionen von $x, y, t, \ldots z$ sind und z selbst eine unbekannte Funktion von $x, y, t, \ldots$ ist, so bilde man die „équations particulières"

$$dy - Pdx = 0; \quad dt - Qdx = 0; \ \ldots; \ dz - Zdx = 0,$$

integriere und löse nach den Integrationskonstanten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ auf. Das gesuchte Integral der ursprünglichen Gleichung ist dann

$$\alpha = \varphi(\beta, \gamma, \ldots),$$

wo φ eine willkürliche und unbestimmte Funktion ist; das Integral wird „complète"[2]) sein, weil es eine willkürliche Funktion enthält.

---

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 625. Im Anschluß an diesen Aufsatz steht eine Bemerkung von Charles für den Fall, daß die gegebene Differentialgleichung in den drei Variablen x, y, z homogen ist: Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 348. [2]) So schreibt Lagrange, obwohl er früher zwischen allgemeinem und vollständigem Integral unterschieden hat.

Einen Beweis gibt Lagrange nicht an, sondern verweist einfach auf seine Integration der Gleichung

$$\frac{dz}{dx} = V\frac{dz}{dy} + Z.$$

Erst im Jahre 1785 kommt Lagrange wieder auf die lineare Gleichung zurück, um einen Beweis für seine Methode zu geben.[1]) Für den Fall von drei Variablen u, x, y sei wie herkömmlich

$$\frac{du}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{du}{dy} = q$$

gesetzt; die gegebene Differentialgleichung sei

$$Xp + Yq = U,$$

wo X, Y, U beliebige Funktionen von u, x und y sind. Es ist dann von selbst

$$du = pdx + qdy.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen folgt

$$(Xp + Yq)du = U(pdx + qdy)$$

oder

$$p(Xdu - Udx) + q(Ydu - Udy) = 0.$$

Lagrange nimmt nun an, die beiden Gleichungen

$$Xdu - Udx = 0 \quad \text{und} \quad Ydu - Udy = 0$$

seien in der Form integriert

$$\alpha = A, \quad \beta = B,$$

wo A und B bekannte Funktionen von u, x und y, ferner α, β die Integrationskonstanten sind. Lagrange führt jetzt statt x und y die eben bestimmten Ausdrücke A und B als neue Variable α und β in die ursprüngliche Differentialgleichung ein. Er erhält zunächst

$$d\alpha = \frac{dA}{du}du + \frac{dA}{dx}dx + \frac{dA}{dy}dy$$

und ganz analog

$$d\beta = \frac{dB}{du}du + \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy.$$

Für die hierin auftretenden Derivierten von A und B lassen sich aber zwei bemerkenswerte Relationen aufstellen. Betrachtet man nämlich die Funktionen A und B als Integrale von

---

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. V, p. 543ff.

$$Xdu - Udx = 0 \quad \text{und} \quad Ydu - Udy = 0.$$

sind also A und B konstant, so ist

$$\frac{dA}{du}\,du + \frac{dA}{dx}\,dx + \frac{dA}{dy}\,dy = 0$$

und ebenso

$$\frac{dB}{du}\,du + \frac{dB}{dx}\,dx + \frac{dB}{dy}\,dy = 0,$$

d. h. es müssen die Gleichungen

$$\frac{dA}{du} + \frac{dA}{dx}\frac{X}{U} + \frac{dA}{dy}\frac{Y}{U} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{dB}{du} + \frac{dB}{dx}\frac{X}{U} + \frac{dB}{dy}\frac{Y}{U} = 0$$

identisch bestehen, also auch wenn man A und B nicht mehr als Integrale, d. i. als Konstante, sondern als neue Variable auffaßt. Aus den letztangeführten Gleichungen kann man aber sofort $\frac{dA}{du}$ und $\frac{dB}{du}$ berechnen; mit Hilfe der so erhaltenen Ausdrücke lassen sich dann die Differentiale der Variablen α und β in der Form schreiben:

$$d\alpha = \frac{1}{U}\frac{dA}{dx}(Udx - Xdu) + \frac{1}{U}\frac{dA}{dy}(Udy - Ydu);$$

$$d\beta = \frac{1}{U}\frac{dB}{dx}(Udx - Xdu) + \frac{1}{U}\frac{dB}{dy}(Udy - Ydu);$$

daraus ergibt sich

$$Xdu - Udx = \frac{U}{T}\left(\frac{dB}{dy}d\alpha - \frac{dA}{dy}\,d\beta\right);$$

$$Ydu - Udy = \frac{U}{T}\left(\frac{dA}{dx}\,d\beta - \frac{dB}{dx}\,d\alpha\right),$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{dA}{dy}\frac{dB}{dx} - \frac{dB}{dy}\frac{dA}{dx} = T$$

gesetzt ist.

Lagrange führt jetzt diese Ausdrücke in die der gegebenen äquivalente totale Differentialgleichung

$$p(Xdu - Udx) + q(Ydu - Udy) = 0$$

ein und erhält dadurch

$$d\alpha + \frac{q\frac{dA}{dx} - p\frac{dA}{dy}}{p\frac{dB}{dy} - q\frac{dB}{dx}}\,d\beta = 0,$$

wobei der Faktor T, der, gleich Null gesetzt, unter Umständen auch eine Lösung liefert, stillschweigend fortgelassen ist. Da diese Differentialgleichung, fährt Lagrange fort, nur die beiden Differentiale

$d\alpha$ und $d\beta$ enthält, so kann sie nur in der Art bestehen, daß der Koeffizient von $d\beta$, wenn man für x und y ihre Werte in α, β und u einsetzt, wie sie sich aus $A = \alpha$, $B = \beta$ ergeben, eine Funktion von α und β allein ist, d. h. es muß nach ausgeführter Substitution u von selbst herausfallen. Setzt man also diesen Koeffizienten gleich einer beliebigen Funktion $f(\alpha, \beta)$, so geht die Differentialgleichung in die neue über

$$d\alpha + f(\alpha, \beta)\,d\beta = 0,$$

die sich immer in der Form

$$F(\alpha, \beta) = 0$$

integrieren läßt. Ersetzt man endlich, sagt Lagrange, die Hilfsvariabeln α und β wieder durch ihre Werte in x, y und u, so ergibt sich das Integral

$$F(A, B) = 0,$$

und F wird eine beliebige Funktion sein, da f eine solche ist. Lagrange führt den analogen Beweis noch für den Fall von vier Veränderlichen und weist darauf hin, daß er für noch mehr Variable in ähnlicher Weise erledigt werden kann. Lagrange betrachtet sodann[1] den speziellen Fall

$$X\frac{du}{dx} + Y\frac{du}{dy} + Z\frac{du}{dz} + \cdots = S + Tu,$$

wo X, Y, Z, ... Funktionen der unabhängigen Variablen x, y, z, ... allein, S und T von allen Variablen außer u sind. Das System

$$Xdu - (S + Tu)\,dx = 0; \quad Ydu - (S + Tu)\,dy = 0;$$
$$Zdu - (S + Tu)\,dz = 0; \ \ldots$$

liefert dann

$$Ydx - Xdy = 0; \quad Zdx - Xdz = 0; \ \ldots$$

d. h. Gleichungen, in welchen u nicht mehr vorkommt. Hieraus erhält man die y, z, ... durch x und die willkürlichen Konstanten β, γ, ... ausgedrückt. Endlich ist

$$u \cdot e^{-\int\frac{Tdx}{x}} = \int \frac{e^{-\int\frac{Tdx}{x}}\,Sdx}{X} + \alpha,$$

so daß man nach Substitution der eben berechneten Ausdrücke für y, z, ... auch u durch x ausgedrückt erhält.

An die Abhandlungen von Lagrange aus den Jahren 1772 und

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. V, p. 554.

1774 über die nichtlineare Gleichung 1. Ordnung knüpft Legendre an[1]); wichtiger erscheint hier der Hinweis auf eine Arbeit von Charpit über denselben Gegenstand, in der die zwei Methoden von Lagrange in glücklicher Weise vereinigt sind; Charpits Untersuchungen, der Akademie im Jahre 1784 überreicht, kamen nicht in den Druck; alle Nachrichten über ihn und seine Methode verdanken wir der Darstellung bei Lacroix.[2]) „La mort", heißt es da, „enleva ce jeune homme au moment où ses talens donnaient de grandes espérances." Die Integrabilitätsbedingung für die totale Gleichung dreier Variablen

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

ist, wie wir uns erinnern,

$$\frac{dp}{dy} - \frac{dq}{dx} + q\frac{dp}{dz} - p\frac{dq}{dz} = 0,$$

wo p und q als Funktionen von x, y und z gedacht sind. Ist nun eine Relation $Z = 0$ zwischen den fünf Größen x, y, z, p und q gegeben, so kann man mit ihrer Hilfe p oder q in die Integrabilitätsbedingung einsetzen und hat damit eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit vier Variablen gewonnen (vgl. S. 966 ff.). Man erhält nämlich durch Differentiation

$$dZ = A\,dx + B\,dy + C\,dz + D\,dp + E\,dq = 0$$

und daraus

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{B + E\frac{dq}{dy}}{D} \quad \text{und} \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{C + E\frac{dq}{dz}}{D}.$$

Führt man diese Werte in die Integrabilitätsbedingung ein, so ergibt sich

$$D\frac{dq}{dx} + E\frac{dq}{dy} + (Eq + Dp)\frac{dq}{dz} + B + Cq = 0,$$

d. i. die gesuchte lineare Gleichung, wenn man noch p mittels $Z = 0$ eliminiert denkt. Auf diese Gleichung wendet jetzt Charpit die Lagrangesche Methode für lineare Gleichungen an (vgl. S. 972) und erhält dadurch unmittelbar

$$D\,dy - E\,dx = 0; \quad D\,dz - (Eq + Dp)\,dx = 0;$$
$$D\,dq + (B + Cq)\,dx = 0,$$

wo p durch seinen Wert in x, y, z und q zu ersetzen ist. Wenn

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 387. [2]) Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, 2. édit. Paris 1814, t. II, p. 548.

$T = a$, $U = b$ und $V = c$ die Integrale dieser drei Gleichungen sind, so ist $V = \varphi(T, U)$ das allgemeine Integral der linearen Gleichung, d. h. eine zweite Relation zwischen x, y, z, p und q, die mit $Z = 0$ zusammen derartige Werte von p und q liefert, daß die Gleichung

$$dz = pdx + qdy$$

eventuell mit Hilfe eines Multiplikators integrabel wird. Man schreibt heutzutage seit Monge[1]) etwas allgemeiner und übersichtlicher

$$\frac{dp}{A + Cp} = \frac{dq}{B + Cq} = -\frac{dz}{Dp + Eq} = -\frac{dx}{D} = -\frac{dy}{E}$$

und wird so auf eine Relation zwischen x, y, z, p und q geführt, die neben $Z = 0$ besteht.

Auf die Behandlung der linearen Gleichung mit drei Variablen durch Monge, die in einfachster Weise zu den Lagrangeschen Gleichungen führt, sind wir bereits eingegangen (vgl. S. 948).

Die lineare Gleichung mit beliebig vielen Variablen behandelt Monge nach derselben Methode[2]): Zurückführung auf totale Gleichungen mit Hilfe der Relationen, die partielle Differentialquotienten und totale Differentiale untereinander verbinden. Zunächst ist auf die Gleichung mit drei unabhängigen Variablen u, x, y und der abhängigen Veränderlichen z eingegangen; hier ist

$$dz = pdu + qdx + rdy.$$

Die Differentialgleichung

$$Ap + Bq + Cr + D = 0$$

verwandelt sich dann, je nachdem man eine der Größen p, q oder r mit Hilfe des Ausdruckes für dz eliminiert, in eine der drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
Adz + Ddu &= q(Adx - Bdu) + r(Ady - Cdu),\\
Bdz + Ddx &= -p(Adx - Bdu) + r(Bdy - Cdx),\\
Cdz + Ddy &= -p(Ady - Cdu) - q(Bdy - Cdx).
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen dürfen die Größen p, q, r nicht bestimmen, sondern müssen unabhängig von ihnen gelten; durch Nullsetzen ihrer Koeffizienten erhält Monge sechs Gleichungen, von welchen aber nur drei wesentlich verschieden sind. Lassen sich aus diesem System oder einem daraus hergeleiteten gleichwertigen drei vollständige Integral-

[1]) Application de l'analyse à la géométrie, Addition p. 437. [2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 159.

gleichungen $V = a$, $U = b$ und $W = c$ mit den Integrationskonstanten a, b, c bilden, „so drücken diese drei Integrale zusammen (simultanées) dasselbe aus wie die vorgelegte Differentialgleichung: sie bedeuten nicht, daß die Größen V, U, W jede einzeln konstant sind, sondern daß, sobald eine davon konstant ist, auch die beiden anderen es notwendig sind, oder daß diese eine von ihnen eine willkürliche Funktion der beiden anderen ist; demnach bedeutet die Gleichung

$$V = \varphi(U \mathbin{\&} W)$$

dasselbe wie die gegebene Differentialgleichung und bildet ihr vollständiges Integral." Mit der Begründung: „Es ist leicht zu sehen, daß die allgemeine lineare Gleichung mit beliebig vielen Variablen sich gerade so und mit Hilfe einer ähnlichen Überlegung behandeln läßt", gibt Monge sodann kurz die entsprechende Integrationstheorie.

Hier sei angeführt, was derselbe Autor über die nichtlineare Gleichung sagt. Die diesbezüglichen Ausführungen sind im Anschluß an die analogen Untersuchungen über totale Gleichungen höheren Grades gemacht (vgl. S. 940); Monge findet[1]), daß eine partielle Differentialgleichung nur dann nichtlinear sein kann, wenn 1. die willkürlichen Funktionen im Integral in verschiedenen Potenzen vorkommen, oder 2. wenn die Argumente dieser Funktionen nicht unmittelbar, sondern durch weitere Gleichungen gegeben sind, in denen sie wieder als Argumente willkürlicher Funktionen und zwar nicht alle linear auftreten. Wenn man nun, sagt Monge im folgenden, in der Integralgleichung die verschiedenen Potenzen der nämlichen Größe, durch deren Elimination die nichtlineare Differentialgleichung entsteht, als ebensoviele verschiedene Größen auffaßt und eliminiert, so wird die jetzt entstehende Differentialgleichung linear sein. Ist die Integralgleichung selbst nicht gegeben, so handelt es sich einfach darum, aus der vorgelegten Differentialgleichung höheren Grades die entsprechende lineare Differentialgleichung, die natürlich höherer Ordnung sein wird als die ursprüngliche, herzuleiten.

Sei nun die partielle Differentialgleichung 1. Ordnung $W = 0$ gegeben, wo W eine Funktion von x, y, z, p und q ist. Durch Differentiation ergibt sich

$$A\,dp + B\,dq + C\,dx + D\,dy = 0,$$

wobei dz mittels $dz = p\,dx + q\,dy$ eliminiert gedacht ist. Monge nimmt nun willkürlich an, es sei etwa

$$C\,dx + D\,dy = 0;$$

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 167.

dann ist von selbst

$$Adp + Bdq = 0.$$

und es ergibt sich, indem man

$$dp = rdx + sdy; \quad dq = sdx + tdy$$

setzt, durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$ die Gleichung 2. Ordnung

$$ADr + (BD - AC)s - BCt = 0.$$

Monge verlangt von dieser Gleichung, daß sie nicht alle Konstanten der Gleichung $W = 0$ enthalte, und behandelt sie nach seiner Methode für die partielle Gleichung 2. Ordnung, auf die wir noch zu sprechen kommen (vgl. S. 1009); er erhält so das Simultansystem

$$ADdy^2 - (BD - AC)dxdy - BCdx^2 = 0$$

und

$$ADdpdy - BCdqdx = 0.$$

Die erste Gleichung hat die beiden Wurzeln

$$Cdx + Ddy = 0 \quad \text{und} \quad Ady - Bdx = 0,$$

deren erste nichts Neues gibt, deren zweite aber auf das Simultansystem

$$Ady - Bdx = 0; \quad Cdq - Ddp = 0$$

führt; das sind aber, wenn man die Verschiedenheit der Schreibweise bedenkt, zwei der Charpitschen Gleichungen. Lassen sich davon zwei Integrale $V = \alpha$ und $U = \varphi(\alpha)$ angeben, so erhält man das „intégrale complète" der ursprünglichen Gleichung, indem man aus ihr und den Gleichungen $V = \alpha$ und $U = \varphi(\alpha)$ die Größen p und q eliminiert. Verschwindet der Parameter α dabei nicht von selbst, so ist das Endergebnis dieser Elimination noch partiell nach α zu differentiieren: das Integral besteht dann aus zwei Gleichungen, zwischen denen man sich α eliminiert denken muß. So führt die Gleichung

$$(ap - q)^2 + ax(ap + q) + a^2z = 0$$

auf

$$ady - dx = 0; \quad adp + dq = 0;$$

aus

$$ay - x = \alpha \quad \text{und} \quad ap + q = \varphi(\alpha) = \varphi(ay - x)$$

ergibt sich dann sofort das „intégrale complète" in der Form

$$[\varphi(ay - x)]^2 + x \cdot \varphi(ay - x) + z = 0.$$

Wichtiger ist der Fall[1]), daß die gegebene Gleichung sich in irgend

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 172.

einer Weise aus den drei Größen p, q und $M = z - px - qy$ zusammensetzt; dann werden nämlich die Größen C und D beide notwendig 0, das Differential der ursprünglichen Gleichung wird von der Form

$$Mdp + Ndq = 0,$$

woraus Monge $p = \varphi(q)$ folgert, und das ist, wie er ausdrücklich bemerkt, die Gleichung der abwickelbaren Flächen. Setzt man diese Gleichung in die ursprüngliche ein, faßt q als Parameter auf und differentiiert nach q partiell, so hat man zwei Gleichungen, die das gesuchte Integral repräsentieren. Bei dieser Gleichung, die als allgemeine Clairautsche Gleichung aufgefaßt werden kann, ließe sich das vollständige Integral noch leichter aufstellen.

Monge bemerkt sodann[1]), daß die Annahme

$$Cdx + Ddy = 0$$

vollkommen willkürlich war, und daß jede andere derartige Annahme, die auf eine bekannte Differentialgleichung 2. Ordnung mit einer Konstanten weniger führt, ebenso berechtigt sei; diese Überlegung habe ihn zu den folgenden merkwürdigen Resultaten geführt: Ist

$$F(L, M, N) = 0$$

eine Differentialgleichung, wo L, M, N gegebene Funktionen von x, y, z, p, q sind mit der ganz speziellen Eigenschaft, daß aus zweien der Gleichungen

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0$$

von selbst mit Notwendigkeit die dritte folgt, so wird das Resultat der Elimination von p, q und einer der willkürlichen Funktionen aus den vier Gleichungen

$$L = \alpha; \quad M = \varphi\alpha; \quad N = \psi\alpha; \quad F(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha) = 0$$

zusammen mit der partiellen Derivierten der Eliminationsgleichung nach α das „intégrale complète" der gegebenen Differentialgleichung bilden. Nach dieser Methode der Integration durch Berührungstransformationen[2]), wie wir heutzutage sagen, behandelt, führt das Beispiel

$$a\left(x + \frac{hp}{k}\right) + b\left(y + \frac{hq}{k}\right) + c\left(z - \frac{h}{k}\right) = 1,$$

wo

$$k^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

auf die drei Gleichungen

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 174. [2]) Auf dieses Vorkommen der Berührungstransformationen hat zuerst E v Weber, Math. Enzyklopädie, Bd. II, S. 359, Anm. 224 aufmerksam gemacht

$$(x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+(z-\psi\alpha)^2=h^2;$$
$$a\alpha+b\varphi\alpha+c\psi\alpha=1;$$
$$x-\alpha+(y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha+(z-\psi\alpha)\psi'\alpha=0;$$

da, wie verlangt, von den drei Gleichungen

$$d\left(x+\frac{hp}{k}\right)=0;\quad d\left(y+\frac{hq}{k}\right)=0;\quad d\left(z-\frac{h}{k}\right)=0$$

eine die Folge der beiden anderen ist. Monge gibt wie gewöhnlich auch die geometrische Deutung der Integralgleichungen; die erste stellt eine Kugelfläche mit unbestimmtem Mittelpunkt dar, die zweite verlangt, daß dieser Mittelpunkt auf der Ebene

$$ax+by+cz=1$$

liegt, die dritte fordert, daß die Koordinaten x, y, z sich nicht ändern, wenn α variiert; alle Gleichungen zusammen bedeuten demnach die Enveloppe einer Schar von Kugeln mit dem Radius h, deren Mittelpunkte auf einer beliebigen Kurve liegen, die man in einer gegebenen Ebene gezogen hat. Nach zwei weiteren Beispielen mit denselben Größen L, M, N bringt Monge eine Verallgemeinerung seiner Methode; sind die Größen $L, M, N, P, \ldots$ derart aus x, y, z, p, q zusammengesetzt, daß aus irgend zweien der Gleichungen

$$dL=0;\quad dM=0;\quad dN=0;\quad dP=0, \ldots$$

die anderen alle von selbst schon folgen, so wird eine beliebig aus den Größen $L, M, N, P, \ldots$ zusammengesetzte Differentialgleichung

$$F(L, M, N, P, \ldots)=0$$

in der Weise integriert, daß man aus den Gleichungen

$$L=\alpha;\quad M=\varphi\alpha;\quad N=\psi\alpha;\quad P=\pi\alpha, \ldots$$

zunächst die Größen p und q eliminiert. Indem man jetzt aus den überbleibenden Gleichungen und aus

$$F(\alpha, \varphi\alpha, \psi\alpha, \pi\alpha, \ldots)=0$$

alle willkürlichen Funktionen bis auf eine eliminiert, erhält man eine Gleichung $V=0$, die nur x, y, z, α und eine willkürliche Funktion enthält; diese Gleichung bildet dann mit der durch partielle Differentiation gebildeten $\frac{dV}{d\alpha}=0$ zusammen das gesuchte Integral. Eine Verallgemeinerung dieses Satzes für beliebig viele Variable findet sich

in dem nämlichen Bande der Pariser Memoiren.[1]) **Monge** weist endlich darauf hin, daß hierbei die Funktion F auch willkürliche Funktionen enthalten darf, d. h. daß die gegebene Differentialgleichung Integral einer Gleichung höherer Ordnung sein kann.

Im folgenden[2]) stellt **Monge** die äußerst wichtige Behauptung auf: Es gibt keine partielle Differentialgleichung 1. Ordnung, welche nicht auf die betrachtete Form zurückführbar und nicht nach der angegebenen Methode integrierbar wäre, wenn man nur einen Prozeß hätte, die Größen $L, M, N, P, \ldots$ aufzufinden; aber ihre Aufsuchung, fährt **Monge** fort, bringt im allgemeinen ebenso große Schwierigkeiten mit sich als die Integration der partiellen Differentialgleichungen selbst[3]); und der Inhalt der letzten Ausführungen kann nur in sehr speziellen Fällen nützlich werden; dessenungeachtet ist die Anzahl von solchen Systemen $L, M, N, P, \ldots$ unendlich groß. Nachdem er noch zwei Beispiele von Wertetripeln L, M, N gebracht hat, stellt er sich[4]) die Aufgabe, a priori ein System von drei Größen L, M, N zu finden, welche, aus x, y, z, p und q zusammengesetzt, die Eigenschaft haben, „daß eine beliebige von ihnen eine Funktion der beiden anderen ist". Man nehme, heißt es, eine beliebige Gleichung $V=0$ zwischen x, y, z und drei Parametern, und berechne aus ihr und $\frac{dV}{dx}=0$ und $\frac{dV}{dy}=0$ die Werte dieser drei Parameter, so werden diese die verlangte Eigenschaft besitzen, d. h. werden die totalen Differentiale von zweien derselben gleich Null gesetzt, so wird auch dasjenige des dritten Parameters gleich Null. **Monge** gibt kein Beispiel[5]) und auch keinen Beweis für seine Behauptung; indessen folgt, wenn wir die erwähnten Parameter L, M und N nennen, aus den drei Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz+\frac{\partial V}{dL}dL+\frac{\partial V}{\partial M}dM+\frac{\partial V}{\partial N}dN=0;$$

$$\frac{dV}{dx}=\frac{\partial V}{\partial x}+p\cdot\frac{\partial V}{\partial z}=0;\quad \frac{dV}{dy}=\frac{\partial V}{\partial y}+q\cdot\frac{\partial V}{\partial z}=0$$

mit Berücksichtigung von

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 557. **Monge** bringt als Beispiel die Verallgemeinerung eines schon von **Lagrange** behandelten Falles. [2]) Ebenda, p. 188. [3]) Mais cette recherche comporte en général des difficultés aussi grandes que celles du calcul intégral des équations aux différences partielles. [4]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 185. [5]) In dem obigen Beispiel war offenbar

$$V=(x-L)^2+(y-M)^2+(z-N)^2-h^2=0$$

zu setzen.

unmittelbar

$$\frac{\partial V}{\partial L} dL + \frac{\partial V}{\partial M} dM + \frac{\partial V}{\partial N} dN = 0.$$

Man erkennt leicht die Definition der Berührungstransformationen wieder, wie sie Lie für den dreidimensionalen Raum beim Bestehen einer einzigen Relation zwischen ursprünglichen und transformierten Koordinaten aufstellt; nur hat Lie noch zwei weitere Ausdrücke p_1 und q_1, die, wenn L, M, N bzw. den Variabeln x, y, z entsprechen, in der Mongeschen Schreibweise durch die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial L} + p_1 \cdot \frac{\partial V}{\partial N} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial M} + q_1 \cdot \frac{\partial V}{\partial N} = 0$$

definiert wären. Doch fehlt Monge die Vorstellung, daß es sich bei seiner Methode um eine Transformation handelt; um so mehr fehlt natürlich die Kenntnis der geometrischen Eigentümlichkeit dieser Transformation, die den Namen Berührungstransformation veranlaßt hat. Monge wendet seine Theorie auch auf totale Gleichungen an und integriert mit ihr die allgemeinen Gleichungstypen

$$F[p, (y - px)] = 0 \quad \text{und} \quad F\left(\left[x - \frac{ph}{\sqrt{1+p^2}}\right], \left(y + \frac{h}{\sqrt{1+p^2}}\right]\right) = 0$$

Sucht man zwei Funktionen M und N von x, y und $p = \frac{dy}{dx}$ von der Art, daß aus der einen der beiden Gleichungen $dM = 0$ und $dN = 0$ auch die andere folgt, so hat man nach Monge eine Funktion V von x, y und zwei Parametern zu nehmen und aus $V = 0$ und $dV = 0$ die zwei Parameter zu berechnen. Die allgemeine Theorie ist in folgendem Theorem enthalten[1]): Sind n Größen $M, N, P, Q, \ldots$ gegeben, die sich aus $x, y, p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{dp}{dx}, r = \frac{dq}{dx}, \ldots$ bis zu den Differentialquotienten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung einschließlich zusammensetzen, und folgen aus einer einzigen der Gleichungen

$$dM = 0, \quad dN = 0, \quad dP = 0, \quad dQ = 0, \ldots$$

alle übrigen, so wird eine totale Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $F(M, N, P, Q, \ldots) = 0$ zum endlichen und vollständigen Integral die Gleichung besitzen, die sich durch Elimination der $n-1$ Größen $p, q, r, \ldots$ und einer der willkürlichen Konstanten $a, b, c, d, \ldots$ aus den $n+1$ Gleichungen

$$M = a;\; N = b;\; P = c;\; Q = d;\; \ldots,\; F(a, b, c, d, \ldots) = 0$$

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787). p. 189.

ergibt; das Resultat dieser Elimination wird eine Gleichung zwischen x, y und n willkürlichen Konstanten sein. Eine elegante Methode für partielle Gleichungen 2. Ordnung, die auf Berührungstransformationen beruht, werden wir bei Legendre (vgl. S. 1013) antreffen

Von den partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit drei Variabeln wurde zuerst die Gleichung der Saitenschwingungen behandelt. Im vorigen Bande sind bereits die Bemühungen verschiedener Mathematiker um diese Gleichung geschildert; hier ist Lagrange zu nennen, der in den Abhandlungen der Turiner Akademie der Natur und Fortpflanzung des Schalles zwei eingehende Untersuchungen widmet und an das erwähnte Problem von vornherein mit der ganz bestimmten Absicht herangeht, Eulers Auffassung von der Natur der willkürlichen Funktionen einwandfrei zu beweisen. Bei dieser Gelegenheit hat Lagrange Ausdrücke aufgestellt, welche mit den Formeln für die Koeffizienten einer Fourierschen Reihe übereinstimmen, was zu der Behauptung Veranlassung gegeben hat, Lagrange habe bereits die Theorie der Fourierschen Reihe besessen; in Wirklichkeit ist die Lagrangesche Entwicklung prinzipiell davon verschieden; man könnte sie eher als eine Formel zur Interpolation durch trigonometrische Funktionen auffassen. Lagrange geht aus von einem Simultansystem[1]), das wir kürzer in die Gleichung

$$\frac{d^2 y^{(i)}}{dt^2} = e(y^{(i+1)} - 2y^{(i)} + y^{(i-1)})$$

zusammenfassen können, wenn i von 1 bis $m-1$ läuft und $y^{(o)}$ und $y^{(m)}$ beide Null sind; diese Gleichungen stellen die Schwingungen einer endlichen Zahl von Massenpunkten dar. Die Integration wird nach der d'Alembertschen Methode für derartige Simultansysteme mit Hilfe unbestimmter Multiplikatoren bewerkstelligt, dabei gehen auch die Geschwindigkeiten in die Rechnung ein Nach ziemlich weitläufigen Rechnungen ergibt sich endlich für die Koordinate $y^{(\mu)}$ des μ^{ten} Massenpunktes ein komplizierter Ausdruck[2]), der überdies von den Anfangsbedingungen abhängig ist. Aus dieser Formel erhält Lagrange[3]), indem er die Zahl der schwingenden Punkte unendlich groß annimmt,

$$y = \frac{2}{a}\int dx\, Y\left(\sin\frac{\pi X}{2a} \times \sin\frac{\pi x}{2a} \times \cos\frac{\pi H t}{2T} + \sin\frac{2\pi X}{2a} \times \sin\frac{2\pi x}{2a} \times \cos\frac{2\pi H t}{2T} + \cdots\right).$$

---

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. I[a] (1759), p. 26. [2]) Ebenda, p. 44.
[3]) Ebenda, p. 56.

wozu noch ein additives Glied tritt, das er im folgenden gleich Null setzt.

X und Y sind hierbei die Anfangskoordinaten, x und y die Koordinaten zur Zeit t, a die Länge der Saite und H eine bekannte konstante Größe. Lagrange bemerkt hierzu, daß das Zeichen $\int$ nur ein Summenzeichen sei, sagt aber fast unmittelbar darauf, daß die Integrationen bei variabeln X, Y und konstanten x, t auszuführen seien. Wesentlich ist nun, daß Lagrange die Reihe unter dem Integralzeichen nicht etwa gliedweise integriert, sondern vor der Integration diese Reihe zu summieren sucht, da er für y nicht eine unendliche Reihe, sondern die schon bekannte Form mit zwei willkürlichen Funktionen erhalten will. Zu diesem Zweck wird der Ausdruck $2 \sin \frac{\pi x}{2a} \times \cos \frac{\pi H t}{2T}$ in bekannter Weise durch die Summe zweier Sinus ersetzt; es ergibt sich:

$$y = \pm \frac{1}{2a} \int \frac{dx\, Y \sin \frac{\pi X}{2a} \times \sin \frac{\pi}{2}\left(\frac{m x}{a} + \frac{m H t}{T}\right)}{\cos \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{H t}{T}\right) - \cos \frac{\pi X}{2a}}$$

$$\pm \frac{1}{2a} \int \frac{dx\, Y \sin \frac{\pi X}{2a} \times \sin \frac{\pi}{2}\left(\frac{m x}{a} - \frac{m H t}{T}\right)}{\cos \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{H t}{T}\right) - \cos \frac{\pi X}{2a}} .$$

Da m unendlich groß ist, heißt es weiter, wird, was auch x und t sein mögen, $m\left(\frac{x}{a} \pm \frac{Ht}{T}\right)$ immer eine ganze Zahl, der Sinus davon und folglich die betreffenden Integrale Null sein. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn gleichzeitig der Nenner Null wird; den Wert von $\frac{0}{0}$ bestimmt Lagrange durch Differentiation von Zähler und Nenner und kommt schließlich zum gesuchten allgemeinen Integral. Die ganze umständliche Ableitung des bekannten Resultats hat er hauptsächlich unternommen, um zu zeigen, daß es sich ohne alle Voraussetzungen über die Natur der darin auftretenden willkürlichen Funktionen gewinnen läßt; die Schwächen seiner Methode und insbesondere des benutzten Grenzüberganges hat neben anderen d'Alembert klar gestellt[1]). Noch ist zu bemerken, daß Spätere aus Gehässigkeit gegen Fourier

[1]) Besonders in verschiedenen Bemerkungen im 1. und 5. Band seiner Opuscules mathématiques. Man vgl. übrigens noch Riemann, Partielle Differentialgleichungen, bearb. von K. Hattendorf 1869, S. 200, und Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen 1889, S. 132.

dessen Reihen als **Lagrange**sche Formeln bezeichnet haben; man ist indessen längst davon zurückgekommen.

Die partielle Differentialgleichung der Saitenschwingungen selbst behandelt **Lagrange** auf eine ganz neue, eigenartige Weise; er führt sie nämlich auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2. Ordnung zurück, wenn er auch diese Reduktion nicht ausdrücklich als Ziel seiner Methode hinstellt. Naturgemäß ist die erwähnte Reduktion auch ein wenig umständlich, und es ist z. B. **d'Alemberts** Zurückführung des Problems auf ein Simultansystem von totalen Gleichungen[1]) unzweifelhaft eleganter; nichtsdestoweniger ist der Gedankengang **Lagranges** als äußerst geistreich und originell zu bezeichnen; wir können hierbei, weil ihn sein Erfinder konsequent für eine Reihe viel komplizierterer Gleichungen in Anwendung brachte, sogar von einer wirklichen Methode sprechen. Die partielle Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right)$$

multipliziert **Lagrange**[2]) mit einer Funktion von x allein, die M heißen soll. Zweimalige partielle Integration nach x ergibt sodann

$$\int \frac{d^2 z}{dt^2} M dx = c\left[\left(\frac{dz}{dx}\right) M - z\left(\frac{dM}{dx}\right)\right] + c\int z\left(\frac{d^2 M}{dx^2}\right) dx.$$

Die physikalischen Anfangsbedingungen der Aufgabe verlangen, daß z für zwei Werte $x = 0$ und $x = a$ beständig, d. h. für jedes t, gleich Null ist; das Gleiche verlangt **Lagrange** von der Funktion M. Wird jetzt zwischen den Grenzen 0 und a integriert, was in der Schreibweise nicht besonders ausgedrückt ist, so ergibt sich die Gleichung

$$\int\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) M dx = c\int z\left(\frac{d^2 M}{dx^2}\right) dx,$$

die auf Grund der Annahme

$$\left(\frac{d^2 M}{dx^2}\right) = kM$$

(k bedeutet hierbei eine Konstante) in

$$\int\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) M dx = kc\int z M dx$$

übergeht. Hieraus erhält man endlich mittels der Substitution

$$\int z M dx = s$$

---

[1]) Vgl. diese Vorl., III², S. 901. [2]) Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 20.

— wobei das Integral natürlich wieder zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = a$ zu nehmen ist, so daß s eine Funktion von t allein darstellt — die Gleichung

$$\int \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) M dx = \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = k \cdot c \cdot s,$$

welche, wie **Lagrange** sagt, zu integrieren ist, indem man die Zeit t als einzige Variable ansieht. Damit ist die Integration der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung auf diejenige der beiden totalen Gleichungen

$$\left(\frac{d^2 M}{dx^2}\right) = kM \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) = kcs$$

zurückgeführt, die sich nur durch den konstanten Faktor c unterscheiden; nach ihrer Integration ist nur noch z so zu bestimmen, daß

$$\int z M dx = s.$$

Lagrange führt nun zunächst die Gleichung

$$s = S \cos t\sqrt{-ck} - \frac{R}{\sqrt{-ck}} \sin t\sqrt{-ck}$$

ein, wo S und R die Anfangswerte von s und $\left(\frac{ds}{dt}\right)$, d. i. von $\int z M dx$ bzw. $\int \left(\frac{dz}{dt}\right) M dx$ bedeuten, und kommt dann mit Hilfe verschiedener geschickter, allerdings nicht ganz korrekter und ausreichender Schlüsse zu dem Integral

$$z = \frac{Z(x + t\sqrt{c}) + Z(x - t\sqrt{c})}{2} + \frac{\int V dx - \int V dx}{2\sqrt{c}},\text{[1]}$$

worin Z und V willkürliche Funktionen sind, die den Anfangsbedingungen entsprechend gewählt werden müssen; das erste Integral $\int V dx$ hat dabei die obere Grenze $x + t\sqrt{c}$, das zweite $x - t\sqrt{c}$. Nach derselben Methode behandelt **Lagrange**[2]) die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + y,$$

wo y eine beliebige Funktion von x und t ist; die Gleichung

$$\left(\frac{d^2 z}{dt^2}\right) = b\left(\frac{d^2 z}{dt\,dx}\right) + c\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) + y\text{[3]}$$

ersetzt er durch die beiden Gleichungen

$$\frac{dz}{dt} = u; \quad \frac{du}{dt} = b\frac{du}{dx} + c\frac{d^2 z}{dx^2} + y.$$

---

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 27. [2]) Ebenda, p. 104.
[3]) Ebenda, p. 110.

Er multipliziert die erste mit N, die zweite mit M, integriert partiell nach x und addiert; so ergibt sich durch Nullsetzen aller Glieder, die nicht unter dem Integralzeichen stehen, die Gleichung

$$\int\left(N\frac{dz}{dt}+M\frac{du}{dt}\right)dx=\int\left(c\,\frac{d^2M}{dx^2}\,z+\left[N-b\,\frac{dM}{dx}\right]u\right)dx+\int My\,dx.$$

Diese Gleichung werde erfüllt durch das Simultansystem

$$kN=c\frac{d^2M}{dx^2}\quad\text{und}\quad kM=N-b\frac{dM}{dx};$$

aus diesen beiden Gleichungen folgt dann durch Elimination von N eine totale Gleichung für M, nämlich

$$k^2M+bk\frac{dM}{dx}-c\frac{d^2M}{dx^2}=0,$$

so daß also

$$M=Ae^{mkx}+Be^{nkx}$$

ist, wo m und n die Wurzeln der Gleichung

$$1+by-cy^2=0$$

sind. Lagrange verlangt nun, daß M für $x=0$ und $x=a$ verschwindet, was $B=-A$, sowie $e^{mka}-e^{nka}=0$, d. i. eine Bestimmungsgleichung für k, ergibt; endlich wird

$$N=ck(m^2e^{mkx}-n^2e^{nkx}),$$

wobei A stillschweigend gleich 1 gesetzt ist. Sind solchermaßen die Funktionen M und N bestimmt, so ist s aus der zwischen den Grenzen 0 und a genommenen Gleichung

$$\int(Nz+Mu)\,dx=s$$

zu bestimmen, wobei s selbst der Gleichung

$$\int\left(N\frac{dz}{dt}+M\frac{du}{dt}\right)dx=\frac{ds}{dt}=ks+\int My\,dx$$

genügen muß. Die weitere Behandlung des Problems bringt keinen neuen Gedanken herein. Lagrange vergleicht schließlich noch seine Resultate mit denen von d'Alembert.

Das Problem einer schwingenden Saite von ungleichmäßiger Dicke führt auf eine Gleichung, die sich von derjenigen der Saitenschwingungen dadurch unterscheidet, daß die Konstante c durch eine Funktion von x ersetzt ist; Lagrange führt diese Gleichung

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)=X\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

auf die Integration von

$$kM = X\frac{d^2 M}{dx^2}$$

zurück[1]) und zeigt den Zusammenhang mit der Riccatischen Gleichung für spezielle Fälle. Dieselbe Reduktion führt kurz darauf[2]) Euler aus und verwandelt seine totale Gleichung durch die Substitution

$$p = e^{\int q\,dx}$$

in eine solche 1. Ordnung. Er setzt auch versuchsweise

$$y = v\,\Phi(u),$$

wo u eine Funktion von x und t, v eine solche von x allein ist, und findet, daß v eine lineare Funktion von x,

$$X = C\cdot v^{-4} \quad \text{und} \quad u = t + \int \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

ist.[3]) In einer anderen Abhandlung aus derselben Zeit[4]) nimmt Euler eine bestimmte Form des Integrals an, sucht aus ihr r als Funktion von x so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$rr\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$$

erfüllt wird, und erhält so verschiedene integrable Differentialgleichungen dieser Form. So führt ihn die Annahme

$$y = P\cdot\Gamma\left(\int u\,dx + t\right),$$

wo P und u Funktionen von x sein sollen, durch Einsetzen in die Differentialgleichung auf simultane totale Differentialgleichungen für P, u und r; es ergibt sich

$$P = \alpha x + \beta;\ \ u = \frac{1}{r} = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2}.$$

Im folgenden geht Euler zu Integralen der Form

$$y = P\Gamma\left(\int u\,dx + t\right) + Q\Gamma'\left(\int u\,dx + t\right) + \cdots$$

über, wo $P, Q, \ldots, u$ bestimmte Funktionen von x, Γ eine willkürliche Funktion und $\Gamma', \ldots$ ihre Ableitungen bedeuten; er behandelt der Reihe nach Fälle, in denen das Integral 1, 2 und mehr Glieder

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. II[2], 1760/61, p. 98. [2]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. IX, 1762/63 (1764), p. 292. [3]) Burkhardt, a. a. O., Heft 2, S. 349, 355. [4]) Miscellanea Taurinensia, t. III[2], 1762/65 (1766), p. 27 bis 59.

besitzt und erhält so Gleichungen, die in endlicher Form integrabel sind; zu der Heranziehung der Derivierten der willkürlichen Funktion mag wohl der Umstand mitgewirkt haben, daß Euler bereits früher (vgl. unten S. 990) eine Gleichung integriert hatte, in deren Integral die Differentialquotienten der willkürlichen Funktion auftreten. Endlich ist noch d'Alembert zu erwähnen, der die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = X\frac{d^2y}{dt^2}$$

durch eine Summe von Gliedern

$$\zeta \cdot \cos\frac{\lambda\pi t}{T}$$

zu integrieren sucht, wo ζ eine Funktion von x allein ist[1]); er erhält

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = -\lambda^2\pi^2 X\zeta,$$

eine Gleichung, über deren Weiterbehandlung bereits berichtet wurde (vgl. S. 883).

Das Problem der von einem Störungszentrum ausgehenden Wellen führt Euler schon 1759 auf die partielle Gleichung mit veränderlichen Koeffizienten

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{n}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

zurück, die er auf eine Riccatische reduziert; er findet daraus, daß sich für das räumliche Problem, d. i. für $n = 4$, die Aufgabe elementar lösen läßt und errät schließlich aus einigen partikulären Integralen die unten angegebene allgemeine Form des Integrals. Kurz darauf behandelt er das Problem wieder in einem Brief an Lagrange[3]) ohne neues zu bringen. Er verlangt, daß die Geschwindigkeit in allen Punkten gleichen Abstandes von dem Zentrum dieselbe ist, und erhält die Gleichung

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \frac{-2u}{V^2} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right),$$

die aus der vorigen im Falle $n = 4$ durch $s = \frac{u}{V}$ entsteht. Après plusieurs recherches, sagt er, j'ai enfin trouvé

---

[1]) Histoire de l'Académie de Berlin, t. XIX, 1763 (1770), p. 242. D'Alembert verweist bezüglich der Methode auf seine Opuscules mathématiques.

[2]) Ebenda (Hist. Berlin), t. XV, 1759 (1766), p. 248 [3]) Miscellanea Taurinensia, t. II[2], 1760/61, p. 1—10.

$$u = \frac{A}{V^3}\varphi\left[V + t\sqrt{(2gh)}\right] - \frac{A}{V}\varphi'\left[V + t\sqrt{(2gh)}\right]$$
$$+ \frac{B}{V^3}\psi\left[V - t\sqrt{(2gh)}\right] - \frac{B}{V}\psi'\left[V - t\sqrt{(2gh)}\right],$$

wo φ und ψ willkürliche Funktionen, φ', ψ' ihre Ableitungen bedeuten. Lagrange behandelt die von Euler aufgestellte Gleichung mittels seiner oben geschilderten Methode der Reduktion auf totale Gleichungen, nachdem er sie auf die Form

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + 2c\left(\frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right)$$

gebracht hat, und erhält so für den Multiplikator M die Hilfsgleichung

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{2\,dM}{x\,dx} = kM.$$

Diese Gleichung besitzt das für $x = 0$ verschwindende Integral

$$M = A\left(\sin x\sqrt{-k} - x\sqrt{-k}\cos x\sqrt{-k}\right).^{1)}$$

Nach den physikalischen Bedingungen des Problems soll M auch für $x = a$ zu Null werden; das führt auf

$$a\sqrt{-k} = \operatorname{tg} a\sqrt{-k}$$

als Bestimmungsgleichung für k. Lagrange bemerkt[2]) auch, daß die gegebene Gleichung durch die Substitutionen

$$z' = \frac{dzx^2}{x\,dx} = 2z + \frac{x\,dz}{dx}$$

oder auch durch

$$z = y - x\frac{dy}{dx}$$

auf das Problem der Saitenschwingungen zurückgeführt wird, und geht sodann zu der etwas allgemeineren Gleichung

$$\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right) = c\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + mc\left(\frac{d\frac{z}{x}}{dx}\right)$$

über[3]); seine Methode führt hier zu der Gleichung

$$\frac{d^2M}{dx^2} - \frac{m}{x}\,\frac{dM}{dx} = kM,$$

deren Integration wir bereits besprochen haben (vgl. S. 912); der

---

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. II[2], 1760/61, p. 58. [2]) Ebenda, p. 74.
[3]) Ebenda, p. 81.

Übergang zum allgemeinen Integral der gegebenen partiellen Gleichung geschieht durch ähnliche Schlüsse wie beim Problem der Saitenschwingungen und ergibt

$$z = A\frac{\Gamma(x+t\sqrt{c})+\Delta(x-t\sqrt{c})}{2} + B\frac{\Gamma'(x+t\sqrt{c})+\Delta'(x-t\sqrt{c})}{2} + C\frac{\Gamma''(x+t\sqrt{c})+\Delta''(x-t\sqrt{c})}{2} + \cdots,$$

wo Γ und Δ willkürliche Funktionen, Γ', Γ'', . ., Δ', Δ'', ... ihre Abgeleiteten und A, B, C, ... die Entwicklungskoeffizienten der Lagrangeschen Form des Integrals der Riccatischen Gleichung sind (vgl. S. 912), wenn man in diesen $-m$ durch $m+2$ ersetzt. Lagrange knüpft daran auch die Bemerkung, daß die spezielle angewandte Methode stetige Änderung von z zugleich mit x voraussetze, weshalb Γ und Δ nicht völlig beliebig seien.[1] Endlich beschäftigt sich Euler[2]) mit der Integration[3]) von

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{xx}z;$$

diese Gleichung wird durch die Substitution $z = x^\lambda u$ in eine Gleichung derselben Form übergeführt, was die Wegschaffung des Gliedes mit $\frac{du}{dx}$ durch passende Wahl von λ ermöglicht. Euler setzt ein Integral in folgender Form an:

$$z = Ax^n\Gamma(x \pm at) + Bx^{n+1}\Gamma'(x \pm at) + \cdots{}^{4})$$

und findet als Bedingung für das Bestehen dieser Gleichung die Relation

$$c = -n(n-1).$$

Ist n eine negative ganze Zahl, so bricht die Reihe von selbst ab, und man gewinnt auf diese Weise wieder integrable Fälle. Euler integriert die Gleichung auch in der Form, daß die willkürliche Funktion statt differentiiert wiederholt integriert auftritt; interessanter scheinen verschiedene Bemerkungen, welche zeigen, daß sich Euler schon damals mit der Umformung partieller Gleichungen 2. Ordnung durch Transformation, wenigstens in speziellen Fällen, beschäftigt hat So ist darauf hingewiesen, daß die Gleichung

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 92. [2]) Ebenda, t. III², 1762/65 (1766), p. 60—91. [3]) Erwähnt sei folgende Ausdrucksweise: la solution complète qui nous découvre à la fois toutes les fonctions possibles (sc welche die Differentialgleichung erfüllen). Ebenda, p. 60. [4]) Das ist dieselbe Form, die wir eben bei Lagrange getroffen haben; die beiden Resultate lassen sich leicht ineinander überführen.

$$\frac{1}{aa}\frac{ddz}{dt^2} = \frac{ddz}{dx^2} - \frac{kz}{xx},$$

in der also das Glied mit $\frac{dz}{dx}$ fehlt, durch die Substitutionen

$$m = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1+4k}); \quad k' = k + 1 \pm \sqrt{1+4k}; \quad u = \frac{dz}{dx} + \frac{mz}{x}$$

in

$$\frac{1}{aa}\frac{ddu}{dt^2} = \frac{ddu}{dx^2} - \frac{k'u}{xx}$$

übergeführt wird. Setzt man $k = 0$, so ergibt sich $k' = 2$, daraus $k'' = 6$ usw. Ferner ist die Gleichung der Saitenschwingungen

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

vermöge der Substitution

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$$

auf

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = a\left(\frac{du}{dx}\right),$$

das ganze Problem also auf die Integration zweier linearer partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückgeführt, die durch Benutzung der Gleichung

$$du = dt\left(\frac{du}{dt}\right) + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$$

zunächst auf

$$u = \Gamma'(x + at)$$

und damit zum allgemeinen Integral führen.

Gegenüber diesen Untersuchungen, die alle den Charakter des Willkürlichen, Zufälligen an sich tragen, bedeutet die Behandlung der partiellen Gleichung 2. Ordnung in Eulers Integralrechnung einen ganz wesentlichen Fortschritt. Euler schiebt nämlich nach den Gleichungen 1. Ordnung, bevor er zu höheren Gleichungen übergeht, ein eigenes Kapitel ein, das nur von der Umformung der partiellen Differentialgleichungen durch Einführung neuer Variablen handelt, und zeigt so schon durch die ausgezeichnete Stellung, die er diesen Untersuchungen einräumt, sowie durch die eingehende Behandlung der ganzen Frage, daß er die Integration der höheren partiellen Gleichungen prinzipiell auf ihre Transformation in eine geeignete kanonische Form gegründet wissen will. Die von Euler behandelten Transformationen zerfallen in zwei Arten; die erste ersetzt nur die abhängige Variable z durch eine neue v, während die unabhängigen Veränderlichen x und y in der Gleichung belassen werden; hierher

gehören die Substitutionen $z = Pv$[1]) und $z = P + v$, wo unter P und v Funktionen von x und y zu verstehen sind. Wichtiger ist die Einführung neuer unabhängiger Variablen t und u an Stelle von x und y; die Formeln, welche die Differentialquotienten nach x und y in den neuen Veränderlichen ausdrücken, stellt Euler für den späteren Gebrauch in übersichtlicher Weise zusammen. Der Behauptung, Euler behandle die Gleichung 2. Ordnung methodisch, planmäßig mittels Transformationen, scheint nun zu widersprechen, daß er in den zunächst folgenden Beispielen die Methode der Reduktion auf eine Normalform durch Einführung neuer Variablen nicht anwendet. Indessen handelt es sich hierbei um Beispiele, die sich eben auf anderem Wege einfacher oder rascher erledigen lassen als durch jene immerhin einen ziemlichen Formelapparat erfordernde Reduktion. So behandelt Euler zuerst ausschließlich Gleichungen, welche nur einen einzigen von den Differentialquotienten 2. Ordnung enthalten. Die Gleichung $\frac{ddz}{dx^2} = P$, wo P eine Funktion von x, y und z ist, integriert Euler, indem er y als konstant ansieht und nachträglich diese Beschränkung fallen läßt; er erhält schließlich

$$z = \int dx \int P dx + xf(y) + F(y).$$

Die Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q$$

läßt sich mittels der Substitution

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = v$$

behandeln, wenn P und Q die Variable z nicht enthalten. In letzterem Fall hat man sich y als konstant zu denken und die totale Gleichung

$$ddz = Pdxdz + Qdx^2$$

mit dem Parameter y zu integrieren; das allgemeine Integral („integrale completum") ergibt sich, wenn man die beiden Integrationskonstanten durch Funktionen von y ersetzt.[2]) In der Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) = az$$[3])

setzt Euler

$$z = e^{tx} Y,$$

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 194. [2]) Ebenda, p. 209. Man beachte, daß ein derartiges Ersetzen von Konstanten durch variable Größen der Entstehung einer besonderen „Methode" der Variation der Konstanten nur günstig sein konnte. [3]) Ebenda, p. 221.

wo Y eine Funktion von y allein sein soll, und erhält so die totale Gleichung

$$\frac{\alpha d Y}{Y} = a dy$$

mit dem Integral

$$Y = e^{\frac{ay}{\alpha}}.$$

Daraus schließt Euler auf das Integral der ursprünglichen Gleichung in der Form

$$z = Ae^{\alpha x + \frac{a}{\alpha} y} + Be^{\beta x + \frac{a}{\beta} y} + \cdots,$$

bemerkt aber ganz im Einklang mit seinen früheren Ansichten über die Entwickelbarkeit einer willkürlichen Funktion, daß diese Darstellung mit unendlich vielen Integrationskonstanten dem Integral mit zwei willkürlichen Funktionen deshalb nicht gleichwertig zu erachten sei, weil man sie nicht beliebigen Anfangsbedingungen anpassen könne.[1]) Euler sucht sodann das Anwendungsgebiet der eben benutzten Substitution $z = e^{\alpha x} Y$ bzw. $z = e^{\alpha y} X$, wo X eine Funktion von x allein ist, zu erweitern; insbesondere[2]) verwertet er sie für die Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dx dy}\right) + P\left(\frac{dz}{dx}\right) + Q\left(\frac{dz}{dy}\right) + Rz = 0,$$

wo die Koeffizienten Funktionen von x allein sind. Den allgemeinen Fall[3]), daß P, Q, R, S Funktionen von x und y sind, unterwirft er der Transformation $z = e^V v$, wo V eine Funktion von x und y, v eine noch zu bestimmende Größe ist; dieser Gleichungstypus ist von großer Wichtigkeit. Gleichungen, die mehr als einen Differentialquotienten 2. Ordnung enthalten, behandelt Euler nur durch Transformation. In die Gleichung der Saitenschwingungen

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

setzt er[4])

$$t = \alpha x + \beta y \quad \text{und} \quad u = \gamma x + \delta y$$

und erhält so die neue Gleichung

$$(\beta\beta - \alpha\alpha a a)\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + 2(\beta\delta - \alpha\gamma a a)\left(\frac{ddz}{dt du}\right) + (\delta\delta - \gamma\gamma a a)\left(\frac{ddz}{du^2}\right) = 0,$$

wobei jetzt z als Funktion von t und u aufzufassen ist. Die Annahme

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 1, \quad \beta = a, \quad \delta = -a$$

liefert

---

[1]) Vgl. S. 915. [2]) Institutiones calculi integralis, vol III, p. 224.
[3]) Ebenda, p. 234. [4]) Ebenda, p. 225.

$$t = x + ay;\quad u = x - ay \quad \text{und} \quad \left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) = 0.$$

Daraus folgt dann unmittelbar

$$z = f(t) + F(u) = f(x + ay) + F(x - ay).$$

Nach einer kurzen Schilderung von d'Alemberts Methode[1]) bemerkt Euler, daß man auch versuchsweise

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = k\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

setzen kann; dann wird

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = k \cdot \left(\frac{ddz}{dx\,dy}\right) = k^2 \cdot \left(\frac{ddz}{dx^2}\right).$$

Ein Vergleich mit der ursprünglichen Gleichung liefert

$$k = \pm a$$

und somit die zwei Gleichungen 1. Ordnung

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \pm a \left(\frac{dz}{dx}\right).$$

Die Schwingungsgleichung der Saite von veränderlicher Dicke

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = X\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

führt Euler für

$$X = Ax^{\frac{4m}{2m-1}}$$

auf die Riccatische Gleichung

$$dp + ppdx = ax^{\frac{-4m}{2m-1}}dx$$

zurück[2]), die für positive oder negative ganzzahlige m mittels der Substitutionen

$$z = e^{cy}v \quad \text{und} \quad v = e^{\int p\,dx}$$

integrabel ist, fügt aber hinzu: es ist fast nicht zu glauben, daß beide (nämlich die partielle und die totale) Differentialgleichungen nicht in denselben Fällen integrabel sein können. Wie er behauptet, ist für $m = \infty$ die Riccatische Differentialgleichung leicht zu integrieren, während die entsprechende partielle Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = Axx\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

[1]) Vgl. diese Vorl., III[2], S. 901. [2]) Institutiones calculi integralis, vol. III. p. 286.

seiner Methode sich nicht fügt. Für diese Gleichung setzt er ein Integral in der Form

$$z = x^{\lambda} e^{\mu y}(A + \alpha l x + \beta y)$$

an; μ und $\frac{\alpha}{\beta}$ lassen sich hierbei durch λ ausdrücken. Die Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = P\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + Rz$$

hatte Euler von einem hydrodynamischen Problem ausgehend schon früher in einem speziellen Fall behandelt; jetzt verlangt er nur, daß P, Q, R Funktionen von x allein sind. Diese verallgemeinerte Gleichung soll nun mittels der Substitution

$$z = M\left(\frac{dv}{dx}\right) + Nv,$$

wo M und N Funktionen von x allein sind, wieder in die nämliche Form

$$\left(\frac{ddv}{dy^2}\right) = F\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) + G\left(\frac{dv}{dx}\right) + Hv$$

übergeführt werden[1]), wo auch M, N, F, G, H Funktionen von x allein sind. Durch geschickte Kombination erhält Euler drei Bestimmungsgleichungen für P, Q, R, wenn F, G, H gegeben sind, nämlich

$$P = F; \quad Q = G + \frac{dF}{dx} - \frac{2FdM}{Mdx}$$

und

$$R = H - \frac{GdM}{Mdx} + \frac{dG}{dx} - \frac{FddM}{Mdx^2} - \frac{2Fds}{dx} + \frac{2FdM^2}{MMdx^2} - \frac{sdF}{dx} - \frac{dFdM}{Mdx^2};$$

hierbei bestimmt sich das Verhältnis $s = \frac{N}{M}$ aus der Gleichung

$$C = H - Gs - F\frac{ds}{dx} + Fss,$$

worin C eine willkürliche Konstante bedeutet. Ist also die transformierte partielle Gleichung mit der abhängigen Veränderlichen v integrabel, so ist es auch die Gleichung in z vermöge der Beziehung

$$z = M\left(sv + \left(\frac{dv}{dx}\right)\right).$$

Durch Spezialisierung der Funktionen F, G, H erhält Euler endlich verschiedene integrable Gleichungen. Die partielle Gleichung

$$\frac{1}{cc}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dS^2}\right) + U\left(\frac{dv}{dS}\right) + vT,$$

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 292.

wo U und T Funktionen von x allein bedeuten, behandelt Euler auch an anderer Stelle[1]) in einer Abhandlung über die Luftbewegung in Tuben nach seiner früheren Methode (vgl. S. 989), indem er nach Integralen der Form

$$v = Lf(S \pm ct) + Mf'(S \pm ct) + \cdots$$

sucht.

Es wurde behauptet, daß Euler in der Integralrechnung bei Gleichungen 2. Ordnung hauptsächlich durch Transformation, sei es der unabhängigen oder der abhängigen[2]) Variabeln — oft allerdings nur mittels mühsamer, weitschweifiger Rechnungen — zum Ziel kommt; er selbst sagt[3]), seine Methode bestehe darin, die gegebene Gleichung durch Einführung neuer Variabeln auf die Form zu bringen

$$\left(\frac{ddz}{dt\,du}\right) + P\left(\frac{dz}{dt}\right) + Q\left(\frac{dz}{du}\right) + Rz + S = 0.$$

Diese Gleichung fällt aber unter die Kategorie derjenigen Gleichungen, welche nur einen einzigen Differentialquotienten 2. Ordnung enthalten, und ist mit diesen Gleichungen ausführlich behandelt worden. Es ist sehr wesentlich, daß Euler das Methodische dieser Reduktion betont; allerdings ist der Raum, den er diesem Gedanken gönnt, gering im Vergleich zu dem Platz, der anderen Anwendungen der Einführung neuer Variabeln, wie der Reduktion auf die Ausgangsform oder der Aufsuchung integrabler Fälle eingeräumt ist.

Condorcet nimmt als Integral der linearen Gleichung 2. und 3. Ordnung die Gleichung $z = Ae^{mx+ny}$ an und sucht von einer Reihe mit unendlich vielen derartigen Gliedern auf die Darstellung mit willkürlichen Funktionen überzugehen.[4]) Die Gleichungen mit nichtkonstanten Koeffizienten sucht er mittels Reihen zu lösen.[5])

D'Alembert behandelt[6]) neben anderen Gleichungen 2. Ordnung den Fall

$$\xi q + \frac{\zeta dq}{dx} + \frac{ddq}{dx^2} + \frac{bddq}{dt^2} = 0,$$

wo ξ und ζ Funktionen von x, b eine Konstante bedeuten, und versucht ein Integral der Form

---

[1]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVI, 1771 (1772), p. 355.
[2]) Von letzterer Art sei noch die Substitution

$$z = \left(\frac{ddv}{dx^2}\right) + r\left(\frac{dv}{dx}\right) + sv,$$

wo r und s Funktionen von x allein sind, erwähnt, von der Euler Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 323 Gebrauch macht. [3]) Ebenda, p. 261.
[4]) Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 23 bzw. 30.
[5]) Ebenda, p. 37. [6]) Opuscules mathématiques. t. IV (1768), p. 243.

$$q = Xu + \frac{X' du}{dx} + \frac{X'' ddu}{dx^2} + \cdots,$$

wo X, X', X'' ... passend zu bestimmende Funktionen von x sind.

Laplace hat die Eulersche Idee der Zurückführung der partiellen Gleichung 2. Ordnung auf die eben angegebene kanonische Form wieder aufgegriffen; er fragt daran anknüpfend nach Bedingungen, unter welchen diese in endlicher Form integrabel ist. Für das Entstehen seiner Abhandlung sind Eulers Vorarbeiten in verschiedener Weise bedeutungsvoll geworden: die Transformation (transformation) selbst, die Ausnahmen, die sie erleiden kann, das Auftreten der Differentialquotienten oder Integrale der willkürlichen Funktion in der Integralgleichung, dies alles hat, wie Laplace selbst zugesteht[1]), schon Euler. Laplaces Verdienst ist, daß er die mögliche Form des Integrals genauer festlegt, daß er nicht wie Euler nur Differentialgleichungen sucht, die in geschlossener Form integrierbar sind, sondern die Bedingungen hierfür in Form von Gleichungen angibt, daß er endlich — und darauf legt er selbst großen Wert — alles analytisch, in bequemen Formeln darstellt. Laplace reduziert wie Euler die Gleichung

$$0 = \left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) + \alpha \cdot \left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) + \beta \cdot \left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) + \gamma \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \delta \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \lambda z + T,$$

in welcher alle Koeffizienten Funktionen von x und y, aber nicht von z sind, durch Einführung neuer Veränderlicher ω und θ auf die Normalform

$$0 = \left(\frac{\partial \partial z}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + lz + T,$$

wo jetzt m, n und l Funktionen von ω und θ sind. Hierbei sind die alten und die neuen Variabeln durch die Gleichungen verknüpft:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \cdot \left[-\frac{1}{2}\alpha + \sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\right)}\right]$$

und

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) \cdot \left[-\frac{1}{2}\alpha - \sqrt{\left(\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta\right)}\right].$$

Diese Gleichungen reduzieren sich, wenn gleichzeitig $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, auf $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = 0$ und $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = 0$, d. h. ω und θ sind Funktionen von y allein; in diesem Fall, den auch Euler schon eingehend behandelt hat, ist, wie Laplace im folgenden findet[2]), ein „vollstän-

[1]) Vgl. hierzu Histoire de l'Académie des Sciences 1773 (1777), Histoire p. 43 ff. [2]) Ebenda, p. 360. Vgl. auch Mémoires présentés par divers Savans, t. VI (1774), p. 655.

diges" Integral in endlicher Form nur dann möglich, wenn $\delta = 0$ ist; das schließt natürlich nicht aus, daß oft partikuläre Integrale in geschlossener Form angegeben werden können. Als zweiten Ausnahmefall nennt Laplace das Bestehen der Gleichung

$$\beta = \frac{1}{4}\alpha^2,$$

heutzutage als parabolischer Fall bezeichnet; hier sind die Gleichungen für ω und θ nicht mehr unterschieden, man erhält nämlich

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}\alpha \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}\alpha \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right).$$

Man kann aber, wie Laplace zeigt, diesen Fall auf den Typus $\alpha = 0$, $\beta = 0$ reduzieren, wenn man aus

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}\alpha \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)$$

die Variable x als Funktion von ω und y berechnet und den betr. Ausdruck in die gegebene Differentialgleichung einführt, so daß also eine Gleichung in z, ω, y entsteht.[1] Für die folgende Untersuchung wird von Wichtigkeit, was Laplace über die Form der Integrale der linearen Gleichungen 2. Ordnung behauptet. Nach eigener Aussage hatte Laplace beobachtet, daß die willkürlichen Funktionen im Integral einer linearen Gleichung immer selber linear vorkommen. Differentialquotienten und Integrale der willkürlichen Funktionen zieht schon Euler zur Bildung des allgemeinen Integrals heran; berücksichtigt man endlich noch die Arbeiten Condorcets auf diesem Gebiet, so ist damit aufgezählt, was Laplace über den Gegenstand bekannt war. Auf die Methode, wie er sodann die Form des Integrals von vornherein zu ermitteln sucht, kann, wenngleich auf die mühsame Untersuchung eminenter Scharfsinn verwendet ist, hier nicht eingegangen werden, da ihre Darstellung zu viel Platz beanspruchen würde, und der Wert der betr. funktionentheoretischen Schlüsse wenigstens ohne Modifikationen und Ergänzungen verhältnismäßig gering ist. Laplace kommt durch Überlegungen, die er für die Gleichung 1. Ordnung ausführlich angibt, zunächst zu dem Resultat, daß das Integral die willkürlichen Funktionen φ und ψ, wie bereits beobachtet, linear und wiederholt differentiiert oder integriert

---

[1] Auf diesen Fall, der sich immer auf die Gleichung der Wärmeleitung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$ reduzieren läßt, ist Laplace später wieder zurückgekommen: Journal de l'École polytechnique, cah. 15, 1809, p. 235.

enthält; des weiteren findet er, daß die Argumente von φ und ψ Funktionen von den Variabeln ω bzw. θ allein sein müssen, ein Umstand, der eine ganz bedeutende Vereinfachung des Integrals zur Folge hat, da sich Ausdrücke wie $\int E \partial \theta \varphi(\omega)$ auf einfachere Formen, also hier $\varphi(\omega) \cdot \int E \partial \theta$, reduzieren lassen.

Nach diesen Voruntersuchungen wendet sich Laplace der eigentlichen Aufgabe zu; er verlangt, daß die willkürliche Funktion nicht unter dem Integralzeichen auftreten soll, setzt $T' = 0$ und überdies zur Vereinfachung auch $\psi = 0$. Die einfachste Form, die das Integral dann haben kann, ist

$$z = A \cdot \varphi(\omega).$$

Laplace substituiert diesen Ausdruck in die kanonische Differentialgleichung und setzt — die Berechtigung hierzu ist leicht einzusehen — den Koeffizienten von $\varphi(\omega)$ sowie den der Abgeleiteten $\varphi^I(\omega)$ gleich Null. Es ergibt sich so

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + mA \quad \text{und} \quad 0 = \left(\frac{\partial \partial A}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial \omega}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + lA.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich aber mit Hilfe der ersten und der daraus durch partielle Differentiation nach ω hervorgehenden Gleichung die Differentialquotienten von A eliminieren: man erhält nach Division mit A die Bedingung

$$0 = l - \left(\frac{\partial m}{\partial \omega}\right) - nm,$$

von deren Bestehen die Existenzmöglichkeit eines Integrals der Form

$$z = A\varphi(\omega)$$

abhängt. Diesen Weg schlägt indes Laplace nicht ein, sondern sagt, daß die Differentialgleichung

$$0 = \left(\frac{\partial \partial z}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + lz$$

mittels der Substitution

$$z^{(I)} = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + mz$$

in

$$0 = \left(\frac{\partial z^{(I)}}{\partial \omega}\right) + nz^{(I)} + z \cdot \left[l - \left(\frac{\partial m}{\partial \omega}\right) - mn\right]$$

übergeht; unter der Annahme

$$z = A \cdot \varphi(\omega)$$

reduziert sich dann die Gleichung

$$z^{(I)} = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + mz$$

auf

$$z^{(I)} = 0,$$

was die erwähnte Relation zwischen m, n und l liefert. Ist diese Relation nicht erfüllt, so versucht Laplace die nächst einfache Annahme

$$z = A \cdot \varphi(\omega) + A^{I} \cdot \varphi_{I}(\omega);$$

es ergeben sich dann drei Gleichungen für A, nämlich

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + mA;$$

$$0 = \left(\frac{\partial \partial A}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial \omega}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + lA + \left(\frac{\partial A^{I}}{\partial \theta}\right) + mA^{I};$$

$$0 = \left(\frac{\partial \partial A^{I}}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial A^{I}}{\partial \omega}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial A^{I}}{\partial \theta}\right) + lA^{I}.$$

Wie schon erwähnt, verwandelt die Substitution

$$z^{(I)} = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + mz$$

die ursprüngliche Gleichung in

$$0 = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial z^{I}}{\partial \omega}\right) + \frac{n}{\mu} \cdot z^{(I)} + z,$$

wo zur Abkürzung

$$\mu = l - \left(\frac{\partial m}{\partial \omega}\right) - mn$$

gesetzt ist. Aus diesen Gleichungen erhält man nun durch geschickte Kombination bei Benutzung der weiteren Substitutionen

$$m - \frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta}\right)}{\mu} = m^{I}; \quad \mu + nm - n \cdot \frac{\left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta}\right)}{\mu} + \left(\frac{\partial n}{\partial \theta}\right) = l^{I}$$

die Differentialgleichung

$$0 = \left(\frac{\partial \partial z^{(I)}}{\partial \omega \partial \theta}\right) + m^{(I)} \cdot \left(\frac{\partial z^{(I)}}{\partial \omega}\right) + n\left(\frac{\partial z^{(I)}}{\partial \theta}\right) + l^{(I)} z^{(I)},$$

die genau die Form der ursprünglichen Gleichung hat. Mit Berücksichtigung der Annahme

$$z^{(I)} = A\varphi(\omega) + A^{I}\varphi_{I}(\omega)$$

geht aber die Gleichung

$$z^{(I)} = \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right) + mz$$

in

$$z^{(I)} = \left[\left(\frac{\partial A}{\partial \theta}\right) + mA\right]\varphi(\omega) + \left[\left(\frac{\partial A^I}{\partial \theta}\right) + mA^I\right]\varphi_I(\omega)$$

über, die sich wegen der für A geltenden Relationen auf

$$z^{(I)} = \left[\left(\frac{\partial A^I}{\partial \theta}\right) + mA^I\right]\varphi_I(\omega)$$

reduziert. Das heißt nichts anderes, als $z^{(I)}$ ist Integral einer kanonischen Differentialgleichung 2. Ordnung und enthält nur eine willkürliche Funktion $\varphi_I(\omega)$, aber keinen ihrer Differentialquotienten. Dieser Fall ist aber als der einfachste bereits untersucht und die Bedingungsgleichung für sein Bestehen aufgestellt; sie lautet

$$0 = l^{(I)} - \left(\frac{\partial m^{(I)}}{\partial \omega}\right) - nm^{(I)}.$$

Die kanonische Gleichung 2. Ordnung in $z^{(I)}$, m^I, n, l^I hat sich ganz unabhängig von der speziellen Annahme über die Form des Integrals z ergeben; sie wird also auch Geltung haben, wenn

$$z = A \cdot \varphi(\omega) + A^I \cdot \varphi_I(\omega) + A^{II} \cdot \varphi_{II}(\omega).$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in die ursprüngliche Differentialgleichung (mit der abhängigen Veränderlichen z) ergeben sich aber Gleichungen für A, A^I, A^{II}, deren Berücksichtigung

$$z^{(I)} = \left[\left(\frac{\partial A^I}{\partial \theta}\right) + mA^I\right] \cdot \varphi_I(\omega) + \left[\left(\frac{\partial A^{II}}{\partial \theta}\right) + mA^{II}\right] \cdot \varphi_{II}(\omega)$$

liefert. Und das heißt gar nichts anderes, als $z^{(I)}$ enthält eine willkürliche Funktion $\varphi_I(\omega)$ und deren erste Derivierte $\varphi_{II}(\omega)$, weshalb auf die Differentialgleichung 2. Ordnung $z^{(I)}$ die Überlegungen des eben untersuchten Falles angewendet werden können.

So kann man weiter schließen. Die bei dieser Methode — Kaskadenmethode hat man sie später genannt — auftretenden Größen $\mu^{(r)}$, $m^{(r)}$, $l^{(r)}$, $z^{(r)}$ mit dem Index r gehen aus den μ, m, l, z mit dem Index $r-1$ genau in derselben Weise hervor, wie die μ^I, m^I, l^I, z^I aus μ, m, l, z selbst. Der Wert von $z^{(r)}$ läßt sich indessen leicht independent darstellen, da, wie Laplace zeigt, die Gleichung

$$0 = \left(\frac{\partial z^{(r)}}{\partial \omega}\right) + nz^{(r)}\text{[1]}$$

mit dem Integral

$$z^{(r)} = e^{-\int n\,d\omega} \cdot \psi(\theta)$$

[1] Diese Gleichung gilt natürlich nicht für einen beliebigen, sondern nur für denjenigen Index r, der das Abbrechen der Reihe für z bewirkt.

besteht. Die Bedingung, daß z keinen höheren als den r^{ten} Differentialquotienten der willkürlichen Funktion φ enthält, ist dann, wie sofort ersichtlich,

$$0 = l^{(r)} - \left(\frac{\partial u^{(r)}}{\partial \omega}\right) - n m^{(r)};$$

ist sie für kein endliches r erfüllt, so ist die Gleichung — vorausgesetzt, daß die Laplaceschen Behauptungen über die notwendige Form des Integrals richtig sind — auch nicht in endlicher Form integrierbar, dieser Fall tritt z. B. im allgemeinen ein, wenn l, m, n konstant sind[1]). Ganz die gleiche Methode würde am Platze sein, wenn man von vornherein nicht ψ, sondern φ gleich Null gesetzt hätte; Laplace geht deshalb gar nicht auf diese Frage ein, sondern wendet sich zur Betrachtung des Falles, daß T nicht identisch Null ist, welcher eine analoge Behandlung gestattet.

Indem Laplace des weiteren die angegebene Bedingungsgleichung für Integration in geschlossener Form als Bestimmungsgleichung für r auffaßt, erhält er in endlicher Form integrable Fälle.[2]) Auch ist noch gezeigt, daß der Ausdruck für z, sobald er eine nur endliche Anzahl von Integralzeichen enthält, immer auch durch willkürliche Funktionen und deren Differentialquotienten allein dargestellt werden kann, oder, wie Laplace sich ausdrückt, notwendig von Integralzeichen frei ist[3]); endlich ist noch auf die Integration unter gegebenen Anfangsbedingungen eingegangen.[4]) Daß mit der Integration einer einzigen der Differentialgleichungen 2. Ordnung, die sich der Reihe nach ergeben, die aller übrigen durch Quadraturen oder Differentiationen gefunden wird, erwähnt Laplace, offenbar weil selbstverständlich, nicht.

Später[5]) kommt Laplace auf seine Ergebnisse zurück und stellt sie in folgender Form dar: Jede lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, sagt er, kann in der Form dargestellt werden

$$0 = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s \partial s'}\right) + m\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + n\left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right) + lu,$$

wo m, n und l gegebene Funktionen der Variabeln s und s' sind. Versteht man unter $\varphi_1(s)$ das Integral $\int \partial s \cdot \varphi(s)$, unter $\varphi_2(s)$ das Integral $\int \partial s \varphi_1(s)$ usf., desgleichen unter $\psi_1(s')$ das Integral $\int \partial s' \psi(s')$, unter $\psi_2(s')$ das Integral $\int \partial s' \psi_1(s')$ usf., so ist

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1773 (1777), p. 369. [2]) Ebenda, p. 380. [3]) Ebenda, p. 382 ff., speziell p. 395. Auf die im Text angeführte Behauptung kommt Cousin ebenda 1784 (1787), p. 420 zurück und stellt einen entsprechenden Satz allgemein für Gleichungen n^{ter} Ordnung auf: ebenda, p. 429. [4]) Ebenda 1773 (1777), p. 396. [5]) Ebenda 1779 (1782), p. 268 ff.

$$u = A \cdot \varphi_I(s) + A^{(I)} \cdot \varphi_2(s) + A^{(2)} \cdot \varphi_3(s) + \cdots$$
$$+ B \cdot \psi_I(s^I) + B^{(I)} \cdot \psi_2(s^I) + B^{(2)} \cdot \psi_3(s^I) + \cdots;$$

$\varphi(s)$ und $\psi(s^I)$ sind hierbei zwei willkürliche Funktionen; für ihre Koeffizienten gelten folgende Gleichungen:

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial s^I}\right) + mA;$$
$$0 = \left(\frac{\partial A^{(I)}}{\partial s^I}\right) + mA^{(I)} + DA;^{1)}$$
$$0 = \left(\frac{\partial A^{(2)}}{\partial s^I}\right) + mA^{(2)} + DA^{(I)};$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$0 = \left(\frac{\partial B}{\partial s}\right) + nB;$$
$$0 = \left(\frac{\partial B^{(I)}}{\partial s}\right) + nB^{(I)} + DB;$$
$$0 = \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial s}\right) + nB^{(2)} + DB^{(I)};$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Ergibt sich einer der Koeffizienten $A^{(\mu)}$ oder $B^{(\mu)}$, wo μ eine positive ganze Zahl ist, zu Null, so bricht die Reihe für u ab. Im folgenden gelangt Laplace zur Darstellung von u in Form von bestimmten Integralen. Er bezeichnet nämlich die Summe

$$\varphi(0) + t\varphi(\partial s) + t^2\varphi(2\partial s) + \cdots + t^{\frac{s}{\partial s}} \cdot \varphi(s)$$

mit T und entwickelt $\frac{T \cdot \partial s}{1 - t}$ nach Potenzen von t. Dann wird der Koeffizient von $t^{\frac{s}{\partial s}}$ gleich

$$[\varphi(0) + \varphi(\partial s) + \varphi(2\partial s) + \cdots + \varphi(s)] \cdot \partial s$$

gefunden; das ist aber nichts anderes als $\varphi_I(s)$. Allgemein ist der Koeffizient von $t^{\frac{s}{\partial s}}$ in der Entwicklung von $T(1-t)^{-\mu}\partial s^\mu$ nichts anderes als $\varphi_\mu(s)$. Mit Hilfe dieser Beziehung läßt sich, wenn man für T seinen Wert in $\varphi(0)$, $\varphi(\partial s)$, ... einsetzt, $\varphi_\mu(s)$ linear durch

1) Wir haben uns hier der Übersichtlichkeit halber der modernen Bezeichnungsweise bedient, die statt der vorgelegten Differentialgleichung in u symbolisch $Du = 0$ schreibt.

die $\varphi(0)$, $\varphi(\partial s)$, ... und gewisse Koeffizienten ausdrücken, die bestimmt werden sollen. Der Koeffizient von $\varphi(r\partial s)$ in dem Ausdruck $T(1-t)^{-\mu}\partial s^{\mu}$ ist $t^r(1-t)^{-\mu}\partial s^{\mu}$; auf $\varphi_{\mu}(s)$ trifft dabei nur der Koeffizient von $t^{\frac{s}{\partial s}}$. Drückt man also $\varphi_{\mu}(s)$ in angedeuteter Weise durch $\varphi(0)$, $\varphi(\partial s)$, ... $\varphi(r\partial s)$, ... aus, so wird der Koeffizient von $\varphi(r\partial s)$ gleich dem Koeffizienten von $t^{\frac{s}{\partial s}}$ in der Entwicklung von $t^r(1-t)^{-\mu}\partial s^{\mu}$, d. i. gleich dem von $t^{\frac{s}{\partial s}-r}$ in der Entwicklung von $(1-t)^{-\mu}\partial s^{\mu}$ sein. Dieser ist aber gleich

$$\frac{\left(\frac{s}{\partial s}-r+1\right)\left(\frac{s}{\partial s}-r+2\right)\cdots\left(\frac{s}{\partial s}-r+\mu-1\right)}{1\quad\cdot\quad 2\quad\cdots\quad(\mu-1)}\partial s^{\mu};$$

läßt man r so ins Unendliche wachsen, daß dabei $r\partial s$ gegen einen endlichen Wert z konvergiert, so geht er über in $\frac{(s-z)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}\partial s$. Mit Hilfe dieser Darstellung läßt sich jetzt auch das Integral u statt durch φ_{μ} durch die $\varphi(0)$, $\varphi(\partial s)$, ... $\varphi(r\partial s)$, ... ausdrücken. Hierbei wird der Koeffizient von

$$\varphi(r\partial s)=\varphi(z)$$

gleich

$$\partial s\sum_{\mu=1}^{\infty}A^{(\mu-1)}\frac{(s-z)^{\mu-1}}{(\mu-1)!}=\Gamma(s-z)\partial s,$$

wenn man

$$\sum A^{(\mu-1)}\frac{x^{\mu-1}}{(\mu-1)!}=\Gamma(x)$$

setzt. Hieraus schließt Laplace auf die Gleichung

$$u=\int_0^s\partial z\,\Gamma(s-z)\varphi(z)+\int_0^{s^I}\partial z\,\Pi(s^I-z)\psi(z),$$

wo die Funktion Π analog der Funktion Γ, aber mit Hilfe der B gebildet ist. Hierbei sind aber, wie aus den Gleichungen für die A und B hervorgeht, $\Gamma(s-z)$ und $\Pi(s^I-z)$ selbst partikuläre Integrale der gegebenen Differentialgleichung, von denen das erstere für $s=z$ der Anfangsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial s^I}+mu=0,$$

das letztere für $s^I=z$ der Anfangsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial s}+nu=0$$

genügt. Durch dieses Ergebnis wird Laplace veranlaßt, den Ausdruck

$$u = \int p \partial z \cdot \varphi(z) + \int p^I \partial z \cdot \psi(z),$$

genommen von einem konstanten Wert von z bis $z = s$ bzw. $z = s^I$, zu untersuchen; er findet durch Differentiation, daß dieser Ausdruck der Differentialgleichung genügt, sobald p und p^I partikuläre Werte von u sind, die eine willkürliche Konstante z einschließen und für $z = s$ bzw. s^I in Funktionen P und P^I von der Art übergehen, daß

$$0 = \left(\frac{\partial P}{\partial s^I}\right) + mP \quad \text{und} \quad 0 = \left(\frac{\partial P^I}{\partial s}\right) + nP^I$$

Da der Ausdruck für u zwei willkürliche Funktionen $\varphi(z)$ und $\psi(z)$ enthält, erklärt ihn Laplace für das allgemeine Integral. Endlich sind noch verschiedene andere Darstellungen des bestimmten Integrals angegeben; so erhält man vermöge der Substitutionen $z = st$ bzw. $z = s^I t$ die folgende zusammengezogene Form

$$u = \int \partial t \cdot \{sq \cdot \varphi(st) + s^I q^I \cdot \psi(s^I t)\},$$

wo zwischen den Grenzen 0 und 1 integriert wird, und q und q^I aus p und p^I hervorgehen. Besonders behandelt wird der Fall, daß l, m, n konstant sind; hier ist $\Gamma(s - z)$ gleich dem Produkt aus $e^{-ms^I - nz}$ und einer Funktion der einen Variabeln

$$\theta = s_1(s - z),$$

die der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$0 = (l - mn) \cdot y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta \cdot \left(\frac{\partial \partial y}{\partial \theta^2}\right)$$

und den Anfangsbedingungen

$$y = 1, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = + mn - l$$

für $\theta = 0$ genügt; diese Funktion war übrigens schon Bernoulli und Euler begegnet. Für

$$l - mn = 0$$

reduziert sich das Integral auf

$$u = e^{-ms^I - ns} \{\varphi_I(s) + \psi_I(s^I)\}.[1]$$

Der schon in der ersten Abhandlung besprochene Fall

---

[1]) Größtenteils nach Burkhardt a. a. O., Heft 2, S. 398 ff.

$$m = \frac{f}{s+s^I}, \quad n = \frac{g}{s+s^I}, \quad l = \frac{h}{(s+s^I)^2},$$

wo f, g, h Konstante sind, wird nochmals vorgenommen; die bereits von Lagrange behandelte Gleichung

$$\left(\frac{\partial\partial u}{\partial t^2}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{\partial\partial u}{\partial x^2}\right) + \frac{ma^2}{x} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{ma^2 u}{x^2}$$

durch die Substitutionen

$$x + at = s \quad \text{und} \quad x - at = s^I$$

auf eine Gleichung der eben erwähnten Art, nämlich

$$0 = \left(\frac{\partial\partial u}{\partial s \partial s^I}\right) + \frac{m}{2(s+s^I)}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial s^I}\right)\right] - \frac{mu}{(s+s^I)^2},$$

reduziert.

Später[1]) überträgt dann Legendre die Laplacesche Kaskadenmethode auf die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in ihrer ursprünglichen Form, d. h. er zeigt, daß die Transformation auf die Euler-Laplacesche Normalform überflüssig ist. Legendre führt hierbei die Integrale der Gleichungen

$$dy - p dx = 0 \quad \text{und} \quad dy - P dx = 0$$

ein, wo p und P die Wurzeln der Gleichung

$$p^2 - ap + b = 0$$

sind, und a und b die Koeffizienten von $\frac{ddv}{dxdy}$ bzw. $\frac{ddv}{dy^2}$ in der gegebenen Differentialgleichung — der Koeffizient von $\frac{ddv}{dx^2}$ ist gleich 1 gesetzt — bedeuten; auf die Darstellung seiner Methode kann, da sie prinzipiell von der Laplaceschen nicht verschieden ist, hier verzichtet werden.

Das Ziel der Laplaceschen Arbeit war die Aufsuchung eines Kriteriums für die Möglichkeit einer Integration in geschlossener Form; der hierbei eingeschlagene Weg führte nebenbei noch auf die Lösung der Gleichung 2. Ordnung durch bestimmte Integrale. Von anderen Gesichtspunkten gehen die Untersuchungen aus, denen wir uns jetzt zuwenden. Lagrange, der Schöpfer der Theorie der partiellen Gleichung 1. Ordnung, derselbe, der durch seine Arbeiten über Natur und Fortpflanzung des Schalls das Interesse an der Gleichung 2. Ordnung so mächtig gefördert hat, ist später nur mehr gelegentlich

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 319.

auf diese zurückgekommen; erwähnt sei von ihm die Behauptung[1]), daß man bei Kenntnis zweier verschiedenen vollständigen ersten Integrale allgemein das vollständige endliche Integral finden könne, indem man zuerst $\frac{dz}{dx}$, sodann $\frac{dz}{dy}$ aus jenen eliminiere und die durch partielle Integration nach x bzw y gebildeten Integralgleichungen miteinander vergleiche.

Weiterhin ist Monge zu nennen, der abweichend von Laplace unter einer linearen Gleichung 2. Ordnung jede Gleichung

$$Ar + Bs + Ct + D = 0$$

versteht, wo r, s, t in üblicher Weise die partiellen Ableitungen 2. Ordnung bedeuten und A, B, C, D beliebige Funktionen von x, y, z, p und q sind, der also nur verlangt, daß r, s und t linear auftreten.[2]) Das Verfahren ist genau dasselbe wie sonst: Reduktion auf totale Gleichungen. Die Relationen

$$dp = rdx + sdy \quad \text{und} \quad dq = sdx + tdy,$$

„die nichts Neues sagen", gestatten zwei von den drei Größen r, s, t zu eliminieren, und man erhält:

$$\begin{aligned}
Bdpdy + Cdqdy - Cdpdx + Ddy^2 &= -r\{Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2\}\\
Adpdy + Cdqdx + Ddxdy &= s\{Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2\}\\
Adpdx - Adqdy + Bdqdx + Ddx^2 &= -t\{Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2\}.
\end{aligned}$$

Damit diese Gleichungen nicht r, s, t in x, y, z, p, q bestimmen können, muß gleichzeitig

$$\begin{aligned}
Ady^2 - Bdxdy + Cdx^2 &= 0\\
Adpdy + Cdqdx + Ddxdy &= 0\\
Bdpdy + C(dqdy - dpdx) + Ddy^2 &= 0\\
A(dpdx - dqdy) + Bdqdx + Ddx^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Von diesen vier Gleichungen sind zwei die Folge der beiden übrigen; sie erfahren, wie Monge in seiner Application zeigt, mit Hilfe der Charakteristikentheorie eine einfache geometrische Deutung. Dieselbe Deutung des Wortes simultan, die schon früher den Zusammenhang zwischen totalen und partiellen Gleichungen vermitteln

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 95. Der Aufsatz stammt aus dem Jahre 1774. [2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 126 ff Vgl. auch Mémoires de l'Académie de Turin 1784/85 (1786), p. 31 ff.; ferner Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 720, woselbst die speziellere Gleichung $Lr + Ms + Nt = 0$ auf totale Gleichungen reduziert, auch die Gleichung der Minimalflächen behandelt wird.

mußte, führt auch jetzt zu dem Schluß, daß $V = \varphi(U)$ ein erstes Integral (intégrale première) der vorgelegten Gleichung ist, wenn $V = a$ und $U = b$ die vollständigen Integrale zweier von den angegebenen vier totalen Gleichungen oder zweier gleichwertigen sind. Sind zwei derartige Gleichungen zwar integrabel, läßt sich aber keine von ihnen auf den ersten Grad reduzieren, so ist besondere Vorsicht nötig, in welcher Weise die betr. Integrale zu kombinieren sind, da nicht alle Kombinationen brauchbare Resultate geben; Monge gibt diesbezügliche Vorschriften.[1] Von Beispielen ist die Gleichung mit konstanten Koeffizienten behandelt, außerdem die Differentialgleichung der Minimalflächen, letztere in wenig brauchbarer Form und fehlerhaft. Monge schreibt diese Gleichung Borda zu, wohl weil dieser eine kurze Abhandlung über diesen Gegenstand gebracht hatte[2]); Borda selbst verweist dort auf einen noch zu besprechenden Aufsatz in den Miscellanea Taurinensia, in dem Lagrange seine Variationsrechnung bekannt macht. Legendre zeigt[3]) von der Mongeschen Integration, daß die darin auftretenden Integralzeichen sich über mehrere Variable erstrecken, ohne daß die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind, und findet die richtige Lösung durch einfache Änderung der Variabeln; als Beispiele bringt er den Rotationskörper, dessen Meridiankurve die Kettenlinie ist, sowie die Minimalfläche zwischen zwei windschiefen Geraden.[4])

In der erwähnten Abhandlung behandelt Monge auch Gleichungen, für welche sich nicht ein erstes Integral der Form $V = \varphi(U)$, sondern komplizierteren Baues ergibt; aber leider fragt er nicht nach den Bedingungen, unter welchen ein erstes Integral der Form $V = \varphi(U)$ existiert; er wäre sonst notwendig auf die allgemeinere sogenannte Ampèresche Form der Differentialgleichung 2. Ordnung geführt worden, die noch ein additives Glied $E(rt - s^2)$ besitzt, aber trotzdem prinzipiell nicht schwieriger zu integrieren ist als die von ihm betrachtete lineare Gleichung. Übrigens war Monge die Einsicht in die Wichtigkeit der Verbindung $rt - s^2$ nicht verschlossen; dieser Ausdruck, der schon 1760 in den Eulerschen Untersuchungen über Flächenkrümmung auftritt, findet sich in verschiedenen von Monge untersuchten Differentialgleichungen, wie

$$rt - s^2 + A = 0 \quad \text{und} \quad (rt - s^2)^2 + 4rs = 0,$$

wieder.[5])

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 148. [2]) Ebenda, 1767 (1770), p. 561ff. Borda bezeichnet die Aufgabe als Problem von Lagrange. [3]) Ebenda 1787 (1789), p. 309ff. [4]) Vgl. diesen Band S. 550 oben und S. 569. [5]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 89, 157, endlich p. 561, 562.

Monge behandelt[1]) auch nichtlineare Gleichungen 2. Ordnung, indem er sie auf lineare Gleichungen höherer Ordnung zurückführt. Sei $W=0$ eine beliebig aus x, y, z, p, q, r, s, t zusammengesetzte Differentialgleichung. Durch Differentiation erhalte man hieraus mit Benutzung der Relationen

$$dz = p dx + q dy;\quad dp = r dx + s dy;\quad dq = s dx + t dy$$

die Gleichung

$$A dr + B ds + C dt + D dx + E dy = 0.$$

Wenn jetzt, sagt **Monge**, auf Grund einer gewissen Annahme über den Wert von $\frac{dy}{dx}$ die partielle Gleichung 3. Ordnung, die man erhält, eine Konstante weniger besitzt und linear oder doch von brauchbarer Gestalt ist, und es ist möglich, zwischen den drei ersten Integralen dieser Gleichung (und der ursprünglichen) die fünf Größen p, q, r, s, t auf einmal zu eliminieren, so hat man in dem Resultat dieser Elimination das gesuchte endliche Integral vor sich. **Monge** nimmt speziell

$$D dx + E dy = 0$$

an, berechnet daraus $\frac{dy}{dx}$ und setzt diesen Wert in

$$A dr + B ds + C dt = 0$$

ein, wo man sich dr durch $\frac{d^3 z}{dx^3} dx + \frac{d^3 z}{dx^2 dy} dy$ usw. ersetzt denken muß; dadurch entsteht die lineare Gleichung 3. Ordnung

$$AE \frac{d^3 z}{dx^3} + (BE - AD) \frac{d^3 z}{dx^2 dy} + (CE - BD) \frac{d^3 z}{dx dy^2} - CD \frac{d^3 z}{dy^3} = 0,$$

die nach der gewöhnlichen Methode auf totale Gleichungen reduziert wird. Aus diesen folgert **Monge** mit Ausschaltung der Gleichung

$$D dx + E dy = 0,$$

die wieder auf die ursprüngliche Gleichung führt, folgende zwei Gleichungen, welche die beiden anderen Integrale der Gleichung 3. Ordnung liefern:

$$A dy^2 - B dx dy + C dx^2 = 0$$

und

$$AE dy dr + ds(CE dx - AD dy) - CD dx dt = 0.$$

Monge gibt als Beispiel die Gleichung

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 190.

$$2bx(a^2r + 2as + t) + a\sqrt{(a^2r + 2as + t)} - 2ab(ap + q) = 0,$$

welche auf

$$a^2dr + 2ads + dt = 0; \quad dx - ady = 0$$

und damit auf das Integral

$$z = \psi(x - ay) + x\varphi(x - ay) + 2b^2x^2[\varphi(x - ay)]^2$$

führt. Es ist leicht, fügt er hinzu, ähnliche Überlegungen für die Gleichungen höherer Ordnung anzustellen, aber man sieht auch, daß mit wachsender Ordnung die Fälle, wo das geschilderte Verfahren eine „vollständige" Integration erlaubt, immer seltener werden.

Nach Monge ist Legendres Behandlung der speziellen Gleichung

$$A\frac{ddz}{dx^2} + B\frac{ddz}{dxdy} + C\frac{ddz}{dy^2} = 0,$$

deren Koeffizienten A, B, C Funktionen von

$$\frac{dz}{dx} = p \quad \text{und} \quad \frac{dz}{dy} = q$$

allein sind, zu erwähnen.[1]) Auf einen sehr speziellen Fall dieser Gleichung war schon Monge gestoßen, der erkannt hatte[2]), daß die Gleichung

$$z\frac{\partial\partial z}{dx^2} + Az\frac{\partial\partial z}{dx\partial y} + Bz\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} - \frac{\partial z^2}{dx^2} - A\frac{\partial z\partial z}{dx\partial y} - B\frac{\partial z^2}{\partial y^2} = 0$$

durch die Substitution $z = e^{\omega}$ in

$$\frac{\partial\partial\omega}{dx^2} + A\frac{\partial\partial\omega}{dx\partial y} + B\frac{\partial\partial\omega}{dy^2} = 0$$

übergeht; Monge findet

$$z = [\varphi(Px - y)] \times [\psi(P'x - y)],$$

wo P und P' die Wurzeln von

$$P^2 - AP + B = 0$$

sind, und im Fall gleicher Wurzeln

$$z = [\varphi(Px - y)]^x \times [\psi(Px - y)].$$

Legendre behandelt nun die allgemeine Gleichung folgendermaßen:

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 314. [2]) Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 328.

statt z, p, q als Funktionen von x und y aufzufassen, sieht er vielmehr umgekehrt x, y, z als Funktionen von p und q an: dann ist $xdp + ydq$ ein exaktes Differential $d\omega$ und folglich

$$x = \frac{d\omega}{dp}; \quad y = \frac{d\omega}{dq}; \quad z = px + qy - \omega.$$

Man sieht leicht, daß diese Gleichungen eine Berührungstransformation darstellen, die sich nach den Vorschriften von Monge oder Lie aus

$$-z - z_1 + xx_1 + yy_1 = 0$$

ergibt, wo der Übersicht halber z_1, x_1, y_1 statt ω, p, q geschrieben sind; Legendre erkennt aber den Zusammenhang seiner Methode mit der Mongeschen Theorie der Berührungstransformationen nicht. Führt man nun ω als neue abhängige Veränderliche ein, so müssen auch die Ableitungen von z nach x bzw. y durch die Differentialquotienten von ω nach p und q ersetzt werden. Legendre erhält auf diese Weise bei stillschweigender Unterdrückung eines Nenners $\frac{dd\omega}{dp^2} \cdot \frac{dd\omega}{dq^2} - \left(\frac{dd\omega}{dpdq}\right)^2$ die neue Gleichung

$$A\frac{dd\omega}{dq^2} - B\frac{dd\omega}{dpdq} + C\frac{dd\omega}{dp^2} = 0,$$

von der die Gleichung der Minimalflächen ein spezieller Fall ist.

Legendre behandelt[1]) auch einen speziellen Typus von Gleichungen höheren Grades, nämlich

$$r = F(s, t),$$

wo r, s und t die übliche Bedeutung haben. Sein Gedankengang ist ähnlich wie bei der eben behandelten linearen Gleichung; er folgert aus

$$dp = rdx + sdy \quad \text{und} \quad dq = sdx + tdy,$$

daß $xdr + yds$ und $xds + ydt$ exakte Differentiale sind, betrachtet x und y als Funktionen von s und t und setzt

$$xds + ydt = d\omega;$$

dann ist

$$x = \frac{d\omega}{ds}; \quad y = \frac{d\omega}{dt}.$$

Durch Differentiation der gegebenen Differentialgleichung folgt aber eine Gleichung

$$dr = Ads + Bdt,$$

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 317.

wo A und B bekannte Funktionen von s und t sind: somit wird

$$xdr + yds = (Ax + y)ds + Bxdt.$$

Da aber $xdr + yds$ ein vollständiges Differential sein soll, so muß

$$\frac{d(Ax + y)}{dt} = \frac{dBx}{ds},$$

oder, mit Berücksichtigung von

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dB}{ds},$$

endlich

$$A\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt^2} = B\frac{dx}{ds}.$$

Setzt man hierin für x und y die oben angegebenen Ausdrücke

$$x = \frac{d\omega}{ds}; \quad y = \frac{d\omega}{dt}$$

ein, so ergibt sich unmittelbar die lineare Gleichung 2. Ordnung

$$\frac{dd\omega}{dt^2} + A\frac{dd\omega}{dtds} - B\frac{dd\omega}{ds^2} = 0,$$

welche die 1. Ableitungen von ω nicht enthält.

Im Anschluß an frühere Arbeiten über die lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung[1]) behandelt Trembley in ganz analoger Weise die lineare Gleichung 2. Ordnung.[2]) Ausgangspunkt für ihn ist eine gegebene Form des Integrals: Ziel die Aufsuchung integrabler Fälle. Zunächst nimmt er

$$z = \Pi' \cdot F(\Phi') + \Pi'' \cdot f(\Phi'')$$

als Integralgleichung an, wo die Π und Φ Funktionen der unabhängigen Variabeln x und y, die Striche aber natürlich keine Differentiationen bedeuten. Bei Elimination der willkürlichen Funktionen F und f, sagt Trembley, erhält man nur dann eine lineare Gleichung 2. Ordnung, wenn zwischen den Π', Π'' und Φ', Φ'' gewisse Relationen bestehen. Um diese zu finden, bildet Trembley die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung von z, multipliziert sie mit unbestimmten Funktionen G, A, B, ..., addiert und setzt

---

[1]) Besonders Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. IX, Histoire p. 88 ff. (prés. 1794). [2]) Ebenda, t. X, 1792 (1797), Histoire p. 27—104. Die besprochene Abhandlung ist 1795 der Akademie vorgelegt. Siehe auch ebenda, t. XI, 1793 (1798), Histoire p. 58 (prés. 1797)

$$Gz + A\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + C\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) + D\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right) + E\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

Ersetzt man in dieser Gleichung die einzelnen Differentialquotienten durch ihre aus der gegebenen Integralgleichung berechneten Werte, so treten die willkürlichen Funktionen F und f nebst ihren Derivierten in verschiedenen Verbindungen auf. Die Koeffizienten dieser Kombinationen setzt Trembley, da die Gleichung keine willkürlichen Funktionen mehr enthalten soll, gleich Null und erhält so 6 Gleichungen für die Φ und Π, wie z. B.

$$C\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)^2 + D\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich zunächst die Verhältnisse der Größen $G, A, B, \ldots$ durch die Φ und Π ausdrücken; haben also umgekehrt jene Verhältnisse diese Form, so ist die Gleichung sicher durch

$$z = \Pi' \cdot F(\Phi') + \Pi'' \cdot f(\Phi'')$$

integriert. Sind die $G, A, B, \ldots$ gegebene Funktionen, so besteht die Aufgabe darin, die Π und Φ zu bestimmen. Trembley löst die Aufgabe für spezielle Fälle. Zuerst nimmt er $\Pi' = \Pi''$ an[1]) und berechnet aus den erwähnten 6 Gleichungen die Ableitungen von Π und Φ durch die $G, A, B, \ldots$ dargestellt. Für Φ' und Φ'' ergeben sich, wie schon aus der einen angeführten Relation ersichtlich, die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial y}\right) + \left[\frac{E - \sqrt{(EE - 4CD)}}{2D}\right]\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial x}\right) = 0$$

und

$$\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial y}\right) + \left[\frac{E + \sqrt{(EE - 4CD)}}{2D}\right]\left(\frac{\partial \Phi''}{\partial x}\right) = 0,$$

und das sind, wie es der Natur der Aufgabe nach nicht anders sein kann, genau die Gleichungen, welche Laplace zur Transformation der Gleichung 2. Ordnung auf die kanonische Form benutzte. Trembley ersetzt beide Gleichungen durch die totale

$$[E \mp \sqrt{(EE - 4CD)}]\,\partial y - 2D\,\partial x = 0,$$

wobei also E, C und D als gegeben zu betrachten sind; des weiteren stellt er Formeln auf, welche nach Berechnung von Φ' und Φ'' die Funktionen Π' und Π'' durch die Koeffizienten $G, A, B, \ldots$ der gegebenen Differentialgleichung ausdrücken. Analog wird der Fall

$$\Phi' = \Phi''$$

[1]) Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XI, 1792 (1797), Histoire p. 35

untersucht.[1]) Noch mehr Gelegenheit zu rechnen gibt die Annahme[2]) einer komplizierteren Integralgleichung

$$z = \sum_{i=0}^{n} \Pi^{(n-i)} \cdot [F^{(i)}(\Phi') + f^{(i)}(\Phi'')],$$

wobei die $F^{(i)}$ und $f^{(i)}$ die Derivierten von F bzw. f bedeuten, und die $\Pi^{(i)}$ nach einem gewissen Gesetz auseinander hervorgehen. Weiterhin geht Trembley von der Integralgleichung

$$\psi(x, y, z) = \Pi(x, y) \cdot F(\Phi(x, y))$$

aus[3]), die ihn zunächst auf eine komplizierte partielle Gleichung mit den abhängigen Variabeln ψ und z und drei Bedingungsgleichungen führt. Diese komplizierte Form vergleicht er sodann mit der allgemeinen partiellen Gleichung 2. Ordnung, welche die ersten Ableitungen von z in der 2. Potenz enthält, und stellt ψ durch die Koeffizienten der letzteren dar. Ist nun eine derartige Gleichung 2. Ordnung gegeben, so existiert, wenn ψ außerdem die erwähnten Bedingungsgleichungen erfüllt, ein Integral der angegebenen Form. Ein Anhang[4]) bringt eine Abänderung der besprochenen allgemeinen Methode. Endlich ist zu erwähnen, daß Trembley eine Unmenge von Beispielen, besonders aus Eulers Integralrechnung, nach seiner Methode rechnet, die nur den Nachteil hat, daß man bei einer beliebig vorgelegten Differentialgleichung von vornherein ersehen sollte, welche Form das Integral haben wird.

Von den Gleichungen höherer Ordnung gesteht Euler in seiner Integralrechnung[5]) zu, daß die Einführung neuer Veränderlicher hier wegen der allzuverwickelten Formeln wenig zweckmäßig ist. Euler beschränkt sich auf drei Typen von Gleichungen, deren erster dadurch entsteht, daß man eine einzige Derivierte höherer Ordnung gleich Null oder einer Funktion von x und y gleichsetzt.[6]) Für die Gleichung

$$\left(\frac{d^3 z}{d x^3}\right) = a^3 z$$

versucht Euler ein Integral

$$\left(\frac{d z}{d x}\right) = n z,$$

das auf die Bedingung $n^3 = a^3$ führt und so drei partikuläre Integrale der Form

---

[1]) Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XI, 1792 (1797), Histoire, p. 42 ff.
[2]) Ebenda, p. 83 ff. [3]) Ebenda, p. 101 ff. [4]) Ebenda, p. 105—109.
[5]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 348. [6]) Ebenda, p. 351 bzw. 355.

$$z = e^{nx}\Gamma(y)$$

mit der willkürlichen Funktion Γ liefert; eine ähnliche Methode hat Euler auch zur Integration der Gleichung der Saitenschwingungen benutzt (S. 996). Als zweiter Fall ist die Gleichung behandelt, welche die Ableitungen nach einer der beiden Variabeln x und y gar nicht enthält. Man kann deswegen z. B. in der Gleichung

$$Pz + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + R\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \cdots = 0,$$

wo $P, Q, R, \ldots$ Funktionen von x und y sind, y als konstant ansehen und integrieren; man hat lediglich für die Integrationskonstanten nachträglich arbiträre Funktionen von y einzuführen. Euler betrachtet verschiedene integrable Gleichungen 3. Ordnung; hierauf die Gleichung der Schwingungen elastischer Lamellen

$$\left(\frac{d^4z}{dx^4}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right),$$

von der er als partikuläres Integral die Gleichung

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) + b\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

mit der Bedingung $b = \pm a$ angibt.[1]) Der dritte Typus, von Euler als homogener bezeichnet, ist dadurch charakterisiert, daß die Differentialgleichung nur Derivierte derselben Ordnung und kein Absolutglied besitzt. Für die Lösung der Gleichung

$$A\left(\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda}\right) + B\left(\frac{d^\lambda z}{dx^{\lambda-1}dy}\right) + C\left(\frac{d^\lambda z}{dx^{\lambda-2}dy^2}\right) + \cdots = 0.$$

wo $A, B, C, \ldots$ Konstante sind, gibt Euler die Regel an: man bilde die algebraische Gleichung λ^{ten} Grades

$$An^\lambda + Bn^{\lambda-1} + Cn^{\lambda-2} + \cdots = 0$$

und bestimme ihre Wurzeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; dann ist das „vollständige Integral" der vorgelegten Gleichung

$$z = \Gamma(y + \alpha x) + \Delta(y + \beta x) + \Sigma(y + \gamma x) + \cdots.$$

wo $\Gamma, \Delta, \Sigma, \ldots$ willkürliche Funktionen sind. Im Fall gleicher

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 371. Die Schwingungen elastischer Lamellen und Ruten unter verschiedenen Grenzbedingungen hat Euler ausführlich Acta Academiae Petropolitanae 1779 (1782), pars I, p. 103 ff. behandelt. Daran knüpft endlich ein Aufsatz von Lexell an: ebenda, 1781 (1785), pars II, p. 185 ff.

Wurzeln treten Faktoren x, x^2, ... oder, was die Form des Integrals nur scheinbar ändert, y, y^2, ... auf; ein Resultat, das Euler dadurch erhält, daß er die gleichen Wurzeln als unendlich wenig verschieden annimmt und nach geeigneter Umformung zur Grenze übergeht. Ist von den ersten Koeffizienten A, B, C, ... eine Anzahl Null, so sind ebensoviele Wurzeln n unendlich groß[1]), und der entsprechende Teil des Integrals lautet $\Gamma(x) + y\Delta(x) + y^2\Sigma(x) + \cdots$.

Dieser Gleichungstypus begegnet uns bereits bei Laplace[2]), der indessen auf der rechten Seite statt der Zahl 0 eine gegebene Funktion X von x annimmt. Laplace behandelt die Gleichung mit Hilfe einer Methode, die derjenigen für die lineare totale Gleichung n^{ter} Ordnung vollkommen analog ist (vgl. S. 931); nach seiner Behauptung hat sie schon d'Alembert im 4. Band seiner Opuscules integriert. Man vergleiche hierzu auch die von Legendre behandelte Gleichung 2. Ordnung (vgl. S. 1012).

Euler hat noch verschiedene spezielle Gleichungen höherer Ordnung integriert; als Integral von

$$\left(\frac{d^4 z}{dy^4}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 2ab\left(\frac{dz}{dx}\right) + bbz$$

gibt er[3]) an

$$\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = \pm a\left(\frac{dz}{dx}\right) \pm bz,$$

und knüpft daran die Bemerkung, daß man a posteriori, d. h. vom Integral ausgehend, noch weitere derartige Beispiele finden könne. Das Problem der Schwingungen von Glocken behandelt Euler durch Zerlegung der Glocke in Kreisringe und Betrachtung von deren Bewegung. Als Gleichung für die letztere erhält er

$$0 = \frac{1}{ffcc}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{1}{aa}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) + \left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)^{4)}$$

mit der partikulären Lösung

$$y = A \sin\left(\frac{ix}{a} + \alpha\right) \sin\left(\frac{ifct}{aa}\sqrt{(ii-1)} + \nu\right),$$

wo i jede ganze Zahl bedeuten, jeder Sinus durch einen Cosinus ersetzt werden kann, und A, α, ν willkürliche Größen sind. Aus den Partikulärlösungen für die Kreisringe sucht er dann die Schwingungen der ganzen Glocke zu konstruieren.

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 387. [2]) Miscellanea Taurinensia, t. IV[2], 1766/69, p. 339. [3]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 377. [4]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. X. 1764 (1766), p. 269. Vgl. Burkhardt, a. a. O., Heft 2, S. 364.

Monge behandelt[1]) durch sukzessive Ordnungserniedrigung einen weiteren Typus, welcher allgemeiner Behandlung zugänglich ist, nämlich die Gleichung

$$x^m \frac{\partial^m z}{dx^m} + m x^{m-1} y \frac{\partial^{m-1} dz}{dx^{m-1} dy} + m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot x^{m-2} y^2 \frac{\partial^{m-2} ddz}{dx^{m-2} dy^2} + \cdots = 0$$

mit dem Integral

$$z = f\left(\frac{x}{y}\right) + y f'\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 f''\left(\frac{x}{y}\right) + \cdots + y^{m-1} \varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

wo $f, f', f'', \ldots \varphi$ willkürliche Funktionen bedeuten. **Monge** sagt: Setzt man

$$x^{m-1} \frac{\partial^{m-1} z}{dx^{m-1}} + (m-1) x^{m-2} y \frac{\partial^{m-2} dz}{dx^{m-2} dy} + \cdots = V,$$

so ergibt sich mit Benutzung der vorgelegten Differentialgleichung

$$x \frac{\partial V}{dx} + y \frac{dV}{dy} - (m-1) V = 0^2),$$

also

$$V = y^{m-1} \varphi\left(\frac{x}{y}\right).$$

Dann ist

$$x^{m-1} \frac{\partial^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots = y^{m-1} \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

als intégrale première der gegebenen Gleichung aufzufassen und kann ebenso weiter behandelt werden, ohne daß durch die willkürliche Funktion φ die Integration erschwert würde. Weiterhin behauptet **Monge**, daß

$$z = g + k$$

das endliche und „vollständige" Integral von

$$W = G + K$$

sei, wenn $z = g$ bzw. $z = k$ die endlichen vollständigen Integrale von $W = G$ bzw. $W = K$ seien, wo W, G, K Ausdrücke obiger Art sind. Mit Hilfe dieser Regel sucht er dann Gleichungen

$$W + AV + BV' + \cdots = K$$

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. V², 1770/73, p. 94. Auch bei **Condorcet** findet sich in einem Aufsatz über partielle Differentialgleichungen Histoire de l'Académie des Sciences 1770 (1773), p. 151 ff. die Schreibweise $\partial^n d^m Z$, wo mit d die Differentiation nach x, mit ∂ diejenige nach y angedeutet ist. Siehe auch ebenda 1772, part. 1 (1775), p. 14. [2]) Ebenda (Misc. T.), t. V², 1770/73, p. 89.

zu behandeln, wo die W, V, V', ... Gebilde obiger Art mit verschiedenen m bedeuten.

Nikolaus Fuß schreibt[1]) über die Integration der Gleichungen

$$Az + BP = 0; \quad Az + BP + CQ = 0$$

usw., wo A, B, C, .. Konstante und

$$P = x\left(\frac{dz}{dx}\right) + y\left(\frac{dz}{dy}\right); \quad Q = x^2\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + 2xy\left(\frac{ddz}{dxdy}\right) + y^2\left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

usw. Legendre behandelt[2]) in seinem mehrerwähnten Aufsatz die vervollständigte Gleichung dieser Art

$$T = av + b\left(x\frac{dv}{dx} + y\frac{dv}{dy}\right) + c\left(x^2\frac{ddv}{dx^2} + 2xy\frac{ddv}{dxdy} + y^2\frac{ddv}{dy^2}\right) + \cdots$$

und gibt an, daß sie sich entweder durch Ordnungserniedrigung behandeln läßt oder mittels der Substitutionen

$$\frac{x}{y} = \theta, \quad y = \pi$$

in die Gleichung

$$T = av + b\pi\frac{dv}{d\pi} + c\pi^2\frac{ddv}{d\pi^2} + \cdots$$

übergeht, deren Integration keinerlei Schwierigkeiten macht.

Die allgemeine lineare Gleichung 3. Ordnung mit drei Variablen ist von Monge nach seiner bekannten Methode behandelt.[3]) Sei

$$dr = \alpha dx + \beta dy; \quad ds = \beta dx + \gamma dy; \quad dt = \gamma dx + \varepsilon dy,$$

so daß also α, β, γ, ε die vier partiellen Differentialquotienten 3. Ordnung sind, sowie

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\varepsilon + E = 0,$$

wo A, B, C, D, E gegebene Funktionen von x, y, z, p, q, r, s, t bedeuten. Eliminiert man daraus drei von den vier Größen α, β, γ, ε, so entstehen Gleichungen, welche, da sie die vierte der Größen α, β, γ, ε nicht bestimmen können, zerfallen müssen. So erhält Monge durch Elimination von β, γ, ε die zwei totalen Gleichungen

$$Ady^3 - Bdy^2dx + Cdydx^2 - Ddx^3 = 0;$$

$$dy^2(Bdr + Cds + Ddt) - dxdy(Cdr + Dds) + Ddx^2dr + Edy^3 = 0.$$

---

[1]) Acta Academiae Petropolitanae 1780 (1783), pars I, p. 76 ff. [2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 336. [3]) Ebenda 1784 (1787), p. 155.

Zwei Integrale

$$V = a \quad \text{und} \quad U = b$$

dieser Gleichungen liefern das erste Integral

$$V = \varphi(U)$$

der ursprünglichen Gleichung. Monge benützt diese Methode zur Integration der Differentialgleichung der Regelflächen (vgl. S. 571), die er in der Form

$$t^3\alpha + 3t^2u\beta + 3tu^2\gamma + u^3\varepsilon = 0$$

angibt, wo zur Abkürzung

$$-s + \sqrt{(s^2 - rt)} = u\,^{1)}$$

gesetzt ist. Die eben aufgestellten totalen Gleichungen lauten in diesem Falle:

$$t^3dy^3 - 3t^2udy^2dx + 3tu^2dydx^2 - u^3dx^3 = 0;$$

$$dy^2(3t^2dr + 3tuds + u^2dt) - dxdy(3utdr + u^2ds) + u^2dx^2dr = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen hat drei gleiche Wurzeln

$$tdy - udx = 0;$$

dadurch geht die zweite Gleichung in

$$u^2dt + 2utds + t^2dr = 0$$

mit dem Integral

$$\frac{u}{t} = a$$

über. Damit findet man aber aus

$$tdy - udx = 0$$

die Gleichung

$$y = ax + b$$

und somit das erste Integral

$$y = \frac{u}{t}x + \varphi\left(\frac{u}{t}\right).$$

Setzt man für u seinen Wert in

$$\frac{u}{t} = a$$

ein, so kommt

$$r + 2as + a^2t = 0$$

---

1) Diese Gleichung läßt sich mit der vorhergehenden gleichartig schreiben, nämlich $t^2 . r + 2tu . s + u^2 . t = 0$.

mit dem intégrale complète

$$z = x\psi(ax - y) + \pi(ax - y).$$

Monge erhält endlich die beiden simultanen Gleichungen

$$y = ax + \varphi(a) \quad \text{und} \quad z = x\psi(a) + \pi(a),$$

aus denen man sich a eliminiert zu denken hat. Nach einer Bemerkung, wie die einzelnen Wurzeln der erwähnten totalen Gleichungen des allgemeinen Falles zu kombinieren sind, wenn jede dieser Gleichungen ungleiche Wurzeln besitzt, weist Monge darauf hin, daß seine Methode auch auf Gleichungen höherer Ordnung anwendbar ist und nennt den ihr zugrunde liegenden Gedankengang la véritable métaphysique du calcul aux différences partielles.[1])

Legendre verwandelt[2]) die spezielle Gleichung 3. Ordnung, in welcher die abhängige Variable v höchstens einmal nach y differentiiert auftritt, durch die Transformation

$$\frac{dv}{dx} + pv = v'$$

in eine Gleichung 2. Ordnung, wobei p eine einfache Differentialgleichung zu erfüllen hat.

Trembley hat außer der Gleichung 1. und 2. Ordnung auch diejenige 3. Ordnung aus dem gegebenen Integral konstruiert.[3]) Er setzt

$$z = \Pi(x, y) \cdot F(\Phi(x, y)),$$

wo unter F eine willkürliche Funktion zu verstehen ist. Indem er aus den partiellen Ableitungen von z die allgemeine Gleichung 3. Grades bildet, welche diese Ableitungen nur in der ersten Potenz enthält, bekommt er vier Bedingungsgleichungen, von deren Erfülltsein das Bestehen der Differentialgleichung 3. Ordnung bzw. der angenommenen Integralgleichung abhängt. Die eine dieser Bedingungsgleichungen ist hinsichtlich der Unbekannten $\dfrac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)}$ vom 3. Grade und

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 158. Es mag hier noch die Gleichung

$$\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)$$

erwähnt werden, die ebenda p. 567 kurz besprochen ist. [2]) Ebenda 1787 (1789), p. 332. [3]) Nova Acta Academiae Petropolitanae, t. XIII, 1795/96 (1802), p. 101 ff. Aus dem Jahre 1798.

liefert somit drei Werte von Φ, die Φ', Φ'', Φ''' heißen mögen. Hiermit ergibt sich das Integral

$$z = \Pi' \cdot F(\Phi') + \Pi'' \cdot f(\Phi'') + \Pi''' \cdot \Sigma(\Phi'''),$$

wo F, f, Σ willkürliche, Π', Π'', Π''' passend zu bestimmende Funktionen sind. Die Methode hat den Nachteil, daß von vornherein nicht zu ersehen ist, ob ein Integral der angenommenen Form existiert; trotzdem scheut Trembley nicht vor der Berechnung der kompliziertesten Ausdrücke und Formeln zurück.

Cousin ist, indem er die oben erwähnten Untersuchungen in anderer Richtung weiter verfolgte, zu einem Theorem über die Integration der allgemeinen im Mongeschen Sinne linearen Gleichung n^{ter} Ordnung gekommen[1]), das die Integrationsvorschriften von Monge für die Gleichung 1., 2. und 3. Ordnung als Spezialfälle umfaßt. Sei

$$\alpha \frac{d^n z}{dy^n} + \beta \frac{d^n z}{dy^{n-1} dx} + \gamma \frac{d^n z}{dy^{n-2} dx^2} + \cdots + \varepsilon \frac{d^n z}{dx^n} = \tau,$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varepsilon, \tau$ Funktionen von x, y, z und den partiellen Abgeleiteten von z, die der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich, bedeuten. Man berechne die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha m^n + \beta m^{n-1} + \gamma m^{n-2} + \cdots + \varepsilon = 0$$

(vgl. Eulers homogene Gleichung S. 1017) und bilde die Größen

$$\alpha m + \beta = \alpha\lambda; \quad \alpha\lambda m + \gamma = \alpha\mu; \quad \alpha\mu m + \delta = \alpha\nu$$

usw. Dann ergeben sich alle Integrale der ursprünglichen partiellen Gleichung durch Integration folgender beiden totalen Gleichungen

$$m\,dy + dx = 0 \quad \text{und} \quad \alpha m(dp + \lambda dq + \mu dr + \nu ds + \cdots) + \tau dx = 0,$$

wo $p, q, r, s, \ldots$ die Differentialquotienten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}$, $\frac{d^{n-1}z}{dy^{n-2}dx}, \ldots$ bedeuten. Cousin betrachtet sodann speziell diejenige Gleichung, welche keine Produkte oder Potenzen von Differentialquotienten enthält, in der also sämtliche Abgeleitete linear auftreten: er bezeichnet sie als lineare Gleichung, während Monge dabei nur das Linearsein der Derivierten n^{ter} Ordnung fordert.

Zu den frühest behandelten Differentialgleichungen von mehr Variablen und höherer Ordnung — die 1. Ordnung sind

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 688ff. Im Text ist die Darstellung von ebenda 1784 (1787), p. 407 zugrunde gelegt.

bereits an Ort und Stelle besprochen worden — gehören die Grundgleichungen der Hydrodynamik. Euler gibt, wie schon erwähnt, in einem Brief an Lagrange die Gleichung

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddu}{dZ^2}\right)$$

an und sucht partikuläre Lösungen von ihr aufzufinden.[1]) Lagrange sucht fernerhin die allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen in ihrer Lagrangeschen Form zu integrieren.[2]) Durch Einführung der Multiplikatoren L, M, N, wo L, M, N Funktionen der drei Variablen (changeantes) X, Y, Z bedeuten, Addition und Integration über den von der Flüssigkeit eingenommenen Raum erhält er zunächst die Gleichung

$$\int\left(\frac{d^2x}{dt^2}L + \frac{d^2y}{dt^2}M + \frac{d^2z}{dt^2}N\right)dX\,dY\,dZ$$

$$= c\int\left(\frac{d^2x}{dX^2}L + \frac{d^2y}{dX\,dY}L + \frac{d^2z}{dX\,dZ}L + \frac{d^2y}{dY^2}M + \frac{d^2x}{dY\,dX}M\right.$$

$$\left. + \frac{d^2z}{dY\,dZ}M + \frac{d^2z}{dZ^2}N + \frac{d^2x}{dZ\,dX}N + \frac{d^2y}{dZ\,dY}N\right)dX\,dY\,dZ.$$

Die hier auftretenden dreifachen Integrale werden durch partielle Integration umgeformt, so daß z. B.

$$\int\frac{d^2x}{dX^2}L\,dX\,dY\,dZ = \int x\frac{d^2L}{dX^2}dX\,dY\,dZ + \int\left(\frac{dx}{dX}L - x\frac{dL}{dX}\right)dY\,dZ \text{ usw.}$$

Lagrange zeigt, daß unter gewissen Bedingungen, die allerdings in den meisten Fällen nicht angebbar sein werden, alle auftretenden Doppelintegrale (Oberflächenintegrale) zum Verschwinden gebracht werden können und reduziert dann durch die Festsetzungen

$$\frac{d^2L}{dX^2} + \frac{d^2M}{dX\,dY} + \frac{d^2N}{dX\,dZ} = kL;\quad \frac{d^2M}{dY^2} + \frac{d^2L}{dY\,dX} + \frac{d^2N}{dY\,dZ} = kN;$$

$$\frac{d^2N}{dZ^2} + \frac{d^2L}{dZ\,dX} + \frac{d^2M}{dZ\,dY} = kN\,.$$

und die Substitution

$$s = \int(xL + yM + zN)\,dX\,dY\,dZ$$

— das Integral genommen über den von Flüssigkeit erfüllten Raum — die ursprüngliche Gleichung auf

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. II², 1760/61, p. 1—10. Vgl. auch Histoire de l'Académie de Berlin, t. XV, 1759 (1766), p. 286 ff. [2]) Miscellanea Taurinensia, t. II², p. 120. Mit Benutzung von Burkhardt, a. a. O., Heft 2, S. 865.

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = kcs.$$

Bestimmt man daraus s und berücksichtigt die physikalischen Anfangsbedingungen für $t = 0$, so läßt sich damit, wie Lagrange andeutet, die Berechnung von x, y, z auf die an einfacheren Differentialgleichungen 2. Ordnung auseinandergesetzten Methoden zurückführen. Die Berechnung von L, M, N gelingt Lagrange nur in speziellen Fällen; so führt die Annahme

$$L = Ae^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}; \quad M = Be^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}; \quad N = Ce^{(pX+qY+rZ)\sqrt{k}}$$

auf die Gleichungen

$$A = c(Ap^2 + Bpq + Cpr); \quad B = c(Bq^2 + Apq + Crq);$$
$$C = c(Cr^2 + Apr + Bqr)$$

zur Bestimmung von p, q, r. Schließlich[1]) sind noch Reihenentwicklungen abgeleitet, die jedoch sehr viel Raum einnehmen.

Unter allgemeinen Gesichtspunkten sucht die Gleichungen von mehr Variablen zuerst Euler zu behandeln. Er macht auch darauf aufmerksam, daß bei drei unabhängigen Variablen die willkürliche Funktion der Integralgleichung eine Funktion von zwei Variablen ist.[2]) Er unterscheidet verschiedene Typen, die einer gleichartigen Behandlung zugänglich sind. Ist eine einzige Derivierte von v einer beliebigen Funktion der unabhängigen Variablen gleichgesetzt, so findet man das Resultat, indem man bei jeder Integration alle Veränderlichen bis auf eine konstant läßt und die Integrationskonstanten durch willkürliche Funktionen dieser Variablen ersetzt. Die Anzahl der willkürlichen Funktionen, bemerkt Euler ausdrücklich, ist immer gleich der Ordnung der Differentialgleichung. Ist weiterhin die Differentialgleichung von der Art, daß sie nur die Ableitung nach ein und derselben Variablen, etwa x enthält, so kann man wieder die übrigen Veränderlichen als konstant ansehen und nachher — wie wir sagen würden — die Variation der Konstanten anwenden. Treten nur die Ableitungen nach zweien der Variablen auf, so kann man wenigstens die dritte als konstant betrachten und die Gleichung als Differentialgleichung zweier unabhängigen Variablen behandeln.[3]) Euler untersucht außerdem speziell die „homogene" Gleichung 2. und 3. Ordnung, d. i. jene Gleichung, welche nur die Differentialquotienten der höchsten Ordnung und kein Absolutglied besitzt. Unter der Annahme, daß v nur von

---

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. II², p. 127. [2]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 397. [3]) Ebenda, bzw. p. 409, 416, 419.

$$t = \alpha x + \beta z \quad \text{und} \quad u = \gamma y + \delta z$$

abhänge, führt die Gleichung 2. Ordnung[1])

$$A\left(\frac{ddv}{dx^2}\right) + B\left(\frac{ddv}{dy^2}\right) + C\left(\frac{ddv}{dz^2}\right) + 2D\left(\frac{ddv}{dxdy}\right) + 2E\left(\frac{ddv}{dxdz}\right)$$
$$+ 2F\left(\frac{ddv}{dydz}\right) = 0$$

durch Einführung von t und u an Stelle von x, y, z zu den drei Gleichungen

$$A\alpha\alpha + C\beta\beta + 2E\alpha\beta = 0; \quad 2C\beta\delta + 2D\alpha\gamma + 2E\alpha\delta + 2F\beta\gamma = 0$$

und

$$B\gamma\gamma + C\delta\delta + 2F\gamma\delta = 0,$$

die sich zu der Bedingung

$$AFF + BEE + CDD = ABC + 2DEF$$

vereinigen lassen. Das ist aber, sagt Euler, die Bedingung dafür, daß sich

$$Axx + Byy + Czz + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz$$

in

$$(ax + by + cz)(fx + gy + hz)$$

spalten läßt. Nun lassen sich die Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\delta}{\gamma}$ durch die A, B, C, ..., diese selbst aber durch die $a, b, c, \ldots$ ausdrücken; so gelingt es Euler, t und u (bis auf einen konstanten Faktor, der gleichgiltig ist) durch die $a, b, c, \ldots$ darzustellen; beim Bestehen der erwähnten Bedingungsgleichung, welche, wie nebenbei[2]) gezeigt wird, die homogenen Gleichungen 1. Ordnung

$$a\left(\frac{dv}{dx}\right) + b\left(\frac{dv}{dy}\right) + c\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{dv}{dx}\right) + g\left(\frac{dv}{dy}\right) + h\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0$$

im Gefolge hat, lautet dann das „vollständige" Integral

$$v = \Gamma\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c} \;\&\; \frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) + \Delta\left(\frac{x}{f} - \frac{z}{h} \;\&\; \frac{y}{g} - \frac{z}{h}\right),$$

wo Γ und Δ willkürliche Funktionen sind. Euler behandelt sodann die homogene Gleichung 3. Ordnung[3]) unter der Annahme, daß ein Integral

$$a\left(\frac{dv}{dx}\right) + b\left(\frac{dv}{dy}\right) + c\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0$$

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 447 ff. [2]) Ebenda, p. 451.
[3]) Ebenda, p. 453.

existiert; diese Hypothese führt auf die Bedingung, daß ein gewisser algebraischer Ausdruck 3. Grades, gebildet aus x, y, z und den Koeffizienten $A, B, C, \ldots$ der gegebenen Differentialgleichung, sich in drei Linearfaktoren der Form $ax + by + cz$ spalten läßt; ist diese Bedingung erfüllt, so kann das „vollständige" Integral ohne weiteres angegeben werden. Aber auch wenn vollständige Zerfällung in Linearfaktoren nicht möglich ist, sondern — und dies gilt allgemein auch für homogene Gleichungen höherer Ordnung — lediglich eine Zerspaltung in Faktoren höheren Grades möglich ist[1]), kann man noch einen gewissen Nutzen aus dieser Faktorenzerlegung ziehen; denn es ist dann wenigstens Ordnungserniedrigung anwendbar, so führt z. B. ein Faktor $xy - zz$ auf

$$\left(\frac{ddv}{dxdy}\right) - \left(\frac{ddv}{dz^2}\right) = 0.$$

Schließlich wird noch der Fall, daß eine der Größen a, b, c gleich Null ist, an einem Beispiel erläutert. Endlich sagt Euler[2]) von der hydrodynamischen Gleichung mit vier unabhängigen Veränderlichen

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddv}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dy^2}\right) + \left(\frac{ddv}{dz^2}\right),$$

daß ihr vollständiges Integral zwei willkürliche Funktionen von je drei Variablen haben müsse, und versucht ein Integral der Form

$$v = \Gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t).$$

Es ergibt sich die Bedingung

$$\delta\delta = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma.$$

Ferner gibt Euler noch die Integrale

$$v = \frac{\Gamma(t \pm \sqrt{(xx + yy + zz)})}{\sqrt{(xx + yy + zz)}}; \quad v = \frac{\Gamma(x \pm \sqrt{(tt - yy - zz)})}{\sqrt{(tt - yy - zz)}},$$

sowie die beiden anderen an, welche sich durch Vertauschung von x mit y und z hieraus ergeben.

An anderer Stelle behandelt Euler spezielle Gleichungen von mehr Variablen; für die Schwingungen von Pauken stellt er[3]) die Gleichung

$$\frac{1}{ee}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dy^2}\right)$$

auf; hier findet man leicht

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 457. [2]) Ebenda, p. 458.
[3]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae t. X, 1764 (1766), p. 252.

$$z = \Phi(\alpha x + \beta y + \gamma t),$$

wo

$$\alpha\alpha + \beta\beta = \frac{\gamma\gamma}{ee}$$

ist. Er versucht[1]) auch für den Fall $e = 1$ eine Lösung der Form

$$z = \sin(\alpha t + \mathfrak{A}) \sin\left(\frac{\beta x}{a} + \mathfrak{B}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma y}{b} + \mathfrak{C}\right);$$

dann müssen die Konstanten α, β, γ der Bedingung

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

gehorchen. Euler erkennt diese Lösung als den Fall der Schwingungen einer rechteckigen Membran, die an den Rändern ringsum befestigt ist. Um weitere Lösungen zu finden, transformiert er auf Polarkoordinaten und wird dabei schließlich auf unsere Zylinderfunktion geführt.

Monge behandelt[2]) die lineare Gleichung 2. Ordnung mit drei unabhängigen Variablen; man erhält sie aus der Eulerschen homogenen Gleichung, indem man ein Absolutglied hinzufügt und die Koeffizienten als Funktionen der vier Variablen und der Derivierten 1. Ordnung auffaßt. Monge wendet sein oft bewährtes Verfahren an, indem er die drei Gleichungen, welche die Derivierten 2. Ordnung mit den totalen Differentialen der drei unabhängigen Variablen und der drei Derivierten 1. Ordnung verknüpfen, einführt, mit ihrer Hilfe drei Derivierte 2. Ordnung aus der ursprünglichen Gleichung eliminiert und wie immer das Resultat der Elimination in einzelne Gleichungen zerlegt. Er erhält so genau dieselbe Bedingungsgleichung wie Euler, nur in etwas anderer Bezeichnungsweise, und sagt von ihr: „la proposée n'est intégrable que lorsque les coéfficiens satisfont à cette condition“; daß sie die Bedingung für das Zerfallen eines gewissen Ausdrucks in Linearfaktoren ist, braucht er deshalb nicht anzugeben, weil er sie umgekehrt gerade aus diesen Linearfaktoren, die ihm seine Methode zuerst liefert, herleitet. Monge deutet auch kurz die Ausdehnung seines Verfahrens auf Gleichungen höherer Ordnung an; er findet, daß die Anzahl der Bedingungsgleichungen — im Fall von drei unabhängigen Variabeln natürlich — immer gleich der Ordnung der Differentialgleichung, vermindert um die Einheit, ist. Im Anschluß daran erwähnt er wieder, daß seine totalen Gleichungen, auf die er das Problem reduziert, von derselben Allgemeinheit (de la même généralité) seien wie die partiellen Gleichungen. „Le travail

[1]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. X, 1764 (1766), p. 248.
[2]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 161.

de l'intégration", sagt er, „ne consiste donc plus, lorsqu'elle est possible, qu'à transformer ces équations en d'autres qui les comportent toutes et qui soient intégrables". So eigentümlich diese Worte beim ersten Lesen anmuten, man muß sich hüten, ihnen allzu große Bedeutung beizumessen oder gar Liesche Ideen darin finden zu wollen; Lie sagt ausdrücklich, Integration ist nichts anderes als Transformation; Monge unterscheidet genau zwischen Transformation und Integration; was er verlangt, ist lediglich Transformation auf einen integrablen Typus.

Auch Legendre untersucht[1]) die lineare Gleichung 2. Ordnung

$$0 = \frac{ddv}{dx^2} + a\frac{ddv}{dxdy} + b\frac{ddv}{dxdz} + \cdots,$$

verlangt aber im Gegensatz zu Monge, daß die Koeffizienten $a, b, \ldots$ die abhängige Variable v nicht enthalten, also Funktionen von x, y, z allein sind. Als „notwendige Bedingung" für die Existenz eines Integrals, das nur eine endliche Zahl von Termen aufweist, bezeichnet auch er die Möglichkeit, das Polynom $x^2 + axy + bxz + \cdots$ in zwei rationale Faktoren zerspalten zu können. Er behauptet, daß für Gleichungen aller Ordnungen ein ähnliches Gesetz bestehe, und geht dann[2]) endlich zu Gleichungen 2. Ordnung mit vier unabhängigen Veränderlichen über, bei denen das Prinzip der Zerspaltung wieder von Bedeutung wird.

Gleichungen mit mehreren abhängigen Variablen treten im allgemeinen nur bei Simultansystemen auf, wie sie schon frühzeitig bei hydrodynamischen Problemen untersucht wurden; so haben Lagrange[3]) und d'Alembert[4]) das System

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dx} = 0; \quad \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dt} = 0$$

integriert. Der Fall einer einzigen Gleichung mit mehreren abhängigen Variablen findet sich bei Trembley, welcher die Gleichung

$$\left(\frac{d\varrho}{dx}\right)\left(\frac{d\mu}{dy}\right) - \left(\frac{d\varrho}{dy}\right)\left(\frac{d\mu}{dx}\right) = 0$$

durch $\varrho = F(\mu)$ integriert[5]); die Beziehung $\varrho = F(\mu)$ sieht Trembley lediglich als Integral der gegebenen Differentialgleichung an, während

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 323. [2]) Ebenda, p. 331. [3]) Miscellanea Taurinensia, t. III², 1762/65 (1766), p. 205. [4]) Opuscules mathématiques, t. V, 1768, p. 41. [5]) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1792/93, p. 386. Vgl. hierzu auch Condorcet, Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 17. In obiger Form läßt sich bekanntermaßen auch die Gleichung der abwickelbaren Flächen $rt - s^2 = 0$ schreiben.

wir heutzutage diese als notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen einer Relation zwischen ϱ und μ auffassen; Trembley hat also, wenn man so sagen darf, nur das „hinreichend" eingesehen.

Von den Differentialgleichungen mit drei oder mehr Veränderlichen haben wir bis jetzt nur die partiellen betrachtet. Simultansysteme wenigstens von totalen Gleichungen sind uns wiederholt begegnet; wie wir uns erinnern, lag in ihrer Anwendung in zwei wichtigen Fällen Methode und zielbewußte Absicht. Der eine dieser Fälle ist die Reduktion einer totalen Gleichung n^{ter} Ordnung auf ein System von n totalen Gleichungen 1. Ordnung. Eine besondere Integrationsmethode für dieses Ersatzsystem wird indessen nirgends entwickelt, wohl deshalb, weil das betreffende System da, wo es aufgestellt wird, nicht die Integration erleichtern, sondern anderen Zwecken, wie z. B. der Herleitung irgend eines allgemeinen Satzes (vgl. S. 905) dienen soll. Doch wird angeblich in speziellen Fällen für $n = 2$ und $n = 3$ auch die Integration selbst durch Euler in Angriff genommen und zwar mit Hilfe eines Multiplikatorensystems, ohne daß jedoch deren allgemeine Existenz behauptet wäre.[1]) Wichtiger ist die Heranziehung von simultanen totalen Gleichungen zur Integration der partiellen Differentialgleichungen, wie sie von Laplace, Lagrange und Monge (vgl. insbes. S. 947, 972, 1009) geübt wurde. Monge selbst geht ja hierbei soweit, daß er den Verein totaler Gleichungen nicht nur als ein Hilfsmittel zur Integration der partiellen Gleichung, seine Integration nicht bloß als eine Aufgabe ansieht, auf welche sich diejenige der partiellen Gleichung stets zurückführen läßt, sondern den betreffenden Verein als ein der partiellen Gleichung vollkommen gleichwertiges Gebilde ansieht, weshalb er den Verein totaler Gleichungen selbst nicht durch eine Reihe einzelner Integralgleichungen, sondern durch ein Integral mit willkürlichen Funktionen integriert.

Speziellere Systeme hat zuerst d'Alembert integriert, dem man überhaupt die systematische Untersuchung von Simultansystemen verdankt.[2]) Interessant ist die Behandlung des Systems von Differentialgleichungen der Schwingungen einer endlichen Zahl von Massenpunkten durch Lagrange bei Gelegenheit seiner Untersuchungen über Saitenschwingungen[3]); doch sind die Gleichungen zu speziell, als daß hier darauf eingegangen werden könnte. In demselben Aufsatz, der die Theorie der Adjungierten enthält, bringt Lagrange[4]) ein

[1]) Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II A 4 b, S. 246.
[2]) Vgl. diese Vorl., III[2], S. 898, 901. [3]) Miscellanea Taurinensia, t. I[2] (1759), p. 26. [4]) Ebenda, t. III[2], 1762/65 (1766), p. 223.

System von Gleichungen, auf das sich diese Theorie übertragen läßt; die Verwendung seiner Variation der Konstanten auf ein spezielles Gleichungssystem haben wir bereits erwähnt (vgl. S. 926), desgleichen die Ausdehnung einer von Laplace herrührenden Näherungsmethode auf ein System von Störungsgleichungen (vgl. S. 923). Auf ein interessantes Simultansystem, das Cousin behandelt[1]), und seine approximative Berechnung kann hier, da die betreffenden Entwicklungen allzu umfangreich sind, nicht eingegangen werden. Endlich sei noch an die zahlreichen Simultansysteme, auf welche die Mechanik z. B. im Dreikörperproblem führt, erinnert.

Wir charakterisieren hier nur die Integration des Simultansystems

$$ddx + \alpha dx + \beta dy + \gamma x + \delta y = 0;$$
$$ddy + \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' x + \delta' y = 0$$

durch Lexell[2]); dabei sind x und y als Funktion einer unabhängigen Variablen u zu denken, deren Differentiale du, du^2 usw. der Einfachheit halber fortgelassen sind. Durch zweimalige Differentiation beider Gleichungen ergeben sich vier weitere Gleichungen, die durch Einführung eines Multiplikatorsystems $\varrho, \nu, \mu, \lambda$, 1 und Addition auf eine Gleichung 4. Ordnung führen. Bestimmt man hierin die Multiplikatoren so, daß nur mehr x und seine Differentiale überbleiben, so ergibt sich die Gleichung

$$d^4x + (\alpha + \beta')d^3x + (\alpha\beta' - \alpha'\beta + \gamma + \delta')ddx$$
$$+ (\alpha\delta' - \alpha'\delta + \beta\gamma' - \beta'\gamma)dx + (\delta'\gamma - \delta\gamma')x = 0,$$

wegen deren Integration auf Eulers Integralrechnung verwiesen ist; ebensogut hätte man natürlich auch in der Gleichung y allein belassen können.[3]) Im folgenden betrachtet Lexell zwei lineare Gleichungen 3. Ordnung, ebenfalls mit konstanten Koeffizienten und stößt so auf eine Gleichung 6. Ordnung, welche nur x und seine Ableitungen enthält. Sind die zwei Ausgangsgleichungen vierter Ordnung, so wird analog die Schlußgleichung 8. Ordnung usw. Lexell nimmt sodann drei Gleichungen mit den drei abhängigen Veränderlichen x, y, z; hier treten in den Schlußgleichungen viel kompliziertere Koeffizienten auf. Endlich ist das Problem mit der Frage der Integrabilität durch Verwendung passender Multiplikatoren, auf die wir für den Fall von bloß zwei Veränderlichen ausführlich eingegangen

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 674. [2]) Acta Academiae Petropolitanae 1777 (1778), pars I, p. 61 ff. Die Untersuchung verdankt nach Aussage des Autors ihre Entstehung der Anregung durch d'Alembert. [3]) Ebenda, p. 67.

sind (vgl. S. 905 ff.), in Zusammenhang gebracht; ist $V = 0$ eine Gleichung zwischen $p, q, r, \ldots, p', q', r', \ldots$, wo

$$dx = pdu; \quad ddx = qdu^2; \ldots \quad dy = p'du; \quad ddy = q'du^2; \ldots,$$

so ist das Integrabilitätskriterium durch folgende Gleichungen gegeben

$$N - \frac{dP}{du} + \frac{ddQ}{du^2} - \cdots = 0; \quad N' - \frac{dP'}{du} + \frac{ddQ'}{du^2} - \cdots = 0,$$

wenn

$$\begin{aligned} dV = Mdu + Ndx + N'dy + \cdots \\ + Pdp + P'dp' + \cdots \\ + Qdq + Q'dq' + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

Durch Anwendung dieser Kriterien (vgl. S. 538) erhält Lexell schließlich totale Differentialgleichungen für die gesuchten Multiplikatoren, die den ursprünglichen Gleichungen sehr ähnlich sind; zur Integration der letzteren genügen indes schon partikuläre Lösungen der ersteren. Später hat Lexell diese Untersuchungen fortgesetzt.[1])

Wir betrachten jetzt den Fall, daß eine einzige totale Gleichung mit mehr als zwei Variablen vorliegt, und zwar sollen insbesondere die Differentiale aller dieser Veränderlichen vorkommen, da der gegenteilige Fall keinerlei Schwierigkeiten macht. Die hierher gehörigen Gleichungen 1. Ordnung und 1. Grades hat schon frühzeitig Clairaut eingehend behandelt[2]) und die Bedingung ihrer Integrabilität, die event. mit Hilfe eines Multiplikators zu bewerkstelligen ist, aufgestellt. Diese Bedingungsgleichung bringt Euler in seiner Integralrechnung wieder[3]), woselbst sich auch das entsprechende Kriterium für die spezielle Gleichung

$$dz = Pdx + Qdy$$

findet, ohne daß Euler die wichtige Anwendung zu machen weiß, die nachher Lagrange geglückt ist (vgl. S. 966). Letzterer Umstand ist indessen sehr begreiflich, da Euler von der totalen Gleichung ausgeht, bei der P und Q Funktionen bedeuten, die zumeist gegeben sind oder doch bestimmt angebbar gedacht werden, während Lagrange eine gegebene Gleichung zwischen x, y, z, P, Q integrieren will, in der P und Q nichts als die Symbole für partielle Differentialquotienten, nichts als Zeichen, formale Gebilde sind. Ist die Integra-

---

[1]) Acta Academiae Petropolitanae 1779 (1783), pars II, p. 52 ff. [2]) Vgl. diese Vorl., III[2], S. 885. [3]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p. 5.

bilitätsbedingung nicht erfüllt, so ist die gegebene Differentialgleichung nach Eulers Ansicht völlig sinnlos. Man sieht, heißt es, daß man unendlich viele derartige Gleichungen mit drei Variabeln vorlegen kann, denen keinerlei endliche Gleichung (d. i. Integralgleichung) zukommt, und die außerdem absolut nichts bedeuten („nihil plane definiant" und an anderer Stelle „nihilque omnino declararet"); es wäre lächerlich, ihre Integration zu versuchen, heißt es weiterhin.

Euler kann sich gar nicht genug tun in starken Ausdrücken, „aequatio nihil significans absurda" nennt er diesen Fall im Gegensatz zur „aequatio realis".[1]) Ähnlich sagt er gleich darauf von der Gleichung 2. Grades mit drei Variabeln, sie sei überhaupt immer absurd, wenn sie nicht durch Wurzelziehen[2]) auf die Form

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

gebracht werden könne. Diese Anschauung kann in Erstaunen setzen, wenn man weiß, daß Newton bereits die Differentialgleichung

$$2dx + xdy - dz = 0$$

nicht allein durch die zwei Relationen

$$y^2 = x \quad \text{und} \quad z = 2x + \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}}$$

erfüllt, sondern sogar die viel allgemeinere Vorschrift gegeben hat, eine Relation zwischen zweien der Variabeln willkürlich anzunehmen, um mit ihrer Hilfe die gegebene Gleichung auf eine solche von nur zwei Veränderlichen zu reduzieren.[3]) Noch viel wunderbarer erscheint aber die Tatsache, daß Euler schon lange vor dem Erscheinen der Integralrechnung Gleichungen, die er später als absurd und sinnlos bezeichnet, wirklich nach allen Regeln der Kunst integriert hat.

So löst er[4]) schon 1730 die Gleichung

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

durch

$$x = \frac{dP}{dp}; \quad y = px - P; \quad s = x\sqrt{1 + p^2} - Q,$$

wo

---

[1]) Institutiones calculi integralis, vol. III, p 4, 7, 9, 10. [2]) An Faktorenzerlegung im allgemeinen scheint er nicht zu denken. [3]) Man vgl. eine Abhandlnng von Stäckel in den Leipziger Berichten 1902, ferner einen diesbezüglichen Aufsatz von v. Braunmühl in den Verhandlungen des III. internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904. [4]) Commentarii Academiae Petropolitanae 1730/31. Nach Klügels mathematischem Wörterbuch, Artikel Rectification. Siehe auch Institutiones calculi integralis, vol. I, p. 525.

$$Q = \int_{\circ}^{\circ} \frac{x p\,dp}{\sqrt{1+p^2}}$$

oder, wenn wir das Resultat nur ein wenig anders schreiben, durch

$$x = \frac{dP}{dp}; \quad y = p - \frac{dP}{dp}; \quad s = \frac{dP}{dp}\sqrt{1+p^2} - \int_{\circ}^{\circ} \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \frac{dP}{dp} \cdot dp,$$

wo P eine Funktion von p bedeutet. Man darf nun nicht etwa glauben, daß Euler mit den oben zitierten Ausdrücken diese früheren Resultate widerrufen wollte; dazu hätte er sie doch wenigstens erwähnen müssen. Euler beruft sich aber in keiner Weise auf sie, denkt auch offenbar gerade gar nicht an sie — denn sonst müßte er den auffälligen Widerspruch doch merken; ja es macht beinahe den Eindruck, als hätte er sie vollständig vergessen. Beinahe, sage ich; denn mir erscheint viel wahrscheinlicher, daß Euler den Inhalt, die Tragweite seiner früheren Entdeckung nicht in ihrem vollen Umfange erkannt hat, ähnlich wie Lagrange nicht merkt, daß er die partielle Gleichung 1. Ordnung beliebigen Grades integriert hat. Hätte sich Euler seinerzeit klar und ausdrücklich die Aufgabe gestellt „ich will jetzt die Gleichung

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

integrieren", wäre er von dieser Formulierung aus zu dem erwähnten Resultat gekommen, so würde freilich nur die Annahme völligen Vergessens jenen rätselhaften Widerspruch erklären. Dann bliebe aber merkwürdig, daß Euler nicht wenigstens später, wo er wieder ähnliche Gleichungen behandelt und ähnliche Resultate erzielt, seinen Irrtum eingesehen hat. Meiner Ansicht nach ist an allem in erster Linie die Problemstellung schuld, wobei das Moment augenblicklichen Vergessens mitgewirkt haben mag; man hat zu bedenken, daß die betr. Gleichung nicht unmittelbar, von vornherein analytisch gegeben war, sondern in irgend welche geometrische Aufgaben eingekleidet, erst allmählich im Laufe der Untersuchung, scheinbar ganz zufällig und nebensächlich, unter einem Gewirr von ähnlichen Gleichungen unbemerkt auftauchte, ohne daß klar hervortrat, daß gerade sie das betr. Problem völlig zu umschreiben, zu ersetzen imstande sei, daß sie m. a. W. die analytische Fassung der Aufgabe vorstelle. Ich erinnere hier an Leibniz, der lange Gleichungen mit Differentialen praktisch handhabte, ohne das diesen Gleichungen gemeinsame Prinzip zu erkennen. Immerhin bleibt jener Widerspruch auffallend genug und gibt zu denken Anlaß. Und man sieht, wenn es wie hier geschehen konnte, daß ein Autor zu einem hochwichtigen Resultat gelangt, es explizite darstellt und doch nicht zu deuten weiß[1]), wie sehr man sich hüten muß, einem Forscher einen Gedankengang, eine Einsicht

[1]) Vgl. auch S. 968 unten und S. 1043.

zuzuschreiben, die er nach Zeitcharakter und eigenem Wissen noch nicht haben kann, und die erst Spätere, auch wenn sie dessen Vorarbeiten kannten, mit größter Anstrengung allmählich aufdeckten. Die Lösung irgend einer mathematischen Aufgabe ist zwar ohne die Einführung gewisser für sie charakteristischer Gedankengänge und Definitionen (z. B. des Grenzbegriffes) nicht möglich, man darf aber aus der faktischen Herstellung der Lösung noch nicht schließen, daß auch die Prinzipien, welche allein die Lösung ermöglichten, erkannt worden sind. Es ist ein Unterschied, ob man ein Theorem unbewußt anwendet und ob man sich über seine Bedeutung klar ist, und Newtons Verdienst liegt nicht so sehr darin, daß er das Gravitationsgesetz behauptete, als daß er zeigte, wie sich die kompliziertesten himmlischen Vorgänge mit seiner Hilfe erklären lassen. Der Nichthistoriker kann ja sagen: wie leicht hätte Euler auf die allgemeine totale Gleichung mit drei Variabeln dasselbe Verfahren anwenden können, wie auf die spezielle Gleichung

$$dz = Pdx + Qdy,$$

wo P und Q durch eine Relation verbunden waren (vgl. S. 957 und S. 963); hätte er doch wie sonst die ganze Gleichung bis auf ein einziges Glied in ein exaktes Differential umgeformt, und den Koeffizienten dieses Gliedes mit Zuhilfenahme einer willkürlichen Funktion so bestimmt, daß die ganze Gleichung ein vollständiges Differential geworden wäre! So naheliegend der Gedanke war, Euler hat ihn eben gerade hier nicht gedacht, und das ist für den Historiker das Wesentliche. In anderen Fällen hat er dann plötzlich die Fruchtbarkeit der eben geschilderten Methode wieder eingesehen: die Gleichungen

$$dx = pdu + rdt \cos u \quad \text{und} \quad dy = rdu - pdt \cos u,$$

auf die er gelegentlich eines Abbildungsproblems stößt[1] (vgl. S. 573), multipliziert er mit α bzw. β, addiert und erhält auf Grund der Annahme

$$\alpha\alpha + \beta\beta = 0$$

die Gleichung

$$dx + dy\sqrt{-1} = \cos u\,(p + r\sqrt{-1})\left(\frac{du}{\cos u} - \sqrt{-1}\,dt\right).$$

Hier sagt Euler kurz und klar, daß $\frac{du}{\cos u} - \sqrt{-1}\,dt$ ein vollständiges Differential dz sei, weswegen $\cos u\,(p + r\sqrt{-1})$ eine Funktion von z sein müsse. Er erhält sofort

$$x + y\sqrt{-1} = 2\,\Gamma(ls - t\sqrt{-1}),$$

wo zur Abkürzung

$$s = \operatorname{tg}\left(45^0 + \tfrac{1}{2}u\right)$$

---

[1]) Acta Academiae Petropolitanae 1777 (1778), pars I, p. 124.

gesetzt ist, und ebenso, weil, wie er sagt, $\sqrt{-1}$ immer zwei Vorzeichen hat,

$$x - y\sqrt{-1} = 2\,\Gamma(ls + t\sqrt{-1}).$$

Daraus lassen sich jetzt unmittelbar x und $y\sqrt{-1}$ berechnen. Hier reiht sich gut die Integration von

$$dx^2 + dy^2 = m^2(ds^2 + q^2dt^2),$$

wo q eine Funktion von s ist, durch Lagrange in den Berliner Memoiren von 1779 an.[1]) (Vgl. S. 575.) Die Substitutionen

$$\frac{ds}{q} = du \quad \text{und} \quad mq = n$$

liefern

$$dx^2 + dy^2 = n^2(du^2 + dt^2).$$

Führt man durch den Multiplikator

$$1 = \sin^2\omega + \cos^2\omega$$

eine Hilfsgröße ω ein, so wird

$$dx^2 + dy^2 = n^2(\sin\omega\,du - \cos\omega\,dt)^2 + n^2(\cos\omega\,du + \sin\omega\,dt)^2;$$

da ω noch unbestimmt ist, kann man in

$$dx = n(\sin\omega\,du - \cos\omega\,dt) \quad \text{und} \quad dy = n(\cos\omega\,du + \sin\omega\,dt)$$

trennen. Wegen der Integration dieser Gleichungen verweist Lagrange auf d'Alembert; er findet

$$x = \frac{f(u + t\sqrt{-1}) + F(u - t\sqrt{-1})}{2};$$

$$y = \frac{f(u + t\sqrt{-1}) - F(u - t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

$$m = \frac{\sqrt{f'(u + t\sqrt{-1})\,F'(u - t\sqrt{-1})}}{q},$$

wo f und F willkürliche Funktionen bedeuten. Aus der Eigenschaft, daß m nur von t und u, d. i. von t und s abhängt, folgert Lagrange, daß die Abbildung, die ihn auf die ursprüngliche Gleichung geführt hat, winkeltreu ist.

Die Eulersche Ansicht über die totalen Gleichungen mit mehr als zwei Variabeln war bis Monge die allgemein verbreitete; die Anschauung „es sei lächerlich, im Falle des Nichterfülltseins der Integrabilitätsbedingung eine Integration zu versuchen", erklärt hinreichend das Stillschweigen aller Mathematiker in betreff dieser Gleichungen;

---

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 643.

kaum daß sich da oder dort eine Bemerkung darüber findet, wie bei Laplace, der nach singulären Integralen von Gleichungen mit drei Variabeln fragt und dabei auf die Integrabilitätsbedingungen zu sprechen kommt.[1]) Endlich 1784, gleichzeitig mit den beiden früher erwähnten Aufsätzen über Differentialgleichungen (vgl. S. 949 u.), erscheint die große Arbeit von Monge[2]), die auf diese Fragen nicht nur neues Licht wirft, sondern sie unter großen, allgemeinen Gesichtspunkten behandelt und auch zu einem gewissen Abschluß bringt. Einleitend bezeichnet Monge die Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0$$

als Bestimmungsgleichung für die Tangentenrichtung der Integralkurven in dem Punkt (x, y) und deutet analog die entsprechende Gleichung 2. Ordnung. Von den Gleichungen mit mehr Variabeln, heißt es weiter, hält man die höheren Grades alle für absurd; von den linearen alle jene, die nicht bestimmten Bedingungen genügen; diese Bedingungen, an Zahl immer um zwei weniger als die Anzahl der Variabeln, werden kurz besprochen. Nach solchen orientierenden Bemerkungen kündet Monge den Inhalt seiner Untersuchung an[3]): „ich nehme mir vor, zu zeigen, daß es keine absurde Differentialgleichung gibt, absurd im Sinne von unmöglich, imaginär. Ich werde zeigen, daß alle Differentialgleichungen reelle Eigenschaften ausdrücken, ob sie jetzt den erwähnten Bedingungen gehorchen oder nicht; daß sie alle einer wirklichen Integration fähig sind.“ Zum besseren Verständnis des folgenden bringt jetzt Monge folgende Überlegung: Von allen Gleichungen 1. Ordnung mit zwei Variabeln, sagt er, gibt es nur eine einzige nichtlineare, nämlich

$$M^2dx^{2m} + N^2dy^{2m} = 0,$$

wo unter M und N Funktionen von x und y zu verstehen sind; diese Gleichung könne nichts Reelles bedeuten, außer wenn gleichzeitig

$$M = 0 \quad \text{und} \quad N = 0,$$

oder

$$dx = 0 \quad \text{und} \quad dy = 0.$$

Das erste dieser zwei Ergebnisse könne nicht als Integral angesehen werden, da es keine willkürliche Konstante enthalte; als wirkliches Integral sei demnach der Verein der Gleichungen

$$x = a, \quad y = b,$$

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1772, part. 1 (1775), p. 368.
[2]) Ebenda, 1784 (1787), p. 502—576. [3]) Ebenda, p. 504.

d. i. die Gleichung eines einzelnen Punktes anzusehen. Unter den Differentialgleichungen 1. Ordnung gebe es also solche, deren Integral aus einer bzw. zwei Gleichungen bestehe und eine bzw. zwei Integrationskonstanten enthalte. Die besprochene Eigenschaft der Gleichung höheren Grades sei schon früher beobachtet, aber als Ausnahme betrachtet worden, indessen sei sie nur der Anfang einer ungeheuren Kette. Dieses Bild erklärt Monge durch folgende Ausführungen: die totalen Gleichungen dreier Variabeln gehören, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, alle krummen Oberflächen an, und ihr Integral besteht in einer einzigen Gleichung mit einer einzigen Integrationskonstanten. Aber alle die unendlich vielen Gleichungen, die jener Bedingung nicht genügen, gehören Raumkurven an, und ihr Integral besteht aus zwei simultanen Gleichungen. Indessen habe eine einzige von ihnen, nämlich

$$M^2dx^{2m} + N^2dy^{2m} + P^2dz^{2m} = 0,$$

die drei simultanen Gleichungen

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c,$$

die zusammen einen Punkt darstellen, zum Integral. Nach Darlegung der analogen Verhältnisse für vier Variable, wobei Monge natürlich auf die geometrische Veranschaulichung verzichten muß, ist die neue Auffassung ausgesprochen, die sogen. Integrabilitätsbedingungen hätten nicht die Beurteilung, ob eine Integration möglich sei, sondern die Entscheidung, aus wieviel simultanen Gleichungen sich das Integral zusammensetze, zum Gegenstand.[1]) An einigen Beispielen wird sodann das Gesagte erörtert; die Einschaltung dieser Aufgaben hat aber für uns den großen Wert, daß wir aus ihnen wieder geometrische Untersuchungen als Quelle von Monges Ideen über die Differentialgleichungen, d. i. einen Zweig der Analysis, erkennen können, denn die Behandlung dieser Aufgaben macht es fast unzweifelhaft, daß Monge bei ausgedehnter Beschäftigung mit Problemen der Flächentheorie zuerst immer wieder auf derartige Gleichungen geführt wurde, bis er sie endlich in ihrer vollen Bedeutung erkannte und nun umgekehrt zum Gegenstand einer Sonderuntersuchung machte. Das erste dieser Beispiele ist

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2),$$

in dem a eine gegebene Konstante bedeutet. Es ist offenkundig, sagt Monge, daß diese Gleichung derjenigen doppelt gekrümmten Kurve angehört, deren Elemente einen gewissen konstanten Winkel

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 506.

mit der xy-Ebene bilden; deshalb sind speziell die Gleichungen aller Geraden, die diesen Winkel mit der xy-Ebene bilden, Lösungen der gegebenen Gleichung.

Diese Geraden sind aber

$$x = \alpha z + \beta; \quad y = z\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} - \alpha^2\right)} + \gamma,$$

wo α, β, γ drei willkürliche Konstanten sind. Nachdem sich Monge durch Differentiation überzeugt hat, daß diese beiden Gleichungen zusammen wirklich eine Lösung darstellen, geht er dazu über, das intégrale complète zu finden. Elimination von α gibt zunächst

$$(x-\beta)^2 + (y-\gamma)^2 = \frac{z^2}{a^2},$$

und das ist die Gleichung aller Kegel, deren Spitzen in der xy-Ebene liegen, und deren Erzeugende mit dieser Ebene den erwähnten konstanten Winkel bilden. Die Annahme

$$\gamma = \varphi(\beta)$$

scheidet hieraus alle jene Kegel aus, deren Spitzen auf der in der xy-Ebene gezogenen Kurve

$$y = \varphi(x)$$

liegen. Zwei konsekutive Kegel dieser Schar schneiden sich nun, fährt Monge fort, in einer Geraden mit den Gleichungen

$$(x-\beta)^2 + (y-\varphi(\beta))^2 = \frac{z^2}{a^2}; \quad x - \beta + (y - \varphi(\beta))\varphi'(\beta) = 0,$$

deren zweite durch partielle Differentiation nach β entstanden ist. Auch diese Gerade bildet immer noch mit der xy-Ebene jenen konstanten Winkel und ist daher eine Lösung der Differentialgleichung. Betrachtet man aber die Schar (suite) von Kegelflächen, so ergibt sich eine Reihe solcher Schnittgeraden wie die eben erwähnte. Da sich aber von diesen Geraden, deren Lage nur von dem variabeln Parameter (paramètre variable) β abhängt, immer zwei konsekutive auf der nämlichen Kegelfläche befinden, so schneiden sie sich notwendig zu zweien konsekutiv und bilden folglich die Tangenten einer doppelt gekrümmten Kurve, die wegen der konstanten Neigung ihrer Elemente das vollständige Integral der gegebenen Differentialgleichung darstellen wird. Nach ihrer geometrischen Entstehungsweise wird sie dargestellt durch die drei Gleichungen

$$(x-\beta)^2 + (y-\varphi(\beta))^2 = \frac{z^2}{a^2};$$

$$x - \beta + (y - \varphi(\beta))\varphi'(\beta) = 0; \quad -1 - (\varphi'(\beta))^2 + (y - \varphi(\beta))\varphi''(\beta) = 0.$$

worin φ als willkürliche Funktion aufzufassen ist. Durch ähnliche Überlegungen integriert **Monge** die Gleichungen

$$z^2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(dx^2 + dy^2)$$

und

$$(xdy - ydx)^2 + (ydz - zdy)^2 + (zdx - xdz)^2 = a^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

und leitet, vielleicht durch die Form der hierbei auftretenden Integrale zu tieferem Eindringen in deren Natur veranlaßt, einige allgemeine Sätze ab. So erhält man, heißt es[1]), das intégrale complète der Gleichung

$$F\left(\frac{dx}{dz}, \ \frac{dy}{dz}\right) = 0,$$

welche die Variabeln x, y, z selbst nicht enthält, durch Elimination von α aus den drei Gleichungen

$$F\left(\frac{x-\alpha}{z}, \ \frac{y-\varphi(\alpha)}{z}\right) = 0; \quad \left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0; \quad \left(\frac{ddF}{d\alpha^2}\right) = 0,$$

wo die 2. und 3. Gleichung durch partielle Differentiation der 1. bzw. 2. Gleichung nach α entstehen. Für den Beweis, sagt **Monge**, ist zu beachten, daß man die 1. und 2. dieser Gleichungen differentiieren darf, als ob α konstant wäre, da ja die partiellen Abgeleiteten dieser beiden Gleichungen nach α Null sind. Führt man diese Differentiation wirklich aus, so ergibt sich mit Benutzung der Abkürzungen

$$\frac{x-\alpha}{z} = m \quad \text{und} \quad \frac{y-\varphi(\alpha)}{z} = n,$$

da sich die Gleichung

$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right) = 0$$

auch

$$\left(\frac{dF}{dm}\right) + \left(\frac{dF}{dn}\right)\varphi'(\alpha) = 0$$

schreiben läßt:

$$\left(\frac{dF}{dm}\right)dm + \left(\frac{dF}{dn}\right)dn = 0;$$

$$\left[\left(\frac{ddF}{dm^2}\right) + \left(\frac{ddF}{dmdn}\right)\varphi'(\alpha)\right]dm + \left[\left(\frac{ddF}{dmdn}\right) + \left(\frac{ddF}{dn^2}\right)\varphi'(\alpha)\right]dn = 0.$$

Diese beiden Gleichungen können aber nicht unabhängig von dem Wert von F existieren, wenn nicht gleichzeitig

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 515. Auf den im Text erwähnten Typus läßt sich die eben behandelte Gleichung

$$dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$$

ohne weiteres zurückführen.

$$dm = 0 \quad \text{und} \quad dn = 0,$$

d. i.

$$\frac{x-\alpha}{z} = \frac{dx}{dz} \quad \text{und} \quad \frac{y-\varphi(\alpha)}{z} = \frac{dy}{dz}$$

ist. Die verlangte Elimination von α führt dann sofort auf

$$F\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

In ganz analoger Weise wird das Integral von

$$F\left(\frac{dX}{dZ}, \frac{dY}{dZ}\right) = 0,$$

wo X, Y, Z Funktionen von x, y, z sind, durch

$$F\left(\frac{X-\alpha}{Z}, \frac{Y-\varphi(\alpha)}{Z}\right) = 0$$

und die beiden partiellen Ableitungen nach α dargestellt.

Im folgenden[1]) sucht Monge den Zusammenhang zwischen totalen und partiellen Differentialgleichungen von drei Variabeln darzustellen. Er bedient sich hierzu folgender Überlegung: Ist eine Flächengleichung $M = 0$ gegeben, die einen Parameter α und eine willkürliche Funktion $\varphi(\alpha)$ dieses Parameters enthält, so werden bei variablem α und festem φ zwei konsekutive Flächen sich in einer Kurve

$$M = 0; \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$

schneiden. Alle diese Kurven zusammen bilden eine Fläche, nämlich die Enveloppe der Flächen $M = 0$. Man erhält die endliche, d. i. von Differentialen freie Gleichung derselben durch Elimination von α aus

$$M = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

doch wird die Elimination im allgemeinen wegen der willkürlichen Funktion φ nicht ausführbar sein. Die Kurven, welche diese Enveloppe zusammensetzten, besitzen aber selbst wieder eine Enveloppe, die Monge die Grenzkurve (limite) der Enveloppe nennt; ihre endlichen Gleichungen erhält man durch Hinzunahme von

$$\left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0$$

zu den früheren beiden Gleichungen und Elimination von α. Monge stellt nun die von φ freien Differentialgleichungen sowohl der En-

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 518.

veloppe als der Rückkehrkante auf; um die Gleichung der ersteren zu finden, differentiiere man nach x und y, wobei α wegen

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$

als konstant betrachtet werden darf; Elimination von α und $\varphi(\alpha)$ aus den drei Gleichungen

$$M = 0; \quad \left(\frac{dM}{dx}\right) = 0; \quad \left(\frac{dM}{dy}\right) = 0$$

führt endlich auf die partielle Differentialgleichung $V = 0$, welche φ nicht mehr enthält. Im zweiten Fall denkt sich Monge die für die Gleichung

$$F\left(\frac{x-\alpha}{z}, \quad \frac{y-\varphi(\alpha)}{z}\right) = 0$$

angestellten Überlegungen wiederholt; wir haben bereits eingesehen, sagt er, daß man durch totale Differentiation von

$$M = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0,$$

wobei wegen

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{ddM}{d\alpha^2}\right) = 0$$

die Größe α wie eine Konstante behandelt werden kann, und Elimination von α, $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$ aus

$$M = 0; \quad \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0; \quad dM = 0; \quad d \cdot \left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$

eine totale Gleichung 1. Ordnung höheren Grades $U = 0$ erhält, welche die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt.

Nun läßt sich aber, wenn von den beiden Gleichungen $V = 0$ und $U = 0$ die eine gegeben ist, die andere ohne Kenntnis der Integralgleichung daraus herleiten.[1]) Ist nämlich die partielle Gleichung $V = 0$ gegeben, so substituiere man hierin den Wert von p (oder q) aus der Gleichung

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

was eine Gleichung $V^1 = 0$ zwischen x, y, z, dx, dy, dz und q (bzw. p) ergibt; die totale Gleichung $U = 0$ erhält man dann durch Elimination von q aus

$$V^1 = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dV^1}{dq}\right) = q.$$

Umgekehrt hat man, falls $U = 0$ gegeben ist, hierin statt dz den

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 520.

Ausdruck $pdx + qdy$ einzusetzen; das liefert eine Gleichung $U' = 0$ zwischen x, y, z, p, q und $\frac{dy}{dx} = \omega$; Elimination von ω aus

$$U' = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{dU'}{d\omega}\right) = 0$$

gibt die gewünschte partielle Gleichung $V = 0$. Monge erläutert diese Vorschriften wieder an dem speziellen Beispiel

$$M = (x - \alpha)^2 + (y - \varphi(\alpha))^2 - \frac{z^2}{a^2} = 0,$$

wo die Gleichungen

$$V = 0 \quad \text{und} \quad U = 0 \quad \text{bzw.} \quad p^2 + q^2 = a^2 \quad \text{und} \quad dz^2 = a^2(dx^2 + dy^2)$$

lauten, und geht sodann zu ihrem allgemeinen Beweis über, der hier übergangen werden kann.

Diese Beziehung zwischen den Gleichungen $U = 0$ und $V = 0$ kann nun, wie Monge zeigt[1]), deshalb für ihre Integration, d. i. für die Auffindung der Gleichung $M = 0$, bedeutungsvoll werden, da sich die eine von ihnen oft unschwer integrieren läßt, die andere keiner der bekannten Integrationsmethoden sich fügt. Dahin gehört das dritte von den oben erwähnten Beispielen, das auf die partielle Gleichung

$$z - px - qy = a^2 \sqrt{(1 + p^2 + q^2)}$$

führt, die einem der von Lagrange integrierten Gleichungstypen (vgl. S. 968) angehört und auf

$$M = z - \alpha x - \varphi(\alpha) \cdot y - a^2 \sqrt{[1 + \alpha^2 + (\varphi(\alpha))^2]}$$

führt. Umgekehrt läßt sich, wie Monge, der die Lagrangesche Arbeit von 1772 noch nicht in ihrer vollen Tragweite erfaßt, behauptet, die partielle Gleichung

$$bx^2(z + px - qy)^2 + aby^2(z - px + qy)^2 + az(z + px + qy)^2 = 0$$

nach keiner der bekannten Methoden integrieren; sie führt aber auf eine totale Gleichung der Form

$$F\left(\frac{dX}{dZ}, \frac{dY}{dZ}\right) = 0,$$

und damit zu der Gleichung

$$\left(\frac{xz - \alpha}{xy}\right)^2 + a\left(\frac{yz - \varphi(\alpha)}{xy}\right)^2 + b = M,$$

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 526.

woraus die Integrale sowohl der partiellen als der totalen Gleichung in bekannter Weise abzuleiten sind.

Monge kommt sodann[1]) auf die linearen Gleichungen zu sprechen; für die betr. Gleichung mit drei Variablen

$$Ldx + Mdy + Ndz = 0$$

sucht er zunächst die entsprechende partielle Gleichung genau nach der eben hierfür aufgestellten Regel. Einführung von $pdx + qdy$ an Stelle von dz gibt

$$(L + Np)dx + (M + Nq)dy = 0;$$

partielle Differentiation nach ω, d. i. $\frac{dy}{dx}$, und Elimination von ω liefert die zwei simultanen Gleichungen

$$L + Np = 0; \quad M + Nq = 0.$$

Man integriere, heißt es weiter, die eine dieser Gleichungen, wobei y bzw. x konstant betrachtet werden kann, und ergänze das Integral durch eine willkürliche Funktion von y bzw. x; setzt man den aus dieser Gleichung berechneten Wert von q bzw. p in die andere von jenen simultanen Gleichungen ein, so erhält man eine Gleichung, die keine Differentiationen mehr aufweist; man hat auf diese Weise zwei endliche Gleichungen gewonnen, die einer Raumkurve angehören und das Integral der ursprünglichen Gleichung darstellen. Nach einigen Beispielen ist auf den Fall von mehr als drei Variablen eingegangen[2]); man substituiere, sagt Monge, für dz seinen Wert

$$pdu + qdx + rdy + \cdots$$

und differentiiere, indem man der Reihe nach immer nur eine einzige von den Größen $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \ldots$ als variabel ansieht; so erhält man eine Anzahl von Gleichungen, die zur Elimination dieser Größen genügt. Die sich ergebenden partiellen Schlußgleichungen sind sodann ganz wie im Fall von drei Variablen weiter zu behandeln. Monge behauptet sodann[3]), daß die Zahl der Integralgleichungen nicht immer um Eins kleiner ist als die Zahl der Variablen, sondern daß sie, wie an dem Beispiel

$$udu + xdx + xdy + zdz = 0$$

gezeigt ist, auch geringer sein kann. Doch scheint er das Vorhandensein von $n - 1$ Integralgleichungen bei n Veränderlichen für die

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 528. [2]) Ebenda, p. 532. [3]) Ebenda, p. 534.

Regel anzusehen. Dazu stimmt auch die Äußerung[1]), es hätte etwas Absurdes an sich, wenn eine totale Gleichung mit mehr Variablen sich durch eine einzige Gleichung integrieren lasse; so sei es z. B. (eher) absurd, wenn die Differentialgleichung mit drei Variablen, wie man bisher stillschweigend voraussetzte, einer Fläche angehöre; sie gehöre vielmehr einer Raumkurve an, die sich zwar durch eine einzige Differentialgleichung, aber bei Verwendung von endlichen Größen allein nur durch zwei simultane Gleichungen darstellen lasse. Unter der Überschrift „Gleichungen 2. Ordnung höheren Grades mit mehr als zwei Variablen" behandelt Monge dann zunächst die Aufgabe, alle Raumkurven mit konstantem Krümmungsradius zu finden[2]), zeigt dann analog dem früheren die Integration von

$$F\left(\frac{ddy}{dx^2}, \frac{ddz}{dx^2}\right) = 0$$

usw. und überträgt endlich die diesbezüglichen Sätze für Gleichungen 1. und 2. Ordnung allgemeiner auf den Fall beliebig vieler Veränderlicher.[3])

Monge behauptet[4]), daß auch partielle Gleichungen im allgemeinen nicht Flächen, sondern Raumkurven angehören. Setzt man in der Gleichung

$$p - Ay = \varphi(q + Ax),$$

wo A konstant und φ eine willkürliche Funktion ist, zur Abkürzung

$$q + Ax = \alpha,$$

also

$$p - Ay = \varphi(\alpha),$$

so wird aus

$$dz = pdx + qdy$$

die neue Gleichung

$$dz = dx\varphi(\alpha) + \alpha dy - A(xdy - ydx).$$

Man kann hier α konstant betrachten, sagt Monge, integrieren und die so gewonnene Integralgleichung nachträglich durch eine willkürliche Funktion von α zu der Gleichung $M = 0$ vervollständigen, wobei dann

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0$$

sein muß; da aber die eben aufgestellte totale Gleichung die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt, so komme die weitere Gleichung

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 585. [2]) Ebenda, p. 586 ff. [3]) Ebenda, p. 547 bzw. 549. [4]) Ebenda, p. 551. Ähnliche Untersuchungen für Gleichungen 2. Ordnung ebenda, p. 568.

$$-Ax^2 = \psi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

hinzu, so daß man im ganzen drei Gleichungen habe, die sich bei Elimination von α auf zwei Gleichungen zwischen x, y, z und einer willkürlichen Funktion ψ reduzieren. Offenbar hat Monge geglaubt, für die partiellen Gleichungen müsse dasselbe gelten wie für die totalen.

Endlich folgen noch einige Bemerkungen über partielle Differentialgleichungen 1. und höherer Ordnung; hier sei folgendes Theorem erwähnt[1]): Ist

$$dz = p\,du + q\,dx + r\,dy \cdots \quad \text{und} \quad F(z, pU, qX, rY, \cdots) = 0$$

die gegebene Differentialgleichung, wo U, X, Y, ... Funktionen von u, bzw. x, bzw. y, ... sind, so ergibt sich das Integral durch bloße Quadraturen. Sei nämlich

$$pU = \alpha r Y; \quad qX = \beta r Y; \; \cdots,$$

wo α, β, ..., unbestimmte Größen sind, so wird durch Substitution in die gegebene Differentialgleichung

$$\mathscr{f}(z, \alpha, \beta, \ldots rY) = 0.$$

Aus dieser Gleichung läßt sich rY in der Form

$$rY = f(z, \alpha, \beta, \ldots)$$

berechnen und man erhält

$$pU = \alpha f(z, \alpha, \beta, \ldots); \quad qX = \beta f(z, \alpha, \beta, \ldots); \; \ldots,$$

so daß also

$$\frac{dz}{f(z, \alpha, \beta, \ldots)} = \frac{\alpha\,du}{U} + \frac{\beta\,dx}{X} + \frac{dy}{Y} + \cdots$$

wird. Integration bei konstanten α, β, ... ergibt unter Beifügung einer willkürlichen Funktion eben dieser Größen α, β, ... eine Gleichung $M = 0$, zu der noch die Gleichungen

$$\left(\frac{dM}{d\alpha}\right) = 0; \quad \left(\frac{dM}{d\beta}\right) = 0; \; \ldots$$

hinzutreten; aus allen diesen Gleichungen hat man sich die α, β, ... eliminiert zu denken (vgl. S. 981). Endlich stellt Monge in einer conclusion générale die Hauptergebnisse der ganzen Arbeit nochmals übersichtlich zusammen und weist auf den großen Nutzen hin, den

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 556.

die Geometrie aus den darin niedergelegten neuen Gedanken und Methoden ziehen kann.[1])

Außer der großen Arbeit von Monge findet sich wenig über totale Gleichungen mit mehr Variabeln; P. G. Fontana (vgl. Abschnitt XXVI passim) versucht sich mit Multiplikatoren für derartige Gleichungen[2]); bedeutender ist eine Arbeit von Pietro Paoli über Differentialgleichungen, welche die Integrabilitätsbedingungen nicht erfüllen.[3]) Paoli schließt sich im allgemeinen eng an sein Vorbild Monge an; hier sei seine Integration der Gleichung mit vier Variablen

$$Adu + Bdz + Cdy + Ddx = 0$$

mitgeteilt.[4]) Paoli nimmt zwei Gleichungen $M = \alpha$ und $N = \beta$, wo α und β Konstante bedeuten, zwischen x, y, z willkürlich an; aus ihnen lassen sich z und y als Funktionen von x berechnen. Diese Werte ergeben, in die gegebene Gleichung eingeführt, eine totale Gleichung zwischen u und x mit einem Integral $P = \gamma$. Betrachtet man jetzt in den Integralgleichungen

$$M = \alpha, \quad N = \beta, \quad P = \gamma$$

die Größen α, β, γ als variabel, so muß, wenn die gegebene Differentialgleichung noch erfüllt sein soll, eine Gleichung der Form

$$md\gamma + nd\alpha + pd\beta = 0$$

bestehen. Das ist aber eine totale Gleichung mit nur drei Variablen, die im allgemeinen die Integrabilitätsbedingungen nicht befriedigen wird, weshalb sie nach den für solche Gleichungen geltenden Methoden weiter behandelt wird. Paoli geht im folgenden noch auf die Gleichungen mit fünf Veränderlichen, auf die höheren Grades und endlich auf diejenigen 2. Ordnung ein.[5])

Differenzen- und Summenrechnung.

Wir gehen zur Differenzen- und Summenrechnung über. Den ersten Aufschwung verdankt diese Disziplin der Untersuchung der arithmetischen Reihen höherer Ordnung, und die sich hierbei ergebenden Gesetzmäßigkeiten für den Zusammenhang zwischen Differenzen höherer und niederer Ordnung haben in mannigfacher Weise

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1784 (1787), p. 573 bzw. 574.

[2]) Memorie di Matematica e Fisica Soc. Ital. Verona, t. III, 1786, p. 516 ff.

[3]) Ebenda, t. VI, 1792, p. 501 ff. [4]) Ebenda, p. 509. [5]) Ebenda, p. 513, 517, 522.

auf die Probleme der niederen Analysis befruchtend eingewirkt. Hier sei eine Abhandlung von Euler[1]) erwähnt, die sich die Umformung von Reihen mit Hilfe endlicher Differenzen zur Aufgabe stellt. Wichtiger wurden die hierher gehörigen Untersuchungen für das Interpolationsproblem, das gewöhnlich im Zusammenhang mit der Summen- und Differenzenrechnung behandelt zu werden pflegt. Hier ist allerdings nur wenig darüber zu sagen, da die meisten diesbezüglichen Methoden für eine ganz spezielle praktische Anwendung geschaffen und gleich im Zusammenhang mit dieser behandelt wurden; die meisten Notizen finden sich in großen Tafelwerken, astronomischen und ähnlichen Abhandlungen der angewandten Mathematik.[2]) Rein mathematische Untersuchungen über das Interpolationsproblem im allgemeinen finden sich nur wenige; in speziellen Fällen wurde die Interpolation schon seit langem durch geistreiche Kunstgriffe geleistet, ich erinnere hier aus früherer Zeit nur an die Berechnung der Logarithmen, an das Wallissche Produkt und die Eulersche Interpolation der Fakultät (vgl. auch S. 781ff.). Das allgemeine Problem behandelt insbesondere Lagrange und kommt hierbei[3]) zu der bekannten, praktisch allerdings wenig brauchbaren Formel

$$y_x = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)}\,y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)}\cdot y_2 + \cdots,$$

wobei $y_1, y_2, \ldots y_n$ die Werte der Funktion y_x für

$$x = x_1,\ x_2,\ \cdots x_n$$

bedeuten. Von Lagrange stammen auch (aus dem Jahr 1772) die eleganten symbolischen Formeln[4])

$$\Delta^\lambda u = \left(e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1\right)^\lambda; \quad \left(\frac{du}{dx}\xi\right)^\lambda = [\log(1+\Delta u)]^\lambda;$$

$$d^{-1} = \int \quad \text{usw.}; \quad \Delta^{-1} = \Sigma \quad \text{usw.},$$

---

[1]) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, t. IV, 1811 (1813), p. 88ff. [2]) So z. B. Lambert, Über das Einschalten in den „Beiträgen zum Gebrauch der Mathematik und deren Anwendung", Berlin 1765/77, Bd. III, § 5. Nach Klügels mathematischem Wörterbuch, Artikel Einschalten. Ferner Lambert, Über das Einschalten beim Gebrauch der Ephemeriden, Bodes Jahrbuch für 1776. Poggendorff I, S. 1357. [3]) Lagrange gewinnt diese Formel durch Umformung des bereits 1775 aufgestellten Ausdrucks für den allgemeinen Term einer rekurrenten Reihe bei bekannten Anfangstermen. Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin, années 1792 et 1793. Oeuvres, t. V, p. 627ff. [4]) Sur une nouvelle espèce de calcul, Oeuvres de Lagrange, t. III, bzw. p. 452, 457, 451. Auf diesen Aufsatz kommt Laplace, Histoire de l'Académie des Sciences 1777 (1780), p. 113 zurück.

in denen nach Auswertung der auftretenden Klammern (mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes) und Ausführung der angedeuteten Multiplikation mit u die Symbole Δ, Δ^2, Δ^3, ... und $\frac{d}{dx}$, $\frac{d^2}{dx^2}$, $\frac{d^3}{dx^3}$, ... nicht mehr Potenzen von Δ bzw. $\frac{d}{dx}$, sondern Differenzen und Differentialquotienten höherer Ordnung bedeuten (vgl. S. 696). Bei Aufstellung dieser Gleichungen mag sich Lagrange wohl der sogen. Leibnizschen Darstellung der höheren Differentialquotienten eines Produktes erinnert haben.[1]) Auch Edward Waring kommt in einem Aufsatz über Interpolation zur Lagrangeschen Formel; er verwendet seine Formeln aber nicht zur Einschaltung selbst, sondern zur Herleitung von Gleichungen, die der niederen Analysis angehören. So bringt er[2]) z. B. den Satz, daß der Ausdruck

$$\frac{\alpha^m}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)\cdots}+\frac{\beta^m}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)\cdots}+\frac{\gamma^m}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\delta)\cdots}+\cdots$$

Null oder Eins ist, je nachdem

$$m < n-1 \quad \text{oder} \quad m = n-1$$

ist, wo n die Anzahl der Größen α, β, γ, δ, ... bedeutet. Von besonderer Wichtigkeit sind später diejenigen Interpolationsmethoden geworden, die trigonometrische Funktionen benutzen. Lagrange, dessen früher erwähnte Behandlung des Problems der Schwingungen einer endlichen Zahl von Punkten unschwer auf eine derartige Interpolationsformel führt, setzt später gelegentlich[3]) das allgemeine Glied einer Reihe in der Form

$$y = a\sin(\alpha + x\varphi) + b\sin(\beta + x\chi) + c\sin(\gamma + x\psi) + \cdots$$

an, und zeigt, wie die Größen $a, b, c, \ldots \alpha, \beta, \gamma, \ldots \varphi, \chi, \psi, \ldots$ aus gegebenen Werten von y bestimmt werden können; er wird hierbei auf rekurrente Reihen geführt. In anderer Weise verwendet Charles die trigonometrischen Funktionen; ihm werden die Gleichungen

---

[1]) Hier mag auch eine Methode von Lagrange aus dem Jahre 1783 Erwähnung finden, nach der er eine Funktion $y = \varphi(x)$ näherungsweise durch $y = \beta + \gamma\xi$ (bzw. wenn $\gamma = 0$ ist, durch $\beta + \delta\xi^2$) ersetzt, wo ξ eine sehr kleine Zunahme von x bedeutet, wenn zwischen x und einer Funktion Y von x und ebenso zwischen $\varphi(x)$ und $\varphi(X)$ zwei bekannte Relationen existieren. Lagrange zeigt die Anwendung seines Verfahrens für die Logarithmen Oeuvres, t. V, p. 517 ff. Man vgl. endlich Oeuvres, t. V, p. 663 ff. [2]) Philosophical Transactions, vol. 69, 1779, p. 64. [3]) Astronomisches Jahrbuch 1783, S. 41. Nach Klügel, a. a. O.

$$y = p\frac{a \sin \pi x}{\sin p \pi x} + q\frac{b \sin \pi(x-1)}{\sin q\pi(x-1)} + \cdots;$$

$$\pi y = p \cdot \frac{a \sin \pi x}{e^{px} - 1} + q \cdot \frac{b \sin \pi(x-1)}{e^{q(x-1)} - 1} + \cdots;$$

$$\pi^2 y = (\sin \pi x)^2 \left[\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \cdots\right]$$

zugeschrieben, wo y für $x = 0, 1, \ldots$ die Werte $a, b, \ldots$ annimmt.[1]) Auch die rekurrenten Reihen sind im Zusammenhang mit dem Interpolationsproblem viel behandelt worden; indessen benutzen die meisten Arbeiten über rekurrente Reihen die Integrationsmethoden für Differenzengleichungen, die weiter unten besprochen werden sollen. Von mehr elementaren Arbeiten auf diesem Gebiet ist eine Untersuchung von Lagrange zu nennen[2]), der das allgemeine Glied einer rekurrenten Reihe mit den n ersten Termen $T, T', T'', \ldots$ dadurch findet, daß er zunächst eine gebrochene rationale Funktion in möglichst einfacher Weise so zu bestimmen sucht, daß die bei wirklicher Ausführung der Division entstehende unendliche Reihe in der Form

$$T + T'x + T''x^2 + \cdots$$

beginnt. Partialbruchzerlegung und Reihenentwicklung der einzelnen Partialbrüche liefert dann sofort das gesuchte allgemeine Glied der Reihe

$$T + T'x + T''x^2 + \cdots.$$

In gewissem Zusammenhang mit diesen Problemen steht auch eine Methode[3]), die Laplace als calcul des fonctions génératrices bezeichnet (vgl. S. 273). Unter erzeugender Funktion ist nichts weiter als die Summe einer Reihe einzelner nach demselben Gesetz entstandener Größen zu verstehen. Die Abhandlung selbst enthält nichts wesentlich Neues; sie behandelt Aufgaben wie z. B. $\frac{1}{t^i}$ durch z auszudrücken, wenn

$$t\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 = z$$

ist, und löst sie mittels Reihenentwicklungen und Überlegungen, wie wir sie an der geistreichen Koeffizientenbestimmung S. 1005 bereits kennen gelernt haben.

---

[1]) Nach Klügel a. a. O. finden sich diese Formeln angegeben bei Prony, Nouvelle Architechnique hydraulique 1790/96, t. II, Anmkg. zu § 1373. Die letzte der angeführten Gleichungen steht auch Histoire de l'Académie des Sciences 1788 (1791), p. 582. [2]) Oeuvres de Lagrange, t. VI, p. 507. Die Abhandlung ist vom Jahr 1772. [3]) Histoire de l'Académie des Sciences 1779 (1782), p. 207 ff.

Differenzengleichungen treten in Praxis und Theorie oft auf; so im Zusammenhang mit der Bestimmung der willkürlichen Funktionen der Integrale partieller Differentialgleichungen, wenn gewisse Bedingungen zu erfüllen sind; dies hat nach Charles[1]) zuerst Condorcet bemerkt.[2]) Einen anderen Ausgangspunkt, der auf Differenzengleichungen führt, bilden die **Funktionalgleichungen**. So reduziert Laplace[3]) die Gleichung

$$\text{fonct.}\,[\varphi(x)] = H_x \cdot \text{fonct.}\,[\psi(x)] + X_x,$$

wo φ, ψ, H und X gegebene Funktionen sind und die unbekannte Funktion fonct. bestimmt werden soll, in folgender Weise auf eine Differenzengleichung: er setzt

$$u_z = \psi(x) \quad \text{und} \quad u_{z+1} = \varphi(x),$$

berechnet aus der ersten dieser Gleichungen durch Umkehrung

$$x = \Gamma(u_z)$$

und erhält so

$$u_{z+1} = \varphi(x) = \Pi(u_z).$$

Diese Rekursionsformel für u_z definiert aber u_z als Funktion von z; somit können $x = \Gamma(u_z)$ und damit auch H_x und X_x als Funktionen von z dargestellt werden. Ersetzt man jetzt in der ursprünglichen Gleichung x überall durch z, so entsteht eine Gleichung der Form

$$y_{z+1} = L_z \cdot y_z + Z_z,$$

wo y_z für fonct. $[u_z]$ geschrieben ist. Ist

$$[\text{fonct.}\,(x)]^2 = \text{fonct.}\,(2x) + 2$$

gegeben[4]), so setzt Laplace

$$u_z = x, \quad u_{z+1} = 2x, \quad \text{also} \quad u_{z+1} = 2u_z,$$

und erhält durch Anwendung der weiteren Substitution fonct. $(u_z) = t_z$ die Gleichung

$$t_{z+1} = (t_z)^2 - 2$$

mit dem Integral

---

[1]) Mémoires présentés par divers Savans, t. X (1785), p. 573 ff. [2]) Siehe Histoire de l'Académie des Sciences 1771 (1774), p. 49 ff. und 1772, part. 1 (1775), p. 32 und p. 57. Man vgl. hierzu auch Monge in Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 322. [3]) Ebenda (Mém. div. Sav.), p. 71. Laplace behauptet, seine Methode stamme aus dem Jahre 1772, und verweist auf die oben zitierte Abhandlung von Condorcet aus dem Jahre 1771.
[4]) Ebenda, p. 74. Diese Gleichung findet sich schon Miscellanea Taurinensia, t. II[2], 1760/61, p. 320.

$$t_s = a^{2^{s-1}} + \frac{1}{a^{2^{s-1}}},$$

wo a eine willkürliche Konstante ist; die weitere Untersuchung bietet keine Schwierigkeiten. Auch Charles hat Funktionalgleichungen[1];

$$\psi(ax^2 + mx + n) - P\psi(bx^2 + px + q) = R,$$

wo P und R Funktionen von x und a, m, n, b, p, q Konstante sind, geht, wenn

$$ax^2 + mx + n = b(x\omega + \varphi)^2 + p(x\omega + \varphi) + q$$

ist, wo ω und φ zwei neue Konstante sind, unschwer in eine Differenzengleichung über.

Die größte Anzahl von Arbeiten über Differenzengleichungen verdankt jedoch nicht einem praktischen Bedürfnisse ihren Ursprung, sondern vielmehr dem Umstand, daß sich sowohl alle allgemeinen Gesichtspunkte als die meisten in weiterem Umfange brauchbaren Integrationsmethoden, die bei Differentialgleichungen von Vorteil sind, mühelos auf die Theorie der Differenzengleichungen übertragen lassen. So sehen wir die Entwicklung der letzteren Theorie von den Fortschritten auf dem Gebiet der Differentialgleichungen abhängig, durch diese bedingt; dieser Zusammenhang ist so innig, daß häufig einer Abhandlung über Differentialgleichungen Bemerkungen über Differenzengleichungen anhangsweise beigefügt sind. Am geringsten ist die Analogie bezüglich der singulären Integrale. Charles hat diesen Begriff zuerst auf Differenzengleichungen übertragen[2] unter Berufung auf die Erklärung ihres Wesens, wie sie Lagrange gegeben hat; er kommt zu dem Ergebnis, daß eine Differenzengleichung zwei vollständige Integrale haben kann. Ist nämlich $V = 0$ das Integral einer Differenzengleichung $Z = 0$, so erhält man letztere aus dem Integral, indem man die Integrationskonstante a aus den Gleichungen $V = 0$ und δV eliminiert: δV entsteht hierbei durch Variation von x und y bei konstantem a. Läßt man jetzt auch a variieren, so wird

$$\Delta V = \delta V + R\Delta a.$$

Ist nun $R = 0$, so werden die beiden Gleichungen

$$V = 0 \quad \text{und} \quad \delta V = 0$$

wieder genau dieselbe Gleichung $Z = 0$ liefern, wie zuerst auch, und es ist bei diesem Eliminationsprozeß ganz gleichgiltig, ob a konstant

---

[1] Histoire de l'Académie des Sciences 1786 (1788), p. 695. [2] Ebenda. 1783 (1786), p. 560.

ist oder nicht. Das singuläre Integral ergibt sich dann durch Elimination von a aus $V = 0$ und $R = 0$. Bis hierher ist die Analogie mit den Differentialgleichungen vollständig; jetzt kommt aber ein bedeutsamer Unterschied: während man nämlich bei den Differentialgleichungen die Größe a unmittelbar aus $R = 0$ berechnen kann, enthält diese Gleichung bei den Differenzengleichungen neben a im allgemeinen auch noch die Differenz Δa. Um a eliminieren zu können, ist daher die Integration von $R = 0$ erforderlich; infolge dieses Prozesses geht aber eine willkürliche Konstante in das singuläre Integral ein. Charles erläutert das Gesagte an einigen Beispielen. Das vollständige Integral von

$$gy = x\Delta y + \frac{\Delta y^2}{4n^2},$$

wo Δx, die Differenz von x, konstant und gleich g ist, lautet

$$gy = 2nax + a^2.$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta y = 2na,$$

wenn a konstant ist, hingegen

$$\Delta y = 2na + \frac{\Delta a}{g}[2n(x+g) + 2a + \Delta a],$$

wenn a ebenfalls variiert. Zur Bildung des singulären Integrals erhält man also die Bedingung

$$2n(x+g) + 2a + \Delta a = 0.$$

Hieraus folgt

$$-a(-1)^{\frac{x}{g}} = b + n(-1)^{\frac{x}{g}}\left[\frac{g}{2} + x\right],$$

wo b eine willkürliche Konstante bedeutet, und damit endlich

$$gy = -n^2x^2 + \left[\frac{gn}{2} + b(-1)^{\frac{x}{g}}\right]^2.\text{[1]}$$

Charles weist auch noch darauf hin, daß man aus dieser Gleichung bei Anwendung desselben Prozesses wieder

$$gy = 2nax + a^2$$

erhalten würde, d. h. daß das singuläre Integral des singulären Integrals das ursprüngliche vollständige Integral ist. Später sucht Charles auch bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, die er als Grenzfall

[1]) Die Herleitung setzt voraus, daß $\frac{x}{g} = \frac{x}{\Delta x}$ eine ganze Zahl ist.

der Differenzengleichungen auffaßt, ähnliche Verhältnisse, d. i. die Existenz zweier vollständigen Integrale, von denen eins das singuläre des anderen ist, nachzuweisen und sie durch einen Ausdruck zu integrieren, der das singuläre Integral als Spezialfall enthält; seine Darstellung ist indessen nicht recht verständlich.[1]) Die erwähnte Eigentümlichkeit ist auch Monge nicht entgangen; aus

$$(\Delta y)^2 = b^2$$

erhält er zunächst

$$2\Delta y \Delta\Delta y + (\Delta\Delta y)^2 = 0$$

und hieraus

$$\Delta\Delta y = 0 \quad \text{und} \quad 2\Delta y + \Delta\Delta y = 0.$$

Der erste Fall gibt

$$y = \pm \frac{bx}{a} + A,$$

der zweite aber

$$y = C \pm \frac{b}{2}(-1)^{\frac{x}{a}}.$$

Monge behauptet[2]) dann, das vollständige Integral der gegebenen Gleichung sei das Produkt der vier Gleichungen

$$y - A = +\frac{bx}{a}; \quad y - A = -\frac{bx}{a};$$

$$y - A = +\frac{b}{2}(-1)^{\frac{x}{a}}; \quad y - A = -\frac{b}{2}(-1)^{\frac{x}{a}}.$$

Die übrigen Untersuchungen zeigen mehr Analogie; Condorcet, der wie bei den Differentialgleichungen die Integration auf die Ausführung einer ganz bestimmten Reihenfolge gewisser Operationen als Multiplikationen, Substitutionen, Eliminationen, Umformungen und Integrationen zurückführen will[3]), auch Näherungsmethoden für Differenzengleichungen bespricht[4]), hat sich eingehend mit der Integrabilität gegebener Differentialausdrücke beschäftigt; in Analogie dazu sucht er die Bedingungen aufzustellen[5]), wann eine gegebene Funktion V von $x, y, z, \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots \Delta^2 x, \Delta^2 y, \Delta^2 z, \ldots$ vollständige Differenz einer ähnlich gearteten Funktion B der nächstniederen Ordnung ist, so daß also $V = \Delta B$. Durch Benutzung der Gleichungen

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d\Delta B}{dx}, \quad \frac{dV}{d\Delta x} = \frac{d\Delta B}{d\Delta x}, \ldots \quad \frac{dV}{dy} = \frac{d\Delta B}{dy}, \ldots,$$

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1788 (1791), p. 115 ff. Vgl. auch p. 580 ff. [2]) Ebenda 1783 (1786) p. 727. Die betreffende Abhandlung wurde 1785 gelesen. [3]) Ebenda 1770 (1773), p. 123 ff. [4]) Ebenda, p. 185. [5]) Ebenda, p. 110.

wo die d partielle Differenzenbildung andeuten, findet er zunächst

$$\frac{dV}{dx} = \Delta \frac{dB}{dx};$$

$$\frac{dV}{d\Delta x} = \Delta \frac{dB}{d\Delta x} + \frac{dB}{dx} + \Delta \frac{dB}{dx};$$

$$\frac{dV}{d\Delta x} = \Delta \frac{dB}{d\Delta^2 x} + \frac{dB}{d\Delta x} + \Delta \frac{dB}{d\Delta x}; \quad \text{usw.}$$

und ähnlich gebaute Ausdrücke in $y, z, \ldots$. Es ergibt sich schließlich die Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dx} + n\Delta\frac{dV}{dx} + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2\frac{dV}{dx} + \cdots \Delta^n\frac{dV}{dx}\\ - \Delta\frac{dV}{d\Delta x} - (n-1)\Delta^2\frac{dV}{d\Delta x} - \cdots \Delta^n\frac{dV}{d\Delta x}\\ + \Delta^2\frac{dV}{d\Delta^2 x} + \cdots \Delta^n\frac{dV}{d\Delta^2 x}\\ - \quad . \quad . \quad . \quad .\\ \pm \Delta^n \frac{dV}{d\Delta^n x} = 0\end{aligned}$$

und analoge Gleichungen in $y, z, \ldots$; hierbei ist n der Exponent der Ordnung der Funktion V. In derselben Abhandlung sucht Condorcet auch die Variationsrechnung für endliche Differenzen abzuleiten[1]), was nach seiner Aussage bereits Lagrange in einem speziellen, allerdings alle Schwierigkeiten des allgemeinen Problems enthaltenden Fall getan hatte. Soll ΣV ein Maximum oder Minimum werden, sagt Condorcet, wo V eine Funktion von $x, y, z, \ldots$ und den endlichen Differenzen dieser Variablen bedeutet, so ist die Bedingung

$$d\Sigma V = 0$$

gleichbedeutend mit

$$\frac{d\Sigma V}{dx} = 0; \quad \frac{d\Sigma V}{d\Delta x} = 0; \quad \ldots$$

und ähnlichen Gleichungen in $y, z, \ldots$; Condorcet weist auch auf die verwandten Bedingungen dafür hin, daß V eine exakte Differenz ist.

Auch die allgemeinen Methoden der Differentialgleichungen wurden auf Differenzengleichungen übertragen. So übt Lorgna die Methode der Auffindung integrabler Gleichungen durch Ausgehen vom Integral; er stellt sich die Aufgabe, alle Differenzengleichungen mit variablen Koeffizienten zu finden, die ein vollständiges Integral

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1770 (1773), p. 119.

von gegebener Form zulassen.[1]) Die Verwendung von Multiplikatoren zwecks Integration von Differenzengleichungen faßt u. a. Pietro Paoli ins Auge[2]); auch Trembley bedient sich dieser Methode. Sei

$$dy + My = N,$$

wo d eine endliche Differenz andeuten soll, die gegebene Gleichung[3]) und $P + dP$ der Multiplikator. Die linke Seite der Gleichung

$$(P + dP)\,dy + (P + dP)\,My = (P + dP)\,N$$

wird dann wegen

$$d(Py) = Pdy + ydP + dPdy = (P + dP)\,dy + ydP$$

eine totale Differenz, wenn

$$ydP = (P + dP)\,My,$$

d. h.

$$\frac{dP}{P + dP} = M.$$

Die letztere Gleichung geht aber mit Hilfe der Substitution $P = e^t$ in

$$dt = l\,\frac{1}{1 - M}$$

über; daraus folgt

$$P = \frac{1}{\pi\,(1 - M)},$$

wo π ein Produkt von lauter Faktoren $1 - M$ bedeutet. Trembley erhält unschwer

$$y = \pi(1 - M)\left(C + \int \frac{N}{\pi(1 - M')}\right),$$

wo M' den auf M folgenden Funktionswert, $\int$ eine Summation bedeutet; er verweist übrigens auf Lagrange, welcher diese Aufgabe schon im ersten Bande der Turiner Miszellen integriert hatte. Auch Näherungsmethoden[4]), sowie die Variation der Konstanten sind auf Differenzengleichungen übertragen worden.

Ehe wir zu den Methoden übergehen, die für spezielle Gleichungstypen ausgebildet worden sind, haben wir eine nicht unwichtige Unterscheidung zu erwähnen; während nämlich die ersten Untersuchungen über Differenzengleichungen die Differenz Δx konstant annehmen, hat man später auch den Fall betrachtet, daß Δx von x abhängig ist,

---

[1]) Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. I, 1782, p. 418ff. [2]) Ebenda t. IV, 1788, p. 464. [3]) Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1799/1800 (1803), p. 18. [4]) Histoire de l'Académie des Sciences 1782 (1785), p. 31ff.

die x selbst also keine arithmetische Reihe 1. Ordnung bilden. Diese Möglichkeit hat anscheinend zuerst Monge berücksichtigt, der durch seine Untersuchungen über die willkürlichen Funktionen bei partiellen Differentialgleichungen auch auf die angeblich von Euler entdeckten willkürlichen Funktionen bei Differenzengleichungen geführt wird. Hierbei stellt sich Monge die Aufgabe[1]), die Gleichung

$$\Delta y + Ay + B = 0$$

vollständig zu integrieren, wenn Δx 1. konstant $= a$; 2. $= a + bx$; 3. $= ax^n - x$ ist. Im ersten Fall ergibt sich

$$Ay + B = (1 - A)^{\frac{x}{a}} \times \varphi\left(\sin\frac{\pi x}{a} \ \& \ \cos\frac{\pi x}{a}\right),$$

wo φ eine willkürliche Funktion von zwei Veränderlichen ist; im 2. und 3. Fall sind die Integralgleichungen wesentlich komplizierter; Monge benutzt zu ihrer Herleitung die Substitutionen

$$a + bx = e^{\omega}, \quad \text{d. h.} \quad \Delta\omega = \lg(b + 1),$$

bzw.

$$x^n = e^{\omega}, \quad \text{d. h.} \quad \Delta\omega = (n - 1)\,\omega + n \lg a,$$

die Logarithmen ins Resultat einführen. Ausführlicher und allgemeiner ist die Voraussetzung variabler Δx von Lorgna behandelt, der Δx gleich irgend einer Funktion X von x setzt[2]) und die Folgen dieser Annahme eingehend untersucht. Die Reihe $y, y', y'', \ldots$ ist dann dadurch definiert, daß jeder Term aus dem unmittelbar vorhergehenden durch Substitution von $x + X$ an Stelle von x hervorgeht. Analog gehe in der Reihe $X, X', X'', \ldots$ jedes Glied aus dem vorhergehenden dadurch hervor, daß man x durch den „Modul" $x + X$ ersetzt. Dann kann, wie leicht ersichtlich, $y^{(n)}$ auch unmittelbar, d. i. ohne Zuhilfenahme der Terme $y^{(n-1)}, \ldots$ aus y erhalten werden, indem man für x die Summe

$$x + X + X' + \cdots + X^{(n-1)}$$

substituiert. Lorgna findet noch andere Beziehungen; so stellt er die $y^{(n)}$ und mit deren Hilfe schließlich auch die Differenzen von y beliebiger Ordnung durch

$$x + X + X' + \cdots + X^{(n-1)}$$

---

[1]) Mémoires présentés par divers Savans, t. IX (1780), p. 357. Dieser Aufsatz wurde 1774 der Akademie vorgelegt. [2]) Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. I, 1782, p. 376 ff.

dar, was bei Benutzung des **Taylorschen** Satzes leicht gelingt. Er benutzt die betr. Formeln zur Integration der linearen Gleichung

$$\varphi = Ay + By' + Cy'' + \cdots,\text{[1]}$$

in der φ eine Funktion von x bedeutet, bei variablem $\Delta x = X$. **Pietro Paoli**, der **Lorgnas** Arbeiten kennt und auch zitiert, behandelt ebenfalls den Fall variabler Δx. Sei eine Gleichung $M = 0$ zwischen x, y_x und deren Differenzen gegeben, ferner

$$\Delta x = \varphi(x) - x.\text{[2]}$$

Paoli verlangt nun $x = p_s$ und $\varphi(x) = p_{s+1}$, woraus

$$p_{s+1} = \varphi(p_s).$$

Aus dieser Gleichung kann aber bei gegebenem φ die Funktion $p_s = x$ ermittelt, somit x und seine Differenzen durch s ausgedrückt werden; dadurch geht y_x in eine Funktion t_s von s und die ursprüngliche Gleichung $M = 0$ in eine neue zwischen t und s über, wobei jetzt die Differenz von s konstant und zwar gleich 1 ist. **Paoli** hat damit nachgewiesen, daß der Unterscheidung von variablen und konstanten Δx keine prinzipielle Bedeutung zukommt.

Von speziellen Gleichungen wurde naturgemäß zuerst die **lineare Gleichung** in Angriff genommen. Hier ist an erster Stelle ein Aufsatz von **Lagrange** aus dem Jahre 1759 zu nennen.[3]) Bezüglich der Gleichung

$$\Delta y + yM = N,$$

wo wir Δ statt d geschrieben haben, und wo M und N Funktionen von x bedeuten, erinnert **Lagrange** an die Integration der Differentialgleichung

$$dy + yXdx = Zdx,$$

die er nach folgender Methode behandelt: er setzt $y = uz$ und spaltet in

$$zdu + uzXdx = 0 \quad \text{und} \quad udz = Zdx;$$

daraus ergibt sich

$$u = e^{-\int Xdx} \quad \text{und} \quad y = uz = u\int\frac{Zdz}{u} = \frac{\int e^{\int Xdx}\cdot Zdx}{e^{\int Xdx}}.$$

Auf dieselbe Weise läßt sich auch

---

[1]) Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. I, 1782, p. 409. **Lorgna** verweist auf die entsprechende Integration bei konstantem Δx durch **Lagrange** in den Turiner Miszellen und den Berliner Memoiren. [2]) Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. IV, 1788, p. 455. [3]) Miscellanea Taurinensia, t. I[2] (1759), p. 33 ff.

$$\Delta y + yM = N$$

integrieren. Aus $y = uz$ folgt

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u \Delta z:$$

Lagrange spaltet in

$$z\Delta u + uzM = 0 \quad \text{und} \quad u\Delta z + \Delta u \Delta z = N$$

und schreibt die erste Gleichung in der Form

$$\frac{\Delta u}{u} = -M,$$

woraus mittels $u = e^t$ wegen $\Delta u = e^t(e^{\Delta t} - 1)$ die neue Gleichung

$$\frac{\Delta u}{u} = e^{\Delta t} - 1 = -M$$

hervorgeht. Hieraus folgt

$$\Delta t = l(1 - M),$$

also

$$t = \sum l(1 - M) \quad \text{und} \quad u = e^t = \pi(1 - M),$$

wo π das Produktzeichen ist. Mit Hilfe dieses Resultats kann jetzt auch die zweite Gleichung

$$\Delta z = \frac{N}{u + \Delta u}$$

leicht integriert werden; es ergibt sich

$$y = \pi(1 - M) \times \left(A + \sum \frac{N}{\pi[1 - M']}\right),$$

wo wir $\sum$ statt des Zeichens $\int$ geschrieben haben, und wo M' den auf M folgenden Wert bedeutet. Im folgenden[1]) geht Lagrange zur Gleichung beliebiger Ordnung mit konstanten Koeffizienten über. Er erinnert zu diesem Zweck an eine Methode von d'Alembert, die in den Memoiren der Berliner Akademie und im zweiten Band des Calcul intégral von Bougainville für die entsprechende Differentialgleichung

$$y + A\frac{dy}{dx} + B\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots = X$$

entwickelt ist: X bedeutet hierbei eine Funktion von x. Die Substitutionen

$$\frac{dy}{dx} = p; \quad \frac{dp}{dx} = q$$

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. I² (1759), p. 36.

führen bei Anwendung eines Multiplikatorensystems $a, b, c, \cdots$ auf die Gleichung

$$y + (A + a)p + (B + b)q + \cdots - a\frac{dy}{dx} - b\frac{dp}{dx} - \cdots = X.$$

Hierin ist

$$y + (A + a)p + (B + b)q + \cdots$$

ein exaktes Vielfaches von

$$\int (a dy + b dp + \cdots),$$

wenn

$$dy + (A + a)dp + (B + b)dq + \cdots = dy + \frac{b}{a}dp + \frac{c}{a}dq + \cdots$$

ist. Durch Koeffizientenvergleichung erhält man hieraus

$$A + a = \frac{b}{a}; \quad B + b = \frac{c}{a}; \quad \text{usw.};$$

der letzte Koeffizient werde gleich 0 angenommen. Aus diesen Gleichungen ergibt sich aber jetzt durch allmähliche Elimination von $b, c \ldots$ die Gleichung

$$a^n + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \cdots = 0,$$

wo n die Ordnung der Differentialgleichung ist. Aus

$$y + (A + a)p + (B + b)q + \cdots = z$$

folgt sodann

$$z - a\frac{dz}{dx} = X,$$

also

$$z = -e^{\frac{x}{a}} \int \frac{X}{ae^{\frac{x}{a}}} dx;$$

die n Werte von a liefern dann n Werte $Z^I, Z^{II}, \ldots$ von z; y ergibt sich endlich aus den entsprechenden n linearen Gleichungen

$$y + (A + a)p + (B + b)q + \cdots = z$$

mit den Unbekannten $y, p, q, \ldots$. Diese Methode wendet Lagrange auf die Gleichung

$$y + A\Delta y + B\Delta^2 y + \cdots = X$$

an; auch die Gleichung

$$y^I + Ay^{II} + By^{III} + \cdots = X,$$

die, wie er sagt, auf die erstere reduziert werden kann, behandelt er auf ähnliche Weise. Die Substitutionen

$$y^{II} = p^{I};\quad y^{III} = p^{II}, \ldots, p^{II} = q^{I};\quad p^{III} = q^{II}, \ldots$$

ergeben nämlich

$$y^{I} + (A+a)p^{I} + (B+b)q^{I} + \cdots - ay^{II} - bp^{II} - cq^{II} - \cdots = X.$$

Die Gleichungen

$$A + a = \frac{b}{a};\quad B + b = \frac{c}{a}; \ldots$$

liefern wieder

$$a^{n} + Aa^{n-1} + Ba^{n-2} + \cdots = 0,$$

und die Transformation

$$y^{I} + (A+a)p^{I} + (B+b)q^{I} + \cdots = z$$

führt zu

$$z^{I} - az^{II} = X;$$

die n Werte von a liefern wieder n Integrale z, und y selbst ergibt sich wieder aus n linearen Gleichungen. Laplace, der sich auf Condorcets allgemeine Untersuchungen über Differenzengleichungen und Eulers Integralrechnung beruft[1]), behandelt sodann die Gleichung

$$X^{x} = M^{x}y^{x} + V^{x}\Delta y^{x} + P^{x}\Delta^{2}y^{x} + \cdots$$

mit nichtkonstanten Koeffizienten und überträgt auf sie, nachdem er sie mittels der Relationen

$$\Delta y^{x} = y^{x+I} - y^{x};\quad \Delta^{2}y^{x} = y^{x+II} - 2y^{x+I} + y^{x};\quad \text{usw.}$$

auf die Form

$$X^{x} = y^{x} + H^{x}\cdot y^{x+I} + {}'H^{x}\cdot y^{x+II} + \cdots$$

gebracht hat, seine Methode für die entsprechende Differentialgleichung (vgl. S. 931); die Aufgabe reduziert sich auch hier auf die Integration einer Gleichung nächstniederer Ordnung und eines Systems von Gleichungen der Form

$$\omega^{x}y^{x+I} + y^{x} = T^{x}.$$

Letztere Gleichung läßt sich aber auch $y^{x+1} = R^{x}y^{x} + Z^{x}$, d. i. als Rekursionsformel für y schreiben; durch sukzessive Substitution ergibt sich endlich

$$y^{x} = R\cdot R'\cdot R''\cdots R^{x-1}\left(A + \frac{Z}{R} + \frac{Z'}{R\cdot R'} + \cdots + \frac{Z^{x-1}}{R\cdot R'\cdots R^{x-1}}\right).$$

Laplace stellt diesen Ausdruck mit Hilfe der Zeichen Σ und ∇ für Summe und Produkt dar und bemerkt, daß auch für Differenzen-

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 300 ff.

gleichungen das „Theorem von Lagrange" gilt, d. h. daß die Integration der Gleichung

$$X^x = y^x + H^x y^{x+l} + \cdots$$

auf die von

$$0 = y^x + H^x y^{x+l} + \cdots$$

hinauskommt.[1]) Bald darauf behandelt Laplace die Aufgabe noch einmal; er zeigt zuerst, daß die konstante Differenz zwischen den x unbeschadet der Allgemeinheit immer gleich 1 genommen werden kann.[2]) Zur Vorbereitung der Aufgabe integriert er

$$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + X_x$$

mittels der Substitution

$$y_x = u_x \cdot \nabla H_x,$$

die sofort auf

$$u_x = u_{x-1} + \frac{X_x}{\nabla H_x}$$

und damit auf

$$u_x = A + \sum \frac{X_{x+1}}{\nabla H_{x+1}}$$

führt. Laplace wählt diese wenig motivierte Substitution wohl deshalb, weil sie am raschesten zu dem schon längst bekannten Resultat führt. Die Gleichung

$$y_x = H_x \cdot y_{x-1} + {}^1H_x y_{x-2} + \cdots + {}^{n-1}H_x y_{x-n} + X_x$$

bewältigt er mit Hilfe der Annahme

$$y_x = \alpha_x \cdot y_{x-1} + T_x;$$

α_x und T_x sind einstweilen noch unbestimmt. Diese Gleichung liefert mit den gleichwertigen

$$y_{x-1} = \alpha_{x-1} \cdot y_{x-2} + T_{x-1}; \ldots, y_{x-n+1} = \alpha_{x-n+1} y_{x-n} + T_{x-n+1}$$

nach Multiplikation bzw. mit $1, -{}^1\beta, -{}^2\beta, \ldots$ und Addition die Beziehung

$$y_x = [\alpha_x + {}^1\beta] \cdot y_{x-1} + [-{}^1\beta\alpha_{x-1} + {}^2\beta] \cdot y_{x-2} + \cdots - {}^{n-1}\beta \cdot \alpha_{x-n+1} \cdot y_{x-n}$$
$$+ T_x - {}^1\beta T_{x-1} - {}^2\beta T_{x-2} - \cdots - {}^{n-1}\beta \cdot T_{x-n+1};$$

In dieser Gleichung werden jetzt die Größen ${}^1\beta, {}^2\beta, \ldots$ so bestimmt, daß Glied für Glied mit der gegebenen Differenzengleichung übereinstimmt. Dann ergeben sich neben

---

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 309. [2]) Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 40.

$$T_x = {}^1\beta T_{x-1} + {}^2\beta T_{x-2} + \cdots + {}^{n-1}\beta T_{x-n+1} + X_n$$

noch n Bestimmungsgleichungen für die $n-1$ Größen

$${}^1\beta, {}^2\beta, \ldots, {}^{n-1}\beta,$$

und man erhält durch ihre Auflösung nach β der Reihe nach:

$$\begin{aligned}
{}^1\beta &= H_x - \alpha_x \\
{}^2\beta &= {}^1H_x - \alpha_{x-1} \cdot H_x - \alpha_x \cdot \alpha_{x-1} \\
{}^3\beta &= {}^2H_x - \alpha_{x-2} \cdot {}^1H_x + \alpha_{x-1} \cdot \alpha_{x-2} \cdot H_x - \alpha_x \cdot \alpha_{x-1} \cdot \alpha_{x-2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
{}^{n-1}\beta &= {}^{n-2}H_x - \alpha_{x-n+2} \cdot {}^{n-3}H_x + \cdots - \alpha_x \cdot \alpha_{x-1} \cdots \alpha_{x-n+2}.
\end{aligned}$$

Die $n$te Gleichung war

$$- {}^{n-1}\beta \cdot \alpha_{x-n+1} = {}^{n-1}H_x;$$

so daß ${}^{n-1}\beta$ auf zweierlei Arten dargestellt werden kann; durch Vergleichung ergibt sich

$$0 = 1 - \frac{H_x}{\alpha_x} - \frac{{}^1H_x}{\alpha_x \cdot \alpha_{x-1}} - \frac{{}^2H_x}{\alpha_x \cdot \alpha_{x-1} \cdot \alpha_{x-2}} - \cdots - \frac{{}^{n-1}H_x}{\alpha_x \cdots \alpha_{x-n+1}}.$$

Ist aus dieser Gleichung ein Wert von α ermittelt, so lassen sich die β unmittelbar angeben; dann ist noch T_x aus der oben angeführten Differenzengleichung zu bestimmen, die bezüglich ihrer Ordnung um 1 Grad niederer ist als die ursprünglich gegebene. **Laplace** bringt als Beispiele die bekannten Aufgaben, den Sinus eines vielfachen Arguments durch die Potenzen des Cosinus des einfachen Arguments auszudrücken, sowie das Bildungsgesetz der höheren Differentialquotienten von $\arcsin x$ zu entwickeln.[1]) In einem Aufsatz[2]) in den Berliner Memoiren vom Jahre 1775, an den später u. a. **Malfatti** anknüpft[3]), beschäftigt sich endlich **Lagrange** speziell mit der Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$Ay_x + By_{x+1} + \cdots + Ny_{x+n} = 0,$$

d. i. mit dem sogenannten Problem der rekurrenten Reihen, bringt die diesbezüglichen Gleichungen in bequeme, handliche Form, und berücksichtigt auch den Fall mehrfacher Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$A + B\alpha + \cdots + N\alpha^n = 0;$$

diesen Fall betrachtet er übrigens auch noch in einer späteren Ab-

---

[1]) Mémoires présentés par divers Savans. t. VII, 1773 (1776), p. 65 bzw. 68.
[2]) Oeuvres de **Lagrange**, t. IV, p. 151 ff. [3]) Memorie di Mat. e Fis. Soc. It. t. III, 1786, p. 571 ff.

handlung von einem neuen Gesichtspunkt aus.[1]) Die Behandlung der Gleichung mit konstanten Koeffizienten bei variablem Δ_x durch Lorgna haben wir bereits erwähnt; außer der linearen Gleichung konnte hier keine andere höherer Ordnung oder höheren Grades (vgl. das Beispiel von Monge S. 1054) Beachtung finden.[2])

Für die Untersuchungen auf dem Gebiet der partiellen Differenzengleichungen wurde eine Arbeit von Laplace grundlegend; dieser ist nach eigener Aussage[3]) durch Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das Problem der „rekurro-rekurrenten Reihen", wie er sich ausdrückt, geführt worden. Seien folgende Gleichungen gegeben:[4])

$$\begin{aligned}
&{}^1y^x + A\ {}^1y^{x-1} + B\ {}^1y^{x-2} + \cdots + N = 0\\
&{}^2y^x + A''\ {}^2y^{x-1} + B''\ {}^2y^{x-2} + \cdots + N''\\
&\qquad\qquad = H''\ {}^1y^x + M''\ {}^1y^{x-1} + P''\ {}^1y^{x-2} + \cdots\\
&{}^3y^x + A'''\ {}^3y^{x-1} + B'''\ {}^3y^{x-2} + \cdots + N'''\\
&\qquad\qquad = H'''\ {}^2y^x + M'''\ {}^2y^{x-1} + P'''\ {}^2y^{x-2} + \cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1)\qquad &{}^ny^x + A^n\ {}^ny^{x-1} + B^n\ {}^ny^{x-2} + \cdots + N^n\\
&\qquad = H^n\ {}^{n-1}y^x + M^n\ {}^{n-1}y^{x-1} + P^n\ {}^{n-1}y^{x-2} + \cdots.
\end{aligned}$$

Laplace zeigt nun, daß man (1), die letzte dieser Gleichungen, stets auf folgende Form bringen kann:

$$(2)\qquad {}^ny^x = a^n\ {}^ny^{x-1} + b^n\ {}^ny^{x-2} + c^n\ {}^ny^{x-3} + \cdots + u^n;$$

hierbei sind $a^n, b^n, c^n, \ldots u^n$ Funktionen von n. Aus (2) ergeben sich sodann die speziellen Gleichungen

$$\begin{aligned}
H^n\ {}^{n-1}y^x &= H^n(a^{n-1}\ {}^{n-1}y^{x-1} + b^{n-1}\ {}^{n-1}y^{x-2} + \cdots + u^{n-1})\\
M^n\ {}^{n-1}y^{x-1} &= M^n(a^{n-1}\ {}^{n-1}y^{x-2} + b^{n-1}\ {}^{n-1}y^{x-3} + \cdots + u^{n-1})\\
P^n\ {}^{n-1}y^{x-2} &= P^n(a^{n-1}\ {}^{n-1}y^{x-3} + b^{n-1}\ {}^{n-1}y^{x-4} + \cdots + u^{n-1})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Addition und Anwendung von (1) liefert

---

[1]) Oeuvres de Lagrange, t. V, p. 627ff. (Berliner Memoiren 1792/93).
[2]) Man vgl. die Notizen von Monge in dem bereits zitierten Aufsatz Histoire de l'Académie des Sciences 1783 (1786), p. 725ff. (gelesen 1785) und Trembley, Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1799/1800 (1803). [3]) Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 39. Hier findet sich ein kurzer Überblick über die Geschichte der Differenzengleichungen. Man vgl. auch Histoire de l'Académie des Sciences 1779 (1782), p. 207ff. [4]) Mémoires présentés par divers Savans, t. VI (1774), p. 354.

$$
\begin{aligned}
{}^{n}y^{x} + A^{n}\,{}^{n}y^{x-1} + B^{n}\,{}^{n}y^{x-2} + \cdots + N^{n} \\
&= a^{n-1}({}^{n}y^{x-1} + A^{n}\,{}^{n}y^{x-2} + \cdots + N^{n}) \\
&+ b^{n-1}({}^{n}y^{x-2} + A^{n}\,{}^{n}y^{x-3} + \cdots + N^{n}) \\
&+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&+ u^{n-1}(H^{n} + M^{n} + P^{n} \cdots).
\end{aligned}
$$

Soll diese Gleichung mit (2) identisch sein, so muß:

$$
\begin{aligned}
a^{n} &= a^{n-1} - A^{n} \\
b^{n} &= b^{n-1} + a^{n-1}A^{n} - B^{n} \\
c^{n} &= c^{n-1} + b^{n-1}A^{n} + a^{n-1}B^{n} - C^{n} \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
u^{n} &= u^{n-1}(H^{n} + M^{n} + P^{n} + \cdots) - N^{n}(1 - a^{n-1} - b^{n-1} \cdots).
\end{aligned}
$$

Das Problem ist damit, genauer nach Bestimmung der $a^{n}, b^{n}, c^{n}, \ldots u^{n}$, auf die Integration des Systems der Gleichungen (2), d. i. eines Systems gewöhnlicher Differenzengleichungen zurückgeführt, die keine prinzipielle Schwierigkeit mehr bietet. In einer späteren Abhandlung[1]) behandelt Laplace das spezielle System (équation rentrante en elle-même)

$$y_x^{\,i} + Ay_{x-1}^{\,i} + {}^{1}Ay_{x-2}^{\,i} + \cdots = By_x^{\,i+1} + {}^{1}By_{x-1}^{\,i+1} + {}^{2}By_{x-2}^{\,i+1} + \cdots,$$

wo i von 1 bis n läuft, und für y^{n+1} wieder y^{1} zu setzen ist; er untersucht sodann kompliziertere Annahmen und bringt Anwendungen auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von späteren Arbeiten auf dem Gebiete der partiellen Differenzengleichungen sei, abgesehen von Lagrange[2]), nur noch eine Abhandlung[3]) von Paoli erwähnt, der als Beispiel die Frage untersucht, wie oft sich eine gegebene Zahl als $x$gliedrige Summe von Termen der natürlichen Zahlenreihe oder überhaupt einer arithmetischen Reihe darstellen läßt.[4])

Endlich sind noch Gleichungen zu erwähnen, die zu gleicher Zeit Differentialquotienten und endliche Differenzen enthalten; derartige Gleichungen treffen wir bei Laplace,[5]) Lorgna[6]) und Paoli[7]) In gewissem Sinne kann man auch eine Aufgabe[8]) von Euler hierher

---

[1]) Mémoires présentés par divers Savans, t. VII, 1773 (1776), p. 79. Im Text wurden die einzelnen Gleichungen des Originals durch einen Index i zusammengefaßt. [2]) Oeuvres de Lagrange, t. IV, p. 165 ff. [3]) Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. II, part. 2, 1784, p. 787 ff. [4]) Ebenda, p. 817 bzw. 829.
[5]) Histoire de l'Académie des Sciences 1779 (1782), p. 302. Hier sind die fonctions génératrices benutzt. [6]) Memorie di Mat. e Fis. Soc. It., t. IV, 1788, p. 156 ff. [7]) Ebenda, t. V, part. 2, 1790, p. 575. Hier ist auf die Laplacesche Methode der erzeugenden Funktionen verwiesen. [8]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVI, 1771 (1772), p. 140 ff.

rechnen, eine Kurve von der Eigenschaft zu finden, daß die Halbierungslinie des Winkels, den eine beliebige Kurventangente mit einer festen Geraden bildet, eine Kurvennormale ist (vgl. S. 515); auf die Eulersche Behandlungsweise kann hier nicht eingegangen werden.

Variationsrechnung.

Die Variationsrechnung hatte durch Euler einen gewissen Abschluß gefunden, doch verdient sie in diesem Zustand den Namen Rechnung noch nicht, weil geometrische Überlegungen zu sehr im Vordergrund der Untersuchung stehen, die ganze Behandlungsweise auch noch nicht einheitlich, umfassend genug ist, um auf jedes Problem sofort angewandt werden zu können. Diesen Übelstand überwand erst Lagrange mit Hilfe eines neuen Algorithmus, der eine vollkommen gleichartige, systematisch rechnerische Behandlung aller Variationsprobleme ermöglicht. Der Fortschritt war so bedeutend, daß Lagrange die Grenzen der Integrale als variabel ansehen und auch Doppelintegrale behandeln konnte. Lagrange teilte nach eigener Aussage seine Methode schon 1755 Euler mit und fand dessen Beifall;[1]) veröffentlicht hat er sie erst 1762.[2]) Nach kurzem geschichtlichen Überblick entwickelt Lagrange seinen Grundgedanken, daß nämlich die Variationsrechnung kein anderes Prinzip erfordere als den Gebrauch der Differential- und Integralrechnung (wie die gewöhnliche Maxima- und Minimaberechnung auch), nur habe er, damit die beiden auftretenden Variationen (die infolge der Maximalbedingung und die bereits vorhandenen Differentiationen) nicht verwechselt werden, eine neue „Charakteristik" δ eingeführt. So stelle δZ eine Änderung von Z dar, die nicht das Nämliche sei wie dZ, aber doch nach denselben Regeln gebildet werde; neben einer Gleichung $dZ = m\delta x$ (verdruckt für dx) bestehe also in gleicher Weise $\delta Z = m\delta x$. Ohne weitere Ausführung oder Begründung schreitet Lagrange sofort zu folgender Aufgabe: Z sei eine Funktion von

$$x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots,$$

man soll die Bedingung finden, daß $\int Z$ ein Maximum oder Minimum wird. Nach der „bekannten Methode" der Maxima und Minima hat

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 163. Vgl. hierzu Cantor, Zeitschrift für Math. u. Phys. (2) 23 (1878), hist.-lit. Abtlg. 1. [2]) Miscellanea Taurinensia, t. II², p. 173—195. Diese Abhandlung mit der von 1770 und der Legendres von 1786 in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr. 47; diese Ausgabe wurde im folgenden wiederholt benutzt.

man, sagt Lagrange, das gegebene $\int Z$ zu „differentiieren", wobei die Größen

$$x, y, z, dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots$$

als variabel anzusehen sind, und das so entstehende Differential gleich Null zu setzen; bezeichnet man diese Variationen mit δ, so erhält man zunächst

$$\delta \int Z = 0,$$

oder, was dasselbe ist,

$$\int \delta Z = 0.$$

Diese Stelle ist von großer Wichtigkeit; sie erklärt, warum Lagrange keine eingehendere Begründung seines Algorithmus bringt: Er erblickt darin keine neue, von der gewöhnlichen Maximabestimmung prinzipiell verschiedene, sondern die schon längst geübte, „bekannte" Methode; nur enthält eben der Ausdruck $\int Z$ bereits Differentiale, und es müssen daher, lediglich um „Verwechselungen" zu vermeiden, die neuerdings notwendigen Differentiationen anders, also etwa durch das Zeichen δ ausgedrückt werden. Diese Auffassung erklärt auch, warum Lagrange den im folgenden oft benutzten Satz von der Vertauschbarkeit der Symbole d und δ nicht beweist: d und δ sind zwei verschiedene Differentiationen, die ganz unabhängig nebeneinander hergehen. Ist nun Z so beschaffen, sagt Lagrange, daß

$$\begin{aligned}\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x + \cdots \\ + N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2y + \cdots + \nu\delta z + \pi\delta dz + \chi\delta d^2z + \cdots\end{aligned}$$

so kommt

$$\begin{aligned}&\int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2x + \cdots \\ &+ \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2y + \cdots \\ &+ \int \nu\delta z + \int \pi\delta dz + \int \chi\delta d^2z + \cdots = 0.\end{aligned}$$

Aber man sieht leicht

$$\delta dx = d\delta x; \quad \delta d^2x = d^2\delta x \text{ usw.};$$

überdies findet man durch partielle Integration

$$\int p d\delta y = p\delta x - \int dp\delta x; \quad \int q d^2\delta x = q d\delta x - dq\delta x + \int d^2q\delta x; \text{ usf.}$$

Damit wird

$$\int(n - dp + d^2q - d^3r + \cdots)\,\delta x + \int(N - dP + d^2Q - d^3R + \cdots)\,\delta y$$
$$+ \int(\nu - d\pi + d^2\chi - d^3\varrho + \cdots)\,d z$$
$$+ (p - dq + d^2r - \cdots)\,\delta x + (q - dr + \cdots)\,d\delta x + (r - \cdots)\,d^2\delta x + \cdots$$
$$+ (P - dQ + d^2R - \cdots)\,\delta y + (Q - dR + \cdots)\,d\delta y$$
$$+ (R - \cdots)\,d^2\delta y + \cdots$$
$$+ (\pi - d\chi + d^2\varrho - \cdots)\,\delta z + (\chi - d\varrho + \cdots)\,d\delta z$$
$$+ (\varrho - \cdots)\,d^2\delta z + \cdots = 0.$$

Lagrange trennt diese Gleichung in zwei; die erste „unbestimmte" Gleichung erhält alle Glieder, die unter Integralzeichen vorkommen, die andere bestimmt alle übrigen Glieder. Letztere Gleichung bringt Lagrange mit den Grenzen des Integrals $\int Z$ in Zusammenhang; um die gefundenen Gleichungen von den Größen $\delta x, \delta y, \ldots$ zu befreien, hat man zu prüfen, ob der Natur des Problems nach zwischen ihnen eine Beziehung besteht;[1]) sind sie dann mit deren Hilfe auf die kleinste Zahl zurückgeführt, so sind die Koeffizienten der noch vorhandenen Größen $\delta x, \delta y, \ldots$ gleich Null zu setzen. Sind sie vollständig unabhängig voneinander, so kommt

$$n - dp + d^2q - d^3r + \cdots = 0;$$
$$N - dP + d^2Q - d^3R + \cdots = 0; \quad \nu - d\pi + d^2\chi - d^3\varrho + \cdots = 0.$$

Nach Untersuchungen über die Brachistochrone überhaupt und diejenige auf einer gegebenen Oberfläche weist Lagrange nach, daß von den letzterwähnten drei Gleichungen immer eine die Folge der beiden andern ist[2]), und wendet sich sodann der Aufgabe zu, $\int Z$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn Z außer den Variabeln x, y, z und ihren Differentialen auch noch das Integral $\Pi = \int Z'$ enthält, wo Z' aus den nämlichen Veränderlichen und ihren Differentialen sich zusammensetzt. Diese Aufgabe, sowie das Problem der Maxima-Minimabestimmung von $\int Z$, wo Z durch eine Differentialgleichung 1. Ordnung definiert ist, hat schon Euler behandelt und gelöst, was Lagrange ausdrücklich anerkennt, der auch den Fall einer Differentialgleichung 2. oder höherer Ordnung für Z bespricht.

---

[1]) In der Mécanique analytique von 1788, p. 45—46 hat Lagrange den Fall von Nebenbedingungen durch Einführung unbestimmter Multiplikatoren auf das Problem ohne solche reduziert. [2]) Miscellanea Taurinensia, t. II[2], p. 182.

Um die Brauchbarkeit seiner Methode zu erläutern, leitet Lagrange die Bedingungen her, daß eine Fläche von allen denen, die denselben Umfang oder aber gleiches Volumen haben, die kleinste ist, und beweist[1]) den Cramerschen Satz, daß das flächengrößte Polygon von gegebenen Seiten einem Kreise einbeschrieben ist, aufs neue, desgleichen zeigt er, daß unter allen Polygonen gleichen Umfangs[2]) das reguläre den größten Inhalt besitzt. Eine weitere Abhandlung[3]) bringt Anwendungen der Variationsrechnung auf die Dynamik; hier findet sich gleich zu Beginn der Eulersche Satz, daß das Integral der in das Bahnelement multiplizierten Geschwindigkeit eines Massenpunktes ein Maximum oder Minimum ist, auf ein Massensystem ausgedehnt, doch ist der dabei vorzunehmende Variationsprozeß nicht genau definiert, was in der Folge zu Mißverständnissen Anlaß gab[4]). Überhaupt fand der neue Kalkül außer bei Euler zunächst wenig Verständnis; in einer schon erwähnten Abhandlung[5]) erhob Borda verschiedene Bedenken gegen die Behandlung des Brachistochronenproblems durch Lagrange, die diesen zu einer nochmaligen genaueren und allgemeineren Auseinandersetzung in seiner sogleich zu erwähnenden zweiten Abhandlung veranlaßten; ganz ungerechtfertigt sind die Angriffe von Fontaine[6]), der seine eigene Methode, die nur Eulersche und Lagrangesche Ideen in höchst unübersichtlicher Weise mit den Punkten der Fluxionsrechnung und dem Zeichen d nebeneinander ausdrückt, allen anderen überlegen hält. Euler hat in verschiedenen Abhandlungen die Lagrangesche Methode ausführlich auseinandergesetzt, und neben der Regel $\delta d = d\delta$ verschiedene alte Sätze (vgl. S. 904) neu bewiesen[7]); interessanter ist sein Versuch einer geometrischen Deutung des Variationsprozesses[8]) und die darauf beruhende Herleitung der betr. Rechnungsregeln. Die Variationsrechnung — dieser Name stammt von Euler —, sagt er, scheint zunächst eine völlig selbständige Rechnungsart zu sein, und dem-

[1]) Hierbei kommt Lagrange auf die Variationsrechnung für endliche Differenzen zu sprechen; an diese Stelle hat dann Condorcet wieder angeknüpft. [2]) Über isoperimetrische Probleme handelt u. a. ein Aufsatz von Paolo Frisi, Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. VII, 1658/59 (1761), p. 227ff. Der Lagrangesche Algorithmus ist hier noch nicht benutzt. [3]) Miscellanea Taurinensia, t. II², p. 196—298. [4]) Wegen der Geschichte des Prinzips der kleinsten Wirkung vgl. man Ostwalds Klassiker a. a. O., Anmkg. 9, ferner Suter, Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Zürich, 2. Teil, S. 373ff. [5]) Histoire de l'Académie des Sciences 1767 (1770), p. 551ff. [6]) Ebenda, p. 588ff. [7]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. X, 1764 (1766), p. 94ff. (Ebenda, p. 156ff. über die Tautochrone im widerstehenden Mittel.) Endlich Institutiones calculi integralis, vol. III, Anhang, p. 461—596. [8]) Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVI, 1771 (1772), p. 35ff.

gemäß führt auch Lagrange ein eigenes Zeichen δ ein, zum Unterschied von der Differentiation, die durch d bezeichnet wird. Euler stellt sich die Aufgabe, die Variationsrechnung auf die Prinzipien der Infinitesimalrechnung allein zurückzuführen und zwar durch Einführung einer Hilfsvariabeln t, die als Parameter einer Kurvenschar mit den laufenden Koordinaten x und y gedeutet wird. Er denkt sich mit anderen Worten y als Funktion von x und der neuen Variabeln t; $dx\left(\frac{dy}{dx}\right)$ stellt dann die eigentliche Differentiation dy, $dt\left(\frac{dy}{dt}\right)$ die Variation δy von y dar; Variation ist also nichts als partielle Differentiation nach t. Im folgenden führt Euler die wichtigsten Aufgaben der Variationsrechnung auf Grund seiner neuen Auffassung auf wirkliche Differentiationen nach t zurück und befreit sich dann von der Variabeln t schließlich wieder in geschickter Weise durch partielle Integration[1]; die Endresultate treten in der gewöhnlichen Form auf wie sonst auch. Von Anwendungen der Variationsrechnung seien eine Abhandlung Eulers von 1779 über Raumkurven mit einer Maximal- oder Minimaleigenschaft[2], ferner Untersuchungen desselben Forschers über Brachistochronen, wenn die wirkenden Kräfte nicht in einer Ebene liegen, und über Brachistochronen im widerstehenden Mittel erwähnt[3].

In einer Abhandlung vom Jahre 1770[4] ist Lagrange wieder auf die Variationsrechnung zurückgekommen; er geht von allgemeinen Gesichtspunkten aus, die alle Spezialuntersuchungen seines ersten Aufsatzes gleichzeitig umfassen. Es sei φ die Funktion, von der man die Variation $\delta\varphi$ finden will; φ soll durch eine Differentialgleichung von irgend einer Ordnung zwischen $\varphi, x, y, z, \ldots$ und den Differentialen dieser Variabeln gegeben sein. Heißt diese Gleichung $\Phi = 0$, so wird $\delta\Phi = 0$; $\delta\Phi$ wird gebildet, indem man jede der Größen $\varphi, x, y, \ldots d\varphi, dx, dy, \ldots$, aus denen sich die Funktion Φ zusammensetzt, als besondere Veränderliche ansieht. Indem Lagrange die Operation der Variation wirklich ausführt, kommt er nach Multiplikation mit einer nachträglich passend bestimmten Hilfsgröße ξ und partieller Integration auf eine Gleichung der Form

$$\Pi + \int \Psi = \text{const.},$$

welche die Grundlage der weiteren Untersuchung bildet. Hierbei ist

---

[1] Novi Commentarii Academiae Petropolitanae, t. XVI, 1771 (1772), p. 42, 43. [2] In den Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg, t. IV, 1811 (1813). [3] Ebenda, t. VIII, 1817/18 (1822), p. 17—28 bzw. p. 41—45. (Aus dem Jahre 1780.) [4] Miscellanea Taurinensia, t. IV², 1766/69, p. 163—187.

$$\Psi = P\delta\varphi + Qdx + R\delta y + Sdz + \cdots$$

wo die Koeffizienten $P, Q, R, S, \ldots$ sich in bestimmter Weise aus Φ berechnen lassen. Die Bedingung $\delta\varphi = 0$ für das Maximum oder Minimum von φ führt nun nach einigen Überlegungen bezüglich der Grenzen des Integrals $\int\Psi$ auf die Gleichung

$$Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \cdots = 0,$$

die je nach Zahl der Relationen zwischen den $\delta x, \delta y, \delta z, \ldots$ in weniger oder mehr Einzelgleichungen zerfällt. Lagrange bringt späterhin[1]) einen einfachen Beweis seines Theorems, daß eine dieser Einzelgleichungen immer die Folge aller übrigen sei. Er benutzt hierzu den Umstand, daß in der gegebenen Differentialgleichung $\Phi = 0$ der Ausdruck Φ immer auf die Form $\Phi = \Sigma dx^m$ gebracht werden kann, wo Σ eine Funktion der Veränderlichen $\varphi, x, y, z, \ldots$ und ihrer Abgeleiteten nach x bedeutet. Dann ist

$$\delta\Phi = m\Sigma dx^{m-1}\delta dx + dx^m\delta\Sigma;$$

wegen $\Phi = 0$ ist aber auch $\Sigma = 0$, also $\delta\Phi = dx^m\delta\Sigma$. Sei nun

$$\begin{aligned}\delta\Sigma = {} & \pi\delta\varphi + \pi'\delta\frac{d\varphi}{dx} + \pi''\delta\frac{d\frac{d\varphi}{dx}}{dx} + \cdots \\ & + \varrho\delta y + \varrho'\delta\frac{dy}{dx} + \varrho''\delta\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx} + \cdots \\ & + \sigma\delta z + \sigma'\delta\frac{dz}{dx} + \sigma''\delta\frac{d\frac{dz}{dx}}{dx} + \cdots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \tau\delta x,\end{aligned}$$

so wird man nach Multiplikation mit ξdx^m und partieller Integration (wobei nur die Größen $\delta x, \delta\varphi, \delta z, \ldots$ unter dem Integralzeichen bleiben dürfen) wieder auf den Ausdruck $\Pi + \int\Psi$ stoßen. Lagrange zeigt nun, daß der Ausdruck Π identisch Null wird, wenn man das Zeichen δ durch d ersetzt; er betrachtet zu diesem Zweck die einzelnen Glieder von $\delta\Sigma$. $\pi\delta\varphi$ ist keiner partiellen Integration der verlangten Art fähig, es wird daher ganz unter dem Integralzeichen bleiben. Das Glied $\pi'\delta\frac{d\varphi}{dx}$ wird zuerst $\pi'\left(\frac{\delta d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi\,\delta dx}{dx^2}\right)$; nach Multiplikation mit ξdx^m, Vertauschung von $\delta d\varphi$, δdx mit $d\delta\varphi$ bzw. $d\delta x$ und partieller Integration erhält man als Glied außerhalb des Integralzeichens den Ausdruck $\xi\pi' dx^m\left(\frac{\delta\varphi}{dx} - \frac{d\varphi\,\delta x}{dx^2}\right)$, der, wie un-

[1]) Miscellanea Taurinensia, t. IV². 1766/69. p. 175

mittelbar ersichtlich, bei Verwandlung von δ in d identisch verschwindet. Gleiches ergibt sich für die übrigen Glieder von $\delta\Sigma$, d. h. es wird, wenn man δ in d verwandelt, Π immer zu Null und damit $\int\Psi =$ const., also $\Psi = 0$. Ersetzt man also in dem Ausdruck $\Psi = P\delta\varphi + Q\delta x + R\delta y + S\delta z + \cdots$ das Zeichen δ durch d, so wird identisch $Pd\varphi + Qdx + Rdy + Sdz + \cdots = 0$, d. h. eine von den Maximum-Minimumbedingungen ist eine Folge der andern. Lagrange knüpft hieran die Bemerkung, daß die Möglichkeit, Φ in der Form Σdx^m vorauszusetzen, für den Beweis wesentlich war, und weist darauf hin, daß bei Differenzengleichungen diese Voraussetzung im allgemeinen nicht zutrifft. Endlich wird die Aufgabe, $\varphi = \int Z$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, wenn Z selbst wieder Integralzeichen enthält, mit Hilfe der vom Integralzeichen freien Differentialgleichung für φ gelöst, und das Problem der Brachistochrone nochmals eingehend behandelt.

Die Frage, ob im einzelnen Fall ein Maximum oder ein Minimum vorliegt, wurde nach einem mißglückten Versuch von Laplace[1]) von Legendre behandelt, aber erst Jacobi gelang es, hinreichende Kriterien hierfür aufzustellen. Als einfachsten Fall untersucht Legendre „die Variation zweiter Ordnung"[2]) von $\int v dx$, wo v eine Funktion von x, y und $p = \frac{dy}{dx}$ allein ist. Er findet unter der Annahme $\delta x = 0$ mit Hilfe des Taylorschen Satzes

$$\delta\int v dx = \int dx\left(\frac{\partial\partial v}{2\partial y^2}\cdot\delta y^2 + \frac{\partial\partial v}{2\partial y\partial p}\cdot 2\delta y\delta p + \frac{\partial\partial v}{2\partial p^2}\cdot\delta p^2\right),$$

wofür zur Abkürzung

$$\int dx(P\delta y^2 + 2Q\delta y\delta p + R\delta p^2)$$

gesetzt wird. Dann ist identisch

$$\delta\int v dx = \text{const.} - \alpha\delta y^2$$
$$+\int dx\left[\left(P + \frac{d\alpha}{dx}\right)\delta y^2 + 2(Q+\alpha)\delta y\delta p + R\delta p^2\right],$$

wo α beliebig ist. Legendre nimmt nun α so an, daß sich der Aus-

---

1) Nova Acta Eruditorum 1772, p. 293. 2) Histoire de l'Académie des Sciences 1786 (1788), p. 9. Kurz zuvor unterscheidet Legendre zwischen $\frac{\partial v}{\partial x}$ als dem Koeffizienten von dx in dem Differential von v und $\frac{dv}{dx}$, d. i. dem durch dx geteilten vollständigen Differential von v. Vielleicht hat Jacobi, der diese Unterscheidung einbürgerte, diese Stelle gekannt.

druck unter dem Integralzeichen in zwei gleiche Faktoren spalten läßt, wozu die Gleichung

$$\left(P + \frac{d\alpha}{dx}\right) R = (Q + \alpha)^2$$

erforderlich ist. Dann ergibt sich bei festen Integrationsgrenzen

$$\delta \int v dx = (\alpha \delta y^2)^0 - (\alpha \delta y^2)^I + \int R dx \left(\delta p + \frac{Q + \alpha}{R} \delta y\right)^2,$$

und hierin kann man, da sich ja α aus einer Differentialgleichung bestimmt, also eine willkürliche Konstante enthält, α immer so annehmen, daß $(\alpha \delta y^2)^0 - (\alpha \delta y^2)^I$ entweder Null ist, oder dasselbe Vorzeichen wie R hat; daraus folgt aber, sagt Legendre, daß $\int v dx$ ein Maximum ist, wenn

$$R = \frac{\partial \partial v}{2 \partial p^2}$$

negativ, ein Minimum hingegen, wenn dieselbe Funktion positiv ist. Legendre geht sodann zu dem Fall über, daß v eine Funktion von x, y, p und q ist, wo

$$dy = p dx \quad \text{und} \quad dp = q dy.$$

Die Variation der 1. Ordnung ist Null, die 2. Ordnung läßt sich auf die Form bringen

$$\begin{aligned}\delta \int v dx = \int dx(M \delta y^2 &+ 2 N \delta y \delta p + Q \delta p^2 \\ &+ 2 P \delta y \delta q + 2 R \delta p \delta q \\ &+ S \delta q^2),\end{aligned}$$

wofür Legendre schreibt

$$\begin{aligned}\delta \int v dx = (\alpha \delta y^2 + 2\beta \delta y \delta p + \gamma \delta p^2)^0 - (\alpha \delta y^2 + 2\beta \delta y \delta p + \gamma \delta p^2)^I \\ + \int dx \left\{ \begin{array}{l} \left(M + \frac{d\alpha}{dx}\right) \delta y^2 + 2\left(N + \alpha + \frac{d\beta}{dx}\right) \delta y \delta p + 2(P + \beta) \delta y \delta q \\ + \left(Q + 2\beta + \frac{d\gamma}{dx}\right) \delta p^2 + 2(R + \gamma) \delta p \delta q + S \delta q^2 \end{array} \right\}.\end{aligned}$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen soll sich wieder in ein Quadrat zerfällen lassen; aus der Annahme, der Inhalt der geschweiften Kammer sei gleich

$$S(\delta q + \mu \delta p + \lambda \delta y)^2,$$

ergeben sich aber fünf Bedingungsgleichungen für α, β, γ, μ, λ. Man erkennt, daß bei ihrer Integration drei willkürliche Konstante auftreten, die so gewählt werden können, daß die außerhalb des Integralzeichens stehende Differenz Null ist oder dasselbe Vorzeichen wie S besitzt. Legendre schließt wieder, daß damit das Vorzeichen von S für die ganze zweite Variation maßgebend und für die Existenz eines Maximums oder Minimums entscheidend ist, gibt sodann die Verall-

gemeinerung für den Fall, daß ν Differentialquotienten beliebiger Ordnung enthält, und behandelt noch einige ähnliche Fragen unter der Annahme, daß x nicht konstant, also δx von Null verschieden ist. Von den praktischen Beispielen, die Legendre untersucht, seien das Problem des Körpers von kleinstem Widerstand, der Kettenlinie und der Brachistochrone erwähnt. Herleitung und Ergebnis der vorerwähnten Kriterien sind bekanntermaßen unvollständig. Die ersten Bedenken äußerte Legendre selbst[1]); in einer späteren Abhandlung sucht er die stillschweigende Voraussetzung, daß die Hilfsgrößen α, β, γ immer reell bestimmt werden können, sowie die Möglichkeit, die Differenz

$$(\alpha\delta y^2 + 2\beta\,\delta y\,\delta p + \gamma\delta p^2)^0 - (\alpha\delta y^2 + 2\beta\,\delta y\,\delta p + \gamma\delta p^2)^l$$

zum Verschwinden bringen zu können, durch Reihenentwicklungen zu erweisen; der Nachweis ist indessen für beide Behauptungen, von denen die erste richtig ist, unzureichend. Den Haupteinwand hat jedoch Lagrange erhoben[2]): das Integral kann das Vorzeichen wechseln, wenn auch der Ausdruck unter dem Integralzeichen dies nicht tut, wie an dem Beispiel

$$\frac{x}{1-x} = \int \frac{dx}{(1-x)^2}$$

ersichtlich ist. Das Theorem von Legendre gilt nur, solange der Ausdruck unter dem Integralzeichen endlich bleibt; um aber darüber zu entscheiden, braucht man die Funktionen α, β, γ selbst, und die Erkenntnis ihrer Existenz allein genügt noch nicht. Immerhin bedeutet Legendres Versuch, die schwierige Frage zu lösen, und die Art seines Vorgehens einen großen Fortschritt.

---

[1]) Histoire de l'Académie des Sciences 1787 (1789), p. 348. [2]) Oeuvres, t. IX, p. 303. Vgl. Ostwalds Klassiker a. a. O., Anm. 12.

ABSCHNITT XXVIII

ÜBERBLICK ÜBER DIE ZEIT VON 1758 BIS 1799

VON

M. CANTOR

Überblick über die Zeit von 1758 bis 1799.

Die Abschnitte XIX bis XXVII dieses Bandes haben die Geschichte der einzelnen Teilgebiete der Mathematik in ähnlich ausführlicher Weise wie die drei früher erschienenen Bände bis zum Ende des 18. Jahrhundert weiter geführt. Die Zeit, welche behandelt wurde, war eine wesentlich kürzere als in dem III. Bande, der selbst schon eine kleinere Zeitspanne als der II. Band umfaßte, von den vielen Jahrhunderten zu schweigen, durch welche der I. Band als Führer dienen wollte, und dennoch ist der Umfang dieses IV Bandes weit über den der ihm vorhergehenden gewachsen Welche Gründe diese Erscheinung hervorgebracht haben, ist leicht ersichtlich Je mehr wir der Jetztzeit uns nähern, um so reichlicher fließen die Quellen unseres Wissens. Sie sind überdies gefaßt, wenn das Bild der Quelle beibehalten werden soll. Die Akademieschriften und Zeitschriften vermehren sich (vgl S. 4—7) und sammeln, was in einzelnen Rinnseln da oder dort hervorquillt. Ihre Herausgeber sind weitherzig in der Aufnahme von Beiträgen auch von solchen Verfassern, welche nicht gerade einer Akademie angehören. Und diese Leichtigkeit das, was der Einzelne für veröffentlichungswert hielt, tatsächlich an die Öffentlichkeit zu bringen, mußte eine Stoffvermehrung zur Folge haben. Manches davon verdiente nicht, geschichtlich aufbewahrt zu werden und ist in diesem Bande mit Fug und Recht übergangen, aber Anderes hat, zur Zeit seiner Entstehung kaum beachtet, nachträgliche Bedeutung erhalten. Einzelne besonders begabte Männer haben wie in früheren Zeiten auch im Verlaufe der letzten Jahrzehnte des 18. Jahrhunderts in der Mathematik ihre Lieblingswissenschaft gefunden, haben sich ihr ganz oder doch vorzugsweise gewidmet, und mit einer riesigen Arbeitskraft neue Gebiete urbar gemacht. Wir brauchen nur auf die einzelnen Abschnitte dieses IV Bandes zu verweisen, welche die hier ausgesprochenen Sätze des Näheren belegen. Den Bearbeitern der einzelnen Abschnitte gestaltete sich so eine dankbare Aufgabe in der Schilderung des Wachstums der einzelnen Teilgebiete, aber was bei der Feststellung des allgemeinsten Planes zum IV. Bande in den Augusttagen des Jahres 1904 schon

vorausgesehen wurde, bewahrheitete sich: der Zusammenhang zwischen den einzelnen Abschnitten lockerte sich. Sogar die Tätigkeit eines einzelnen Verfassers zu verfolgen, ist schwierig geworden, geschweige daß die Einwirkung genügend hervorträte, welche jeder auf seine Zeit ausübte. Dazu ist ein Überblick erforderlich, welcher das zeitliche Nebeneinanderauftreten wichtiger Gedanken bemerkbar mache, und diese Aufgabe soll der XXVIII. und letzte Abschnitt dieses Bandes zu lösen suchen.

Schon damals, als wir den XXVIII. Abschnitt bearbeiten zu dürfen uns erbaten, schwebte uns ein Gedanke vor, den wir im folgenden zur Ausführung bringen. Gewiß ist die Schlußfolgerung irrig, das in der Zeit Frühere müsse zu dem Späteren den Anstoß gegeben haben, aber soviel steht fest, daß der Anstoß zu einem Späteren, wenn er stattfand, nur von einem Früheren gegeben sein kann. Man muß daher vor allen Dingen und unbekümmert um den besonderen Gegenstand der einzelnen Untersuchung sämtliche besonders hervorragende Leistungen in ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge zur Anschauung bringen, und das ist es, was die nachfolgenden Seiten bezwecken. Wenn dabei auf einige wenige Dinge hingewiesen ist, von denen die Verfasser der Abschnitte, in welche jene gehören, schwiegen, so liegt darin der Beweis, daß die Ansichten über Beachtenswertes und nicht Beachtenswertes verschieden sind, und daß bei der Selbständigkeit, mit welcher die Bearbeiter der einzelnen Abschnitte von vornherein ausgestattet waren, es nur zu verwundern ist, wenn nicht häufigere Meinungsverschiedenheiten dem Leser begegnen. Gleicherweise sind wir darauf vorbereitet, daß dieser oder jener Leser nicht mit uns übereinstimme und Dinge erwähnt wünsche, über welche wir schwiegen, dagegen von uns Erwähntes als ganz unerheblich betrachte.

Was die äußere Form der nun folgenden nach den Jahreszahlen geordneten Liste betrifft, so bemerken wir, daß die eingeklammerten Seitenzahlen sich auf den vorliegenden Band beziehen und die Stellen angeben, wo von den in der Liste genannten Arbeiten die Rede ist. Außerdem haben wir über die Art uns zu äußern, in welcher Eulers Leistungen verwertet sind. Euler ist bekanntlich 1783 gestorben, und unser geschätzter Mitarbeiter H. Vivanti hat daraus (S. 700 Anmerkung) gefolgert, alle nachgelassenen Schriften Eulers gehörten, weil vor 1783 verfaßt, in diesen Band. Wir haben eine davon abweichende Meinung. Wer eine Monographie über Euler herauszugeben wünscht, wird sicherlich das Todesjahr des großen Mathematikers als Endpunkt seiner Leistungsmöglichkeit zu betrachten haben und wird für jenes Jahr in Anspruch nehmen, was immer aus Eulers Kopfe stammend, nach 1783 gedruckt worden ist. Anders scheint

uns die Sache zu liegen, wenn die Geschichte der Mathematik der Behandlung unterworfen ist. Was handschriftlich in den Aufbewahrungsräumen einer Akademie verschlossen liegt, kann nun und nimmermehr als wirksam in dem Sinne betrachtet werden, daß es sich befruchtend und fördernd erwiesen habe, und demzufolge ist für die Geschichte der Mathematik unserer Ansicht nach erst das Druckjahr einer Abhandlung ihr Geburtsjahr, und diese Ansicht war für uns bei Anfertigung unseres Verzeichnisses maßgebend.

1758.

Hamilton, *Treatise of conic sections* bedient sich streng euklidischer Form und vermeidet sogar das Gleichheitszeichen (S. 462).

Kaestners Arithmetik betrachtet nicht nur die negative Zahl als eine Zahl besonderer Art (S. 80), sie ist auch das erste Werk, in welchem näher begründet ist, daß und warum man mit Irrationalzahlen rechnen dürfe.

Lamberts angenäherte Gleichungsauflösung mittels Reihen (S. 140).

Lambert über periodische Dezimalbrüche (S. 160).

1759.

Braikenridge über Konoide, insbesondere über das hyperbolische Paraboloid (S. 556).

Daviet de Foncenex versucht den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen und äußert sich über das Imaginäre (S. 306).

Hube, Abhandlung über Kegelschnitte in durchaus analytischer Form (S. 454).

Lagrange gibt Extremwerte von Funktionen mehrerer Veränderlichen (S. 772).

Lagranges Aufsatz, in welchem man die Fouriersche Reihe hat finden wollen (S. 984).

Lambert, Freie Perspektive in 1. Auflage, eine 2. Auflage 1774 (S. 607).

1760.

Eulers Beweis, daß $x^3 + y^3 \mp z^3$ (S. 154).

Eulers Bewußtsein von den Vorzügen seiner trigonometrischen Bezeichnungen (S. 405).

Eulers Satz über die Krümmungshalbmesser der Normalschnitte einer Fläche (S. 545).

Joh. Kies betrachtet das ebene Dreieck als Grenzwert des sphärischen mittels $\sin A = A$, $\cos A = 1$, $\operatorname{tg} A = A$ (S. 408).

Lacailles Tafeln, deren spätere Auflagen (1781—1832) von Lalande herausgegeben wurden (S 434).

Lagrange findet mittels Variationsrechnung die Gleichung der Minimalflächen (S. 550).

1761.

D'Alembert verteidigt die Behauptung $\log(-a) = \log(a)$ (S. 303).

Lagrange findet die Richtigkeit der Infinitesimalrechnung in der Ausgleichung von Fehlern (S. 644).

1762.

Euler schlägt für die Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades die Form $w + A\sqrt[n]{v} + B\sqrt[n]{v^2} + \cdots + Q\sqrt[n]{v^{n-1}}$ vor (S. 96).

Lagranges erste Abhandlung über Variationsrechnung, welche Euler seit 1755 handschriftlich bekannt war (S. 1066).

Waring, Miscellanea analytica (S. 93).

Waring, Proprietates algebraicarum curvarum (S. 467, 472).

1763.

Basedow, Überzeugende Methode der Arithmetik ist eines der ersten und besten Schulbücher (S. 51).

Bayessche Regel für die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die aus gegebenen Versuchen ermittelte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zwischen gegebenen Grenzen liege (S. 240).

Euler sieht in den trigonometrischen Funktionen nicht mehr Linien, sondern Verhältnisse von Linien (S. 405).

Euler beginnt mit Transformationen elliptischer Integrale (S. 836).

G. B. Fagnano beweist den 1754 von Euler vorgeschlagenen Satz (S. 820).

Klügel, Geschichte der Parallelenlehre (S. 385).

Maudnit zeigt zwei Scharen von Geraden auf dem hyperbolischen Paraboloid (S. 556).

1764.

Bayes bestimmt aus dem Eintreten eines Ereignisses dessen Wahrscheinlichkeit (S. 240).

Bézouts Abhandlung über Gleichungen (S. 98).

Eulers Kettenbruchalgorithmus (S. 155).

Landen, Residual analysis (S. 661).

1765.

Euler macht auf die später nach ihm benannte Gerade aufmerksam, welche den Höhenschnittpunkt, den Schwerpunkt und den Mittelpunkt des Umkreises eines ebenen Dreiecks enthält.

Lambert faßt in seinen „Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik" die Neperschen Regeln so auf, daß die Fälle gruppenweise geordnet sind. Er bedient sich zum Beweise derselben unbewußt der Gruppentheorie (S. 409).

Vinc. Riccati und Saladini geben zwei Bände *Institutiones analyticae* heraus, in welchen analytische und geometrische Betrachtungsweisen angewandt werden, und in welchen zum großen Entsetzen der Zeitgenossen Differentiationen und Integrationen vereinigt vorgetragen sind (S. 677).

1766.

Daniel Bernoulli über Sterblichkeit bei Pocken (S. 232, 237).

Euler über den Rösselsprung (S. 220).

Euler will Kegelschnittbögen in die Analysis eingebürgert wissen, wie man es schon mit Kreislinien gemacht habe (S. 836).

Euler erblindet auch auf dem zweiten Auge.

Lagranges Adjungierte (S. 928) und seine Lehre von den linearen Differentialgleichungen (S. 930).

1767.

Bézouts Aufsatz über den Grad der Resultante von Gleichungen mit mehreren Unbekannten (S. 101).

D'Alembert betrachtet das Unendliche als Grenze (S. 642).

Euler benutzt den 1764 veröffentlichten Kettenbruchalgorithmus (S. 156).

Euler über Bevölkerungszunahme (S. 239).

Euler über die Gestattung unstetiger Funktionen in der Analysis, besonders bei der Integration partieller Differentialgleichungen (S. 790).

Lagrange benutzt die Wurzeldifferenzen einer Gleichung als Wurzeln einer neuen Gleichung (S. 130).

Lambert über die Irrationalität von π (S. 447).

1768.

Daniel Bernoulli wendet Infinitesimalrechnung auf Fragen der Wahrscheinlichkeit an (S. 238).

D'Alembert über Reihenkonvergenz (S. 261).

Euler integriert die Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4}} = \frac{dy}{\sqrt{A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4}}$$

(S. 804).

Eulers Integralrechnung, Band I.

Lagranges Umkehrungsformel (S. 258).

Lambert benutzt Hyperbelfunktionen (S. 411).

Vinc. Riccati über rekurrente Reihen (S. 261).

1769.

Eulers Integralrechnung, Band II.

Euler sucht Flächen, deren über demselben Stücke der xy-Ebene stehende Flächenstücke einander gleich sind (S. 550).

Lagranges „Résolution des équations numériques“ (S. 141).

Lagranges erste zahlentheoretische Veröffentlichungen in den Turiner und in den Berliner Akademieschriften (S. 161).

Lagrange über die Eulersche (vgl. 1768) Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} \pm \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0$ (S. 807).

1770.

Daniel Bernoulli, das Geschlechtsverhältnis bei Geburten (S. 239).

Bézout, Cours de mathématiques (S. 676).

D'Alembert gibt Integrabilitätsbedingungen (S. 873)

D'Alembert behandelt eine Randwertaufgabe (S. 883).

Eulers Integralrechnung, Band III.

Eulers Algebra erscheint in erster Auflage.

Euler führt mehrfache Integrale ein, und zwar zunächst Doppelintegrale, welchen er den Namen *formula integralis duplicata* beilegt (S. 738).

G. B. Fagnano löst die 1754 von Euler vorgeschlagene Aufgabe (S. 829).

Klügel erfindet den Namen *trigonometrische Funktionen* und definiert sie, einem Eulerschen Gedanken (vgl. 1763) folgend, als Quotienten (S. 413).

Lagrange wendet Kettenbrüche bei der Behandlung bestimmter Gleichungen an (S. 143).

Lagranges zweite Abhandlung über Variationsrechnung (vgl. (1762). In ihr kommt schon eine den *Lagrangeschen Multiplikator* zur Behandlung von Extremwerten impliziter Funktionen anbahnende Betrachtung vor (S. 1070).

Lamberts *Anlage zur Tetragonometrie* (S. 430).

Lamberts Tafeln (S. 435).

Waring, Meditationes algebraicae. Aus ihrem reichen Inhalt sei der **Goldbachsche** Erfahrungssatz und der **Wilsonsche** Satz erwähnt (S. 106, 167).

1771.

Eulers Abhandlung *De solidis, quorum superficiem in planum explicare licet* handelt von abwickelbaren Flächen und nimmt x, y, z als Funktionen von zwei Variablen t, u (S. 529).

Landens erste Arbeiten über elliptische Transzendenten (S. 844).

Malfattis Resolvente (vgl. den von **Bortolotti** herausgegebenen Briefwechsel zwischen **Ruffini** und **Paoli**) (S. 117).

1772.

Bossuts großer Cours de Mathématiques beginnt zu erscheinen.

Lagrange, Réflexions sur la résolution algébrique des équations (S. 110).

Lagrange, Sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre (S. 966).

Lagrange gebraucht symbolische Bezeichnungen wie z. B. $d^{-1} = \int$ usw. (S. 1048).

Waring, Proprietates algebraicarum curvarum (S. 467, 618 Note).

1773.

Euler führt das Wort *Primitivwurzel* ein (S. 173).

Lagrange über Divisoren quadratischer Formen (S. 175).

Lagrange über Berechnung von Beobachtungen unter Berücksichtigung der Fehlerwahrscheinlichkeit (S. 247).

Lagrange, Solution analytique de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires (S. 523).

Lagrange handelt von dreifachen Integralen (S. 740).

De Marguerie muß sich erfolgreich mit der Auffindung von Gleichungsresolventen und mit dem Eliminationsprobleme beschäftigt haben (S. 118).

Monge über die Bestimmung der willkürlichen Funktionen, welche bei der Integration partieller Differentialgleichungen vorkommen (S. 882).

Monge spricht sich in einer 1771 der Pariser Akademie vorgelegten, aber erst 1773 gedruckten Abhandlung dahin aus, daß sich für $Mp + Nq = 0$ $\Big($wo $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ und M, N Funktionen von

x, y, z sind) dieselbe Integralgleichung ergebe, ob man z als Konstante oder als Variable betrachte (S. 950).

1774.

Condorcet stützt sich bei dem Beweise des Satzes, daß, unter der Voraussetzung einer homogenen Gleichung m^{ten} Grades zwischen x und y, ydx sich auf die Form $Pdx + Qdy$ bringen lasse mit rationalem P und Q, und daß überdies $Pdx + Qdy$ ein exaktes Differential sei, auf die Methode der Konstantenabzählung, von deren Sicherheit er aber selbst nicht überzeugt ist. Ganz ähnliche Zweifel hegt auch Lagrange (S. 724).

Euler dehnt den Gültigkeitsbereich des Binomialsatzes auf gebrochene und negative Exponenten aus, wie Newton es schon gewagt hatte, ohne einen Beweis dafür zu haben (S. 203).

Lagranges Zusätze zu Eulers Algebra von 1770 (S. 171).

Lagrange gibt die Grundzüge seiner Infinitesimalrechnung bekannt (S. 644).

Lagrange erkennt Entstehung und Bedeutung des singulären Integrals einer Differentialgleichung (S. 885, 890, 896, 969).

Lambert veröffentlicht seine Freie Perspektive (vgl. 1759) in zweiter Auflage. In den Zusätzen befindet sich eine Geometrie des Lineals (S. 607).

Laplace über die Wahrscheinlichkeit von Ursachen. In der gleichen Abhandlung wird gegen die Anwendung des arithmetischen Mittels bei der Beobachtungsberechnung Stellung genommen (S. 241, 249).

Monge, Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes (S. 535).

1775.

Euler führt die Differentiation und Integration unter dem Integralzeichen ein (S. 737).

Karstens Optik unter wesentlichem Einflusse von Lamberts Freier Perspektive von 1759, wenn nicht von 1774 (S. 614).

Lagranges Fortsetzung der Abhandlung von 1773 über Divisoren quadratischer Formen (S. 177).

Landens zweite (1771 schon angekündigte) Abhandlung über elliptische Transzendenten, in welcher die *Landensche Transformation* und die Darstellung eines Hyperbogens durch zwei Ellipsenbögen vorkommt (S. 846).

Laplace wendet rekurrierende Reihen bei Wahrscheinlichkeitsaufgaben an (S. 236).

Laplace unterscheidet *solution particulière* von *intégrale particulière* (S. 888).

Laplace bedient sich der Variation der Konstanten (S. 920).

Laplace über Funktionalgleichungen (S. 1051).

Lexell schafft die Polygonometrie (S. 431).

Monge benutzt zum ersten Male das Schlußverfahren: sind p und q unter einer gewissen geometrischen Voraussetzung konstant, unter einer anderen wieder konstant, aber von anderem Werte, dann muß p eine Funktion von q sein oder umgekehrt q eine Funktion von p (S. 536, 561, 948).

Die Pariser Akademie faßt den Beschluß, künftighin Einsendungen, welche eine genaue Quadratur des Kreises, Dreiteilung eines beliebigen Winkels mittels Zirkel und Lineal oder das Perpetuum mobile herzustellen verheißen, nicht mehr anzunehmen (S. 377).

1776.

Euler behauptet, keine Kurve lasse sich durch Kreisbögen rektifizieren (S. 488), vgl. 1781.

Eulers Abhandlung De methodo tangentium inversa ad theoriam solidorum translata vom 2. September 1776 über partielle Differentialgleichungen (S. 551).

Eulers Abhandlung über Kurven, deren Rektifikation sich durch Parabelbögen vollzieht (S. 489).

Felkels Faktorentafeln (S. 435).

Lagrange verwertet Kettenbrüche zur Integration von Differentialgleichungen (S. 916).

Laplace gebraucht das Wort *Résultante* (S. 123).

Vandermondes der Pariser Akademie 1772 vorgelegte Determinantenbezeichnung erscheint im Drucke (S. 122, 791).

Waring, Meditationes analyticae (S. 275).

1777.

Eulers Arbeit über die Ellipse kleinsten Inhaltes durch vier gegebene Punkte (S. 469).

Euler lehrt flächentreue und winkeltreue (konforme) Abbildung, letztere unter Anwendung komplexer Größen. Abbildung in der allgemeinsten Bedeutung des Wortes heißt bei ihm *repraesentatio* (S. 573).

Lagrange äußert sich in einem an Lorgna gerichteten Briefe über die ungemeine Wichtigkeit der nunmehr unbeanstandeten Benutzung imaginärer Größen in der Analysis (S. 148).

Lagrange wendet rekurrierende Reihen und Differenzenrechnung auf Wahrscheinlichkeitsaufgaben an (S. 233).

Lagrange benutzt die Variation der Konstanten bei dem Übergang von der unvollständigen zur vollständigen linearen Differentialgleichung (S. 932).

Laplace, Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles (S. 964).

Laplace Über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung (S. 999).

1778.

D. Bernoulli über Berechnung von Beobachtungen unter Einführung einer Fehlerkurve (S. 248).

Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques (S. 332, 390).

Hindenburgs erste kombinatorische Arbeit über den polynomischen Lehrsatz (S. 205).

Schulzes Tabellen (S. 436).

1779.

Bézout gibt eine Eliminationsmethode für Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten (S. 127).

Eulers Abhandlung vom 25. Januar 1779 De linea brevissima in superficie quacumque ducenda behandelt die drei Koordinaten eines Punktes in symmetrischer Weise (S. 538, 540).

Lagrange über die Anzahl imaginärer Wurzeln einer Gleichung (S. 125).

1780.

Landen, Mathematical memoirs I (S. 711), vgl. 1789.

Nieuport über parallele Kurven (S 510).

1781.

Euler findet durch Kreisbögen rektifizierbare Kurven (S. 491), vgl. 1776.

Kant gründet den Zahlbegriff auf die Zeit (S. 79).

Laplace findet $\int\limits_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (S. 767).

Waring, Meditationes analyticae mit modernen Anschauungen über Reihenkonvergenz. Insbesondere lehrt er die Benutzung des Gliederquotienten und weiß er, daß

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$$

konvergiert (divergiert), sofern $n \gtrless 1$ (S. 275).

1782.

Euler, Methodus facilis symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi ist zur Grundlage der heutigen Theorie der Raumkurven geworden, insofern s als unabhängige Variable dient und die sphärische Abbildung benutzt wird (S. 525).

Laplace benutzt *erzeugende Funktionen* (S. 273, 1050).

1783.

Eulers Veröffentlichung des *Reziprozitätssatzes,* welchen er schon 1746 geahnt hatte (S. 186).

Euler bedient sich des von ihm durch S bezeichneten sphärischen Exzesses (S. 416).

Euler †.

Vegas kleinere Tafeln.

1784.

Euler, De mirabilibus proprietatibus unciarum (S. 183).

Fontana bedient sich des Namens *equazione polare* (S. 513).

Laplace sucht Werte von Formeln zu ermitteln, in welche sehr große oder sehr viele Faktoren eingehen (S. 281).

Waring verbreitet sich weiter über Reihenkonvergenz und deren Notwendigkeit (S. 286), vgl. 1781.

1785.

Boscowich gibt die vier Fehlergleichungen der Trigonometrie (S. 420).

Charles gibt Beispiele von Unstetigkeiten (S. 881).

Condorcet über die nach Stimmenmehrheit erfolgten Entscheidungen (S. 253).

Euler, Opuscula analytica.

Huttons Tafeln (S. 439).

Laplaces Differentialgleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ (S. 943).

Legendre führt *Kugelfunktionen* ein. Laplace gelangt nur wenig später zu den gleichen Funktionen und stellt deren Differentialgleichung zweiter Ordnung auf (S. 792).

Meusniers Satz von den Krümmungen einer Fläche; in der

gleichen Abhandlung sind zwei Minimalflächen behandelt, ebenda auch das Schmiegungsparaboloid (S. 547).

Monges schon 1771 der Pariser Akademie übergebene Abhandlung: Sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexion des courbes à double courbure erscheint im Drucke (S. 531).

1786.

Bring führt mittels Gleichungen niedrigeren Grades die Gleichung fünften Grades auf die Form

$$y^5 + Gy + H = 0$$

zurück (S. 131).

Cagnolis Trigonometrie (S. 418).

Charles überträgt den Begriff des singulären Integrals auf Differenzengleichungen (S. 1052).

Lambert über Parallellinien (S. 399).

Lhuilier, Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs (S. 645).

1787.

Eulers zweite Abhandlung über den allgemeinen binomischen Lehrsatz (S. 204), vgl. 1774.

Fuß untersucht sphärische Kegelschnitte (S. 387).

Hutton, Elements of conic sections enthalten die formal wichtige Neuerung, daß die vorkommenden Gleichungen aus dem Texte heraustretend stets auf neue Zeilen gedruckt sind (S. 465).

Legendres Satz vom sphärischen Dreieck mit kleinen Seiten, welches als eben behandelt wird, nachdem jeder Winkel um den dritten Teil des sphärischen Exzesses vermindert worden ist (S. 423).

Monges Aufsatz, in welchem *Berührungstransformationen* benutzt sind (S. 982, 1037).

1788.

Lagrange, Mécanique analytique. In ihr ist auf S. 45—46 der Gedanke des *Lagrangeschen Multiplikators* (vgl. 1770) abermals benutzt (S. 1068).

Legendres erste zahlentheoretische Abhandlung, in welcher schon der *Reziprozitätssatz* vorkommt (S. 190), vgl. 1783.

Legendre erkennt die Wichtigkeit der Landenschen Entdeckung von 1775, daß ein Hyperbelbogen zu zwei Bögen zweier Ellipsen in Beziehung gesetzt werden kann (S. 847, 857).

Legendre untersucht die zweite Variation (S. 1072).

Pfaff, Versuch einer Summationsmethode (S. 291).

1789.

Encyclopédie méthodique erscheint im Drucke.

Eschenbach über Reihenumkehrung (S. 215).

Landen, Mathematical memoirs II (S. 711), vgl. 1780.

Lhuiliers erstes Lehrbuch der Polygonométrie. Als Ausgangspunkt wird die Bestimmung des Flächeninhaltes benutzt (S. 432).

Schubert benutzt erstmalig den Namen *konforme Abbildung* (S. 575).

1790.

Brissons erster Vorschlag, der zum metrischen System führte.

Kaestner, Geometrische Abhandlungen, Bd. I, S. 463—464 ist zuerst die geometrische Wahrheit $AB + BA = 0$ ausgesprochen, vgl. 1798.

Mascheronis Anmerkungen zu **Eulers** Integralrechnung, Bd. I. Unter vielem anderem ist bemerkenswert, daß auf S. 731 die Behauptung ausgesprochen ist, eine imaginäre Kurve könne eine reelle Länge besitzen, was damit zusammenhängt, daß man damals über den Geltungsbereich von Funktionen noch im Unklaren war (S. 485), vgl. 1792.

1791.

Arbogast unterscheidet *discontinuité* von *discontiguité* (S. 880).

Gesetz vom 30. März über Einführung des metrischen Systems in Frankreich.

1792.

Fischer (Ernst Gottfried) veröffentlicht seine Dimensionszeichen, wegen derer eine heftige Polemik geführt wird (S. 217).

Lotteri über Parallelkurven (S. 510).

Mascheronis Anmerkungen zu **Eulers** Integralrechnung, Bd. II, vgl. 1790.

Maskelynes Regel zur Auffindung von $\log \sin x$ und $\log \operatorname{tg} x$, wenn $x < 5^0\,33'$ (S. 422).

1793.

Eulers bereits 1777 vollendete Abhandlung, in welcher die Hauptformeln zwischen partiellen Differentialquotienten, welche der **Riemann**schen Funktionentheorie zugrunde liegen, bereits angegeben sind, erscheint im Drucke (S. 711).

Kaestner über Parallelkurven (S. 510).

Lagranges Interpolationsformel (S. 1048).

Legendres sehr seltenes *Mémoire sur les transcendantes ellipti-*

ques, in welchem drei Typen elliptischer Integrale unterschieden sind (S. 860).

Rothes Reihenumkehrung (S. 216).

1794.

Eulers Integralrechnung, Bd. IV. Darin auch die Anwendung von i um $\sqrt{-1}$ zu bezeichnen (S. 315).

Hulbe lehrt Gleichungsumformungen, welche unter Umständen zu deren Auflösung führen (S. 135).

Legendre, Éléments de géométrie. Darin treten erstmalig symmetrisch gleiche Gebilde auf (S. 336, 381, 393).

Pronys Tabellenberechnung angefangen (S. 439).

Vega, Thesaurus (S. 438).

1795.

Callets Tafeln (S. 438).

École Normale wird in Paris gegründet. In ihr wurde erstmalig Darstellende Geometrie durch Monge gelehrt, und Lagrange und Laplace hielten an ihr elementararithmetische Vorlesungen (S. 625).

Monge, *Feuilles d'analyse*, in welchen neben zahlreichen anderen Dingen auch die Entdeckung der Krümmungslinien enthalten ist (S. 559).

Paoli über rekurrente Reihen (S. 296).

1796.

Hindenburgs kombinatorisches Hauptwerk (S. 206).

1797.

Carnot, Réflexions sur la metaphysique du calcul infinitésimal (S. 647).

Lacroix, Traité d'arithmétique (S. 345).

Lacroix, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral S. 694).

Lagrange, Théorie des fonctions (S. 688).

Legendre über singuläre Integrale (S. 896).

Wessel gibt die geometrische Deutung des Imaginären (S. 315).

1798.

Bossut schafft in Anschluß an D'Alembert (1757) eine Kleinkreistrigonometrie (S. 408).

Busse berücksichtigt, jedenfalls in Anschluß an Kaestner (vgl.

1790), die Vorzeichen der Strecken bei geometrischen Untersuchungen (S. 479).

Condillac, Langue des calculs (S. 42).

Euler gebrauchte in einer in diesem Jahre gedruckten Abhandlung astronomische Zeichen ⊙ ♄ ♃ ♂ als Abkürzungen für gewisse Funktionen (S. 300).

Legendre, Essai sur la théorie des nombres (2. Auflage 1808, 3. Auflage 1830). Der Essai enthält den Namen *Reziprozitätssatz* (vgl. 1783) und das Legendresche Symbol (S. 194).

Monge, Géométrie déscriptive (S. 626).

Schubert beschäftigt sich mit der Zerlegung von Polynomen in reelle Faktoren (S. 137).

1799.

Kramps Abhandlung, welche die Grundlage der Lehre von den Falkultäten bildet (S. 296).

Lhuilier gründet die Polyedrometrie (S. 432).

Ruffinis erste Arbeit über Gleichungen fünften Grades (S. 139).

Betrachtet man diese Zusammenstellung, so ist, wie uns scheint, eine Tatsache hervorstechend: die überwiegende Zahl der Leistungen, für welche auf Euler und auf Lagrange verwiesen ist, gegenüber von der Erwähnung anderer Schriftsteller. Sind doch, wenn wir richtig gezählt haben, 34 verschiedene Schriften Eulers und 32 verschiedene Schriften Lagranges in unserer Übersicht genannt, Zahlen, mit welchen kein anderer Schriftsteller in Wettbewerb treten kann. Dabei ist nicht außer Acht zu lassen, daß unter den einfach gezählten Schriften Eulers seine zweibändige Algebra, seine zweibändigen Opuscula analytica, seine vierbändige Integralrechnung enthalten ist, von welcher letzteren wir vielleicht eine ganz gedrängte Inhaltsangabe hier einschalten dürfen, weil in den vorhergehenden Abschnitten das große Werk bald hier bald dort als Quelle genannt ist, ohne daß sich Gelegenheit bot, ein übersichtlicheres Gesamtbild zu entwerfen, als es S. 679 geschah.

Eulers Integralrechnung setzt sich aus vier Bänden zusammen. Der I. Band (1768) lehrt zuerst die Ausführung von Integrationen, sei es in endlicher Form, sei es angenähert mittels unendlicher Reihen oder Faktorenfolgen. Dann werden Differentialgleichungen erster Ordnung ersten Grades integriert, wobei besonderes Gewicht auf die Lehre vom integrierenden Faktor gelegt wird. Auch singuläre Lösungen kommen zur Sprache, über deren Entstehung und Sinn sich Euler freilich nicht klar ist. Man weiß, daß erst Lagrange (1774) diesen gewaltigen Fortschritt vollzog. Endlich werden Diffe-

rentialgleichungen erster Ordnung aber höheren Grades behandelt. Der Inhalt des II. Bandes (1769) läßt sich als Integration von Differentialgleichungen von höherer als der ersten Ordnung zwischen zwei Veränderlichen bezeichnen. Die Gleichungen zweiter Ordnung sind vorzugsweise berücksichtigt, und unter denen höherer Ordnung die linearen Differentialgleichungen, namentlich die mit konstanten Koeffizienten. Bezüglich der zur Integration benutzten Methoden betont Euler wiederum die Anwendung integrierender Faktoren. Auch von bestimmten Integralen ist mehrfach die Rede. Der III. Band (1770) ist seinem Hauptteile nach den partiellen Differentialgleichungen gewidmet, und zwar solchen, in welchen zuerst von Funktionen zweier, dann von Funktionen dreier unabhängiger Veränderlichen die Rede ist. In beiden Fällen sind Differentialgleichungen erster Ordnung von solchen höherer Ordnung unterschieden. Darauf folgt ein Anhang von der Variationsrechnung, endlich ein Supplement, das fast ausschließlich von der Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ (X und Y sind Polynome 4. Grades in x bzw. y) handelt, die schon im I. Bande integriert worden war. Der IV. Band (1794) setzt sich aus einzelnen teilweise schon vorher im Drucke erschienenen Abhandlungen zusammen, welche als Ergänzungen der drei ersten Bände dienen sollen. Von ihrem allgemeinen Inhalte seien bestimmte Integrale genannt, deren Differentiation unter dem Integralzeichen, elliptische Transzendenten und einzelne Differentialgleichungen sowohl zweiter als erster Ordnung. Unter den letztgenannten tritt wieder die Gleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ hervor. Den Schluß des Bandes bildet eine Ergänzung zu Eulers Arbeiten über die Variationsrechnung.

Wir würden dem ganzen Werke nicht gerecht werden, wenn wir nicht an zwei Tatsachen erinnerten, welche den Lesern dieses Bandes zwar genugsam bekannt sind, aber doch ins Gedächtnis zurückgerufen werden sollen: Euler, der 1735 sein eines Auge eingebüßt hatte, ist seit 1766 auf beiden Augen blind gewesen, er ist 1783 gestorben. Die drei ersten Bände sind also entstanden, ohne daß Euler eine Zeile derselben im Manuskript oder im Drucke selbst lesen konnte, an dem vierten Bande war überhaupt seine irgendwie geartete Mitwirkung ausgeschlossen. Damit erklärt es sich, wenn im II. Bande §§ 1163 und 1179 Euler Selbstentschuldigungen gemachter Fehler ausspricht, wenn er im III. Bande Differentialgleichungen für nicht integrierbar hält, welche er selbst schon im Jahre 1730 integriert hat (S. 1033--1034).

Wie Eulers Integralrechnung, sind auch mit dem Namen Lagrange als Verfasser Arbeiten vorgekommen, welche einzeln einen

ganzen Band erfüllten, und über welche man an den Stellen nachlesen mag, wo jene Schriften besprochen wurden. Freilich ist dieses bezüglich der Mécanique analytique von 1788 untunlich, da, dem Plane unseres Geschichtswerkes entsprechend, von der Mechanik als solcher abgesehen wurde und Lagranges Meisterwerk nur nebenbei erwähnt wurde, weil Lagrange in ihm, wie bereits in der Abhandlung von 1770 über Variationsrechnung, von dem in neuerer Zeit nach Lagrange benannten Multiplikator zur Ermittelung von Extremwerten impliziter Funktionen Gebrauch macht.

Es hält schwer die beiden hier in den Vordergrund gestellten Persönlichkeiten einem bestimmten Lande zuzuweisen, dem ihre Entdeckungen zur Ehre gereichen. Der in der Schweiz geborene Euler hat seine Werke abwechselnd in Petersburg, in Berlin, dann wieder seit 1766 in Petersburg verfaßt. Der in Italien geborene Lagrange wirkte vorzugsweise in Berlin (1766—1787) und in Paris (seit 1787), und was beide, was Euler und Lagrange, geschrieben haben, das ward alsbald schulebildend für ganz Europa. Man könnte, man sollte vielleicht die beiden großen, soeben vereint genannten Gelehrten jeder besonderen Nationalität entkleiden und sie als europäische Mathematiker bezeichnen.

Nach ihrem Ausschlusse bleiben unter den häufiger genannten Mathematikern folgende, deren Namen wir die Ziffern beifügten, welche zählen, wie oft der Name in unserem Überblicke vorkommt: Laplace (12), Lambert (10), Legendre (9), Monge (8), Waring (7), Deutsche Kombinatoriker seit 1778 (6) Unzweifelhaft liegt hier ein erhebliches Übergewicht auf französischer Seite und verlangt die unumwundene Anerkennung, daß innerhalb der in unserem Bande behandelten vier Jahrzehnte Frankreich die erste Stelle unter Europas Völkern einnimmt, soweit mathematische Leistungen in Frage kommen.

Neben den von uns hervorgehobenen Zahlen, welche immerhin einem wenn auch eigentümlichen Zufalle ihre Entstehung verdanken könnten, reden gewisse, wir könnten sagen offizielle, Tatsachen die gleiche Sprache.

Im Jahre 1775 faßte die Pariser Akademie den Beschluß, künftighin keine Einsendung mehr anzunehmen, welche eine elementare Quadratur des Kreises oder eine ebensolche Dreiteilung eines beliebigen Winkels oder die Herstellung eines Perpetuum mobile zusagte. Mag man auch auf den schon 1767 durch Lambert versuchten Beweis der Irrationalität von π abheben, so ist mindestens fraglich, ob die in Berlin gedruckte Abhandlung den Mitgliedern der Pariser Akademie bekannt war, da eine Einwirkung derselben auf irgendwelche Zeitgenossen nicht nachweisbar erscheint, und jedenfalls war es doch die Pariser und nicht die Berliner Akademie, welche den erwähnten Be-

schluß faßte und die Ablehnung von als fruchtlos erkannten Versuchen über die Kreisquadratur hinaus auf zwei andere Aufgaben ausdehnte, welche zu oft die Geduld der ihre vermeintlichen Auflösungen Prüfenden auf harte Proben gestellt hatten.

In Frankreich war in den Jahren 1751—1781 nach englischem Muster, aber dieses weit hinter sich lassend, die große *Encyclopédie* entstanden (Bd. III², S. 510). In Frankreich empfand man aber auch die Unhandlichkeit des nur zu umfangreich angelegten Werkes und ließ ihm 1789 die *Encyclopédie méthodique* folgen, die dazu bestimmt war, die Bestandteile des großen Sammelwerkes nach Wissenschaften zu ordnen, und deren drei mathematische Bände bald auch außerhalb Frankreichs in den Bibliotheken der Fachgelehrten zu finden waren.

In Frankreich wurde 1791 durch Gesetz das metrische System eingeführt. Der Gedanke, ein allgemein verwertbares, der Natur entstammendes und eben dadurch natürliches Maßsystem zu ermitteln, war ja keineswegs neu. Huygens hat daran gedacht, in England sind Versuche in dieser Richtung aufgetaucht, ein Italiener Buratini hat 1675 den Sekundenpendel als allgemeine Einheit empfohlen, aber über den Gedanken ist man nirgend hinausgekommen. Es bedurfte einer kühn veranlagten gesetzgebenden Behörde, eines von dieser Behörde gefaßten Beschlusses, um jene Gedanken in eine Tat umzusetzen, und dazu schwang sich das revolutionäre Frankreich 1791 auf, ein Jahr bevor das Todesurteil über den unglücklichen König Ludwig XVI. gefällt wurde.

Der Verurteilung des königlichen Paares folgten seit 1792 die Revolutionskriege. Französische Heere zogen über die Grenzen Frankreichs hinaus und wußten das Mutterland jahrelang vor den unmittelbaren Verwüstungen des Krieges zu schützen. In dieser Zeit entwickelten sich neue mathematische Lehren, entstanden Anstalten, an welchen sie vorgetragen werden konnten. Das Jahr 1795 ist das Geburtsjahr der École Normale wie der École Polytechnique in Paris. An ihnen lehrten Lagrange, Laplace, Monge.

Das sind die Tatsachen, an welche wir dachten, als wir das Übergewicht Frankreichs in den letzten vier Jahrzehnten des 18. Jahrhunderts, soweit es um Mathematik sich handelt, als feststehend erklärten. Wir können diese Erklärung jetzt um so zuversichtlicher aussprechen, allerdings mit der gleichen Einschränkung, welche wir am Anfang dieser Erörterung vorausschickten, und welche sich auf Euler und Lagrange bezog: Die in diesem Bande erzählte Geschichte der Mathematik ist in erster Linie die Geschichte der Entdeckungen von Euler und Lagrange. An zweiter Stelle treten französische Mathematiker auf, in die dritte Stelle erst teilen sich Mathematiker aus den sonstigen Ländern Europas. Da finden wir in unserer Übersicht unter

Einhaltung der alphabetischen Reihenfolge der Länder sowohl als der Schriftsteller den Dänen Wessel, die Deutschen Kästner, Lambert, die Engländer Landen, Maskelyne, Waring, den Finländer Lexell, die Italiener G. F. Fagnano, Malfatti, Mascheroni, Ruffini, den Schweden Bring, die Schweizer Daniel Bernoulli, Bertrand, Lhuilier, von welchen Bernoulli lange in Rußland lebte.

Stellen wir nach der Frage nach den Persönlichkeiten und den Ländern, welchen sie angehören, die sachlich wichtigere Frage nach den bearbeiteten Gebieten, so können wir uns die Antwort bequem machen, indem wir sagen: alle damals vorhandenen Gebiete der Mathematik wurden bearbeitet von den niedersten bis zu den höchsten; dessen sind sämtliche Abschnitte dieses Bandes ebensoviele Zeugnisse. Sehen wir jeden einzelnen Abschnitt uns besonders an, so wird uns in denselben das Wachstum der einzelnen Teilgebiete erzählt, und werfen wir einen Blick in die von uns angefertigte Zusammenstellung, so erkennen wir einen Wechsel zwischen den behandelten Gegenständen, der nicht bunter sein könnte. Es war damals so wie es früher war, wie es bis heute geblieben ist. Ganz besonders veranlagte Schriftsteller wußten neue überraschende Gedanken zu äußern, die sich sofort als fruchtbar erwiesen und dadurch das Interesse und die Mitarbeit der ähnlich begabten Zeitgenossen auf sich zogen. Andere nicht minder fruchtbare Gedanken mußten warten, bis vielleicht erst nach Jahrzehnten ein anderer sie wieder aufnahm oder in unabhängiger Weise abermals dachte.

Wenn Euler immer und immer wieder auf die Benutzung eines integrierenden Faktors, den er Multiplikator zu nennen pflegte, zurückkam, so fällt es schwer nicht die Meinung zu hegen, Lagrange möge davon beeinflußt gewesen sein, als er 1770, mithin zwei Jahre nach dem Erscheinen des I. Bandes der Eulerschen Integralrechnung, abermals einen Multiplikator unter Benutzung des gleichen Kunstausdruckes in der Lehre von den Extremwerten anwandte. Wahrscheinlicher ist allerdings noch, daß Lagrange diese Methode dem VI. Kapitel der Eulerschen *Methodus inveniendi* von 1774 entnahm, in welcher sie, wie H. Stäckel bemerkt hat, schon angewandt ist.

Wenn Euler 1768 die Differentialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ mittels algebraischer Funktionen integrierte, so war dieser Anstoß für Lagrange genügend, ihn zu Untersuchungen über die gleiche Differentialgleichung anzuspornen, und Lagranges Arbeit von 1769 reizte wiederum Euler zur erneuten Behandlung der merkwürdigen Gleichung.

Wenn Euler in dem I. Bande der Integralrechnung Beispiele von singulären Lösungen vorführte und Lagrange 1774 Sinn und

Entstehung solcher Lösungen zu erklären wußte, so liegt der Zusammenhang auf der Hand.

Wenn, um nicht immer wieder nur die beiden Männer anzuführen, welchen ohnehin der Löwenanteil an dem Inhalte dieses Bandes gehört, Hutton 1787 zum ersten Male dem mathematischen Drucke die Anordnung geben ließ, daß Gleichungen stets auf neue Zeilen gesetzt wurden, so verbreitete sich diese Sitte überall hin, vielleicht ohne daß die meisten wußten, wem sie nachfolgten.

Wenn Kästner 1790 die geometrische Wahrheit $AB + BA = 0$ zuerst aussprach, wenn Busse 1798 sicherlich nicht ohne Kenntnis von Kästners Geometrischen Abhandlungen, welche damals, gleich allen Kästnerschen Schriften, von jedem deutschen Mathematiker gelesen wurden, die Vorzeichen der Strecken berücksichtigte, und 1801 in seinem Buche: Neue Erörterung über das Plus und Minus, I. Abteilung (Köthen 1801) darauf zurückkam, so ist hier ganz gewiß eine Abhängigkeit vorhanden, während es — wenn man uns gestattet über die Zeitgrenze dieses Bandes noch weiter hinauszugehen — schon zweifelhafter ist, ob Moebius in seinem Barycentrischen Calcul von 1827 nicht eine selbständige Nacherfindung machte, was man ganz gewiß dem noch erheblich späteren mit der deutschen Sprache vollständig unbekannten Chasles wird zugestehen müssen.

Der Einfluß, welchen Monges darstellende Geometrie, die sich soweit über alle ihr vorausgegangenen annähernd ähnlichen Schriften erhob, daß man von einer Neuerfindung zu reden berechtigt ist, sofort bei ihrem Erscheinen ausübte, ist unverkennbar.

Nicht minder plötzlich und zugleich nachhaltig wirkten Monges Arbeiten auf dem Gebiete der Flächentheorie und der partiellen Differentialgleichungen.

Daniel Bernoullis kühne Neuerung von 1768, Infinitesimalbetrachtungen in die Wahrscheinlichkeitsrechnung einzuführen, wurde dagegen erst ganz allmählich Gemeingut. Und ganz zum Schlusse dürfen wir nicht unterlassen auf Gedanken hinzuweisen, deren volle Bedeutung über das Verständnis der Zeit, in welcher sie entstanden, vielfach über das Verständnis derjenigen, welche sie äußerten, hinausging Die Funktionentheorie des XIX. Jahrhunderts hat ihre Keime in dem vorhergehenden Jahrhunderte. Man vergleiche doch, was in unserer Übersicht 1758 von Kaestner, 1759 von Daviet de Foncenex, 1767 von Euler, 1777 von Euler und von Lagrange, 1785 von Charles, 1787 von Monge, 1791 von Arbogast, 1793 von Euler, 1797 von Wessel berichtet ist, und man wird begreifen, wie wir diesen Ausspruch meinen.

Ihn ausführlicher zu erörtern sind diejenigen berufen, welche vielleicht weitere Bände dieses Werkes zu schreiben unternehmen.

Verbesserungen und Zusätze zu den Abschnitten XXI und XXVI von F. Müller.

S. 202 Z. 2 v. o. „1741“ statt „1739“.
Z. 14 v. u. „Berlin, 5 Bde., 1782—1784“.
S. 204 Z. 15 v. o. „vierzehn“ statt „dreizehn“.
Z. 1 v. u. „1787“ statt „1887“
S. 205 Z. 2 v. u. „Lips.“ statt „Gotting.“.
S. 415 Z. 16 v. o. „combinatoriis“ statt combinatoribus“.
Z. 2 v. u. „maxime“ statt „maxima“.
„reversionem“ statt „recursionem“.
S. 218 Z. 11 v. u. „J. Fr.“ statt „W.“.
S. 219 Z. 9 v. u. „Bezout“ statt „Bésout“.
S. 220 Z. 9 v. u. „57“ statt “ 37“.
Z. 1 v. u. „Hist. Mém.“ statt „Mém.“.
S. 228 Z. 4 v. u. hinter „math.“ fehlt „prés.“.
S. 229 Z. 1 v. u. hinter „Mémoires“ fehlt „prés.“.
S. 230 Z. 1 v. u. hinter „1770“ fehlt „P. I“
S. 231 Z. 15 v. o. hinter „1769“ fehlt „P. I“
Z. 6 v. u. hinter „1782“ fehlt „[1785]“.
S. 234 Z. 12 v. o. „Commentat.“ statt „Comm.“.
Z. 13 v. o. hinter „1796“ fehlt „P. II“.
S. 235 Z. 3 v. o. hinter „Mém.“ fehlt „prés.“.
„[1774]“ statt „1774“.
Z. 14 v. o. „231“ statt „271“.
S. 236 Z. 3 v. u. „[1774]“ statt „1775“.
S. 240 Z. 2 v. u. hinzuzufügen „Vgl. auch Fußnote zu S. 229“.
S. 243 Z. 4 v. o. „Commentat.“ statt „Comm.“.
hinter „1799“ zuzufügen „P. II“.
S. 248 Z. 21 v. o. hinter „1777“ zuzufügen „P I“
S. 252 Z. 18 v. u. vor „April“ zuzufügen „März oder“.
S. 255 Z. 6 v. u. „657“ statt „617“.
S. 259 Z. 12 v. o. „auf anderen Wegen bewiesen hatte: 1. in den Comm. Acad. Petrop. 7, 1734/5. p. 123—134 [1740]; 2. in einem Briefe an Joh. Bernoulli v. 27. August 1737, dann 3. in der ‚Introductio‘, — daß“.
S. 262 Z. 2 v. u. hinter „1769“ fehlt „P. I“.
S. 265 Z. 2 v. u. „230“ statt „220“.
S. 272 Z. 14 v. u. lies „In einer späteren“ statt „In der zweiten“.
Z. 2 v. u. vor „Mém.“ zuzufügen „Nouv.“.
lies: „[2]) Act. Acad. Petrop. 3; 1779, P. II, 29—51 [1783]“.
S. 275 Z. 1 v. u. lies „1778, 1784, 1785“
S. 276 Z. 1 v. u. lies „V“ statt „IV“.
Z. 11 v. u. lies „analyticae“ statt „algebraicae“.
S. 277 Z. 2 v. u lies „V“ statt „IV“.
S. 278 Z. 12 v. u. lies „300“ statt „200“
S. 284 Z. 10 v. o. lies „Bandes, p. 48“.
S. 285 Z. 1 v. u. lies „36“ statt „33“.
S. 288 Z. 2 v. u. lies „123“ statt „133“.
S. 289 Z. 3 v. u. lies „386“ statt „336“.
S. 645 Z. 19 v. u. lies „Name“ statt „Namen“.
S. 655 Z. 1 v. u. Rogg, Handb. d. math. Lit., Tüb. 1830. S. 569 hat ebenfalls „Milano 1770“.
Zu S. 667 (Anm. 2):

James Glenie, The general mathematical laws which regulate and extend proportion universally; or a method of comparing magnitudes of any kind together, in all the possible degrees of increase and decrease. Phil. Trans. Lond. 1777, p. 450.

James Glenie, The doctrine of universal comparison or general proportion. London 1789. 4°.

James Glenie, The antecedental Calculus: or a geometrical methodus of reasoning, without any consideration of motion or velocity, applicable to every purpose to which fluxions have been or can be applied, with the geometrical principles of increments. London 1793. 18 p. 4°.

S. 667 Z. 15 v. u. Pasquich, Erste Gründe einer neuen Exponentialrechnung. Neuere Abh. Böhm. Ges. 3, Phys., S. 46.

S. 671 Z. 18 v. u und Z. 8 v. u. „Die Bücher von Mako von Kerek und von Rohde befinden sich in der Stadtbibliothek zu Hamburg, Speersort.

S. 672 Z. 3 v. u. „1788“ statt „1786“. ‚Analysis und höhere Geometrie‘ ist II, 2 des ‚Lehrbegriff der gesammten Mathematik‘, 8 Teile, Rost. u. Greifsw. 1767—1777; 2. Aufl. 1786—1795.
Karsten schrieb auch: ‚Beiträge zur Aufnahme der theoretischen Mathematik‘, 4 Stücke 8°, Lpz. u. Rostock. St. I, p. 1: ein Versuch, worin man die Grundsätze der Diff.- u. Int.-R. so vortragen könne, daß auch in diesem Theile der theoretischen Mathematik die alte geometrische Evidenz herrsche. St. II, p. 91: Fortsetzung der Abhandlung von den Grundsätzen der Diff.- u. Int.-R.

S. 675 Z. 1 v. u. lies „Bezout“ statt „Bézout“.

S. 679 Z. 15 v. o. hinter „denen“: „in der 2. Aufl. von 1792—1794“.

S. 680 Z. 13 v. u. „1770“ statt „1769“. Der Titel heißt. „Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen“. Im Jahre 1769 erschienen: „Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen“.

S. 684 Z. 6 v. u. „Bd. I. Arithmetik und Algebra, erschien 1782. Bd. II. Geom., Trig., Kegelschnitte, Diff.- u. Int.-R. erschien 1784“.

S. 684 Z. 8 v. o. Die späteren Auflagen enthalten 4 Bände: III. Die Mechanik der festen Körper. IV. Hydrodynamik.

S. 700 Z. 8 v. u. streiche „Nova“.

S 708 Z. 2 v. u. lies „IV (1784)“ statt „III“.

S. 712 Anm. 1. „Siehe P. Stäckel, Integration durch imag. Gebiet. Bibl. math. (3) 1, 1900, p. 109—128“.

S. 716 Z. 11 v. u. hinter „1780, p. 3—31“ fehlt „[1783]“.

S. 723 Z. 2 v. u. lies „Hist. Mém.“ statt „Mém.“.

S. 725 Z. 8 v. u. lies „XII, a. 1756 [1758]“.

S. 738 Z. 3 v. u. vor „p. 72—103“ fehlt „P. I“.

S. 740 Z. 1 v. u. lies „a. 1773, p. 122—148 [1775]“.

S. 749 Z. 3 v. u. hinter „p. 3—28“ fehlt „[1780]“.

S. 766 Z. 1 v. u. lies „Hist. Mém.“.

S. 767 Z. 5 v. o. Die erste Tafel der Integralwerte $\int\limits_0^\infty e^{t^2}dt$ gab Ch. Kramp, Analyse des réfractions astron. et terr. Straßb. u. Lpz. 1797. Von ihm rührt auch das Wort ‚Fakultät‘ her.

Zu S. 772. Als fernere Lit. über Max. u. Min.:
J. Ch. de Borda, Sur la méthode de trouver les courbes, qui jouissent de quelque propriété du maximum et minimum. Hist. Mém. Ac. Paris a. 1767, H. 90, M. 551 [1770].
A. Fontaine, Addition à la méthode pour la solution des problèmes de maximis et minimis, ib. H. 90, M. 588.
G. A. Lejonmark, Et sätt at söka maximum och minimum. Nya Handl. Svensk. Vet. Ak a. 1794, p. 134.

S. 775 Z. 4 v. u. lies „a. 1773, p. 150—176 [1775]“.

S. 790 Z. 5 v. u. Fontana, Memoria..., erschien Pavia, 1793. (S. Rogg, Hdb. d. m. Lit., S. 499).

S. 799 Z. 1 v. u. „cartesische“ statt „kartesische“.

S. 804 Z. 4 v. u. lies „Hist. Mém.“.

S. 815 Z. 1 v. u. hinter „p. 20—57“ fehlt „[1780]“.

S. 818 Z. 1 v. u. lies „1827“ statt „1802“ (Der Band erschien besonderer Umstände wegen sehr spät.)

S. 866 Z. 11 v. u. lies „XXV, a. 1769 [1771]“.

S. 869 Z. 4 v. u. lies „1827“ statt „1802“.

Register.

A.

B.

F.

I.

J.

M.

Q.

R.

S.